Stochastic Processes and their Applications 35 (1990) 251-265
North-Holland

ETUDE DE LA COVARIANCE DE QUELQUES PROCESSUS GAUSSIENS EN LIAISON AVEC LA PROPRIETE DE MARKOV

L. CARRARO

Institut de Mathématiques et Informatique, Université Claude Bernard - Lyon I, 69622 Villeurbanne, France

Received 2 June 1988
Revised 13 September 1989

We give two characterisations of the finite Markov property for Gaussian processes indexed by $\mathbb{R}$, based on the covariance of these processes. Then, we use this approach, combined with the hyperbolic structure of $\mathbb{R}^2_+$, to give prediction results for the two-parameter Wiener process. The complete identity between Green functions on [0, 1] and covariance of Markov Gaussian processes indexed by [0, 1] is also established.

prediction * Markov property * Wiener process * Green functions

1. Introduction

La connaissance des propriétés des processus stochastiques à plusieurs paramètres est encore très incomplète, en regard des nombreux résultats établis dans le cas linéaire. Cependant, la généralisation de la propriété de Markov simple dans le cas gaussien est très étudiée actuellement en liaison avec la théorie des équations aux dérivées partielles. Les problèmes de dérivabilité qui interviennent alors nécessitent l'introduction d'outils fonctionnels nombreux (espaces de Sobolev, distributions à valeurs vectorielles) et des processus généralisés (voir Rozanov, 1982, 1988b; Russo, 1987). Dans ce qui suit, on tente d'associer de façon plus directe problèmes de prédiction et résolution d'équations différentielles ou aux dérivées partielles.

Après la preuve d'un résultat classique (?) sur la covariance des processus gaussiens markoviens d'ordre fini dans le cas linéaire, on établit au Paragraphe 2, moyennant une hypothèse supplémentaire de régularité, un lien simple entre propriété de Markov (d'ordre n) et équations différentielles linéaires d'ordre n.

Le Paragraphe 3 est consacré à l'application de cette méthode à l'étude du processus de Wiener à deux paramètres en vue du calcul explicite d'espérances conditionnelles; ce qui prouve le caractère markovien (d'ordre 2) de ce dernier. Notons que les problèmes de dérivabilité sont résolus en exploitant la structure hyperbolique du quart de plan $(\mathbb{R}^+)^2$ qu'on avait déjà utilisée dans Carraro (1986).

Pour terminer, on démontre au Paragraphe 4 l'identité entre covariance des processus gaussiens de Markov indexés par l'intervalle [0, 1] et fonctions de Green définies sur ce même intervalle. Ce rapport, déjà remarqué dans le cas du pont brownien (Rozanov, 1988b), a même été utilisé, dans un cadre plus général, pour étudier le mouvement brownien à trois paramètres de Paul Lévy (Goldman, 1990).

2. Processus gaussiens markoviens d'ordre fini

On commence par établir un résultat, pressenti par Lévy (1956), de représentation de la covariance d'un processus gaussien markovien d'ordre fini.

Soit $(X_t)_{t\in I}$ un processus gaussien réel centré, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On aura besoin des deux conditions:

$$\text{L'application } (s,t)\in I\times I\mapsto \frac{\partial^{2(n-1)}}{\partial s^{n-1}\,\partial t^{n-1}} E(X_sX_t)$$

$$\text{existe et est continue auvoisinage de } \{s=t\}. \tag{1}$$

Ceci assure l'existence (dans $L^2(P)$) de $X'_t,\ldots,X_t^{(n-1)}$. On peut alors définir la matrice

$$M_{t,s}=\begin{pmatrix} E(X_tX_s) & \cdots & E(X_tX_s^{n-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ E(X_t^{(n-1)}X_s) & \cdots & E(X_s^{(n-1)}X_s^{(n-1)}) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

On supposera également dans la suite que

$$\forall s\in I,\quad M_{s,s} \text{ est inversible.} \tag{3}$$

Introduisons quelques notations: Si $s\in I$, on pose

$$\mathcal{B}_-(s)=\mathcal{B}(\{X_t,\ t\in I,\ t\leqslant s\}),\qquad \mathcal{B}_+(s)=\mathcal{B}(\{X_t,\ t\in I,\ t>s\}),$$

où $\mathcal{B}(A)$ désigne la tribu engendrée par la partie A.

On note également $\mathcal{B}_0(s)$ la plus petite tribu conditionnellement à laquelle les deux tribus $\mathcal{B}_-(s)$ et $\mathcal{B}_+(s)$ sont indépendantes. Rappelons que $(X_t)_{t\in I}$ est dit markovien d'ordre inférieur ou égal à n s'il vérifie

$$\mathcal{B}_0(s)=\mathcal{B}(\{X_s,X'_s,\ldots,X_s^{(n-1)}\})\quad \forall s\in I. \tag{4}$$

Théorème 1. *Soit $(X_t)_{t\in I}$ un processus gaussien réel centré vérifiant (1) et (3) $(X_t)_{t\in I}$ est markovien d'ordre inférieur ou égal à n si et seulement s'il existe deux fonctions $f, g: I\to\mathbb{R}^n$, $n-1$ fois dérivables telles que*

$$E(X_sX_t)=\langle f(s\wedge t), g(s\vee t)\rangle\quad \forall s,t\in I, \tag{5}$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$.

Nous utiliserons le résultat suivant:

Lemme 1. *$(X_t)_{t\in I}$ est markovien d'ordre inférieur ou égal à n si et seulement si*

$$\forall r\leqslant s\leqslant t,\quad M_{t,r}=M_{t,s}M_{s,s}^{-1}M_{s,r}. \tag{6}$$

Preuve. Il est bien connu que $(X_t)_{t\in I}$ est markovien d'ordre inférieur ou égal à n si et seulement si le processus à valeurs vectorielles $((X_t^{(i-1)})_{i=1,\dots,n})_{t\in I}$ est de Markov (d'ordre 1); ce qui équivaut précisément à (6) (voir par exemple Bouleau, 1988, p. 228). □

Preuve du Théorème 1. Supposons tout d'abord $(X_t)_{t\in I}$ markovien d'ordre inférieur ou égal à n; on pose alors

$$N_{t,s} = M_{t,s}M_{s,s}^{-1}. \tag{7}$$

On obtient, en utilisant le Lemme 1,

$$\forall r \leq s \leq t, \quad N_{t,r} = N_{t,s}N_{s,r}. \tag{8}$$

On introduit la fonction $f(s, t) = \det(N_{t,s})$; il est facile de voir, en utilisant (1), (7) et (8), que

$$\forall s \in I, \quad f(s, s) = 1, \tag{9a}$$

$$f \text{ est continue au voisinage de } \{s = t\}, \tag{9b}$$

$$f(r, t) = f(r, s)f(s, t) \quad \forall r \leq s \leq t, \tag{9c}$$

et des raisonnements élémentaires basés sur la connexité de I mènent à prouver que

$$\forall s, t \in I, \quad f(s, t) \neq 0. \tag{10}$$

Fixons $s_0 \in I$; on peut, en vertu de (10), poser

$$N_s = \begin{cases} N_{s,s_0} & \text{si } s \leq s_0, \\ N_{s_0,s}^{-1} & \text{si } s < s_0. \end{cases}$$

De plus, N_s est inversible et on vérifie en distinguant les cas, que

$$\forall s \leq t, \quad N_{t,s} = N_t N_s^{-1},$$

soit, avec la formule (7),

$$\forall s \leq t, \quad M_{t,s} = N_t N_s^{-1} M_{s,s}. \tag{11}$$

On peut remarquer que cette formule implique l'inversibilité de la matrice $M_{t,s}$ qui n'avait pas été supposée dans nos hypothèses. On fixe $r < s_0$; si $t > r$, on a

$$M_{t,r}M_{s_0,r} = N_t N_r^{-1} M_{r,r}(N_{s_0} N_r^{-1} M_{r,r})^{-1} = N_t.$$

Par suite, en notant $(g_1(t) \cdots g_n(t))$ la première ligne de la matrice N_t, on a

$$(g_1(t) \cdots g_n(t)) = (E(X_t X_r) \cdots E(X_t X_r^{(n-1)}))M_{s_0,r}^{-1}.$$

On en déduit que la fonction $g = (g_i)_i$ est $(n-1)$-fois dérivable sur $I \cap]r, +\infty[$; mais r ayant été fixé quelconque, on montre donc que g est $(n-1)$-fois dérivable sur I. Un raisonnement similaire montre que si f désigne la première colonne de la matrice $N_s^{-1}M_{s,s}$, f est $(n-1)$-fois dérivable sur I. De plus, la formule (11) montre que l'identité (5) est satisfaite; ce qui termine la première partie de la preuve.

Réciproquement, si l'on suppose que le processus $(X_t)_{t\in I}$ vérifie (5), avec $f, g : I \to \mathbb{R}^n$, $(n-1)$-fois dérivables sur I, on en déduit par dérivations successives par rapport à chacune des deux variables que l'on a

$$\forall s \leqslant t: \quad M_{t,s} = G(t)F(s), \tag{12}$$

où $G(t)$ (resp. $F(s)$) est la matrice de terme général $g_j^{(i-1)}(t)$ (resp. $f_i^{(j-1)}(s)$). De plus, comme la matrice $M_{s,s}$ est inversible et que l'identité (12) est valable pour $s=t$, les deux matrices $F(s)$ et $G(t)$ sont inversibles. Par suite, et en utilisant à nouveau (12), on obtient, pour $r \leqslant s \leqslant t$,

$$M_{t,s}M_{s,s}^{-1}M_{s,r} = G(t)F(s)F(s)^{-1}G(s)^{-1}G(s)F(s) = M_{t,r}.$$

Le processus $(X_t)_{t\in I}$ est donc, par application du Lemme 1, markovien d'ordre inférieur ou égal à n. □

Remarque. Lorsque le processus est markovien d'ordre inférieur ou égal à n, il est possible d'exprimer l'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire par rapport au passé à l'aide des seules fonctions f et g; on obtient ainsi (par exemple) avec les notations précédentes:

$$\text{si } s \leqslant t, \quad E(X_t/X_r, r \leqslant s) = {}^{\mathrm{T}}(g_i(t))_i G(s)^{-1}(X_s^{(i-1)})_i.$$

On en arrive maintenant à un résultat dont la méthode de démonstration, quoique nécessitant une hypothèse supplèmentaire, est beaucoup moins tributaire de l'ordre de la droite réelle. On verra au Paragraphe 3 qu'en effet, cette approche peut être utilisée avec profit dans le cas du processus de Wiener à deux paramètres.

Il sera nécessaire d'ajouter la condition suivante:

$$\forall s \in I, \quad \text{l'application } \; t \in I \cap]s, +\infty[\mapsto \frac{\partial^{2(n-1)}}{\partial s^{n-1}\,\partial t^{n-1}} E(X_s X_t) \; \text{ est dérivable.} \tag{13}$$

Corollaire 1. *Soit $(X_t)_{t\in I}$ un processus gaussien réel centré vérifiant* (1), (3) *et* (13); *on pose $f_s(t) = E(X_s X_t)$. $(X_t)_{t\in I}$ est markovien d'ordre inférieur ou égal à n si et seulement si il existe des fonctions $a_1, \ldots, a_n : I \to \mathbb{R}$ telles que*

$$\forall s \in I, \ \forall t > s, \quad f_s^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(t) f_s^{(k-1)}(t). \tag{14}$$

De plus, pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, si $\alpha_k(s,\cdot)$ désigne la solution de l'équation différentielle (14) *avec conditions initiales,*

$$\frac{\partial^{j-1}\alpha_k}{\partial t^{j-1}}(s,s) = \delta_{j,k}$$

on a, pour $t \geqslant s$,

$$E(X_t/X_r, r \leqslant s) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(s,t) X_s^{(k-1)}. \tag{15}$$

Preuve. Si le processus $(X_t)_{t\in I}$ est markovien d'ordre inférieur ou égal à n, on obtient, en conservant les notations du Théorème 1, l'identité (12),

$$M_{t,s} = G(t)F(s) \quad \text{si } s < t.$$

Il est aisé d'en déduire, avec la condition (13), que l'application $t \in I \mapsto G(t)$ est dérivable (et inversible); elle satisfait donc trivialement à l'équation différentielle,

$$G'(t) = A(t)G(t), \quad \text{où } A(t) = G'(t)G(t)^{-1}.$$

Si l'on note $(a_1(t) \cdots a_n(t))$ la dernière ligne de la matrice $A(t)$, on obtient ainsi

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}, \quad g_i^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(t) g_i^{(k-1)}(t), \tag{16}$$

et par suite, si $t > s$,

$$f_s^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^{n} g_j^{(n)}(t) f_i(s) = \sum_{k=1}^{n} a_k(t) \sum_{j=1}^{n} g_j^{(k-1)}(t) f_i(s) = \sum_{k=1}^{n} a_k(t) f_s^{(k-1)}(t).$$

ce qui prouve la formule (14).

L'expression (15) de l'espérance conditionnelle va être établie lors de la réciproque: Montrons (cela suffira) que si (14) est vérifiée, alors $E(X_t/X_r,\ r \leq s)$ est donnée par (15).

Si l'on pose $X = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(s,t) X_s^{(k-1)}$, X est de façon évidente $\mathcal{B}_-(s)$-mesurable. De plus, si $r < s$ est fixé,

$$E(X_r X) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(s,t) f_r^{(k-1)}(s) = f_r(t)$$

car l'application f_r satisfait à l'équation différentielle (14) avec conditions initiales au point s: $(f_r^{(k-1)}(s))_{k=1,\ldots,n}$. Ainsi, pour tout $r < s$,

$$E(X_r X) = f_r(t) = E(X_r X_t).$$

On en déduit immédiatement que $X = E(X_t/X_r,\ r \leq s)$. □

Remarques. (1) Lorsque le processus $(X_t)_{t\in I}$ est stationnaire, les fonctions a_k intervenant dans l'équation différentiable sont évidemment constantes. On peut d'ailleurs, à l'aide du corollaire 1, retrouver le résultat classique caractérisant les processus gaussiens stationnaires markoviens à l'aide de leur densité spectrale (voir Dym et Kean, 1972).

(2) Même dans le cas particulier des processus stationnaires, le résultat qui précède conserve son intérêt; ainsi, pour le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de covariance,

$$E(X_s X_t) = \frac{4}{u(1+4u^2)} \exp(-\tfrac{1}{2}|t-s|)[\sin(u|t-s|) + 2u\cos(u|t-s|)]$$

que nous avions considéré dans Carraro (1986), il est beaucoup plus facile, pour montrer qu'il s'agit d'un processus markovien d'ordre 2, de prouver que l'on a, pour $s < t$,

$$f_s''(t) + f_s'(t) + (u^2 + \tfrac{1}{4}) f_s(t) = 0.$$

(3) Les processus markoviens associés aux équations différentielles à coefficients constants ne sont pas forcément stationnaires. Par exemple, la covariance du mouvement brownien vérifie l'équation différentielle (à coefficients constants !), $y'=0$.

3. Conditionnement du processus de Wiener à deux paramètres

Rappelons que le processus de Wiener à deux paramètres est le processus gaussien réel centré $(W(x,y),(x,y)\in(\mathbb{R}^+)^2)$ qui vérifie

$$E(W(x,y)W(x',y'))=(x\wedge x')(y\wedge y'). \tag{17}$$

Les résultats qui suivent sont basés sur la remarque suivante: si l'on note, pour $(x',y')\in(\mathbb{R}^+)^2$, $\Delta_{x',y'}=\{(x,y)\in(\mathbb{R}^+)^2/x\leq x' \text{ et } y\leq y'\}$ on a

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}E(W(x,y)W(x',y'))=0 \quad \text{si } (x,y)\in\Delta^{c}_{x',y'}. \tag{18}$$

Nous allons donc tout d'abord rappeler les propriétés de l'opérateur $\partial^2/\partial x\,\partial y$ qui seront utiles par la suite.

On munit le quadrant $(\mathbb{R}^+)^2$ de la forme quadratique hyperbolique, $(x,y)\mapsto xy$. Soit $\Gamma=\gamma(\mathbb{R})=(f_1,f_2)(\mathbb{R})$ une courbe de $(\mathbb{R}^+)^2$ supposée continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 et régulière sur $\mathbb{R}\backslash F$, où F est un ensemble localement fini.

On suppose que f_1 est croissante, et f_2 décroissante. Nous voulons que Γ sépare le quart de plan en deux composantes; c'est pourquoi on ajoute les conditions

$$\gamma(\alpha)\xrightarrow[\alpha\to-\infty]{}(0,+\infty), \qquad \gamma(\alpha)\xrightarrow[\alpha\to-\infty]{}(+\infty,0). \tag{19}$$

Ces hypothèses sont d'ailleurs courantes dans la littérature (voir par exemple Russo, 1987); une courbe qui satisfait à celles-ci sera désormais nommée ligne de séparation. On désigne par D le domaine limité par Γ, ne contenant pas $(0,0)$. Rappelons également que si $\alpha\in\mathbb{R}\backslash F$, la tangente $\boldsymbol{T}_\alpha$ à Γ en $\gamma(\alpha)$ s'exprime selon

$$\boldsymbol{T}_\alpha=\frac{1}{\|f'(\alpha)\|}(f_1'(\alpha),f_2'(\alpha))$$

(où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne) alors que la normale $\boldsymbol{N}_\alpha$ (pour la géométrie hyperbolique) choisie intérieure à D a pour valeur,

$$\boldsymbol{N}_\alpha=\frac{1}{\|f'(\alpha)\|}(f_1'(\alpha),-f_2'(\alpha)).$$

On aura besoin de quelques notations supplémentaires: si $(x,y)\in D$, on pose

$$\alpha_1(x)=\inf\{\alpha/f_1(\alpha)=x\}, \qquad \alpha_2(y)=\sup\{\alpha/f_2(\alpha)=y\},$$

puis

$$\Gamma_{x,y}=\gamma([\alpha_2(y),\alpha_1(x)]),$$
$$p_1(x,y)=\gamma(\alpha_2(y)), \qquad p_2(x,y)=\gamma(\alpha_1(x)).$$

Remarquons au passage que les hypothèses faites pour la courbe Γ assurent l'inégalité $\alpha_2(y) \leq \alpha_1(x)$, si $(x, y) \in D$. On est maintenant en mesure de résoudre le problème de Cauchy:

Trouver $u \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D)$ telle que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = 0 \quad \text{sur } D, \tag{20a}$$

$$u = a \quad \text{sur } \Gamma, \tag{20b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} = b \quad \text{sur } \Gamma. \tag{20c}$$

Proposition 1. (i) *Le problème* (20) *possède une unique solution qui s'explicite selon*

$$u(x, y) = \tfrac{1}{2}(a(p_1(x, y)) + a(p_2(x, y))) + \tfrac{1}{2} \int_{\Gamma_{x,y}} b(u, v)\, \mathrm{d}\sigma(u, v). \tag{21}$$

(ii) *La fonction u ne dépend que de ses valeurs sur Γ si et seulement si Γ est une courbe en escaliers.*

Preuve. Le point (i) est bien connu; on pourra consulter par exemple Duff (1962). Pour (ii), il suffit de remarquer que u ne dépend que de ses valeurs sur Γ si et seulement si pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus F$, les vecteurs $\boldsymbol{T}_\alpha$ et $\boldsymbol{N}_\alpha$ sont colinéaires. Or cette condition signifie $f_1'(\alpha) f_2'(\alpha) = 0$ et un simple raisonnement de connexité montre qu'alors les fonctions f_1 et f_2 sont alternativement constantes par morceaux; ce qui établit le résultat annoncé. □

Remarque. Dans le cas où la courbe Γ est en escaliers, on peut préciser le point (ii) de la façon suivante:

Si $(x, y) \in D$ et si $(x_1, y_1), \ldots, (x_{2n+1}, y_{2n+1})$ sont les points anguleux de Γ situés strictement entre $p_1(x, y)$ et $p_2(x, y)$ (ils sont toujours en nombre impair), il est aisé de vérifier en utilisant (21) que l'on a

$$u(x, y) = a(p_1(x, y)) + \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k a(x_k, y_k) + a(p_2(x, y)). \tag{22}$$

On va maintenant s'intéresser aux propriétés markoviennes du processus de Wiener à deux paramètres relativement à des lignes de séparation Γ vérifiant deux types de conditions:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Si } \mathbb{R} \setminus F = \bigcup_k\,]a_k, a_{k+1}[, \quad \text{pour tout } k,\ \gamma \in C^2([a_k, a_{k+1}]) \\ &\text{et } \forall \alpha \in [a_k, a_{k+1}],\ f_1'(\alpha) > 0, f_2'(\alpha) < 0. \end{aligned}\right. \tag{23}$$

$$\Gamma \text{ est une courbe en escalier.} \tag{24}$$

Avant d'établir les résultats de prédiction pour une courbe Γ vérifiant (23), nous devons donner un sens à l'expression $(\partial W / \partial N)(u, v)$; c'est le but de la proposition qui suit.

Proposition 2. *Soit Γ une ligne de séparation qui vérifie* (23) *et soit* $(x, y) \in D$; *alors la quantité*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\Gamma_{x,y}} W((u, v)+tN)\,\mathrm{d}\sigma(u, v)\right)\Bigg|_{t=0^+} \quad \textit{existe dans } L^2(P).$$

Elle sera notée

$$\int_{\Gamma_{x,y}} \frac{\partial W}{\partial N}(u, v)\,\mathrm{d}\sigma(u, v).$$

Preuve. On suppose Γ paramétrée par arcs. Il suffit de vérifier que

$$\frac{\partial^2}{\partial s\,\partial t} E\left(\int_{\Gamma_{x,y}} W((u, v)+sN)\,\mathrm{d}\sigma(u, v)\int_{\Gamma_{x,y}} W((u', v')+tN')\,\mathrm{d}\sigma(u', v')\right)$$

existe et est continue au voisinage de $(s, t)=(0, 0)$. On est donc amené à s'intéresser à l'expression

$$E(W((u, v)+sN)\,W((u', v')+tN')) \tag{25}$$

lorsque (u, v) et (u', v') appartiennent à $\Gamma_{x,y}$. Fixons (u, v), (u', v') sur $\Gamma_{x,y}$:

On vérifie directement que (25) est de classe C^2 sauf sur les deux droites $u+sn_1=u'+tn'_1$ et $v+sn_2=v'+tn'_2$ (avec $N=(n_1, n_2)$ et $N'=(n'_1, n'_2)$).

Prouvons alors le lemme élémentaire suivant:

Lemme 2. *Soit I un intervalle compact et $f \in C^2(I)$ telle que $\forall \alpha \in I$, $f'(\alpha)>0$. On pose $m_1=\inf_I f'$ et $m_2=\inf_I f''$. Alors, si s et t appartiennent à l'intervalle $J=[0, m_1/|m_2|[$ ($[0, +\infty[$ si $m_2=0$), β étant fixé, l'équation*

$$f(\alpha)+sf'(\alpha)=f(\beta)+tf'(\beta)$$

n'a au plus qu'un nombre fini de solutions en $\alpha \in I$.

Preuve. Fixons $\beta \in I$, $s, t \in J$ et raisonnons par l'absurde. Il existe une suite $(\alpha_n)_n$ de points de I, dont on peut supposer qu'elle converge vers $\alpha \in I$, telle que

$$f(\alpha_n)+sf'(\alpha_n)=f(\beta)+tf'(\beta)$$

et en passant à la limite

$$f(\alpha)+sf'(\alpha)=f(\beta)+tf'(\beta).$$

On retranche alors ces deux expressions, on divise par $\alpha-\alpha_n$ et on fait tendre n vers $+\infty$; ce qui donne

$$f'(\alpha)=-sf''(\alpha)$$

qui contredit l'hypothèse $0 \leqslant s < m_1/|m_2|$. □

Remarque. Il est clair que le Lemme 2 s'adapte au cas d'une fonction $f \in C^2(I)$ telle que $\forall \alpha \in I, f'(\alpha) < 0$.

Preuve de la Proposition 2 (continuation). Nous ne pouvons pas, pour achever la preuve de la proposition, appliquer directement le Lemme 2 aux fonctions f_1 et f_2 sur l'intervalle $[t_2(y), t_1(x)]$; mais il suffit pour cela, β étant fixé, d'appliquer le lemme à tous les intervalles $[a_k, a_{k+1}]$ qui rencontrent $[t_2(y), t_1(x)]$ (ils sont en nombre fini). On en déduit qu'il existe un voisinage V de $(0, 0)$ où les équations

$$f_i(\alpha) + sf_i'(\alpha) = f_i(\beta) + tf_i'(\beta), \quad i = 1, 2,$$

n'ont, β fixé, qu'un nombre fini de solutions.

Par suite, l'ensemble $\{((u, v), (u', v')) \in \Gamma_{x,y} \times \Gamma_{x,y} / u + sn_1 = u' + tn_1'$ ou $v + sn_2 = v' + tn_2'\}$ est négligeable pour la mesure $\sigma \otimes \sigma$ restreinte à $\Gamma_{x,y} \times \Gamma_{x,y}$, car celle-ci est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.

On en déduit facilement que l'application

$$(s, t) \in V \mapsto \int_{\Gamma_{x,y}} \int_{\Gamma_{x,y}} E(W((u, v) + s\boldsymbol{N}) W((u', v') + t\boldsymbol{N}')) \, \mathrm{d}\sigma(u, v) \, \mathrm{d}\sigma(u', v')$$

est dérivable par rapport à t, puis par rapport à s, à dérivée continue dans V. La condition de domination est en effet assurée du fait que, là où cette expression existe, on a

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial s \, \partial t} E(W((u, v) + s\boldsymbol{N}) W((u', v') + t\boldsymbol{N}')) \right| \leq \max(-n_1 n_2', -n_1' n_2) \leq M$$

ce qui termine la preuve de la proposition. □

Nous sommes désormais en mesure d'énoncer le résultat principal de ce paragraphe.

Théorème 2. *Soit Γ une ligne de séparation vérifiant* (23) *et D le domaine associé. Si $(x, y) \in D$, on a*

$$E(W(x, y) / W(x', y'), (x', y') \in D^c) = \tfrac{1}{2}(W(p_1(x, y)) + W(p_2(x, y))) + \tfrac{1}{2} \int_{\Gamma_{x,y}} \frac{\partial W}{\partial N}(u, v) \, \mathrm{d}\sigma(u, v). \tag{26}$$

Preuve. La démonstration est tout à fait similaire à celle du Corollaire 1.

On désigne par $P(x, y)$ l'expression de droite de la formule (26). Il est clair que $P(x, y)$ est $\mathscr{B}(\{W(x', y'), (x', y') \in D^c\})$-mesurable. Fixons alors un point $(x', y') \in D^c$.

$$E(W(x', y') P(x, y)) = \tfrac{1}{2}[E(W(x', y') W(p_1(x, y))) + E(W(x', y') W(p_2(x, y)))] + \tfrac{1}{2} \int_{\Gamma_{x,y}} \frac{\partial}{\partial N} E(W(x', y') W(u, v)) \, \mathrm{d}\sigma(u, v)$$

identité que l'on peut exprimer selon

$$E(W(x',y')P(x,y)) = \tfrac{1}{2}(\phi(p_1(x,y)) + \phi(p_2(x,y))) + \tfrac{1}{2}\int_{\Gamma_{x,y}} \frac{\partial}{\partial N}\phi(u,v)\,\mathrm{d}\sigma(u,v) \tag{27}$$

si l'on a posé $\phi(x,y) = E(W(x',y')W(x,y)) = (x' \wedge x)(y' \wedge y)$. De plus, si l'on note $\Delta_1 = \{(x,y)/x = x'\}$ et $\Delta_2 = \{(x,y)/y = y'\}$, la fonction ϕ vérifie

$$\phi \in C(\bar{D}) \cap C^2(\bar{D}\backslash(\Delta_1 \cup \Delta_2)) \quad \text{et} \quad D\phi \text{ est bornée sur } \bar{D}\backslash(\Delta_1 \cup \Delta_2), \tag{28a}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x\, \partial y} = 0 \quad \text{sur } \bar{D}\backslash(\Delta_1 \cup \Delta_2). \tag{28b}$$

Ceci résulte en effet du fait que $\Delta_{x',y'}$ est contenu dans D^c. Il n'est alors pas difficile de vérifier que ces conditions suffisent à assurer la validité de la représentation (23) pour la fonction ϕ. Pour ce faire, on peut par exemple régulariser cette dernière à l'aide d'une approximation de l'unité.

On déduit des formules (21) et (27) l'identité

$$E(W(x',y')P(x,y)) = \phi(x,y) = E(W(x',y')W(x,y))$$

qui achève la preuve du théorème. □

Corollaire 2. *Le processus de Wiener à deux paramètres est markovien d'ordre 2 pour le domaine D limité par Γ.* □

La preuve de ce corollaire est classique (voir par exemple McKean, 1963).

Remarques. (1) On peut, moyennant quelques adaptations, prouver que le Théorème 2 est encore vrai lorsque la courbe Γ atteint les axes en un temps fini.

(2) Si la courbe Γ ne contient pas de caractéristiques (condition moins contraignante que (23)), on peut établir un résultat identique au Théorème 2. Toutefois, il est alors nécessaire d'utiliser l'approche fonctionnelle (voir Rozanov, 1988a, b) pour donner un sens à l'expression $\partial W/\partial N$, mais ce dernier sera plus faible que celui de la Proposition 2.

(3). Si l'on pose, avec les notations qui précèdent

$$V(x,y) = W(x,y) - P(x,y) \quad \text{pour } (x,y) \in D$$

il est possible d'exprimer la covariance du processus $(V(x,y), (x,y) \in D)$ à l'aide de techniques analogues; on doit alors résoudre le problème plus général d'existence et d'unicité d'une fonction $u \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D)$ telle que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = v \quad \text{sur } D,$$

$$u = a \quad \text{sur } \Gamma,$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} = b \quad \text{sur } \Gamma.$$

Le calcul de l'espérance conditionnelle dans le cas d'un domaine D limité par une ligne de séparation Γ en escaliers est beaucoup plus facile à effectuer; on reprend pour cela les notations de la formule (22).

Proposition 3. *Si Γ est une ligne de séparation en escaliers et si $(x, y) \in D$, on a*

$$E(W(x, y)/W(x', y'), (x', y') \in D^c)$$
$$= W(p_1(x, y)) + \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k W(x_k, y_k) + W(p_2(x, y)).$$

Preuve. Elle est similaire à celle du Théorème 2 et est basée sur la représentation (22). □

Remarques. (1) On déduit bien sûr de ce résultat que le processus de Wiener à deux paramètres est markovien d'ordre 1 pour des domaines limités par une ligne de séparation en escaliers.

(2) La Proposition 3 peut être démontrée de façon élémentaire (voir Rozanov, 1982) mais la compréhension de cette dégénérescence disparaît quelque peu. Celle-ci est en effet liée au fait que pour une courbe en escaliers, la tangente est un vecteur isotrope de la forme quadratique hyperbolique.

(3) Une caractérisation des lignes de séparation donnant lieu à une propriété de Markov d'ordre 1 est établie dans Dalang et Russo (1990).

4. Processus gaussiens de Markov et fonctions de Green

Notre but n'est pas d'exposer une théorie générale, c'est pourquoi on se placera dans le cas de l'intervalle $I = [0, 1]$. Soit $(X_t)_{t\in I}$ un processus gaussien réel centré, non dégénéré, tel que $X_0 = X_1 = 0$. On suppose que $(X_t)_{t\in I}$ est de Markov (d'ordre 1) et que l'application

$$f_s : t \in I\backslash\{s\} \mapsto E(X_s X_t)$$

est de classe C^2.

On note enfin $f(t) = E(X_t^2)$. On sait, avec le Corollaire 1, qu'il existe une fonction α continue sur I, telle que

$$f_s'(t) = \alpha(t) f_s(t) \quad \text{si } t > s. \tag{29}$$

On en déduit que si $s < t$, on a

$$f_s(t) = f(s) \exp\left(\int_s^t \alpha(x)\, dx\right).$$

L'inégalité (stricte) de Cauchy-Schwarz montre que la fonction

$$\tilde{f} : t \in I \mapsto f(t) \exp\left(-2 \int_0^t \alpha(x)\, dx\right)$$

est strictement croissante.

Nous aurons besoin dans la suite d'une hypothèse un peu plus contraignante. On supposera en effet que la dérivée de la fonction $\tilde{f}$ est strictement positive, soit

$$\forall t \in I, \quad f'(t) - 2\alpha(t) f(t) > 0. \tag{30}$$

Théorème 3. *Pour $t \in I$, on pose*

$$a(t) = (f'(t) - 2\alpha(t) f(t))^{-1}, \qquad b(t) = -\alpha(t) a(t),$$

$$p(t) = a(t), \qquad q(t) = b^2(t)/a(t) - b'(t).$$

Alors, l'opérateur $P : y \mapsto (-py')' + qy$ est positif et injectif sur $C_0^2([T, 1]) = \{y \in C^2([T, 1]) / y(T) = y(1) = 0\}$ pour tout $T \in [0, 1[$.

De plus, la fonction $(s, t) \in I \times I \mapsto E(X_s X_t)$ est la fonction de Green de P sur l'espace $C_0^2(I)$.

Preuve. Remarquons tout d'abord que l'on a

$$Py = (-py')' + qy = -(ay' + by)' + (b/a)(ay' + by). \tag{31}$$

Soit $T \in [0, 1[$ et $f \in C_0^2$ $([T, 1])$; on obtient facilement en intégrant par parties

$$\int_T^1 (Py)\,\mathrm{d}t = \int_T^1 \frac{1}{a}(ay' + by)^2\,\mathrm{d}t.$$

La positivité et l'injectivité de P sur C_0^2 $([T, 1])$ en résulte aisément. De plus, on a

$$a(t) f_s'(t) + b(t) f_s(t) = 0 \quad \text{si } t > s$$

et par suite

$$E(X_s X_t) = f(s \wedge t) \exp\left(-\int_{s \wedge t}^{s \vee t} \frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x\right).$$

Fixons alors une fonction u continue sur I; on pose

$$\begin{aligned}(Qu)(t) &= \int_0^1 E(X_s X_t) u(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{si } t \in I \\ &= \int_0^t f_s(t) u(s)\,\mathrm{d}s + f(t) \int_t^1 \exp\left(-\int_t^s \frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x\right) u(s)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Des calculs élémentaires mènent à l'identité

$$a(t)(Qu)'(t) + b(t)(Qu)(t) = \int_t^1 \exp\left(-\int_t^s \frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x\right) u(s)\,\mathrm{d}s$$

puis, en utilisant (31), on aboutit à

$$P(Qu)(t) = u(t).$$

De plus, comme $X_0 = X_1 = 0$, il est clair que l'on a

$$(Qu)(0) = (Qu)(1) = 0.$$

La covariance due processus $(X_t)_{t \in I}$ est donc la fonction de Green de l'opérateur P sur $C_0^2(I)$. □

Remarque. Ce résultat n'est pas surprenant dans la mesure où l'on sait (Rozanov, 1988b) que l'inverse de l'opérateur de corrélation d'un processus gaussien de Markov est local; ce qui, dans le cas d'un opérateur différentiel, mène bien sûr à la notion de fonction de Green.

Venons-en à la réciproque; on fixe pour cela un opérateur différentiel $P: y \mapsto (-py')' + qy$ que l'on suppose positif et injectif sur tout espace $C_0^2([T, 1])$ (pour tout choix de T dans $[0, 1[$, avec $p \in C^1(I)$ et $q \in C(I)$.

On suppose de plus que $p(t) > 0$, $\forall t \in I$. Remarquons que la positivité de P entraînait seulement $p \geq 0$ sur I.

Théorème 4. *Soit G la fonction de Green de l'opérateur P sur $C_0^2(I)$. Il existe alors un processus gaussien réel centré $(X_t)_{t \in I}$, de Markov, tel que $X_0 = X_1 = 0$, vérifiant*

$$E(X_s X_t) = G(s, t). \tag{32}$$

De plus, l'opérateur construit au Théorème 3 à partir du processus $(X_t)_{t \in I}$ est l'opérateur P lui-même.

Preuve. Pour obtenir l'existence d'un processus gaussien dont la covariance satisfait à (32), il suffit de vérifier que la forme quadratique associée à G est définie positive sur $\mathring{I} \times \mathring{I}$.

Or la fonction de Green s'exprime selon

$$G(s, t) = Kg(s \wedge t)h(s \vee t), \tag{33}$$

où $K = 1/(p(1)g(1))$ et où g (resp. h) est la solution de $Py = 0$, avec conditions initiales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ (resp. $y(1) = 0$, $y'(1) = -1$).

De plus, en vertu de l'injectivité de P sur $C_0^2([T, 1])$, la fonction h est strictement positive sur $\mathring{I}$.

Rappelons en outre la formule d'Abel:

$$p(g'h - gh') = \text{constante} \tag{34}$$

on en déduit que la fonction g/h est strictement croissante sur I et en particulier que g est strictement positive sur $\mathring{I}$. Si l'on écrit alors G sous la forme:

$$G(s, t) = K(g(s)h(s))^{1/2}(g(t)h(t))^{1/2} \frac{(g(s \wedge t)/h(s \wedge t))^{1/2}}{(g(s \vee t)/h(s \vee t))^{1/2}}$$

il est clair que G est définie positive sur $\mathring{I}$ si la fonction

$$(s, t) \in \mathring{I} \times \mathring{I} \mapsto H(s \wedge t)/H(s \vee t) \quad \text{avec } H(t) = (g(t)/h(t))^{1/2}$$

l'est. Utilisons le critère des déterminants; il est facile de vérifier que si

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < 1,$$

on a

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & H(t_1)/H(t_2) & \cdots & H(t_1)/H(t_n) \\ H(t_1)/H(t_2) & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ H(t_1)/H(t_n) & H(t_2)/H(t_n) & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{H^2(t_k)}{H^2(t_{k+1})}\right)$$

ce qui prouve, la fonction $H^2 = g/h$ étant strictement croissante, que Δ_n est strictement positif.

Ainsi, il existe un processus gaussien réel centré $(X_t)_{t\in I}$ qui vérifie (34); de plus, $G(0,0) = G(1,1) = 0$, donc $X_0 = X_1 = 0$. De plus, si $s < t$, on a

$$f_s'(t) = Kg(s)h'(t) = \frac{h'(t)}{h(t)} f_s(t)$$

donc le processus $(X_t)_{t\in I}$ est, avec le Corollaire 1, un processus de Markov qui satisfait à l'égalité (31) si l'on a posé $\alpha = h'/h$.

Un simple calcul permet alors de voir, avec les notations du Théorème 3, que

$$f'(t) - 2\alpha(t)f(t) = 1/p(t) \quad \text{et} \quad b^2(t)/a(t) - b'(t) = q(t). \qquad \square$$

L'exemple le plus simple d'applications de ces résultats est celui du pont brownien qui est associé à l'opérateur $P: y \mapsto -y''$.

Remarques. (1) On peut bien sûr, mais des problèmes d'unicité se posent, étudier d'une façon analogue le cas de $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}$. On voit par exemple apparaître le mouvement brownien (associé à $Py = -y''$) et le processus d'Ornstein-Uhlenbeck (associé à $Py = -y'' + \frac{1}{4}y$).

(2) L'intérêt d'une telle approche provient du fait qu'elle est susceptible de généralisations au cas multiparamétrique (voir Goldman, 1990). La propriété de Markov simple est en effet lue dans notre cas comme une propriété spatiale et non temporelle comme dans toute la théorie des processus de Markov.

Bibliographie

N. Bouleau, Processus Stochastiques et Applications (Hermann, Paris, 1988).

L. Carraro, Problèmes de prédiction pour le processus de Wiener à deux paramètres, Probab. Theory Rel. Fields 72 (1986) 619-635.

R.C. Dalang and F. Russo, A prediction problem for the Brownian sheet, to appear in: J. Multivariate Anal. (1990).

G.F.D. Duff, Partial Differential Equations (University of Toronto Press, 1962).

H. Dym and H.P. McKean, Gaussian Processes, Function Theory and the Inverse Spectral Problem (Academic Press, New-York, 1972).

A. Goldman, Techniques biharmoniques pour l'étude du mouvement brownien de P. Levy à trois paramètres, Preprint (1990).

P. Levy, A special problem of brownian motion, and a general theory of gaussian random functions, Proc. 3rd Berkeley Symp. on Math. Statist. and Probab. (University of California Press, Los Angeles, CA, 1956) pp. 133-175.

H.P. McKean, Brownian motion with several-dimensional time, Theory Probab. Appl. 8(4) (1963) 335-354.

Yu.A. Rozanov, Markov Random Fields (Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1982).

Yu.A. Rozanov, Some boundary value problems for generalized PDE, Bibos 313 (1988a).

Yu.A. Rozanov, Markov random fields and boundary problems for stochastic partial differential equations, Theory Probab. Appl. 32 (1988b) 1-29.

F. Russo, Champs markoviens et prédiction. Thèse de Docteur ès-Sciences, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (1987).