JOURNAL OF COMBINATORIAL THEORY 11, 1–16 (1971)

Über das schwache Kartesische Produkt von Graphen

WILFRIED IMRICH

3. Institut für Mathematik, Technische Hochschule, A-1040 Vienna, Austria

Communicated by W. T. Tutte

Received April 18, 1969

It is shown that every connected graph has a unique prime factor decomposition with respect to the weak Cartesian product. The resulting close relationship between the automorphism group of a connected graph and the automorphism groups of its prime factors is used to derive theorems about the transitivity, regularity, and primitivity of these groups. With minor modifications all results also hold for set systems.

1. EINLEITUNG

Wie in [2] gezeigt wurde ist die Primfaktorzerlegung eines zusammenhängenden Graphen X bezüglich des kartesischen Produkts bis auf Reihenfolge und Isomorphie eindeutig bestimmt, falls X eine Primfaktorzerlegung zuläßt. Dieses Resultat hängt eng mit einem Ergebnis von Sabidussi [7] zusammen, der zeigen konnte, daß eine große Klasse von zusammenhängenden Graphen eine eindeutige Primfaktorzerlegung hat. Für zusammenhängende endliche Graphen wurde dies unabhängig davon auch von V. Vizing [8] gezeigt. Diese Ergebnisse sind insofern nicht ganz zufriedenstellend, als es Graphen gibt, die bezüglich des kartesischen Produkts nicht prim sind, aber trotzdem keine Primfaktorzerlegung zulassen. Dazu gehören unter anderem alle idempotenten Graphen. Der Grund dieses Sachverhalts ist, daß ein zusammenhängender Graph zwar unendlich viele Primfaktoren haben kann, aber das kartesische Produkt von unendlich vielen nichttrivialen Graphen unzusammenhängend ist. Durch Betrachtung einer passenden Komponente des Produkts von unendlich vielen Graphen, einem sogenannten schwachen kartesischen Produkt, kann man diese Schwierigkeit umgehen. In dieser Arbeit wird bewiesen, daß jeder zusammenhängende Graph bezüglich des schwachen kartesischen Produkts eine eindeutige Primfaktorzerlegung hat. Sodann werden Beziehungen zwischen den Automorphismengruppen der Primfaktoren eines Graphen X und der Automorphismengruppe von X her-

582b/11/1-1

geleitet, insbesondere Aussagen über die Transitivität und Primitivität der betreffenden Gruppen (Wie nach der Annahme der vorliegenden Arbeit zur Veröffentlichung bekannt wurde, konnte D. J. Miller unabhängig davon und mit anderen Methoden die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung von zusammenhängenden Graphen bezüglich des schwachen kartesischen Produkts beweisen [5] und die Automoprhismengruppe des schwachen kartesischen Produkts von zusammenhängenden primen Graphen durch die Automorphismengruppen der Faktoren darstellen [6]).

Im letzten Teil der Arbeit betrachten wir Mengensysteme, das sind Verallgemeinerungen von Graphen. Alle hier für Graphen bewiesenen Sätze lassen sich, von kleinen Modifikationen abgesehen, auf Mengensysteme übertragen.

2. Definitionen

Unter einem *Graphen* X verstehen wir eine Menge $V(X)$ zusammen mit einer Menge $E(X)$ von ungeordneten Paaren $[p, q]$ verschiedener Elemente $p, q \in V(X)$. Die Elemente von $V(X)$ nennen wir *Knoten* und die Elemente von $E(X)$ *Kanten* von X. Ist M eine Menge, so bezeichne $|M|$ die Kardinalzahl von M. Für Graphen X schreiben wir auch $|X|$ statt $|V(X)|$, und sagen X sei der *triviale Graph E*, falls $|X| = 1$ ist. Weiters bezeichne $\square$ den *leeren Graphen*, definiert durch $V(\square) = E(\square) = \varnothing$.

Ein Graph X ist ein *Teilgraph* eines Graphen Y, falls $V(X)$ in $V(Y)$, und $E(X)$ in $E(Y)$ enthalten ist. Von einem *gesättigten Teilgraphen* spricht man, wenn außerdem gilt

$$E(X) = \{[x, y] \mid x, y \in V(X), [x, y] \in E(Y)\}.$$

Unter dem *Durchschnitt* zweier Graphen X and Y versteht man den Graphen $X \cap Y$ definiert durch

$$V(X \cap Y) = V(X) \cap V(Y) \qquad \text{und} \qquad E(X \cap Y) = E(X) \cap E(Y).$$

Analog erklärt man die *Vereinigung* $X \cup Y$ zweier Graphen, und unter der *Differenz* $X - Y$ verstehen wir den von $V(X) - V(Y)$ aufgespannten gesättigten Teilgraphen von X.

Sind in einem Graphen X mit $|X| = n$ je zwei Knoten durch eine Kante verbunden, so sagt man X sei *der vollständige Graph* C_n. Gibt es in einem Graphen zu je zwei Knoten a und b, $a \neq b$, eine sie verbindende endliche Kantenfolge $[a, a_1], [a_1, a_2], \ldots, [a_{n-1}, a_n], [a_n, b]$, so nennt man X *zusammenhängend*. Andernfalls spricht man von einem unzusammenhängenden Graphen, und seine zusammenhängenden Bestandteile nennt man *Komponenten*.

Unter einem *Homomorphismus* eines Graphen X in einen Graphen Y verstehen wir eine Abbildung φ von $V(X)$ in $V(Y)$, wobei $[\varphi x, \varphi y] \in E(Y)$ ist für $[x, y] \in E(X)$ und $\varphi x \neq \varphi y$. Ist φ eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $V(X)$ auf $V(Y)$ und auch φ^{-1} ein Homomorphismus so spricht man von einem Isomorphismus. Automorphismen sind Isomorphismen von X auf X. Sie bilden eine Gruppe, die wir mit $G(X)$ bezeichnen.

Ist $\{X_\iota \mid \iota \in I\}$ eine Menge von Graphen, so bezeichne $\prod_{\iota\in I} V(X_\iota)$ das kartesische Produkt der Mengen $V(X_\iota)$. Unter der Projektion p_κ von $\prod_{\iota\in I} V(X_\iota)$ auf $V(X_\kappa)$, $\kappa \in I$, verstehen wir die übliche Projektion des Produkts auf die κ-Komponente. Die κ-Koordinate $p_\kappa x$ eines Knotens x des Produkts werden wir oft auch nur mit x_κ bezeichnen.

Definition 1. Ist $\{X_\iota \mid \iota \in I\}$ eine Menge von Graphen, so verstehen wir unter dem kartesischen Produkt $\prod_{\iota\in I} X_\iota$ der Graphen X_ι einen Graphen X mit der Knotenmenge $V(X) = \prod_{\iota\in I} V(X_\iota)$, und der Kantenmenge $E(X)$, bestehend aus allen ungeordneten Paaren $[x, y]$, $x, y \in V(X)$, für die es einen Index $\kappa \in I$ gibt mit $[x_\kappa, y_\kappa] \in E(X_\kappa)$ und $x_\iota = y_\iota$ für alle $\iota \neq \kappa$, $\iota \in I$.

Identifiziert man isomorphe Graphen, so ist das kartesische Produkt kommutativ und assoziativ, und der triviale Graph E bildet eine Einheit.

Es ist leicht zu sehen, daß das kartesische Produkt von endlich vielen zusammenhängenden Graphen zusammenhängend ist. Im Gegensatz dazu ist das kartesische Produkt von unendlich vielen nichttrivialen Graphen auf jeden Fall unzusammenhängend, denn in einem solchen Produkt gibt es Knoten, die sich in unendlich vielen Koordinaten unterscheiden, aber jede Kante verbindet nur Knoten, die sich in genau einer Koordinate unterscheiden. Ist X das kartesische Produkt der zusammenhängenden Graphen X_ι, $\iota \in I$, und $a \in V(X)$, so wird die Komponente von X, in der a liegt, offensichtlich von den Knoten von X aufgespannt, die sich in höchstens endlich vielen Koordinaten von a unterscheiden. Dies gibt Anlaß zur Definition des schwachen kartesischen Produkts, das wir wie in [7] definieren.

Definition 2. Es sei $\{vX_\iota \mid \iota \in I\}$ eine Menge von Graphen, und in jedem X_ι sei ein Knoten a_ι ausgezeichnet. Unter dem schwachen kartesischen Produkt $\prod_{\iota\in I} (X_\iota, a_\iota)$ der Wurzelgraphen (X_ι, a_ι) verstehen wir einen Graphen X definiert durch:

$$V(X) = \Big\{x \in \prod_{\iota\in I} V(X_\iota) \mid x_\iota \neq a_\iota \text{ für höchstens endlich viele } \iota \in I\Big\},$$

$$\begin{aligned} E(X) = \{[x, y],\ x, y \in V(X) \mid [x_\kappa, y_\kappa] \in E(X_\kappa) \text{ für ein } \kappa \in I, \text{ und} \\ x_\iota = y_\iota \text{ für } \iota \neq \kappa,\ \iota \in I\}. \end{aligned}$$

Aus der Definition folgt unmittelbar, daß das schwache kartesische Produkt von den a_ι unabhängig ist und mit dem kartesischen Produkt übereinstimmt, falls nur endlich viele Faktoren auftreten. Weiters ist jedes schwache kartesische Produkt von zusammenhängenden Graphen zusammenhängend, und jeder Faktor eines zusammenhängenden Graphen ist zusammenhängend.

Für jede nichtleere Teilmenge N von I ist außerdem leicht zu zeigen, daß $\prod_{\iota \in I} (X_\iota, a_\iota)$ das kartesische Produkt der Graphen $\prod_{\iota \in N} (X_\iota, a_\iota)$ und $\prod_{\iota \in I-N} (X_\iota, a_\iota)$ ist. Jeder Graph, der das schwache kartesische Produkt von nichttrivialen Graphen ist, ist also auch als kartesisches Produkt von nichttrivialen Faktoren darstellbar. Einen Graphen, der nicht als Produkt zweier nichttrivialer Graphen dargestellt werden kann, nennen wir prim.

Ist a ein Knoten des Produkts $X = \prod X_\iota$, so verstehen wir unter der durch a hindurchgehenden X_κ-Schicht von X den gesättigten Teilgraphen X_κ^a von X, der von den Knoten $x \in V(X)$ mit $x_\iota = a_\iota$ für $\iota \neq \kappa$ aufgespannt wird. Die Projektion p_κ liefert einen Isomorphismus von X_κ^a auf X_κ, den sogenannten kanonischen Isomorphismus von X_κ^a auf X_κ. Damit ist auch klar, was man unter dem kanonischen Isomorphismus zweier Schichten X_κ^a und X_κ^b aufeinander zu verstehen hat.

Gibt es zu einem Teilgraphen U von X eine Darstellung von X in der Form $X \cong X_1 \times X_2$, und existiert ein $a \in V(X_1 \times X_2)$ mit $U \cong X_1^a$ bei der obigen Isomorphie $X \cong X_1 \times X_2$, so sagt man U sei ein Faktor von X. Ein Faktor von X tritt also als Schicht eines Teilers von X auf.

LEMMA 1. *Es sei X_κ^a eine Schicht des Produkts $X = \prod_{\iota \in I} X_\iota$, und der Knoten $d \in V(X)$ sei mit zwei verschiedenen Knoten von X_κ^a durch je eine Kante verbunden. Dann ist $d \in V(X_\kappa^a)$.*

Beweis. Es sei $[d, b]$, $[d, c] \in E(X)$ und $b, c \in V(X_\kappa^a)$. Per definitionem gibt es Indizes $\mu, \nu \in I$ mit $[d_\mu, b_\mu] \in E(X_\mu)$, $[d_\nu, c_\nu] \in E(X_\nu)$, sowie $d_\iota = b_\iota$ für $\iota \neq \mu$ und $d_\iota = c_\iota$ für $\iota \neq \nu$. Wegen $d_\mu \neq b_\mu$ und $d_\nu \neq c_\nu$ folgt daraus $b_\mu \neq c_\mu$ sowie $b_\nu \neq c_\nu$ fur $\nu \neq \mu$. Da b und c in X_κ^a liegen, unterscheiden sie sich aber nur in der κ-Komponente. Es ist also $\kappa = \mu = \nu$. Damit ist das Lemma bewiesen.

3. FAKTORZERLEGUNGEN

SATZ 1. *Es sei X ein zusammenhängender Graph und $\{Y_\alpha \mid \alpha \in A\}$ eine Menge von Teilgraphen von X. Die Y_α bilden genau dann die Schichten eines Faktors von X, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(i) *Die* Y_α *sind nichtleere disjunkte gesättigte Teilgraphen von* X *mit* $V(X) = \bigcup_{\alpha \in A} V(Y_\alpha)$.

(ii) *Gibt es in* X *Kanten, die Knoten von* Y_α *mit Knoten von* Y_β *verbinden, so existiert ein Isomorphismus* φ *von* Y_α *auf* Y_β, *sodaß zwei Knoten* $a \in V(Y_\alpha)$ *und* $b \in V(Y_\beta)$ *genau dann durch eine Kante* $[a, b]$ *in* X *verbunden sind, falls* $\varphi a = b$ *ist.*

(iii) *Ist* $\{Z_\kappa \mid \kappa \in K\}$ *die Menge der Komponenten des Graphen* X' *mit* $V(X') = V(X)$ *und* $E(X') = E(X) - \bigcup_{\alpha \in A} E(Y_\alpha)$, *so ist* $|Z_\kappa \cap Y_\alpha| = 1$ *für alle* $\alpha \in A$, $\kappa \in K$.

Beweis. Ist $X \cong Y \times Z$, so genügen die Y-Schichten und die Z-Schichten von X offensichtlich den Bedingungen (i)–(iii). Sind umgekehrt diese Bedingungen erfüllt, so gibt es nach (i) und (iii) eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen $(\kappa, \alpha) \in K \times A$ und den Knoten von X, wir können $K \times A$ und $V(X)$ identifizieren. Nach (ii) folgt aus $[(\kappa, \alpha), (\kappa, \beta)] \in E(X)$, daß für beliebiges $\lambda \in K$ auch $[(\lambda, \alpha), (\lambda, \beta)]$ in $E(X)$ liegt. Ist anderseits $[(\kappa, \alpha), (\lambda, \alpha)] \in E(X)$ und sind die Schichten Y_α und Y_β benachbart, so ist ebenfalls nach (ii) auch $[(\kappa, \beta), (\lambda, \beta)] \in E(X)$. Da X zusammenhängend ist, gilt dies auch für beliebiges $\beta \in A$. Weiters ist für $\kappa \neq \lambda$ und $\alpha \neq \beta$ der Knoten (κ, α) in X nicht mit (λ, β) verbunden, da jede Kante von X in einem Y_α oder in einem Z_κ liegt. Konstruieren wir nun die Graphen Y auf K und Z auf A mit

$$E(Y) = \{[\kappa, \lambda] \mid \text{Es gibt ein } \alpha \in A \text{ mit } [(\kappa, \alpha), (\lambda, \alpha)] \in E(X)\}$$

und

$$E(Z) = \{[\alpha, \beta] \mid \text{Es gibt ein } \kappa \in K \text{ mit } [(\kappa, \alpha), (\kappa, \beta)] \in E(X)\},$$

so ist $Y \times Z \cong X$.

Bilden Teilgraphen Y_α, $\alpha \in A$ die Schichten eines Faktors des zusammenhängenden Graphen X, so ist per definitionem jedes Y_α ein Faktor von X. Wir zeigen, daß die Menge der Y_α durch jedes beliebige Y_β, $\beta \in A$ eindeutig bestimmt ist. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es zusammenhängende Graphen U, S und W, T sowie Isomorphismen φ, ψ mit

$$\varphi(U \times S) = X, \qquad \psi(W \times T) = X,$$

und Elemente $a, b \in V(U \times S)$, $a' \in V(W \times T)$ für die gilt

$$\varphi U^a = \psi W^{a'} = Y_\beta ,$$

aber $\varphi U^b \neq \psi W^x$ für alle $x \in V(W \times T)$. Wegen des Zusammenhangs von X können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß

U^a und U^b benachbart sind, das heißt daß es Kanten gibt, die Knoten von U^a mit Knoten von U^b verbinden. Wir können sogar $[a, b] \in E(X)$ voraussetzen. In Koordinatenschreibweise sind a und b also in der Form $a = (u, s)$ und $b = (u, s')$ mit $[s, s'] \in E(S)$ darstellbar. Setzen wir $b' = \psi^{-1}\varphi b$, so ist $\varphi U^b \cap \psi W^{b'} \neq \square$, aber $\varphi U^b \neq \psi W^{b'}$. Es gibt also ein $c' \in V(W \times T)$ mit $c' \in V(W^{b'})$, und $\psi c' \notin V(\varphi U^b)$. Der Graph W ist zusammenhängend, also können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $[b', c'] \in E(W \times T)$ ist. Da die Schichten $W^{a'}$ und $W^{b'}$ benachbart sind, ist c' mit einem Knoten aus $W^{a'}$ verbunden. Setzen wir $c = \varphi^{-1}\psi c'$, so ist c also mit einem Knoten aus $\varphi^{-1}\psi W^{a'} = U^a$ verbunden. Wegen $W^{a'} \cap W^{b'} = \square$ ist $U^a \cap \varphi^{-1}\psi W^{b'} = \square$, also $c \notin V(U^a)$, und aus $\psi c' \notin V(\varphi U^b)$ folgt $c \notin V(U^b)$. Es sei $c = (u'', s'')$. Da b' und c' durch eine Kante verbunden sind, gilt dies auch für b und c, und weil b und c in verschiedenen U-Schichten liegen, ist $u = u''$ und $[s', s''] \in E(S)$. Wegen $u = u''$ kann c nur mit dem Knoten $a = (u, s)$ in U^a verbunden sein. Der Knoten a' ist folglich mit den Knoten $b', c' \in V(W^{b'})$ verbunden, im Widerspruch zu Lemma 1.

SATZ 2. *Sind zwei Teilgraphen U und W eines zusammenhängenden Graphen X Faktoren von X, so ist $U \cap W$ ein Faktor von X, falls $U \cap W \neq \square$ ist, und die nichtleeren Durchschnitte von U-Schichten mit W-Schichten sind die $U \cap W$-Schichten von X.*

Beweis. Da W ein Faktor ist, gibt es ein Z mit $W \times Z \cong X$, und wir können $V(X)$ mit $V(W) \times V(Z)$ identifizieren. Wir zeigen zuerst, daß mit jedem Paar $(a, b), (a', b') \in V(U)$ auch die Knoten (a, b') und (a', b) in $V(U)$ liegen, und zwar durch Induktion nach der Länge n des kürzesten Weges, der (a, b) mit (a', b') in U verbindet. Für $n = 1$ ist die Aussage trivialerweise richtig. Es seien also $(a, b) = (a_0, b_0), (a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) = (a', b')$ die aufeinanderfolgenden Knoten eines kürzesten Weges, der (a, b) mit (a', b') verbindet, wobei $n > 1$ ist. Laut Induktionsvoraussetzung ist (a_1, b_n) und (a_0, b_{n-1}) in U. Ist also $a_1 = a_0$ oder $b_{n-1} = b_n$, so ist $(a, b') = (a_0, b_n) \in V(U)$. Es sei daher $a_1 \neq a_0$ und $b_{n-1} \neq b_n$. Dann ist $[a_0, a_1] \in E(W)$ und $[b_{n-1}, b_n] \in E(Z)$, also gilt:

$$[(a_0, b_n), (a_1, b_n)],\ [(a_0, b_n), (a_0, b_{n-1})] \in E(U).$$

Der Knoten (a_0, b_n) ist daher mit zwei verschiedenen Knoten aus U verbunden. Nach Lemma 1 liegt (a_0, b_n) ebenfalls in U. Betrachtet man den Weg von (a_n, b_n) nach (a_0, b_0), so sieht man, daß auch (a_n, b_0) in U liegt.

Daraus folgt $V(U) = V(p_w U) \times V(p_z U)$, denn ist $a \in V(p_w U)$ und $b' \in V(p_z U)$, so gibt es Elemente $b \in V(p_z U)$ und $a' \in V(p_w U)$, sodaß (a, b)

und (a', b') in U liegen, also liegt nach dem obigen Ergebnis auch (a, b') in $V(U)$. Zwei Knoten (a_1, a_2), (b_1, b_2) aus $V(U)$ sind weiters genau dann durch eine Kante verbunden, wenn entweder $a_1 = b_1$ ist und a_2, b_2 durch eine Kante verbunden sind, also in $E(p_z U)$ liegen, oder $a_2 = b_2$ ist und $[a_1, b_1] \in E(p_w U)$ ist. Daher ist

$$U = p_w U \times p_z U.$$

Aus der Assoziativität des kartesischen Produkts folgt, daß $p_w U$ auch ein Teiler von X ist. Wir zeigen nun, daß die $p_w U$-Schichten von X alle von der Gestalt $U^a \cap W^a$ sind. Wegen des Zusammenhangs von X genügt es zu zeigen, daß dies für U gilt, und für alle Schichten, die einer Schicht benachbart sind, die dieser Bedingung genügt. Ist $a = (a_1, a_2)$ ein Knoten aus U, so ist

$$V((p_w U)^a) = \{(t, a_2) \mid t \in V(p_w U)\} = V(U \cap W^a),$$

und damit ist die Aussage für U richtig. Es sei nun U^y einer Schicht U^x benachbart, die dieser Bedingung genügt. Der kanonische Isomorphismus φ von U^x auf U^y bildet jede $p_w U$-Schicht von U^x auf eine $p_w U$-Schicht von U^y ab, und wir können annehmen $\varphi x = y$. Es genügt nun zu zeigen, daß $\varphi(U^x \cap W^x) = U^y \cap W^y$ ist, und dazu braucht man nur $\varphi(U^x \cap W^x) \subseteq U^y \cap W^y$. Da jeder Teilgraph der Form $U^a \cap W^a$ als Faktor eines zusammenhängenden Graphen zusammenhängend ist, gäbe es im Fall $\varphi(U^x \cap W^x) \not\subseteq U^y \cap W^y$ zwei benachbarte Knoten x' und x'' in $U^x \cap W^x$ mit $\varphi x' \in V(U^y \cap W^y)$ und $\varphi x'' \notin V(U^y \cap W^y)$. Es liegen also x', x'' in W^x, $\varphi x'$ in W^y und $\varphi x''$ liege in W^z, wobei offensichtlich $W^z \neq W^y$ sein muß. Wäre $W^x = W^y$, so wäre $\varphi x''$ mit zwei Knoten aus W^x verbunden, nämlich mit x'' und $\varphi x'$, was unmöglich ist. Ebenso zeigt man, daß $W^x \neq W^z$ ist. Dann liegt aber der Weg $[x', \varphi x', \varphi x'', x'']$ ganz in einer Z-Schicht von X und kann daher mit W^x nur einen Knoten gemeinsam haben. Dies ist der gewünschte Widerspruch.

SATZ 3. *Sind die Teilgraphen U_α, $\alpha \in A$, eines zusammenhängenden Graphen X Faktoren von X, so ist auch $U = \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$ ein Faktor von X, falls $U \neq \square$ ist.*

Beweis. Es seien $U(\alpha, \iota)$, $\iota \in I_\alpha$ die U_α-Schichten von X, und K die Menge von Abbildungen κ, die jedem $\alpha \in A$ ein $\kappa_\alpha \in I_\alpha$ zuordnen, sodaß $\bigcap_{\alpha \in A} U(\alpha, \kappa_\alpha) \neq \square$ ist. Wir setzen $U_\kappa = \bigcap_{\alpha \in A} U(\alpha, \kappa_\alpha)$ und zeigen, daß die U_κ den Bedingungen (i)–(iii) von Satz 1 genügen.

(i) Die U_κ sind per definitionem nichleere gesättigte Teilgraphen von X. Sind weiters κ and μ zwei verschiedene Elemente aus K, so gibt es mindestens ein $\alpha \in A$, für das $\kappa_\alpha \neq \mu_\alpha$ ist. Dann ist aber $U(\alpha, \kappa_\alpha) \cap U(\alpha, \mu_\alpha) = \square$, und damit auch $U_\kappa \cap U_\mu = \square$. Da weiters jeder Knoten aus X für jedes α in genau einer Schicht $U(\alpha, \iota)$ liegt, ist klarerweise $\bigcup_{\kappa \in K} V(U_\kappa) = V(X)$.

(ii) Es sei nun $U_\kappa \neq U_\mu$ und es gebe eine Kante $[a, b] \in E(X)$, die zwei Knoten $a \in V(U_\kappa)$ und $b \in V(U_\mu)$ verbindet. Da $\kappa \neq \mu$ ist, gibt es ein α mit $\kappa_\alpha \neq \mu_\alpha$. Dann ist $U_\kappa \subseteq U(\alpha, \kappa_\alpha)$, $U_\mu \subseteq U(\alpha, \mu_\alpha)$, und es gibt einen Isomorphismus φ von $U(\alpha, \kappa_\alpha)$ auf $U(\alpha, \mu_\alpha)$ mit $\varphi a = b$. Es ist zu zeigen, daß $\varphi U_\kappa = U_\mu$ ist. Wie vorhin genügt aus Symmetriegründen schon die Beziehung $\varphi U_\kappa \subseteq U_\mu$. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es ein $c \in V(\varphi U_\kappa)$, das nicht in U_μ liegt. Es sei etwa $c \in V(U_\nu)$. Klarerweise ist $U_\nu \subseteq U(\alpha, \mu_\alpha)$ und es gibt ein β mit $\mu_\beta \neq \nu_\beta$. Nach Satz 2 sind weiters die nichtleeren Durchschnitte der Form $U(\alpha, \sigma_\alpha) \cap U(\beta, \tau_\beta)$ die Schichten eines Teilers W on X, und φ bildet die W-Schichten von $U(\alpha, \kappa_\alpha)$ auf die W-Schichten von $U(\alpha, \mu_\alpha)$ ab. Setzen wir

$$U(\alpha, \kappa_\alpha) \cap U(\beta, \kappa_\beta) = W^a,$$
$$U(\alpha, \mu_\alpha) \cap U(\beta, \mu_\beta) = W^b,$$
$$U(\alpha, \mu_\alpha) \cap U(\beta, \nu_\beta) = W^c,$$

so ist also $\varphi W^a = W^b$. Da gilt $c \in V(\varphi U_\kappa) \subseteq \varphi W^a$, liegt c in W^b, im Widerspruch zur Beziehung $W^b \neq W^c$.

(iii) Wir betrachten einen beliebigen Weg $[a_1, \ldots, a_n]$, bei dem keine Kante in einem U_ι liegt, und der zwei Knoten $a_1, a_n \in V(U_\kappa)$ verbindet. Gelingt es zu zeigen, daß es einen Faktor W von X gibt, sodaß U_κ in einer W-Schicht enthalten ist, und je zwei aufeinanderfolgende a_i, a_{i+1} in verschiedenen W-Schichten von X liegen, so ist $a_1 = a_n$ und der Satz bewiesen. Die Knoten a_i und a_{i+1} liegen laut Voraussetzung in verschiedenen U_ι. Es sei etwa $a_i \in V(U_\mu)$ und $a_{i+1} \in V(U_\nu)$. Da $\mu \neq \nu$ ist, gibt es ein α mit $U(\alpha, \mu_\alpha) \neq U(\alpha, \nu_\alpha)$, das heißt a_i und a_{i+1} liegen in verschiedenen Schichten des Teilers U_α von X. Wir setzen $W_i = U_\alpha$ sowie $a = a_1$ und betrachten

$$W = \bigcap_{i=1}^{n-1} W_i^a.$$

U_κ ist in allen W_i^a enthalten, also auch in W. Weiters folgt durch vollständige Induktion aus Satz 2, daß W ein Faktor von X ist, und es ist leicht zu sehen, daß je zwei aufeinanderfolgende a_i in verschiedenen W-Schichten liegen. Damit ist der Satz bewiesen.

SATZ 4. *Jeder zusammenhängenden Graph X ist das schwache kartesische Produkt von primen Graphen.*

Beweis. Ist $[a, b] \in E(X)$ und besteht die Menge $\{U_\alpha\}$ aus allen Teilgraphen von X die $[a, b]$ enthalten und Faktoren von X sind, so ist nach Satz 3 der Durchschnitt der U_α ebenfalls ein Faktor von X, und zwar in diesem Fall der einzige prime Teilgraph von X, der $[a, b]$ enthält und ein Faktor von X ist. Es gibt also aus der Menge $\{P_\nu \mid \nu \in N\}$ der Primfaktoren von X zu jeder Kante $[a, b] \in E(X)$ genau ein P_κ mit $P_\kappa^a = P_\kappa^b$, und für alle $\nu \neq \kappa$ ist $P_\nu^a \neq P_\nu^b$. Verstehen wir unter der ν-ten Komponente x_ν eines Knotens $x \in V(X)$ die Projektion von x auf P_ν, so ist also $a_\nu = b_\nu$ für alle $\nu \neq \kappa$ und $[a_\kappa, b_\kappa] \in E(P_\kappa)$.

Wir zeigen nun, daß verschiedene Knoten a, b aus X verschiedene Koordinaten haben. Dazu betrachten wir zuerst einen beliebigen Faktor P_ν von X. Zu P_ν gibt es ein Y_ν mit $P_\nu \times Y_\nu = X$. Ist P_μ ein weiterer Primfaktor von X, so ist $| P_\mu^a \cap Y_\nu^a | > 1$, da P_μ ein nichttrivialer zusammenhängender Graph ist, aber kein Nachbar von a, der in P_μ^a liegt, auch in P_ν^a liegt, und daher alle diese Nachbarn in Y_ν^a liegen. Wie aus dem Beweis von Satz 2 hervorgeht, ist $P_\mu^a \cap Y_\nu^a$ ein Teiler von P_μ^a. Da P_μ prim ist, ist

$$P_\mu^a \cap Y_\nu^a = P_\mu^a,$$

und P_μ^a teilt Y_ν^a. Wegen der Assoziativität des kartesischen Produkts ist also auch $P_\nu^a \times P_\mu^a$ ein Faktor von X. Durch Induktion kann man nun leicht zeigen, daß das Produkt von jeder endlichen Zahl von P_ι^a wieder ein Faktor von X ist. Aus dem Zusammenhang von X folgt weiters die Existenz eines endlichen Weges $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$, der $a = a_0$ mit $b = a_n$ verbindet. Wie schon gezeigt gibt es zu jeder Kante $[a_i, a_{i+1}]$ ein eindeutig bestimmtes ν, sodaß $[a_i, a_{i+1}]$ in der durch a_i gehenden P_ν-Schicht von X liegt. Sind $\nu(1), \ldots, \nu(k)$ die verschiedenen durch diesen Weg bestimmten Indizes, so ist

$$Y = \prod_{i=1}^{k} P_{\nu(i)}^a$$

ein Teilgraph von X, der a und b enthält. Haben nun a und b gleiche Koordinaten in X, so auch in Y, und sind daher identisch.

Damit folgt unmittelbar aus der Definition des schwachen kartesischen Produkts, daß für beliebiges $a \in V(X)$ gilt

$$X = \prod_{\nu \in N} (P_\nu, a_\nu).$$

SATZ 5. *Gegeben seien zwei Produkte* $X = \prod_{\nu \in N} (P_\nu, a_\nu)$ *und* $Y = \prod_{\mu \in M} (Q_\mu, b_\mu)$ *der zusammenhängenden primen Graphen* P_ν *und* Q_μ. *Die Graphen* X *und* Y *sind genau dann isomorph, falls es eine umkehrbar* *eindeutige Abbildung π von N auf M und Isomorphismen φ_ν, $\nu \in N$ gibt, sodaß gilt:*

(i) $\varphi_\nu P_\nu = Q_{\pi\nu}$ *für alle* $\nu \in N$,

(ii) $\varphi_\nu a_\nu = b_{\pi\nu}$ *für fast alle* $\nu \in N$.

Beweis. Sind die Bedingungen des Satzes erfüllt, so ist leicht zu sehen, daß die Abbildung φ: $(\varphi x)_{\pi\nu} = \varphi_\nu x_\nu$ ein Isomorphismus von X auf Y ist. Es sei also umgekehrt $X \cong Y$, ψ ein Isomorphismus von X auf Y, und a der Knoten aus $V(X)$ mit den Komponenten a_ν. Der Isomorphismus ψ bildet jede Schicht P_ν^a auf einen primen Faktor von Y ab, der $\psi a = c$ enthält, also auf ein Q_μ^c. Offensichtlich induziert ψ eine umkehrbar eindeutige Abbildung π von N auf M, sodaß $\psi P_\nu^a = Q_{\pi\nu}^c$ ist. Da sich weiters zwei beliebige Knoten eines schwachen kartesischen Produkts in höchstens endlich vielen Koordinaten unterscheiden, ist $c_\nu = b_\nu$ für fast alle $\nu \in N$. Setzt man nun ψ_ν für die Restriktion von ψ auf P_ν^a und α_ν, beziehungsweise $\beta_{\pi\nu}$, für den kanonischen Isomorphismus von P_ν auf P_ν^a, beziehungsweise von $Q_{\pi\nu}^c$ auf $Q_{\pi\nu}$, so genügt die Abbildung $\varphi_\nu = \beta_{\pi\nu}\psi_\nu\alpha_\nu$ den Bedingungen (i) und (ii).

Zwei schwache kartesische Produkte, die den Bedingungen (i) und (ii) von Satz 5 genügen sind daher als nicht wesentlich verschieden anzusehen. In diesem Sinn können wir den Inhalt der Sätze 4 und 5 auch folgendermaßen formulieren:

SATZ 6. *Jeder zusammenhängende Graph hat bezüglich des schwachen kartesischen Produkts eine eindeutige Primfaktorzerlegung.*

FOLGERUNG. *Hat ein zusammenhängender Graph eine Primfaktorzerlegung bezüglich des kartesischen Produkts, so ist sie bis auf Reihenfolge und Isomorphie der Faktoren eindeutig.*

Beweis. Ein zusammenhängender Graph kann als kartesisches Produkt von höchstens endlich vielen Faktoren dargestellt werden, und bei endlich vielen Faktoren stimmen das kartesische und das schwache kartesische Produkt überein.

Unzusammenhängende Graphen können allerdings verschiedene Primfaktorzerlegungen haben, wie von Zaretskii in [10] gezeigt wurde. Um dies zu zeigen verwenden wir Zaretskiis Konstruktion. Ist P ein primer zusammenhängender Graph, etwa eine Kante, so setzen wir

$$X \cong (P^3 \cup E) \times (P^2 \cup P \cup E) \cong (P \cup E) \times (P^4 \cup P^2 \cup E),$$

und erhalten damit zwei verschiedene Primfaktorzerlegungen des Graphen X.

4. Automorphismengruppen

Die vorliegenden Ergebnisse ermöglichen es die Automorphismengruppe eines zusammenhängenden Graphen durch die Automorphismengruppen seiner Primfaktoren zu charakterisieren. Für zusammenhängende Graphen mit endlich vielen Primfaktoren wurde eine ähnliche Untersuchung in [3] durchgeführt. Hier handelt es sich größtenteils um Verallgemeinerungen von Sätzen aus [3].

Satz 7. *Es sei X das Produkt $\prod (P_\nu, a_\nu)$ der primen Graphen P_ν, $\nu \in N$, und a der Knoten aus X mit $p_\nu a = a_\nu$. Ist π eine Permutation von N und sind φ_ν, $\nu \in N$ Isomorphismen mit $\varphi_\nu P_\nu = P_{\pi\nu}$, so ist φ: $(\varphi x)_{\pi\nu} = \varphi_\nu x_\nu$ ein Automorphismus von X, falls sich φa von a in höchstens endlich vielen Komponenten unterscheidet. Umgekehrt ist jedes $\varphi \in G(X)$ auf diese Art darstellbar, falls X zusammenhängend ist.*

Beweis. Sind π und die φ_ν gegeben, so sieht man leicht, daß φ ein Automorphismus ist. Ist weiters $\varphi \in G(X)$, so zeigt man wie vorhin, daß φ eine Permutation π von N erzeugt mit $\varphi P_\nu^a = P_{\pi\nu}\varphi^a$. Da die P_ν-Schichten von X durch φ wieder in Schichten von X nach einem Primfaktor abgebildet werden, gehen die P_ν-Schichten also in ihrer Gesamtheit in die $P_{\pi\nu}$-Schichten von X über. Ist weiters $b_\nu = c_\nu$ für zwei Knoten b und c aus X, so ist $(\varphi b)_{\pi\nu} = (\varphi c)_{\pi\nu}$. Für $[b, c] \in E(X)$ folgt dies unmittelbar aus der Definition des kartesischen Produkts, und für beliebige b, c zeigt man dies durch Induktion nach dem Abstand von b und c. Für ein beliebiges Element $x \in V(P_\nu)$ gibt es ein $b \in V(P_\nu^a)$ mit $b_\nu = x$. Definieren wir nun $\varphi_\nu x = (\varphi b)_{\pi\nu}$, so ist φ_ν offensichtlich ein Isomorphismus von P_ν auf $P_{\pi\nu}$, und es ist leicht zu sehen, daß die φ_ν zusammen mit π den Automorphismus φ erzeugen.

Folgerung. *Sind die P_ν paarweise nichtisomorph, so wird jeder Automorphismus $\varphi \in G(X)$ durch Automorphismen φ_ν der P_ν erzeugt.*

Eine Permutationsgruppe G auf einer Menge V nennt man transitiv, wenn es zu jedem Paar $p, q \in V$ ein $\pi \in G$ gibt mit $\pi p = q$. Es gilt folgender Satz:

Satz 8. *Die Automorphismengruppe eines zusammenhängenden Graphen ist genau dann transitiv, wenn die Automorphismengruppe jedes Primfaktors transitiv ist.*

Beweis. Es sei X ein zusammenhängender Graph mit der Primfaktorzerlegung $\prod (P_\nu, a_\nu)$, $\nu \in N$. Ist $G(P_\nu)$ transitiv für alle $\nu \in N$, und sind

b, c zwei beliebige Knoten aus X, so gibt es für jedes ν einen Automorphismus φ_ν von P_ν mit $\varphi_\nu b_\nu = c_\nu$. Die φ_ν erzeugen ein $\varphi \in G(X)$ mit $\varphi b = c$.

Ist $G(X)$ transitiv, so ist zu zeigen, daß alle $G(P_\nu)$ transitiv sind. Wir wählen ein P_μ und zwei beliebige Knoten x und y aus $V(P_\mu)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß alle P_ν, die zu P_μ isomorph sind, mit P_ν identisch sind. Nun wählen wir zwei Knoten b und c aux X, und zwar sei $b_\nu = x$ für alle ν mit $P_\nu \cong P_\mu$ und c unterscheide sich von b nur in der μ-ten Koordinate. Es sei $c_\mu = y$. Nach unserer Voraussetzung gibt es ein $\varphi \in G(X)$ mit $\varphi b = c$. Nach Satz 7 existiert außerdem ein φ_ν mit $\varphi_\nu P_\nu = P_\mu$, wobei gilt

$$(\varphi b)_\mu = \varphi_\nu b_\nu \,. \tag{1}$$

Wegen der Isomorphie von P_ν und P_μ ist also $P_\nu = P_\mu$ und $\varphi_\nu \in G(P_\mu)$. Damit ist per definitionem $b_\nu = x$, und aus (1) folgt $y = \varphi_\nu x$.

Für zusammenhängende Graphen ergibt sich daraus sofort die Gültigkeit eines von Chao in [1] angegebenen Satzes:

SATZ 9. *Sind X und Y zusammenhängende Graphen, so ist $G(X \times Y)$ genau dann transitiv wenn $G(X)$ und $G(Y)$ transitiv sind.*

Beweis. Die Aussage ist trivial, wenn $G(X)$ und $G(Y)$ transitiv sind. Es sei also $Z = X \times Y$ und $G(Z)$ transitiv. Da Z zusammenhängend ist, hat jeder Primteiler von Z transitive Automorphismengruppe. Nun ist aber jeder Teiler von Z das Produkt von primen Teilern von Z, woraus der Satz folgt.

Für unzusammenhängende Graphen ist der Satz nicht richtig. Denn ist X das schwache kartesische Produkt von unendlich vielen Kanten und unendlich vielen Dreiecken, und ist Y die Vereinigung einer Kante und eines dazu disjunkten Dreiecks, so besteht $X \times Y$ aus zwei Komponenten, die zu X isomorph sind, also ist $G(X \times Y)$ transitiv, nicht aber $G(Y)$.

Ist G eine Permutationsgruppe auf der Menge V, so nennt man G semiregulär, wenn $\alpha x = x$ für $\alpha \in G$ und $x \in V$ nur dann gilt, wenn α das Einselement von G ist. Ist G semiregulär und transitiv, so sagt man G sei regulär.

SATZ 10. *Die Automorphismengruppe eines zusammenhängenden Graphen X ist genau dann semiregulär beziehungsweise regulär, wenn die Primfaktoren von X paarweise nichtisomorph sind und semireguläre beziehungsweise reguläre Automorphismengruppen haben.*

SATZ 11. *Die Automorphismengruppe eines zusammenhängenden Graphen* *ist genau dann abelsch, wenn alle Faktoren abelsche Automorphismengruppen haben, die Primfaktoren mit nichttrivialen Automorphismengruppen paarweise nichtisomorph sind, und es zu Faktoren deren Automorphismengruppe die Ordnung eins hat, höchstens noch einen zweiten isomorphen Faktor gibt.*

Die Beweise werden genau so geführt, wie die der entsprechenden Sätze in [3]. Beim Beweis von Satz 10 ist wesentlich, daß $G(P^2)$ für primes P nicht semiregulär ist, und beim Beweis von Satz 11, daß $G(P^3)$ in allen Fällen nichtabelsch ist, und daß $G(P^2)$ für $|G(P)| > 1$ nichtabelsch ist.

Ist G eine Permutationsgruppe auf V, so sagt man eine Teilmenge B von V sei ein Block, falls für jedes $\alpha \in G$ das Bild αB von B entweder mit B identisch ist, oder keinen Punkt mit B gemeinsam hat. Die Menge V, die leere Menge und die einpunktigen Teilmengen von V sind sogenannte triviale Blöcke. Wenn G transitiv ist und nur triviale Blöcke hat nennt man G primitiv (siehe [9]).

In [3] wurden die Primfaktorzerlegungen von zusammenhängenden endlichen Graphen mit primitiver Automorphismengruppe charakterisiert. Hier wird die Untersuchung auf beliebige zusammenhängende Graphen erweitert.

SATZ 12. *Die Automorphismengruppe eines zusammenhängenden Graphen ist dann und nur dann primitiv, wenn $|X| \leqslant 2$ ist, oder X die Potenz eines primen Graphen mit mehr als zwei Knoten und primitiver Automorphismengruppe ist.*

Beweis. Die Bedingungen des Satzes sind notwendig. Es sei X ein zusammenhängender Graph mit primitiver Automorphismengruppe. Zuerst zeigen wir, daß alle Primfaktoren von X isomorph sind. Dazu betrachten wir die Primfaktorzerlegung $\prod (P_\nu, a_\nu)$, $\nu \in N$, von X, wählen ein P_κ aus und bilden die Menge M aller μ mit $P_\mu \cong P_\kappa$. Dann ist die Knotenmenge jeder Schicht des Faktors B von X, $B = \prod (P_\mu, a_\mu)$, $\mu \in M$ ein Block von X. Um dies zu sehen betrachten wir einen beliebigen Automorphismus $\varphi \in G(X)$. Nach Satz 7 induziert φ eine Permutation π von N, für die in diesem Fall offensichtlich gilt $\pi M = M$. Nun ist leicht ersichtlich, daß φ jede B-Schicht von X wieder in eine B-Schicht von X überführt. Da die B-Schichten von X disjunkt oder identisch sind, ist $V(B)$ ein Block. Wegen der Primitivität von $G(X)$ ist daher $B = X$. Es sind also alle Primfaktoren isomorph, und wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen alle P sind identisch. Das heißt X ist die Potenz eines primen Graphen P (die Auswahl der a_ν aus $V(P_\nu)$ ist unwesentlich, da $G(P)$ transitiv ist).

Ist A ein Block von $G(P)$, so ist

$$B = \{x \mid x \in V(X), x_\nu \in A \text{ für alle } \nu \in N\}$$

ein Block von $G(X)$. Da $G(X)$ primitiv ist, ist B ein trivialer Block, und damit auch A. Das bedeutet $G(P)$ ist primitiv.

Es bleibt zu zeigen, daß P mehr als zwei Knoten hat, falls $|N| > 1$ ist, oder in anderen Worten, daß die Automorphismengruppe des schwachen kartesischen Produkts von mehr als zwei Kanten imprimitiv ist. Dies ist aber tatsächlich der Fall, denn wählen wir einen Knoten a eines solchen Produkts X und bilden die Menge B aller Knoten von X, die von a geraden Abstand haben, so ist $B \cup \{a\}$ ein nichttrivialer Block.

Die Bedingungen des Satzes sind hinreichend. Es sei $X = \prod (P_\nu, a_\nu)$, $\nu \in N$, wobei alle P_ν isomorph sind und primitive Automorphismengruppe haben. Wir können weiters annehmen $|N| > 1$ und $|P_\nu| > 2$. Es ist zu zeigen, daß $G(X)$ nur triviale Blöcke hat, beziehungsweise daß jeder Block A mit mehr als einem Knoten mit $V(X)$ übereinstimmt. Ist A so ein Block, so gibt es mindestens einen Faktor P_κ, sodaß die Menge $A_\kappa = \{x_\kappa \mid x \in A\}$ mindestens zwei Elemente enthält. Ist $A_\kappa \neq V(P_\kappa)$, so ist wegen der Primitivität von $G(P_\kappa)$ die Menge A_κ kein Block. Es gibt somit einen Automorphismus φ_κ von P_κ mit $\varphi_\kappa A_\kappa \cap A_\kappa \neq \varnothing$ und $\varphi_\kappa A_\kappa \neq A_\kappa$. Für $A_\kappa - \varphi_\kappa A_\kappa = \varnothing$ ist $A_\kappa \subseteq \varphi_\kappa A_\kappa$, also $\varphi_\kappa^{-1} A_\kappa \subseteq A_\kappa$ und $A_\kappa - \varphi_\kappa^{-1} A_\kappa \neq \varnothing$. In diesem Fall ersetzen wir φ_κ durch φ_κ^{-1}. Wir können daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß es Knoten a_κ, b_κ, c_κ mit folgenden Eigenschaften gibt: $a_\kappa \in A_\kappa$, $a_\kappa \notin \varphi_\kappa A_\kappa$, $b_\kappa \in \varphi_\kappa A_\kappa \cap A_\kappa$ und $c_\kappa = \varphi_\kappa^{-1} b_\kappa$. Da alle drei Knoten in A_κ liegen, gibt es Elemente a, b, c aus A mit den κ-Komponenten a_κ, b_κ, c_κ. Die Automorphismen φ_ν von P_ν mit $\varphi_\nu c_\nu = b_\nu$ erzeugen ein $\varphi \in G(X)$ mit $\varphi c = b$. Da A ein Block ist, folgt daraus $\varphi A = A$, also $a \in \varphi A$ und damit $a_\kappa \in \varphi_\kappa A_\kappa$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Das heißt $A_\kappa = V(P_\kappa)$.

In [4] wurde gezeigt, daß es keine Graphen mit primitiver regulärer Automorphismengruppe und mehr als zwei Knoten gibt. Da $|P_\kappa| > 2$ und $G(P_\kappa)$ transitiv ist, folgt daraus, daß $G(P_\kappa)$ nicht semiregulär sein kann. Es gibt daher Knoten a_κ, $b_\kappa \in V(P_\kappa)$ und ein $\varphi_\kappa \in G(P_\kappa)$ mit $\varphi_\kappa a_\kappa = a_\kappa$ und $\varphi_\kappa b_\kappa \neq b_\kappa$. Sind a, b Knoten aus A mit den κ-Komponenten a_κ und b_κ, und ist φ der von φ_κ erzeugte Automorphismus von $G(X)$, so ist $\varphi a = a$, $\varphi b \neq b$ und $\varphi A = A$. Das heißt $b, \varphi b \in A \cap V(P_\kappa^b)$. Wie man leicht sieht, ist $A \cap V(P_\kappa^b)$ ein Block von $G(P_\kappa^b)$, und $V(P_\kappa^b) = A \cap V(P_\kappa^b)$.

Die Beziehung $V(P_\kappa^b) \subseteq A$ bedeutet, daß alle Knoten $x \in V(X)$, die sich von b nur in der Komponente κ unterscheiden in A liegen. Wir zeigen nun durch Induktion nach der Zahl der Komponenten x_ν, $\nu \neq \kappa$, in denen sich x und b unterscheiden, daß $Z = V(X)$ ist. Unterscheidet sich

x in $n + 1$ Komponenten x_ν, $\nu \neq \kappa$, von b, so wählen wir ein $\mu \neq \kappa$ mit $x_\mu \neq b_\mu$ und bilden $y : y_\mu = b_\mu$, $y_\nu = x_\nu$ sonst. Offensichtlich ist $y \in A$. Nun betrachten wir den Automorphismus φ von X, der P_κ^b in P_μ^y abbildet. So ein φ existiert, da die P_ν alle isomorph sind, und $G(P_\nu)$ transitiv ist. Es ist $y \in \varphi A \cap A$, also $\varphi A = A$ und $V(P_\mu^y) \subseteq A$. Damit liegt auch x in A, denn $x \in V(P_\mu^y)$, womit der Satz bewiesen ist.

5. Mengensysteme

Die bisherigen Ergebnisse lassen sich bis auf Satz 12 alle auf Mengensysteme übertragen. Dabei versteht man unter einem Mengensystem X eine Menge $V(X)$, den Knoten von X, zusammen mit einer Menge $E(X)$ nichtleerer Teilmengen von $V(X)$, den Kanten von X. Wie bei Graphen sagt man eine Kantenfolge $e_1, \ldots, e_n$ verbindet die Knoten a und b, wenn $a \in e_1$ ist, $b \in e_n$ und $e_i \cap e_{i+1} \neq \varnothing$ für $i = 1, \ldots, n-1$. Somit ist klar, was man unter einem zusammenhängenden Mengensystem zu verstehen hat. Auch der Begriff des kartesischen und schwachen kartesischen Produkts läßt sich leicht verallgemeinern. Ist $\{X_\iota \mid \iota \in I\}$ eine Menge von Mengensystemen, so sagt man X sei das schwache kartesische Produkt $\prod (X_\iota, a_\iota)$ der Mengensysteme X_ι mit den Wurzeln a_ι, falls gilt:

$$V(X) = \left\{ x \in \prod_{\iota \in I} V(X_\iota) \,\middle|\, x_\iota \neq a_\iota \text{ für höchstens endlich viele } \iota \in I \right\},$$

$$E(X) = \{ e \leqslant V(X) \mid p_\kappa e \in E(X_\kappa) \text{ für ein } \kappa \in I, \text{ und } |p_\iota e| = 1 \text{ für } \iota \neq \kappa \}.$$

Ersetz man die obige Definition von $V(X)$ durch $V(X) = \prod_{\iota \in I} V(X_\iota)$, so erhält man die Definition für das kartesische Produkt von Mengensystemen. Wie bei Graphen zeigt man die Gültigkeit von Lemma 1. Man kann nun, praktisch nur durch eine Änderung der Bezeichnungsweise, die Sätze 1 bis 11 auch für Mengensysteme beweisen. Nur bei Satz 12 tritt eine Schwierigkeit auf. In den Beweis geht wesentlich ein, daß es keine Graphen mit mehr als zwei Knoten und primitiver regulärer Automorphismengruppe gibt. Es gibt aber solche Mengensysteme, zum Beispiel das System X definiert auf der Menge $V(X) = \{0, 1, \ldots, 6\}$ durch

$$\begin{aligned} E(X) = {} & \{(i, j) \mid j \equiv i + 1 \bmod 7\} \\ & \cup \{(i, j, k) \mid j \equiv i + 1 \bmod 7, k \equiv i + 3 \bmod 7\}. \end{aligned}$$

Satz 13. *Die Automorphismengruppe eines zusammenhängenden Mengensystems ist genau dann primitiv, wenn X ein primes Mengensystem mit* *primitiver Automorphismengruppe ist, oder wenn X bezüglich des schwachen kartesischen Produkts mindestens die zweite Potenz eines primen Mengensystems mit nichtregulärer primitiver Automorphismengruppe ist.*

Beweis. Der Beweis ist völlig analog dem Beweis von Satz 12, nur ist noch zu zeigen, daß $G(X)$ für $X = P^{\mathfrak{N}}$, $\mathfrak{N} > 1$, nicht primitiv ist, falls $G(P)$ primitiv und regulär ist. In [4] wurde bewiesen, daß jede primitive reguläre Automorphismengruppe zyklisch ist. Also ist $G(P)$ zyklisch, und wir können annehmen $V(P)$ sei die Menge der ganzen Zahlen $0, 1,..., p - 1$, p prim, oder die Menge N aller ganzen Zahlen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit liege der Knoten a, dessen sämtliche Koordinaten Null sind, in $V(X)$. Es ist leicht zu sehen, daß für $V(P) = \{0,..., p - 1\}$ die Menge $\{x \mid x \in V(X), \sum x_\iota \equiv 0 \bmod p\}$ einen nichttrivialen Block bildet, und für $V(P) = N$ die Menge $\{x \mid x \in V(X), \sum x_\iota \equiv \bmod 2\}$. Damit ist der Satz bewiesen.

Literatur

1. Chong-Yun Chao, On groups and graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.* **118** (1965), 488–497.
2. W. Imrich, Kartesisches Produkt von Mengensystemen und Graphen, *Studia Sci. Math. Hungar.* **2** (1967), 285–290.
3. W. Imrich, Automorphismen und das kartesische Produkt von Graphen, *Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. S.-B. II*, **177** (1968), 203-214.
4. W. Imrich, Graphen mit transitiver Automorphismengruppe, *Monatsh. Math.*, **73** (1969), 341–347.
5. D. J. Miller, Weak Cartesian product of graphs, *Colloq. Math.* **21** (1970), 55–74.
6. D. J. Miller, The automorphism group of a product of graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.* **25** (1970), 24–28.
7. G. Sabidussi, Graph multiplication, *Math. Z.* **72** (1960), 446–457.
8. V. G. Vizing, Das kartesische Produkt von Graphen (russ.), *Vyčisl. Sistem*, **9** (1963), 30–43; Engl. Übersetzung, *Comp. El. Syst.* **2** (1966), 352–365.
9. H. Wielandt, "Finite Permutation Groups," Academic Press, New York, 1964.
10. K. A. Zaretskii, Die Zerlegung eines unzusammenhängenden Graphen in ein kartesisches Produkt (russ.), *Kibernetika (Kiev)* **1** (1965), 89; Engl. Übersetzung, *Cybernetics* **1** (1965), 92.