JOURNAL OF ALGEBRA 49, 525–536 (1977)

Über die unipotenten Klassen reduktiver Gruppen

KLAUS POMMERENING

Fachbereich Mathematik der Johannes-Gutenberg-Universität, Saarstraße 21, D-6500 Mainz, Bundesrepublik Deutschland

Communicated by B. Huppert

Received November 10, 1976

This paper investigates the classification of unipotent elements of reductive algebraic groups in good characteristic. The problem is reduced to an assertion concerning the stabilizers in a class of almost homogeneous linear actions. This assertion is proved for the exceptional groups G_2, F_4, and E_6.

EINLEITUNG

Die Bestimmung aller Konjugationsklassen von unipotenten Elementen einer reduktiven algebraischen Gruppe ist nach einem Satz von Springer [8, S.229] äquivalent zur Bestimmung aller Bahnen von nilpotenten Elementen in der zugehörigen Lie-Algebra unter der adjungierten Operation, wenn die Charakteristik des Grundkörpers gut für die Gruppe ist. Diese Klassifikations-Aufgabe wurde im Prinzip von Dynkin und Kostant in den fünfziger Jahren gelöst; die dabei verwendete Methode funktioniert allerdings nur unter wentlich stärkeren Einschränkungen der Charakteristik. Eine übersichtliche Darstellung davon wurde kürzlich von Bala und Carter gegeben [1–3].

Springer und Steinberg [8, S.235] vermuteten, daß das Problem für alle guten Charakteristiken eine einheitliche Lösung hat. In der Tat ist das ja in fast allen Fällen bekannt (mit speziellen Methoden für jede Gruppe): In $\mathbf{GL}_n$ und $\mathbf{SL}_n$ (Typ A_{n-1}) handelt es sich einfach um die Jordansche Normalform; in den orthogonalen und symplektischen Gruppen (Typen B_r, C_r, D_r) haben Springer und Wall die Konjugationsklassen bestimmt, siehe [8, Chap. IV]; in G_2 haben Jeurissen und Stuhler [9] dasselbe durchgeführt. Diese Beispiele zeigen auch, daß in "schlechter" Charakteristik die Klassifikation anders aussieht.

Die vorliegende Arbeit ist dem Problem gewidmet, einen einheitlichen Zugang zur Klassifikation der nilpotenten Elemente in guter Charakteristik zu finden. Das gelingt nicht ganz, und zwar aus folgendem Grund: Ich formuliere eine Vermutung, siehe (2.3), über die Stabilisatoren für eine gewisse Klasse von linearen Operationen, aus der man den Klassifikationssatz von Bala/Carter

ISSN 0021-8693

ziemlich einfach herleiten kann. Leider kann ich diese Vermutung nicht allgemein beweisen, sondern nur durch Einzelfall-Inspektion bei Gruppen von kleinem Rang. Immerhin erhalte ich dadurch die Klassifikation für F_4 und E_6, die bisher nicht in dieser Allgemeinheit bekannt war.

Bezeichnungen: Ich halte mich im wesentlichen an die Standard-Bezeichnungen von [4]. Der Kürze halber nenne ich eine zusammenhängende reduktive affine algebraische Gruppe einfach eine reduktive Gruppe; Entsprechendes gilt für halbeinfache Gruppen. Alle algebraischen Gruppen sind über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper k definiert und werden mit den Mengen ihrer k-wertigen Punkte identifiziert.

1. Parabolische Untergruppen und nilpotente Elemente

In diesem Paragraphen werden einige Definitionen und Bezeichnungen eingeführt und eine injektive Abbildung von der Menge der Konjugationsklassen ausgezeichneter parabolischer Untergruppen in die Menge der Klassen ausgezeichneter nilpotenter Elemente hergestellt (nach [2]).

(1.1) Sei G eine halbeinfache Gruppe, T ein maximaler Torus von G und q eine positive ganze Zahl. Eine Ein-Parameter-Untergruppe (EPU) $\lambda\colon \mathbf{G}_m \to T$ heißt *0–q-EPU von T*, wenn es eine Basis Δ des Wurzelsystems $\Phi = \Phi(T, G)$ gibt mit $\langle \alpha, \lambda \rangle = 0$ oder q für alle $\alpha \in \Delta$. Eine EPU $\lambda\colon \mathbf{G}_m \to G$ heißt *0–q-EPU von G*, wenn es einen maximalen Torus T von G gibt, so daß λ 0–q-EPU von T ist. Ein *0–q-Diagram in G* ist das Dynkin-Diagramm von G, wobei jeder Knoten mit dem Gewicht 0 oder q versehen ist. Daß jedes 0–1-Diagramm zu einer EPU von G gehört, gilt genau dann, wenn G vom adjungierten Typ ist.

Eine 0–q-EPU von G induziert eine Graduierung der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G wie folgt:

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} \mathfrak{g}_i \text{ mit } \operatorname{Ad} \lambda(c) \cdot X = c^{iq} X \text{ für alle } c \in \mathbf{G}_m \text{ und } X \in \mathfrak{g}_i .$$

Sei $G_0 = Z_G(\lambda(\mathbf{G}_m))^0$. Dann ist $\mathfrak{g}_0$ die Lie-Algebra von G_0 und jedes $\mathfrak{g}_i$ ein G_0-Untermodul von $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{g}_i$ ist (nach Wahl eines beliebigen maximalen Torus $T \supseteq \lambda(\mathbf{G}_m)$) die Summe der Wurzelräume $\mathfrak{g}_\beta$ mit $\beta \in \Phi_i := \{\alpha \in \Phi \mid \langle \alpha, \lambda \rangle = iq\}$. Zu λ gehört die parabolische Untergruppe P von G, deren Levi-Faktor G_0 ist und deren unipotentes Radikal U die Lie-Algebra $\mathfrak{u} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots$ hat. Für $\mathfrak{u}_2 := \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_3 \oplus \cdots$ gilt $[\mathfrak{u}\mathfrak{u}] \subseteq \operatorname{Lie}(U, U) \subseteq \mathfrak{u}_2$ und $\operatorname{Ad} U \cdot \mathfrak{u}_2 \subseteq \mathfrak{u}_2$. Ist die Charakteristik von k gut für G, gilt sogar $[\mathfrak{u}\mathfrak{u}] = \mathfrak{u}_2$ [2, S.407]. Die Graduierung hängt nur von P und G_0 ab und heißt daher *zu P gehörig*.

Sei umgekehrt q die Ordnung von $X(T)/\mathbf{Z}\Phi$ für einen maximalen Torus T, $P \supseteq T$ eine parabolische Untergruppe mit einem Levi-Faktor G_0 und dem unipotenten Radikal U. Δ sei eine Basis von Φ, so daß $\Phi(T, U)$ aus positiven Wurzeln besteht. Dann gehört P zu der durch

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \lambda \rangle &= 0 \quad \text{für} \quad \alpha \in \Delta \cap \Phi(T, G_0), \\ &= q \quad \text{für} \quad \alpha \in \Delta \cap \Phi(T, U), \end{aligned}$$

definierten 0–q-EPU von T.

Damit sind bei festem geeigneten q die wohlbekannten bijektiven Beziehungen zwischen

(i) der Menge der Konjugationsklassen von parabolischen Untergruppen von G,

(ii) der Menge der Konjugationsklassen von 0–q-EPU'n von G,

(iii) der Menge der 0–q-Diagramme in G

hergestellt.

(1.2) Sei G halbeinfach in guter Charakteristik. Nach dem Dichte-Bahn-Satz von Richardson [7] hat jede parabolische Untergruppe P von G eine dichte Bahn in der Lie-Algebra ihres unipotenten Radikals. Die Elemente dieser Bahn heißen die *P-regulären Elemente* von $\mathfrak{g}$. Ist X ein solches, so ist $Z_G(X)^0 \subseteq P$.

Satz. *Sei $P \subseteq G$ parabolisch und eine zugehörige Graduierung von $\mathfrak{g}$ gewählt. Dann gilt:*

(i) *$\mathfrak{g}_1$ ist fast-homogener G_0-Modul (d.h., G_0 hat eine dichte Bahn in $\mathfrak{g}_1$). Insbesondere ist* $\dim G_0 \geqslant \dim \mathfrak{g}_1$.

(ii) *Für $X \in \mathfrak{g}_1$ ist $Z_P(X) = Z_{G_0}(X) \cdot Z_U(X)$, wobei $U = R_u(P)$.*

Beweis. (i) siehe [2, S. 408], (ii) siehe [2, S. 423].

(1.3) Für die Begriffe *ausgezeichnete parabolische Untergruppe* und *ausgezeichnetes nilpotentes Element* sei auf [2] verwiesen. Die Bedingung, daß ein nilpotentes Element X in der Lie-Algebra einer halbeinfachen Gruppe G ausgezeichnet ist, kann auch als "$Z_G(X)^0$ unipotent" formuliert werden. Die ausgezeichneten parabolischen Untergruppen sind in [2] vollständig bestimmt. Eine 0–q-EPU und ein 0–q-Diagramm heißen ausgezeichnet, wenn die zugehörige parabolische Untergruppe ausgezeichnet ist. *Semireguläre nilpotente Elemente* sind wie in [8, S. 242] definiert.

Satz. *Sei P ausgezeichnete parabolische Untergruppe der halbeinfachen Gruppe G in guter Charakteristik. X sei ein P-reguläres Element von $\mathfrak{g}$. Dann gilt:*

(i) *X ist ausgezeichnet nilpotent.*

(ii) *Die Bahn von X unter $U = R_u(P)$ trifft den Unterraum $\mathfrak{g}_1$ von $\mathfrak{g}$ (bezüglich einer beliebigen zu P gehörigen Graduierung).*

Beweis. Siehe [2, S. 422].

KOROLLAR. *Ist P ausgezeichnet, so sind die Elemente der dichten G_0-Bahn von $\mathfrak{g}_1$ P-regulär und ausgezeichnet nilpotent.*

(1.4) Was wir bis jetzt erreicht haben, sind bijektive Beziehungen zwischen

(i) der Menge der Konjugationsklassen von ausgezeichneten parabolischen Untergruppen von G,

(ii) der Menge der Konjugationsklassen von ausgezeichneten 0–q-EPU'n von G,

(iii) der Menge der ausgezeichneten 0–q-Diagramme in G (q eine geeignete feste positive ganze Zahl), und eine injektive Abbildung von (i), (ii) oder (iii) in

(iv) die Menge der Klassen von ausgezeichneten nilpotenten Elementen in $\mathfrak{g}$; denn selbstverständlich sind zwei parabolische Untergruppen P und P' genau dann konjugiert, wenn je ein P-reguläres und ein P'-reguläres Element unter der adjungierten Operation in einer Bahn liegen.

Die Klassifikation der ausgezeichneten, und damit nach [3] aller, nilpotenten Elemente in guter Charakteristik ist vollendet, wenn gezeigt werden kann, daß diese letztere Abbildung auch surjektiv ist.

2. 0–1-MODULN

In diesem Paragraphen wird die Operation von G_0 auf $\mathfrak{g}_1$ aus (1.2) genauer untersucht. Die Bedeutung dieser Untersuchung liegt darin, daß später in (3.1) und (3.3) jedem ausgezeichneten nilpotenten Element ein 0–q-Diagramm zugeordnet wird.

(2.1) Sei G eine halbeinfache Gruppe vom adjungierten Typ, und sei ein 0–1-Diagramm in G gegeben. Wie in (1.1) ist die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ dadurch graduiert. Das Paar $(G_0, \mathfrak{g}_1)$ heißt dann der zum 0–1-Diagramm gehörige *0–1-Modul in G.* Im folgenden Satz (2.2) werden einige elementare, aber bemerkenswerte Eigenschaften dieses Typs von rationalen Moduln über reduktiven Gruppen zusammengestellt. Dazu:

LEMMA. *Sei Φ ein Wurzelsystem mit Basis Δ; das zu Δ gehörige Dynkin-Diagramm sei zum 0–1-Diagramm gemacht. Dann gibt es zu jeder Wurzel $\alpha \in \Phi_1$ ein $\beta \in \Delta \cap \Phi_1$ (eindeutig) und eine Folge $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in \Phi_0$, so daß $\beta + \gamma_1 + \cdots + \gamma_i \in \Phi_1$ für alle $i = 0, \ldots, m$, und $\beta + \gamma_1 + \cdots + \gamma_m = \alpha$.*

Beweis. In der Basis-Darstellung von α kommt genau ein $\beta \in \Delta \cap \Phi_1$ vor. Nun subtrahiere man von α sukzessive, so lange dies möglich ist, Elemente von

$\Delta \cap \Phi_0$, so daß das Resultat wieder eine Wurzel ist. Damit erreicht man eine Wurzel $\alpha' \in \Phi_1$ mit $\alpha' - \gamma \notin \Phi$ für alle $\gamma \in \Delta \cap \Phi_0$. α' ist entweder unzerlegbar und somit gleich β (dann sind wir fertig), oder $\alpha' - \beta =: \gamma_1 \in \Phi$; denn von zerlegbaren Wurzeln kann man immer eine Basis-Wurzel subtrahieren [5, S. 50]. Dann ist $\gamma_1 \in \Phi_0$, und wir sind ebenfalls fertig. Q.E.D.

(2.2) Satz. *Sei G eine halbeinfache Gruppe vom adjungierten Typ in guter Charakteristik.* $(G_0, \mathfrak{g}_1)$ *sei ein* 0–1*-Modul in G. Dann gilt:*

(i) $\mathfrak{g}_1$ *ist fast-homogener G_0-Modul.*

(ii) $\mathfrak{g}_1$ *ist als G_0-Modul vollständig reduzibel; die irreduziblen Untermoduln stehen in kanonischer bijektiver Beziehung zu den Knoten mit Gewicht* 1 *im zugehörigen* 0–1*-Diagramm.*

(iii) *Die Operation von G_0 auf $\mathfrak{g}_1$ ist separabel* (*d.h., alle Bahn-Abbildungen $G_0 \to G_0 \cdot X \subseteq \mathfrak{g}_1$ sind separabel* [4, S. 180]). *Insbesondere liegt $X \in \mathfrak{g}_1$ genau dann in der dichtrn G_0-Bahn, wenn* $[\mathfrak{g}_0 X] = \mathfrak{g}_1$.

(iv) *Ist für $X \in \mathfrak{g}_1$ die Zusammenhangskomponente G_{0X}^0 der Stabilitätsgruppe im halbeinfachen Teil G_0' enthalten, so verschwindet keine der Komponenten von X in den irreduziblen Untermoduln von $\mathfrak{g}_1$.*

Beweis. (i) siehe (1.2).

(ii) Für $\beta \in \Delta \cap \Phi_1$ sei $\Phi_1(\beta)$ die Menge aller Wurzeln in Φ_1, in deren Basis-Darstellung β vorkommt (notwendig mit Koeffizient 1). Dann ist

$$\mathfrak{g}_1(\beta) := \sum_{\alpha \in \Phi_1(\beta)} \mathfrak{g}_\alpha$$

unter T und allen Wurzelgruppen U_γ mit $\gamma \in \Phi_0$ invariant, also G_0-Untermodul von $\mathfrak{g}_1$. Damit ist

$$\mathfrak{g}_1 = \bigoplus_{\beta \in \Delta_1} \mathfrak{g}_1(\beta)$$

eine direkte Zerlegung in G_0-Untermoduln. Jeder G_0-Untermodul von $\mathfrak{g}_1(\beta)$ müßte auch T-Untermodul sein, also eine Summe von Wurzelräumen. Nach dem Lemma in (2.1) und den Chevalley–Formeln für die adjungierte Operation [5, S. 145] erzeugt aber $\mathfrak{g}_\beta$ ganz $\mathfrak{g}_1(\beta)$ als G_0-Modul, und $\mathfrak{g}_\beta$ liegt in jedem von einem $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Phi_1(\beta)$, erzeugten Untermodul. Also ist $\mathfrak{g}_1(\beta)$ irreduzibel.

(iii) Zu zeigen ist für beliebiges $X \in \mathfrak{g}_1$:

$$\operatorname{Lie} G_{0X} = \mathfrak{g}_{0X} \; (:= \{A \in \mathfrak{g}_0 \mid [AX] = 0\}).$$

Sei dazu $\lambda \colon \mathbf{G}_m \to T$ eine 0–q-EPU, die die gegebene Graduierung von $\mathfrak{g}$ erzeugt, $S := \lambda(\mathbf{G}_m)$, also $G_0 = Z_G(S)^0$. Da $G_{0X} = Z_G(X) \cap Z_G(S)^0$, ist für $H := Z_G(X)$ auch $G_{0X}^0 = Z_H(S)^0$. Ebenso ist $\mathfrak{g}_{0X} = \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(X) \cap \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(S) = \mathfrak{z}_\mathfrak{h}(S) = \operatorname{Lie} Z_H(S) =$

Lie G_{0X}, denn $\mathfrak{h} := \text{Lie}\, H = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(X)$ nach [8, S. 185], und für den Torus S gilt nach [4, S. 229] $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(S) = \mathfrak{g}_0$ und ebenso $\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(S) = \text{Lie}\, Z_H(S)$, da außerdem H von S normalisiert wird.

(iv) Angenommen, für $\beta \in \Delta_1$ ist die Komponente von X in $\mathfrak{g}_1(\beta)$ Null. Dann enthält der $\mathbf{Q}$-Abschluß $\mathbf{Q} \cdot \Phi(X) \cap \Phi$ von $\Phi(X) := \{\alpha \in \Phi_1 \mid X_\alpha \neq 0\}$ β nicht. Der eindimensionale Torus

$$\Big(\bigcap_{\alpha \in \Delta - \{\beta\}} \ker \alpha\Big)^0 \subseteq \bigcap_{\alpha \in \Phi(X)} \ker \alpha \subseteq T$$

ist nicht in G_0' enthalten und zentralisiert X. Q.E.D.

(2.3) THEOREM. *Sei G eine einfache Gruppe vom adjungierten Typ G_2, F_4 oder E_6 in guter Charakteristik. $(G_0, \mathfrak{g}_1)$ sei ein 0–1-Modul in G. Für ein $X \in \mathfrak{g}_1$ sei die Zusammenhangskomponente G_{0X}^0 der Stabilitätsgruppe unipotent. Dann ist das zugehörige 0–1-Diagramm ausgezeichnet, und X liegt in der dichten G_0-Bahn von $\mathfrak{g}_1$. Insbesondere ist G_{0X} endlich.*

Der Beweis wird im Rest dieses Paragraphen geführt.

Ad hoc sei definiert: Eine halbeinfache Gruppe hat die *Eigenschaft* (E), wenn die Aussage des Theorems für G gilt. Ich vermute, daß alle halbeinfachen Gruppen die Eigenschaft (E) haben. Ein allgemeiner Beweis müßte die Schwierigkeit überwinden, daß man über die Bahn-Struktur einer Aktion meist sehr wenig weiß. Auf jeden Fall müssen wohl recht spezielle Eigenschaften von 0–1-Moduln verwendet werden, denn z.B. kann man jede charakterfreie Untergruppe bei einer geeigneten linearen Aktion als Stabilitätsgruppe finden [4, S. 161].

Der Beweis beruht auf einer weit verzweigten Fall-Unterscheidung: Alle 0–1-Moduln in G_2, F_4 und E_6 werden einzeln untersucht. Die auf den ersten Blick ziemlich große Anzahl läßt sich auf folgende Weise in den Griff bekommen:

(a) Stoßen im 0–1-Diagram zwei Einsen aneinander, so kann man die Verbindungslinie weglassen und die zwei neuen Diagramme einzeln untersuchen. Besteht das Diagramm nur aus Einsen, ist die Behauptung erfüllt, denn G_0 ist ein Torus.

(b) Viele 0–1-Diagramme scheiden aus Dimensionsgründen aus: Wenn nämlich $\dim G_0 - \dim \mathfrak{g}_1$ die Dimension der maximalen unipotenten Untergruppen von G_0 übertrifft, kann kein Stabilisator eine unipotente Zusammenhangskomponente haben.

(c) Die übrig bleibenden Diagramme liefern elementar zu beschreibende Aktionen, an denen die Behauptung jeweils ziemlich einfach verifizierbar ist. Zudem liefern die beiden folgenden Abschnitte weitere Reduktionen.

(2.4) Das Folgende ist bekannt (oder wenigstens leicht zu beweisen): Sei

G reduktiv mit Borel-Untergruppe B und maximalem Torus $T \subseteq B$ und $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ ein vollständig reduzibler G-Modul mit irreduziblen V_i. $x = x_1 + \cdots + x_m$ mit $x_i \in V_i$ werde von der maximalen unipotenten Untergruppe B_u stabilisiert. Dann ist $k \cdot x_i$ für jedes i sogar ein B-invarianter Unterraum, und zwar ist $x_i = 0$ oder maximaler Vektor für V_i. Insbesondere ist $\sum kx_i$ T-Untermodul; ist $m < \operatorname{Rang} G$, so operiert also ein nicht-trivialer Untertorus von T trivial auf $\sum kx_i$ und stabilisiert insbesondere x. Damit wird die Reduktion (2.3) (b) verschärft:

Ist G_0 kein Torus, so kann eine maximale unipotente Untergruppe von G_0 nicht Zusammenhangskomponente eines Stabilisators in $\mathfrak{g}_1$ sein.

(2.5) Satz. *Seien V und W k-Vektorräume mit $l = \dim V \geqslant n = \dim W$, $H \subseteq SL(W)$ eine abgeschlossene Untergruppe. $G := \mathbf{G}_m \times SL(V) \times H$ operiert dann kanonisch auf $V \otimes W$. Falls* (i) *$l > n$ oder* (ii) *$\operatorname{Rang} H \geqslant 1$, wird jedes Element in $V \otimes W$ von einem nicht-trivialen Torus in G stabilisiert.*

Beweis. $V \otimes W$ sei mit dem Raum $\mathbf{M}_{l,n}(k)$ der $l \times n$-Matrizen identifiziert. Dann operiert $SL(V) = \mathbf{SL}_l(k)$ durch Matrizen-Multiplikation von links, $H \subseteq SL(W) = \mathbf{SL}_n(k)$ durch Matrizen-Multiplikation von rechts. Hat die Matrix $X \in \mathbf{M}_{l,n}(k)$ höchstens $l - 1$ linear unabhängige Spalten, so ist sie mit $\mathbf{SL}_l(k)$ in die Form $\binom{X'}{0}$ mit $X' \in \mathbf{M}_{l-1,n}(k)$ transformierbar und wird dann von der EPU

$$c \mapsto \left(1/c, \begin{pmatrix} c \cdot \mathbf{1}_{l-1} & 0 \\ 0 & 1/c^{l-1} \end{pmatrix}, \mathbf{1}_n\right) \in \mathbf{G}_m \times \mathbf{SL}_l(k) \times H$$

stabilisiert. Damit bleibt nur der Fall: $l = n$ und alle Spalten von X sind linear unabhängig. Dann aber ist X mit $\mathbf{SL}_l(k)$ und $\mathbf{G}_m$ in die Form $\mathbf{1}_l$ transformierbar und wird dann von $(1, A^{-1}, A) \in \mathbf{G}_m \times \mathbf{SL}_l(k) \times H$ für jedes $A \in H \subseteq \mathbf{SL}_l(k)$ stabilisiert, wegen $\operatorname{Rang} H \geqslant 1$ also auch von einem nicht-trivialen Torus. Q.E.D.

Beispiele. Damit erfüllt das Diagramm 010 in A_3 das Theorem (2.3). Aber auch 01010 in A_5 erfüllt (2.3); es handelt sich nämlich um die Operation von $\mathbf{SL}_2 \times \mathbf{G}_m \times \mathbf{SL}_2 \times \mathbf{G}_m \times \mathbf{SL}_2$ auf $\mathbf{M}_{2,2} \oplus \mathbf{M}_{2,2}$, die durch

$$(A_1, c_1, A_2, c_2, A_3) \cdot (X_1, X_2) = (c_1 A_1 X_1 A_2^{-1}, c_2 A_2 X_2 A_3^{-1})$$

gegeben ist. Auf X_2 operiert nur $\mathbf{SL}_2 \times \mathbf{G}_m \times \mathbf{SL}_2$, der dritte bis fünfte Faktor, nicht-trivial, und X_2 wird darin, wie eben gesehen, von einem nicht-trivialen Torus stabilisiert. Dieser Torus ist entweder im letzten Faktor $\mathbf{G}_m \times \mathbf{SL}_2$ enthalten und wird somit von X_1 unangetastet gelassen, oder seine

Projektion H in den mittleren Faktor $\mathbf{SL}_2$ ist nicht-trivial. Damit ist (2.5) auf X_1 anwendbar und ergibt die Behauptung.

(2.6) Bei den Reduktionen in den Fällen G_2, F_4 und E_6 treten die folgenden Diagramme vom Typ A auf:

$$10, \quad 100, \quad 010, \quad 101, \quad 0100, \quad 1010, \quad 00100, \quad 10100, \quad 10101.$$

Nach Anwendung von (2.5) bleiben nur das vierte, das mit (2.4) erledigt wird, und das letzte übrig. Dort kämen wegen (2.4) nur die Elemente der dichten Bahn in Betracht; deren (eindimensionaler) Stabilisator ist jedoch ein Torus.

Vom Typ B und C interessieren die Diagramme

$$00 \Rightarrow 1, \quad 10 \Rightarrow 1, \quad 00 \Leftarrow 1, \quad 10 \Leftarrow 1.$$

Die ersten drei kommen aus Dimensionsgründen nicht in Frage. Das vierte ist ausgezeichnet, d.h., in der dichten Bahn ist der Stabilisator endlich. Auf die übrigen Bahnen ist (2.4) anwendbar.

Vom Typ D kommen vor

$$\begin{matrix}101\\0\end{matrix}, \quad \begin{matrix}101\\1\end{matrix}, \quad \begin{matrix}0001\\0\end{matrix}, \quad \begin{matrix}1001\\0\end{matrix}, \quad \begin{matrix}0101\\0\end{matrix}, \quad \begin{matrix}0001\\1\end{matrix}, \quad \begin{matrix}0101\\1\end{matrix}, \quad \begin{matrix}1001\\1\end{matrix}.$$

Nach Anwendung von (2.4) und (2.5) bleiben nur das zweite und das letzte übrig. Für das zweite gilt dasselbe wie für $10 \Leftarrow 1$, beim letzten kommt aus Dimensionsgründen wieder nur die dichte Bahn in Betracht, wo die Stabilitätsgruppe jedoch reduktiv ist.

Für G_2 sind noch $1 \Lleftarrow 0$ und $0 \Lleftarrow 1$ zu untersuchen. Das erste scheidet aus Dimensionsgründen aus, im zweiten interessiert nur die dichte Bahn, wo der Stabilisator aber endlich ist.

Nun zu F_4. Bei den ersten drei von

$$10 \Leftarrow 00, \quad 01 \Leftarrow 00, \quad 01 \Leftarrow 01, \quad 00 \Leftarrow 01, \quad 10 \Leftarrow 01$$

hilft das Dimensions-Argument, bei den übrigen beiden ist nur die dichte Bahn zu untersuchen, was leicht ist. Bei

$$00 \Leftarrow 10, \quad 10 \Leftarrow 10$$

ist der Stabilisator in der dichten Bahn endlich, sonst seine Zusammenhangskomponente nicht unipotent. Das erfordert aber schon eine ausführliche Untersuchung, die besonders im ersten Fall etwas länger dauert—es handelt sich dabei um die natürliche Operation von $\mathbf{G}_m \times \mathbf{SL}_3 \times \mathbf{SL}_2$ auf $S^2(k^3) \otimes k^2$. Die Details sind elementar und werden daher hier nicht ausgeführt.

Bei E_6 erledigen sich

$$\begin{matrix}10000\\0\end{matrix}, \quad \begin{matrix}00000\\1\end{matrix}, \quad \begin{matrix}10100\\0\end{matrix}, \quad \begin{matrix}10000\\1\end{matrix}, \quad \begin{matrix}01000\\1\end{matrix}, \quad \begin{matrix}01010\\1\end{matrix}$$

(und die dazu symmetrischen Diagramme) durch (2.4) und (2.5), während für

$$\begin{matrix}01000\\0\end{matrix}, \quad \begin{matrix}00100\\0\end{matrix}, \quad \begin{matrix}10100\\0\end{matrix}, \quad \begin{matrix}10010\\0\end{matrix}, \quad \begin{matrix}01010\\0\end{matrix}, \quad \begin{matrix}10101\\0\end{matrix}, \quad \begin{matrix}10010\\1\end{matrix}, \quad \begin{matrix}10001\\1\end{matrix}$$

eine genaue Untersuchung nötig ist. Das letzte repräsentiert z.B. die Operation von $\mathbf{SL}_4 \times \mathbf{G}_m \times \mathbf{G}_m \times \mathbf{G}_m$ auf $k^4 \oplus (k^4)^* \oplus \Lambda^2(k^4)$.

Im Prinzip könnte man E_7 und E_8 mit endlichem Aufwand analog behandeln. Die Zahl der Fälle schreckt aber von einer Durchführung ab.

3. Die Klassifikation der nilpotenten Elemente

In diesem Paragraphen sei die Charakteristik des Grundkörpers stets gut für die behandelte Gruppe.

(3.1) Sei G eine halbeinfache Gruppe vom adjungierten Typ. X sei ein nilpotentes Element der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G, $N(X)$ die Untergruppe aller Elemente von G, die die Gerade kX in sich abbilden. $N(X)$ enthält einen Torus S, der auf $kX - \{0\}$ transitiv operiert [8, S. 185]; daher ist $\dim[N(X)/Z_G(X)] = 1$.

Satz. *Ist X semiregulär nilpotent, so gibt es bis auf Konjugation mit $Z_G(X)$ genau eine EPU $\lambda: \mathbf{G}_m \to G$ mit $\operatorname{Ad}\lambda(c) \cdot X = cX$ für alle $c \in \mathbf{G}_m$. Ist $T \supseteq \lambda(\mathbf{G}_m)$ ein maximaler Torus von G und Δ eine Basis des Wurzelsystems $\Phi = \Phi(T, G)$ mit $\langle\alpha, \lambda\rangle \geqslant 0$ für alle $\alpha \in \Delta$, so ist $\langle\alpha, \lambda\rangle = 0$ oder 1 für alle $\alpha \in \Delta$.*

Eine solche EPU heißt *zu X passend.*

Beweis. $Z_G(X)$ ist zusammenhängend unipotent [8, S. 242]. Also ist $N(X)^0$ auflösbar, $Z_G(X)$ die maximale unipotente Untergruppe von $N(X)^0$ und der Torus S aus der Vorbemerkung eindimensional und maximal in $N(X)^0$. Insbesondere ist S bis auf Konjugation mit $Z_G(X)$ eindeutig bestimmt. Ist $\lambda: \mathbf{G}_m \to S$ ein Isomorphismus, so gibt es also eine ganze Zahl $r \neq 0$, o.B.d.A. $r > 0$, mit

$$\operatorname{Ad}\lambda(c) \cdot X = c^r X \qquad \text{für alle} \quad c \in \mathbf{G}_m\,,$$

und dadurch ist λ bei festem r bis auf Konjugation mit $Z_G(X)$ eindeutig bestimmt.

Die Zerlegung von X in seine Komponenten in den T-Wurzelräumen hat die Form

$$X = \sum_{\alpha>0} X_\alpha \qquad \text{mit} \quad X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha,$$

denn X liegt tangential zu der durch Δ definierten maximalen unipotenten Untergruppe. Durch $\Psi := \{\alpha \in \Phi \mid \langle\alpha, \lambda\rangle \in r\mathbf{Z}\}$ ist ein abgeschlossenes Untersystem von Φ definiert, und

$$\Phi(X) := \{\alpha \in \Phi \mid X_\alpha \neq 0\} \subseteq \{\alpha \in \Phi \mid \langle\alpha, \lambda\rangle = r\} \subseteq \Psi.$$

Es ist

$$\bigcap_{\alpha\in\Phi(X)} \ker\alpha \supseteq \bigcap_{\alpha\in\Psi} \ker\alpha,$$

und jedes Element davon ist halbeinfach und zentralisiert X. Also müssen beide Durchschnitte trivial sein. Da die Ordnung von $X(T)/\mathbf{Z}\Psi$ nicht durch die Charakteristik teilbar ist [8, S. 178], muß $\mathbf{Z}\Psi = X(T) = \mathbf{Z}\Phi$ sein (Dualität von Torus und Charaktergruppe), also $\Psi = \mathbf{Z}\Psi \cap \Phi = \Phi$.

Sei nun weiter $\Delta' := \{\alpha \in \Delta \mid \langle\alpha, \lambda\rangle = 0 \text{ oder } r\}$. Dann liegt X tangential zu der von Δ' induzierten radiziellen reduktiven Untergruppe G' von G mit $T \subseteq G'$. Da G' ein mindestens eindimensionales Zentrum hätte, wenn es $\neq G$ wäre, muß also $G' = G$ und somit $\Delta' = \Delta$ sein.

Da $X(T) = \mathbf{Z}\Phi$, kann λ im Dualmodul $X^*(T)$ durch r dividiert werden, und λ/r erfüllt die Behauptung. Q.E.D.

(3.2) KOROLLAR. *Hat G die Eigenschaft* (E), *so ist jedes semireguläre nilpotente Element regulär für eine ausgezeichnete parabolische Untergruppe von G.*

Beweis. Wählt man λ nach (3.1) passend zu X, so hat man nach (1.1) ein 0–1-Diagramm mit $X \in \mathfrak{g}_1$. Da $G_{0X} \subseteq Z_G(X)$ unipotent ist, ist nach (2.3) das 0–1-Diagramm ausgezeichnet, also auch die zugehörige parabolische Untergruppe P. Nach (1.3) ist X P-regulär. Q.E.D.

Dieses Korollar ist im Grunde schon der Hauptschritt auf dem Wege zur Klassifikation der nilpotenten Elemente. Um ein übersichtliches Ergebnis à la Bala/Carter zu erhalten, muß allerdings die Voraussetzung "semiregulär" zu "ausgezeichnet" abgeschwächt werden. Dieser technische Schlenker entspricht Lemma 4.1 und Theorem 4.2 von [2], ist in der jetzigen Situation aber etwas komplizierter.

(3.3) SATZ. *Sei G einfach. $X \in \mathfrak{g}$ sei ausgezeichnet nilpotent. Dann gibt es eine abgeschlossene Untergruppe H von G mit den Eigenschaften:*

(i) *H ist halbeinfach, radiziell und enthält einen maximalen Torus T von G;*

(ii) *sind $\Phi = \Phi(T, G)$ und $\Psi = \Phi(T, H)$ die zugehörigen Wurzelsysteme, so entsteht Ψ aus Φ durch höchstens eine elementare Abänderung; insbesondere ist $\mathbf{Z}\Phi/\mathbf{Z}\Psi$ zyklisch, etwa von der Ordnung q; so daß gilt:*

(iii) *Es gibt bis auf Konjugation mit $Z_H(X)^0$ genau eine EPU $\lambda: \mathbf{G}_m \to H$ mit* $\operatorname{Ad} \lambda(c) \cdot X = c^q X$ *für alle* $c \in \mathbf{G}_m$;

(iv) *ist* (o.B.d.A.) $\lambda(\mathbf{G}_m) \subseteq T$ *und Π eine Basis von Ψ mit $\langle \alpha, \lambda \rangle \geqslant 0$ für alle $\alpha \in \Pi$, so ist $\langle \alpha, \lambda \rangle = 0$ oder q für alle $\alpha \in \Pi$.*

ERLÄUTERUNG. Eine *elementare Abänderung* ist ein Einzelschritt im Borel-de Siebenthal-Algorithmus zur Gewinnung von Untersystemen von Φ, vgl. [6, S. 47]. Die Voraussetzung "G einfach" dient nur zur bequemeren Formulierung.

Beweis. $Z_G(X)^0$ ist zusammenhängend und unipotent. Der Beweis von (3.1) funktioniert nun mit $Z_G(X)^0$ statt $Z_G(X)$, nur daß jetzt eventuell Ψ ein echtes Untersystem von Φ ist. Nach [6, S. 46–47] ist Ψ jedoch wenigstens noch von dem in (ii) beschriebenen Typ. Wie bei (3.1) gilt für eine geeignete Basis Π von Ψ: $\langle \alpha, \lambda \rangle = 0$ oder r für alle $\alpha \in \Pi$. Ersetzt man noch r durch q und λ durch $q\lambda/r$, so folgt die Behauptung. Q.E.D.

KOROLLAR. *Ist* (E) *erfüllt, so ist das Diagramm von λ bezüglich Π ein ausgezeichnetes* 0–q-*Diagramm.*

Beweis. (2.3) ist anwendbar mit den trivialen Modifikationen, die beim Übergang von H zur adjungierten Gruppe H_a und vom 0–q-Diagramm in H zum entsprechenden 0–1-Diagramm in H_a auftreten. Q.E.D.

(3.4) Unter den Voraussetzungen von (3.3) will ich nun zeigen, daß ein ausgezeichnetes 0–q-Diagramm in H entweder ein 0–q-Diagramm in G induziert, oder daß andernfalls das 0–q-Diagramm in H nicht von einem ausgezeichneten nilpotenten Element in $\mathfrak{g}$ stammen kann.

LEMMA. *Ein ausgezeichnetes* 0–q-*Diagramm in H induziert ein* 0–q-*Diagramm in G außer in den drei Fällen*

(i) $\Phi = E_7$, $\Psi = 2A_3 \cup A_1$,

(ii) $\Phi = E_8$, $\Psi = D_5 \cup A_3$,

(iii) $\Phi = E_8$, $\Psi = A_7 \cup A_1$

mit $q = 4$, wobei es sich jeweils um das "reguläre" 0–4-*Diagramm* (*alle Gewichte* 4) *in Ψ handelt.*

Beweis. Es ist $q \leqslant 6$. Der Fall $q = 2$ steht in [2, Lemma 4.1]. Genauso gehen die Fälle $q = 3, 5$ oder 6 (die nur bei den Ausnahmesystemen auftreten) und $q = 4$ bei F_4, und außerdem $q = 4$ für $\Phi = E_8$, $\Psi = D_5 \cup A_3$ mit dem "semiregulären" 0–q-Diagramm in Ψ. Daher bleiben nur die Fälle (i)–(iii) übrig. Q.E.D.

Den (leichten) Beweis, daß die drei Ausnahmefälle nicht von einem ausgezeichneten nilpotenten Element in $\mathfrak{g}$ stammen, lasse ich hier weg, da ich (E) für E_7 und E_8 nicht bewiesen habe.

(3.5) THEOREM. *Sei G eine halbeinfache Gruppe vom adjungierten Typ in guter Charakteristik mit* (E). *X sei ein ausgezeichnetes nilpotentes Element in der Lie-Algebra von G. Dann ist X regulär für eine ausgezeichnete parabolische Untergruppe von G.*

Beweis. Sei o.B.d.A. G einfach. Ich wähle nach (3.3) zu X eine 0–q-EPU von G für ein geeignetes q. Nach (3.4) gibt es auch eine 0–1-EPU λ von G mit $X \in \mathfrak{g}_1$. Nach (2.3) folgt wie in (3.2), daß λ ausgezeichnet und X regulär für die zugehörige ausgezeichnete parabolische Untergruppe ist. Q.E.D.

KOROLLAR. *Der Klassifikationssatz von Bala/Carter gilt für halbeinfache Gruppen mit* (E) *auch unter der abgeschwächten Voraussetzung, daß die Charakteristik gut ist; auf jeden Fall also für G_2, F_4, E_6.*

LITERATUR

1. P. BALA AND R. W. CARTER, The classification of unipotent and nilpotent elements, *Indag. Math.* **36** (1974), 94–97.
2. P. BALA AND R. W. CARTER, Classes of unipotent elements in simple algebraic groups, I, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **79** (1976), 401–425.
3. P. BALA AND R. W. CARTER, Classes of unipotent elements in simple algebraic groups, II, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **80** (1976), 1–18.
4. A. BOREL, "Linear Algebraic Groups," Benjamin, New York, 1969.
5. J. E. HUMPHREYS, "Introduction to Lie Algebras and Representation Theory," Springer–Verlag, New York/Heidelberg/Berlin, 1972.
6. K. POMMERENING, Fixpunktmengen von halbeinfachen Automorphismen in halbeinfachen Lie-Algebren, *Math. Ann.* **221** (1976), 45–54.
7. R. W. RICHARDSON, JR., Conjugacy classes in parabolic subgroups of semisimple algebraic groups, *Bull. London Math. Soc.* **6** (1974), 21–24.
8. T. A. SPRINGER AND R. STEINBERG, Conjugacy classes, *in* "Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups," (A. Borel *et al.*, Eds.) Springer–Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1970.
9. U. STUHLER, Unipotente und nilpotente Klassen in einfachen Gruppen und Liealgebren vom Typ G_2, *Indag. Math.* **33** (1971), 365–378.