Europ. J. Combinatorics (1981) **2**, 249–255

Quadrilatères Généralisés Faiblement Plongés dans $PG(3, q)$

CHRISTIANE LEFÈVRE-PERCSY

This paper classifies generalized quadrangles which are weakly embedded in a 3-dimensional finite projective space $PG(3, q)$. They are essentially semi-quadrics in a projective subspace (over a subfield of the ground field) of $PG(3, q)$.

1. INTRODUCTION

La classification des espaces polaires pleinement plongés dans un espace projectif est maintenant acquise (voir [4, Proposition 4]; pour des références complètes voir [5]). Ce résultat constitue une première étape de l'investigation des espaces polaires isométriquement plongés. Nous en avons entrepris une deuxième étape, en généralisant la notion de plongement plein en celle de plongement faible, qui nous conduit à l'étude des espaces polaires faiblement plongés [5, 6].

Le présent article aboutit à la classification d'un cas particulier important de ces derniers: celui des quadrilatères généralisés faiblement plongés dans un espace projectif fini $PG(3, q)$ de dimension 3. Nous montrons qu'ils sont essentiellement les semi-quadriques (au sens de [1]) d'un sous-espace projectif (sur un sous-corps du corps de base) de $PG(3, q)$ (voir Section 3). Ce résultat est une étape fondamentale de la classification des espaces polaires faiblement plongés dans un espace projectif fini quelconque [7].

Nous remercions J. A. Thas pour les remarques et suggestions qu'il nous a faites au cours de l'élaboration de ce travail.

2. DÉFINITIONS ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Rappelons quelques définitions et notations introduites dans [5] et utilisées dans le présent article.

Soit $P = PG(3, q)$ l'espace projectif de dimension 3 sur le corps $GF(q)$ d'ordre q. Dans la suite, P sera considéré le plus souvent comme l'espace linéaire* de ses points et droites. Les sous-espaces (linéaires) de P seront appelés *variétés linéaires* de P. La variété linéaire engendrée par un ensemble X de points de P est notée $\langle X \rangle$. Une *perspectivité de centre a et d'axe H* est une projectivité de P qui fixe tous les points de l'hyperplan H et conserve globalement tous les sous-espaces comprenant a.

Soit $Q = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ une *sous-structure d'incidence* de P: les ensembles non vides $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$ sont formés respectivement de points et de droites de P, appelés *points* et *droites de Q*. L'incidence entre points et droites de Q correspond à l'appartenance de P. Nous supposons que *toute droite de Q est incidente à au moins trois points de Q*. Deux points distincts a et b de Q sont *adjacents* si la droite $\langle a, b \rangle$ appartient à $\mathcal{L}$; nous écrivons $a \sim b$ et nous convenons que tout point est adjacent à lui-même. Si V est une variété linéaire de P, nous désignons par $V \cap Q$ la structure d'incidence des points et des droites de Q contenus dans V.

* Un espace linéaire est une structure d'incidence de points et droites telle que deux points distincts sont incidents à une et une seule droite et que toute droite est incidente à au moins deux points.

0195–6698/81/040249+07 $01.00/0

Une sous-structure d'incidence $Q = (\mathscr{P}, \mathscr{L})$, avec $\mathscr{P}$ et $\mathscr{L}$ non vides, est un *quadrilatère généralisé faiblement plongé dans P* si les conditions suivantes sont satisfaites.*

(1) Si un point a de $\mathscr{P}$ et une droite A de $\mathscr{L}$ sont non incidents, alors a est adjacent à exactement un point incident à A.

(2) Si A et B sont deux droites de $\mathscr{L}$ concourantes dans P, alors A et B se coupent en un point de Q.

Une sous-structure d'incidence $Q = (\mathscr{P}, \mathscr{L})$, avec $\mathscr{P}$ et $\mathscr{L}$ non vides, satisfaisant (1) et telle que

(2′) $\mathscr{P}$ est la réunion des points de P appartenant aux droites de $\mathscr{L}$

est un *quadrilatère généralisé pleinement plongé dans P.*

Les semi-quadriques de sous-espaces projectifs (sur un sous-corps du corps de base) de P sont des exemples de quadrilatères généralisés faiblement plongés. En particulier, les semi-quadriques de P sont des quadrilatères pleinement plongés.

Le *voisinage* Q_a d'un point a de Q est l'ensemble des points de Q adjacents à a. Un point a de Q est *point double* de Q si a est adjacent à tout point de Q, c'est à dire si $Q_a = Q$. Si Q possède un point double, Q est dite *dégénéré.* Il est prouvé dans [5] que, si Q est non dégénéré, alors le voisinage Q_a de tout point a de Q engendre un hyperplan H_a de P. Il se justifie de l'appeler *hyperplan tangent à Q en a.* Une droite A de P est *tangente* à Q si $|A \cap \mathscr{P}| = 1$ ou si $A \in \mathscr{L}$. Une droite A est une *vraie tangente* à Q si $|A \cap \mathscr{P}| = 1$. Une droite de P qui ne rencontre pas $\mathscr{P}$ est *extérieure* à Q. Une droite de P qui n'est tangente, ni extérieure à Q est dite *sécante* à Q.

Si Q est un quadrilatère non dégénéré, nous adoptons les notations classiques de [8] et désignons par $s+1$ le nombre de points de Q incidents à une droite de Q et par $t+1$ le nombre de droites de Q incidentes à un même point de Q. Il est bien connu [3] que si $t > 1$, on a $t^2 \geqslant s$ et que le nombre de points de Q vaut $(s+1)(st+1)$ (voir par exemple [8]). On déduit directement de [5, Proposition 41 que, pour toute droite A sécante à Q, l'intersection $A \cap Q = A \cap \mathscr{P}$ est de cardinal $t+1$.

Le résultat suivant est essentiel à cet article; il est démontré dans [6], dans le cadre plus général des espaces polaires.

PROPOSITION 1 [6, PROPOSITION 3]. *Soit Q un qudrilatère généralisé non dégénéré faiblement plongé dans P, avec $t > 1$. Soient a, b, b′ trois points de Q appartenant à une même droite de Q. Alors, il existe une projectivité σ fixant a et appliquant b sur b′ qui conserve Q.*

Signalons que la démonstration qui en est donnée dans [6] prouve d'avantage: σ induit, dans le plan tangent H_a, une perspectivité de centre a, dont l'axe est une droite de Q par a.

Terminons cette section, en prouvant une propriété importante des (hyper)plans tangents à Q. En fait, celle-ci est valable pour *tout espace polaire*: la démonstration ci-dessus peut être reprise telle quelle pour ce cas plus général.

PROPOSITION 2. *Soit Q un quadrilatère généralisé non dégénéré faiblement plongé dans P et soient a, b, c trois points non adjacents de Q, alignés dans P. Alors les intersections $H_a \cap H_b$, $H_b \cap H_c$ et $H_c \cap H_a$ coïncident.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que $H_a \cap H_b$ est inclus à H_c. Soit e un point de Q dans $H_a \cap H_b$ c'est-à-dire soit $e \in Q_a \cap Q_b$. Alors $a, b \in Q_a$ et donc H_e contient la

* La condition supplémentaire "Pour tout $a \in \mathscr{P}$, la variété linéaire engendrée par l'ensemble Q_a des points adjacents à a, rencontre $\mathscr{P}$ exactement suivant Q_a", exigée dans [5] pour définir les espaces polaires faiblement plongés, est trivialement satisfaite dans le cas des quadrilatères d'un espace projectif de dimension 3.

droite $\langle a, b\rangle$. Dès lors, $c \sim e$ et $e \in H_c$. Comme $\langle Q_a \cap Q_b\rangle = H_a \cap H_b$, nous avons ainsi prouvé que $H_a \cap H_b \cap H_c$.

3. Théorème et Méthode de Démonstration

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal.

Théorème. *Soit Q un quadrilatère généralisé non dégénéré faiblement plongé dans un espace projectif $P = PG(3, q)$. Si $s > 1$ et $t > 1$, alors Q est une semi-quadrique d'un sous-espace projectif de P.*

La démonstration de ce résultat consiste à construire, à partir de Q, une sous-structure d'incidence $(\bar{\mathscr{P}}, \bar{\mathscr{L}})$ de P, qui s'avèrera être un sous-espace projectif de P. Cette construction se fait en trois étapes (Sections 4, 5 et 6). Les démonstrations utilisent des arguments essentiellement combinatoires, ainsi que l'existence de certaines projectivités conservant Q (Section 5).

Dans la suite, $Q = (\mathscr{P}, \mathscr{L})$ designera un quadrilatère généralisé non dégénéré faiblement plongé dans $P = PG(3, q)$; Q sera supposé tel que $s > 1$ et $t > 1$. Signalons que la non-dégénérescence de Q implique $\langle \mathscr{P}\rangle = P$.

4. Sous-structures d'Incidence $(\mathscr{P}_\alpha, \mathscr{L}_\alpha)$

Soit α un plan de P rencontrant Q suivant $t+1$ droites de Q concourantes en un point a. En d'autres termes, α est le plan tangent H_a. On définit une sous-structure d'incidence $(P_\alpha, \mathscr{L}_\alpha)$ de α, comme suit.

Définition 1. $\mathscr{P}_\alpha$ est l'ensemble des points de α appartenant à deux droites de α sécantes à Q et $\mathscr{L}_\alpha$ est l'ensemble des droites de α sécantes à Q.

Nous allons montrer que $(\mathscr{P}_\alpha, \mathscr{L}_\alpha)$ est un plan affin dual d'ordre s.* Ceci nécessite plusieurs lemmes.

Lemme 1. *Si β est un plan de P engendré par trois points b_1, b_2, b_3 de Q, ne contenant pas de droites de Q, alors $|\beta \cap \mathscr{P}| = st + 1$.*

Démonstration. Le nombre de droites d'un quadrilatère généralisé de paramètres s, t vaut $(t+1)(st+1)$ (voir par exemple [8]). Par conséquent, puisque par chaque point de Q il passe $t+1$ droites de Q, le nombre de points de $\beta \cap Q$ vaut $st+1$ si et seulement si toute droite de Q rencontre β en un point de Q. Montrons qu'il en est bien ainsi. Supposons, au contraire, qu'il existe une droite $A \in \mathscr{L}$ rencontrant β en un point $a \notin \mathscr{P}$. Alors deux points distincts de $B \cap Q$ sont adjacents à deux points distincts de $A \cap Q$. En effet, s'il existe b, $b' \in \beta \cap \mathscr{P}$ adjacents à un même point c de $A \cap Q$, alors b et b' appartiennent au plan tangent à Q en c et donc b et b' sont alignés avec a; dès lors, par [5, Proposition 4], la sécante $\langle b, b'\rangle$ rencontre A en un point de Q, ce qui contredit $a \notin \mathscr{P}$. Par conséquent comme $|A \cap \mathscr{P}| = s+1$, il y a au plus $s+1$ points de Q dans β. Or, si b_1, b_2, b_3 sont trois points linéairement indépendants de $\beta \cap Q$, le calcul du nombre de points de Q appartenant aux droites joignant b_3 à un point de $\langle b_1, b_2\rangle \cap Q$ montre

* Un plan affin dual est la structure d'incidence duale d'un plan affin. Dans un plan affin dual d'ordre s, les droites sont incidentes à $s+1$ points et deux droites quelconques ont un point commun. Deux points déterminent 0 ou 1 droite; si deux points n'appartiennent pas à une droite, ils sont dits parallèles et l'ensemble des points du plan est partitionné en $s+1$ classes de s points deux à deux parallèles.

que $\beta \cap \mathcal{P}$ comprend au moins t^2+t+1 points. Ceci conduit à l'inégalité $t^2+t+1 \leq s+1$, contredisant l'inégalité de Higman [3] $t^2 \geq s$.

DÉFINITION 2. Soit $E \subset \mathcal{P}$. L'ensemble E est *linéairement fermé dans* $\mathcal{P}$ si, pour tout a, $b \in E$, l'intersection $\langle a, b\rangle \cap \mathcal{P}$ est contenue dans E. Dès lors, tout sous-ensemble F de $\mathcal{P}$ engendre une *fermeture linéaire dans* $\mathcal{P}$.

LEMME 2. *Soit β comme au Lemme* 1. *Alors $\beta \cap \mathcal{P}$ est la fermeture linéaire dans $\mathcal{P}$ des trois points b_1, b_2, b_3.*

DÉMONSTRATION. Grâce au Lemme 1, la démonstration du Lemme 12 de [2] peut être reprise dans le cadre actuel.

LEMME 3. *Soit $(\mathcal{P}_\alpha, \mathcal{L}_\alpha)$ défini ci-dessus. Soit $b \in \mathcal{P}_\alpha - \mathcal{P}$ et soient A, A' deux sécantes à Q dans α par b. Soit B (resp. B') la sécante par a intersection des plans tangents en les points de $A \cap Q$ (resp. $A' \cap Q$). Si β est le plan $\langle B, B'\rangle$, alors le plan tangent à Q en tout point de $\beta \cap Q$ passe par b.*

DÉMONSTRATION. Remarquons que les définitions de B et B' sont validées par la Proposition 2.

(1) Soit e un point de $B \cap Q$ (resp. $B' \cap Q$). Par la définition de B (resp. B'), le plan tangent à Q en e passe par b. De plus, par la Proposition 2, si e et e' sont deux points de Q tels que les plans tangents H_e et $H_{e'}$ passent par b, alors tout plan tangent en un point de $\langle e, e'\rangle \cap \mathcal{P}$ passe par b.
(2) Soient e_1, e_2 deux points distincts de $B \cap Q$ et $e_3 \neq a$ un point de $B' \cap Q$. Il est facile de voir que le plan $\beta = \langle B, B'\rangle = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$ ne contient pas de droites de Q et dès lors, par le Lemme 2, $\beta \cap \mathcal{P}$ est la fermeture linéaire dans $\mathcal{P}$ de $\{e_1, e_2, e_3\}$.

De (1) et (2), on déduit la propriété annoncée.

LEMME 4. *Soient $(\mathcal{P}_\alpha, \mathcal{L}_\alpha)$ et b comme au Lemme* 3. *Alors le nombre de droites de $\mathcal{L}_\alpha$ passant par b vaut s.*

DÉMONSTRATION

(1) Ce nombre vaut au moins s. En effet, soit β le plan défini au Lemme 3. Par la Proposition 2, à toute droite B de β, sécante à Q par a, il correspond une sécante à Q par b dans α; de plus, à deux sécantes distinctes dans β correspondent deux sécantes distinctes dans α. D'autre part, il y a dans β exactement s sécantes à Q par a, car $|\beta \cap \mathcal{P}| = st+1$ (Lemme 1) et $|\beta \cap \mathcal{P}| = t+1$ pour toute sécante B. Dès lors, il passe au moins s sécantes à Q par b dans α.
(2) Ce nombre vaut exactement s. En effet, toute sécante à Q par b dans α rencontre une droite de Q par a en un point de Q différent de a. Comme une droite de Q compte exactement s points de Q différents de a, il ne peut y avoir plus de s sécantes à Q par b dans α, ce qui achève la preuve du lemme.

PROPOSITION 3. *$(\mathcal{P}_\alpha, \mathcal{L}_\alpha)$ est un plan affin dual.*

DÉMONSTRATION. La structure d'incidence $(\mathcal{P}_\alpha, \mathcal{L}_\alpha)$ jouit des propriétés suivantes:

(i) Comme α contient $s(t+1)$ points c de Q non adjacents à a, comme il existe st points de $\alpha \cap Q$ non adjacents à c et qu'une sécante à Q comprend $t+1$ points de Q, nous avons $|\mathcal{L}_\alpha| = [s(t+1) \,.\, st/t(t+1)] = s^2$.

(ii) Par la définition même de $(\mathscr{P}_\alpha, \mathscr{L}_\alpha)$, deux droites de $\mathscr{L}_\alpha$ se coupent en un point de $\mathscr{P}_\alpha$.

(iii) Par le Lemme 4, il passe s droites de $\mathscr{L}_\alpha$ par tout point de $\mathscr{P}_\alpha$. Ces trois propriétés montrent que $(\mathscr{P}_\alpha, \mathscr{L}_\alpha)$ est un plan affin dual d'ordre s. En effet, sa structure d'incidence duale est un ensemble de s^2 points, muni de droites de s points, tels que deux points déterminent une droite; cette structure est un plan affin, par une caractérisation connue des plans affins finis.

5. Sous-structures d'Incidence $(\bar{\mathscr{P}}_\alpha, \bar{\mathscr{L}}_\alpha)$

Nous allons compléter la sous-structure d'incidence $(\mathscr{P}_\alpha, \mathscr{L}_\alpha)$ en un sous-plan projectif $(\bar{\mathscr{P}}_\alpha, \bar{\mathscr{L}}_\alpha)$ de α, grâce aux observations suivantes.

(iv) Les s points, distincts de a, d'une droite de Q par a constituent une classe de points parallèles de $(\mathscr{P}_\alpha, \mathscr{L}_\alpha)$. En effet, par la définition de $\mathscr{L}_\alpha$, deux points d'une droite de Q par a n'appartiennent à aucune droite de $\mathscr{L}_\alpha$ et, par conséquent, les s points de Q différents de a sur cette droite forment une classe de points parallèles.

(v) Soient b et b' deux points distincts d'une droite de $\alpha \cap Q$ par a $(b, b' \neq a)$. Par la Proposition 1 et la remarque qui y fait suite, il existe une projectivité conservant Q et induisant dans α une perspectivité de centre a qui a pour axe une droite de $\alpha \cap Q$ et qui applique b sur b'. Considérons l'ensemble G des s perspectivités induites dans α et déterminées par les s points $b' \neq a$ de $\langle a, b\rangle \cap Q$. Soit c un point de $\mathscr{P}_\alpha$ n'appartenant pas à Q. L'orbite de c par G est un ensemble de s points alignés avec a. Comme ces s points sont forcément des points de $\mathscr{P}_\alpha$ et comme aucune droite de α par a n'appartient à $\mathscr{L}_\alpha$, ces s points constituent une classe de points parallèles de $(\mathscr{P}_\alpha, \mathscr{L}_\alpha)$.

Nous avons ainsi montré que les classes de points parallèles du plan affin dual $(\mathscr{P}_\alpha, \mathscr{L}_\alpha)$ sont les intersections avec $\mathscr{P}_\alpha$ des droites de α par a. Nous définissons alors, comme suit, une sous-structure d'incidence $(\bar{\mathscr{P}}_\alpha, \bar{\mathscr{L}}_\alpha)$ de α.

Définition 3. $\bar{\mathscr{P}}_\alpha$ est la réunion $\mathscr{P}_\alpha \cup \{a\}$ et $\bar{\mathscr{L}}_\alpha$ est la réunion de $\mathscr{L}_\alpha$ avec les droites de α par a comprenant un point de $\mathscr{P}_\alpha$.

Dès lors, par ce qui précède, nous avons la proposition suivante.

Proposition 4. *$(\bar{\mathscr{P}}_\alpha, \bar{\mathscr{L}}_\alpha)$ est un sous-plan projectif de α.*

6. Sous-structure d'Incidence $(\bar{\mathscr{P}}, \bar{\mathscr{L}})$

Nous définissons une sous-structure d'incidence $(\bar{\mathscr{P}}, \bar{\mathscr{L}})$ de P.

Définition 4. $\bar{\mathscr{P}}$ est la réunion des ensembles de points $\bar{\mathscr{P}}_\alpha$ et $\bar{\mathscr{L}}$ la réunion des ensembles de droites $\bar{\mathscr{L}}_\alpha$, pour les plans α de P rencontrant Q suivant $t+1$ droites de Q.

Nous allons montrer que $(\bar{\mathscr{P}}, \bar{\mathscr{L}})$ est un sous-espace projectif de P, en nous basant sur les lemmes suivants.

Lemme 5. *Si $(\bar{\mathscr{P}}_\alpha, \bar{\mathscr{L}}_\alpha)$ et $(\bar{\mathscr{P}}_\beta, \bar{\mathscr{L}}_\beta)$ sont des sous-plans projectifs distincts ci-dessus, alors l'intersection de ces deux plans est une droite dans chacun d'eux.*

Démonstration. Soient $\alpha = H_a$ et $\beta = H_b$ les plans tangents qui contiennent respectivement $(\bar{\mathscr{P}}_\alpha, \bar{\mathscr{L}}_\alpha)$ et $(\bar{\mathscr{P}}_\beta, \bar{\mathscr{L}}_\beta)$. Comme P est de dimension 3, les points a et b sont nécessairement distincts, sans quoi $a = b$ serait un point double de Q. Dès lors, la droite $H_a \cap H_b$ ne peut être une vraie tangente à Q. Si $H_a \cap H_b$ appartient à $\mathscr{L}$, le lemme est trivial. Si $H_a \cap H_b$ est une sécante à Q, $H_a \cap H_b$ appartient à $\bar{\mathscr{L}}_\alpha$ et $\bar{\mathscr{L}}_\beta$. Tout point de Q sur cette sécante appartient évidemment à $\bar{\mathscr{P}}_\alpha$ et $\bar{\mathscr{P}}_\beta$. Soit c un point de $\bar{\mathscr{P}}_\alpha \cap H_a \cap H_b$, non dans Q. Le point c appartient à une sécante A à Q dans H_a, avec $A \neq H_a \cap H_b$. Soit e un point adjacent aux points de $A \cap Q$: ce point est choisi parmi les points de Q appartenant à l'intersection des plans tangents en deux points de $A \cap Q$ (voir Proposition 2). Le point e ne peut être dans $H_b \cap Q$, sinon Q serait dégénéré. Dès lors, le plan tangent en e rencontre H_b suivant une sécante B à Q. Cette sécante B passe par c, ce qui montre que $c \in \bar{\mathscr{P}}_\beta$; Nous avons ainsi prouvé le lemme.

LEMME 6. *Si x est un point de Q et si $(\bar{\mathscr{P}}_\alpha, \bar{\mathscr{L}}_\alpha)$ est un sous-plan projectif ne contenant pas x, alors toute sécante à Q par x rencontre le plan α en un point de $\bar{\mathscr{P}}_\alpha$.*

DÉMONSTRATION. Soit A une sécante à Q par x. Elle rencontre le plan α en un point c. Soit $\beta = H_e$ un plan tangent contenant A. Par le Lemme 5, l'intersection des sous-plans projectifs $(\bar{\mathscr{P}}_\alpha, \bar{\mathscr{L}}_\alpha)$ et $(\bar{\mathscr{P}}_\beta, \bar{\mathscr{L}}_\beta)$ est une droite dans chacun d'eux. Mais la sécante A rencontre cette droite de $(\bar{\mathscr{P}}_\beta, \bar{\mathscr{L}}_\beta)$ en un point qui n'est autre que c. Par conséquent, le point c est un point de $(\bar{\mathscr{P}}_\alpha, \bar{\mathscr{L}}_\alpha)$.

LEMME 7. *Si x est un point de Q et si $(\bar{\mathscr{P}}_\alpha, \bar{\mathscr{L}}_\alpha)$ est un sous-plan projectif ne contenant pas x, alors toute droite joignant x à un point de $\bar{\mathscr{P}}_\alpha - H_x$ est une sécante à Q.*

DÉMONSTRATION. Calculons le nombre de sécantes à Q par le point x. Q est un quadrilatère généralisé dont les droites ont $s+1$ points et ayant $t+1$ droites par un point. Dès lors [8], le nombre de points de Q vaut $(s+1)(st+1)$. Or il y a exactement $s(t+1)+1$ points de Q adjacents à x et les points de Q non adjacents à x se répartissent sur des sécantes à Q. Comme ces dernières rencontrent Q en $t+1$ points (voir Section 2), il passe $[(s+1)(st+1)-s(t+1)-1]/t$, c'est-à-dire s^2, droites sécantes à Q par x. Dès lors, comme aucune droite par x dans H_x n'est sécante à Q, les s^2 sécantes par a sont les s^2 droites joignant x aux s^2 points de $\bar{\mathscr{P}}_\alpha - H_x$.

LEMME 8. *Si x est un point de Q et si $(\bar{\mathscr{P}}_\alpha, \bar{\mathscr{L}}_\alpha)$ est un sous-plan projectif ne contenant pas x, alors tout point de $\bar{\mathscr{P}}$ appartient à une droite joignant x à un point de $\bar{\mathscr{P}}_\alpha$.*

DÉMONSTRATION. Supposons qu'il existe un point b de $\bar{\mathscr{P}}$ non situé sur les droites joignant x à un point de $\bar{\mathscr{P}}_\alpha$. Ce point b est un point d'un sous-plan projectif $(\bar{\mathscr{P}}_\beta, \bar{\mathscr{L}}_\beta)$ dans un plan β rencontrant Q en $t+1$ droites de Q. Ce plan β est nécessairement distinct de H, car si $b \in H_x$ alors, par le Lemme 5, $b \in \bar{\mathscr{P}}_{H_x}$ et donc, egalement par le Lemme 5, le point $\langle x, b\rangle \cap \alpha$ appartient à $\bar{\mathscr{P}}_\alpha$, ce qui contredit le choix de b. Si $x \notin \bar{\mathscr{P}}_\beta$, alors, par le Lemme 7, la droite $\langle x, b\rangle$ est sécante à Q; si $x \in \bar{\mathscr{P}}_\beta$, alors $\langle x, b\rangle$ est également une sécante à Q, puisque $\beta \neq H_x$. Par conséquent, grâce au Lemme 6, la droite $\langle x, b\rangle$ rencontre α en un point de $\bar{\mathscr{P}}_\alpha$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Ces divers résultats permettent de montrer que $(\bar{\mathscr{P}}, \bar{\mathscr{L}})$ est un sous-espace projectif d'ordre s dans P.

PROPOSITION 5. *$(\bar{\mathscr{P}}, \bar{\mathscr{L}})$ est un sous-espace projectif d'ordre s engendrant P.*

DÉMONSTRATION. Nous prouvons que la structure d'incidence $(\bar{\mathscr{P}}, \bar{\mathscr{L}})$ définie ci-dessus est un sous-espace projectif de P. Remarquons que, si $(\bar{\mathscr{P}}, \bar{\mathscr{L}})$ est un sous-espace projectif de P, alors $(\bar{\mathscr{P}}, \bar{\mathscr{L}})$ engendre nécessairement P, puisque $\bar{\mathscr{P}} \supset \mathscr{P}$ et que $\langle \mathscr{P}\rangle = P$.

Pour montrer que $(\bar{\mathscr{P}}, \bar{\mathscr{L}})$ est un sous-espace projectif de P, il suffit de prouver que $(\bar{\mathscr{P}}, \bar{\mathscr{L}})$ est un espace linéaire tel que deux droites de $\bar{\mathscr{L}}$ concourantes dans P se coupent en un point de $\bar{\mathscr{P}}$.

(1) Soient A, $B \in \bar{\mathscr{L}}$ concourantes dans P. Montrons que $A \cap B \in \bar{\mathscr{P}}$. Soient $(\bar{\mathscr{P}}_\alpha, \bar{\mathscr{L}}_\alpha)$ et $(\bar{\mathscr{P}}_\beta, \bar{\mathscr{L}}_\beta)$ deux sous-plans contenant respectivement A et B. Si $(\bar{\mathscr{P}}_\alpha, \bar{\mathscr{L}}_\alpha)$ et $(\bar{\mathscr{P}}_\beta, \bar{\mathscr{L}}_\beta)$ coïncident, alors $A \cap B$ est un point de $\bar{\mathscr{P}}_\alpha$; s'ils sont distincts, alors, par le Lemme 5, l'intersection de ces deux sous-plans est une droite dans chacun d'eux. Par conséquent, $A \cap B$ est un point de $\bar{\mathscr{P}}$.

(2) Montrons que deux points b et b' de $\bar{\mathscr{P}}$ déterminent une droite appartenant à $\bar{\mathscr{L}}$. Si b et b' sont dans un même plan rencontrant Q en $t+1$ droites de Q, alors la propriété est vérifiée. Supposons donc que b et b' n'appartiennent pas à un tel plan. Considérons un sous-plan $(\bar{\mathscr{P}}_\alpha, \bar{\mathscr{L}}_\alpha)$ et un point x de Q n'appartenant ni à α, ni à $\langle b, b' \rangle$. Désignons par β le plan $\langle x, b, b' \rangle$. D'après les Lemmes 7 et 8, ce plan β rencontre $\bar{\mathscr{P}}_\alpha$ suivant une droite de $\bar{\mathscr{L}}_\alpha$ et $\beta \cap \bar{\mathscr{P}}$ est l'ensemble des points de $\bar{\mathscr{P}}$ appartenant aux droites joignant x à un point de $\beta \cap \bar{\mathscr{P}}_\alpha$. Donc $\beta \cap \bar{\mathscr{P}}$ est un ensemble de s^2+s+1 points. De plus, les droites de la structure d'incidence $\beta \cap (\bar{\mathscr{P}}, \bar{\mathscr{L}})$ comptent toutes $s+1$ points. Enfin, nous allons montrer que le nombre de droites de $\beta \cap (\bar{\mathscr{P}}, \bar{\mathscr{L}})$ est supérieur ou égal à s^2+s+1. Par le Lemme 1, $|\beta \cap \mathscr{P}| = st+1$. Par conséquent β contient exactement $(st+1) \,.\, st/t(t+1)$ sécantes à Q et exactement $st+1$ intersections $H_x \cap \beta$, pour $x \in \beta \cap \bar{\mathscr{P}}$. Comme ces $st+1$ droites sont des droites de $\bar{\mathscr{L}}$ (voir Lemme 8), il y a exactement $[s(st+1)/t+1]+st+1$ droites de $\bar{\mathscr{L}}$ dans β. L'inégalité de Higman $t^2 \geqslant s$ montre alors que ce nombre de droites est supérieur ou égal à s^2+s+1. En conclusion $\beta \cap (\bar{\mathscr{P}}, \bar{\mathscr{L}})$ est une structure d'incidence ayant s^2+s+1 points et au moins s^2+s+1 droites, dont les droites ont exactement $s+1$ points (ce qui implique il existe au plus $s+1$ droites par un point). On en déduit immédiatement que $\beta \cap (\bar{\mathscr{P}}, \bar{\mathscr{L}})$ est un plan projectif, ce qui achève la démonstration.

7. Démonstration du Théorème

Le théorème annoncé est un corollaire immédiat de la Proposition 5. En effet, le quadrilatère généralisé $Q = (\mathscr{P}, \mathscr{L})$ apparaît maintenant comme une sous-structure d'incidence de l'espace projectif $(\bar{\mathscr{P}}, \bar{\mathscr{L}})$ et, par la définition même de $(\bar{\mathscr{P}}, \bar{\mathscr{L}})$, le quadrilatère Q y est pleinement plongé. Dès lors, en se référant à [2], Q est une semi-quadrique du sous-espace projectif $(\bar{\mathscr{P}}, \bar{\mathscr{L}})$ de P.

Références

1. F. Buekenhout, Characterization of semi-quadrics. A survey, *Coll. Int. Theorie Comb. Roma* 1973. *Atti Conv. Lincei* **17** (1976), 393–421.
2. F. Buekenhout and C. Lefèvre, Generalized quadrangles in projective spaces, *Arch. Math.* **25** (1974), 540–552.
3. D. G. Higman, Partial geometries, generalized quadrangles and strongly regular graphs, *Atti Conv. Geom. Comb. e sui Appl. Perugia*, 1971.
4. C. Lefèvre-Percsy, Espaces polaires dégénérés des espaces projectifs, *Simon Stevin* (to appear).
5. C. Lefèvre-Percsy, Espaces polaires faiblement plongé dans un espace projectif, *J. Geometry* (to appear).
6. C. Lefèvre-Percsy, Projectivités conservant un espace polaire faiblement plongé, *Bull. Acad. Royale de Belgique* (to appear).
7. C. Lefèvre-Percsy, Weakly embedded polar spaces (in preparation).
8. J. A. Thas, Combinatorial characterizations of the classical generalized quadrangles, *Geom. Dedicata* **6** (1977), 339–351.

Received 26 January 1981 and in revised form 27 May 1981

C. Lefévre-Percsy
Département de Mathématique, Université Libre de Bruxelles,
Campus Plaine, B.P. 216, Boulevard du Triomphe, B-1050 Bruxelles, Belgium