JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 121, 486–507 (1994)

Géométrie différentielle locale sur le dual tempéré d'un groupe de Lie semi-simple

A. GUICHARDET

Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique, 91.128 Palaiseau, France

Communicated by M. Vergne

Received September 9, 1992

Delorme proved that the Fell topology on the tempered dual of a real semi simple group G is rather simple: roughly speaking, it is identical with the "parameter topology." The aim of this paper is to prove that the "differential geometry" of the tempered dual is very simple, too; by differential geometry, we mean three types of objects: the categories of finite length $(\mathfrak{g}, K)$-modules with tempered subquotients, the Ext^n-groups between such modules, and the deformations of such modules.

1. INTRODUCTION

1.1. *Généralités*

Rappelons que le *dual tempéré* (ou *réduit*) $\hat{G}_{\mathrm{temp}}$ d'un groupe de Lie semi-simple réel G est l'ensemble des $(\mathfrak{g}, K)$-modules simples unitaires tempérés, et qu'un $(\mathfrak{g}, K)$-module simple unitaire tempéré est un sous-module simple d'une série principale unitaire généralisée $I_{P,\sigma,\lambda}$ où P est sous-groupe parabolique cuspidal, de décomposition de Langlands $P = MAN$, $\sigma \in \hat{M}_d$ (série discrète de M), et $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$. Delorme a montré dans [De.3] que la topologie (de Fell) sur $\hat{G}_{\mathrm{temp}}$ est très simple, identique, en gros, à la "topologie des paramètres"; en outre Wassermann a élucidé dans [Was] la structure de la C^*-algèbre réduite de G, dont $\hat{G}_{\mathrm{temp}}$ est le dual; elle est elle-même extrêmement simple, et rappelée au n° 8.3.

On se propose, dans ce travail, de montrer que la "Géométrie différentielle" sur $\hat{G}_{\mathrm{temp}}$ est, elle aussi, très simple; on entend ici par "Géométrie différentielle" l'ensemble de trois types d'objets: les catégories de $(\mathfrak{g}, K)$-modules de longueur finie à sous-quotients simples dans $\hat{G}_{\mathrm{temp}}$, les groupes $\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g},K}$ entre deux tels $(\mathfrak{g}, K)$-modules, et les déformations de ces (g, K)-modules; l'étude d'un quatrième type d'objets—l'algèbre des "fonctions régulières" sur $\hat{G}_{\mathrm{temp}}$—sera seulement esquissée au n° 8.3.

1.2. *Catégories de $(\mathfrak{g}, K)$-modules de longueur finie*

Plusieurs auteurs se sont récemment intéressés au problème suivant: on se donne un groupe de Lie semi-simple réel G et un ensemble fini $\mathscr{E}$ de

0022-1236/94 $6.00

$(\mathfrak{g}, K)$-modules simples, et on cherche à décrire la catégorie $\mathrm{Ext}(\mathfrak{g}, K; \mathscr{E})$ des $(\mathfrak{g}, K)$-modules de longueur finie dont tous les sous-quotients simples appartiennent à $\mathscr{E}$. Qu'entend-on exactement par "décrire la catégorie $\mathrm{Ext}(\mathfrak{g}, K; \mathscr{E})$"? L'idéal serait de donner une classfication complète de ses objets indécomposables, mais on a de bonnes raisons de penser que c'est impossible dès que le rang réel de G est plus grand que 1. Le mieux qu'on puisse espérer est de construire une algèbre A (sous-entendu: complexe et à unité) telle que la catégorie $\mathrm{Ext}(\mathfrak{g}, K; \mathscr{E})$ soit équivalente à la catégorie, que nous noterons mod A, des A-modules à gauche de dimension finie. Se pose alors la question de l'unicité de A. La réponse se trouve implicitement dans les travaux de Gabriel et Mitchell sur les catégories de modules; nous rappelons brièvement le résultat au n° 3.4; disons seulement ici qu'il existe une unique algèbre *admissible sobre* A telle que les catégories $\mathrm{Ext}(\mathfrak{g}, K; \mathscr{E})$ et mod A soient équivalentes. Il est donc intéressant de chercher à décrire cette algèbre le plus explicitement possible.

Voici maintenant un bref historique de la question.

(a) En 1967 et 1970, Gelfand, Graev, et Ponomarev donnent une classification complète des modules indécomposables pour $G = SL(2, C)$, ainsi que des formules explicites pour l'action de $\mathfrak{g}$ dans ces modules.

(b) En 1973, Nazarova et Roiter résolvent le même problème pour $SL(2, R)$, après que I. M. Gelfand ait montré comment le ramener à la recherche des représentations indécomposables d'un certain carquois.

(c) En 1978, Bernstein *et al.* indiquent comment construire, G étant maintenant semi-simple quelconque, une algèbre A telle $\mathrm{Ext}(\mathfrak{g}, K; \mathscr{E})$ et mod A soient équivalentes.

(d) En 1980 et 1981, Khoroshkin donne une description plus précise de cette algèbre, puis une classification complète des modules indécomposables pour $G = SO(n, 1)$, tout en affirmant qu'il est impossible de faire de même pour $SU(n, 1)$ et $Sp(n, 1)$ lorsque $n \geqslant 2$.

(e) En 1981, Speh obtient des résultats partiels dans le cas de deux modules simples dont l'un est de dimension finie, et G semi-simple quelconque.

(f) En 1985, Delorme démontre que, si $I_{P, \sigma, \lambda}$ est une série principale généralisée simple, σ étant une série discrète et λ non nécessairement imaginaire pure, alors la catégorie $\mathrm{Ext}(\mathfrak{g}, K; \{I_{P, \sigma, \lambda}\})$ est équivalente à celle des $S\mathfrak{a}$-modules de dimension finie dont tous les sous-quotients simples sont isomorphes au module "évaluation en 0."

(g) Dans un travail à paraître, Gaillard montre que l'algèbre A est "de Koszul" au sens de [Be.Gi.Sc.] (ou "formelle" au sens de [Be.Gi.]) lorsque $G = \mathrm{Spin}(n, 1)$ ou $SU(n, 1)$.

Nous étudions ici le cas où $\mathscr{E}$ est l'ensemble des sous-modules simples d'une série principale généralisée unitaire; nous démontrons (théorème 1) que l'algèbre admissible sobre de la catégorie Ext$(\mathscr{g}, K; \mathscr{E})$ est le produit croisé d'une algèbre de séries formelles par un groupe fini abélien (il en résulte qu'elle est "de Koszul"). Nous en déduisons (théorème 3) que si E est un $(\mathscr{g}, K)$-module simple tempéré, l'algèbre admissible sobre de la catégorie Ext$(\mathscr{g}, K; \{E\})$ est une algèbre de séries formelles.

1.3. *Groupes* $\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{g}, K}$ *entre* $(\mathscr{g}, K)$*-modules de longueur finie*

On dispose actuellement, à leur sujet, des renseignements suivants:

(a) ils sont de dimension finie ([Bo.Wal, I.2.8])

(b) on a $\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{g}, K}(E_1, E_2) = 0$ $\forall n > 0$ si E_1 et E_2 sont des séries discrètes, ou si $E_1 = E_2$ est une limite de séries discrètes (résultat non publié de Schmid et Zuckerman)

(c) si $I_{P, \sigma, \lambda}$ est une série principale généralisée unitaire ou non, σ étant une série discrète, l'algèbre de cohomologie $\mathrm{Ext}^*_{\mathscr{g}, K}(I_{P, \sigma, \lambda}, I_{P, \sigma, \lambda})$ est vectoriellement isomorphe au produit croisé d'une algèbre extérieure par un groupe fini; on a un isomorphisme d'algèbres dans chacun des cas suivants:

— Re $\lambda = 0$ et le sous-groupe $W^0_{\sigma, \lambda}$ est trivial ([Gu.2]); dans ce cas on connaît aussi les groupes $\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{g}, K}$ entre sous-modules simples de $I_{P, \sigma, \lambda}$;

— P est minimal, σ est triviale, et $I_{P, \sigma, \lambda}$ est simple ([Gu.3]).

Nous nous intéressons ici au cas où Re λ est nul, et où $W^0_{\sigma, \lambda}$ est arbitraire, mais nous n'obtenons de résultats que pour les groupes $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{g}, K}$ (théorème 2).

1.4. *Déformations de* $(\mathscr{g}, K)$*-modules*

On peut envisager deux sortes de déformations—formelles ou concrètes—d'un $(\mathscr{g}, K)$-module E; les premières sont intimement liées à la catégorie Ext$(\mathscr{g}, K; \{E\})$ comme nous l'expliquons au n° 3.2; nous démontrons entre autres choses que, si E est simple et tempéré, tout élément de $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{g}, K}(E, E)$ est la dérivée d'une déformation formelle de E (théorème 3). Par contre l'étude des déformations concrètes (ou familles de représentations dépendant différentiablement d'un paramètre) sera laissée pour un travail ultérieur.

*

* *

Je tiens à remercier Wallach et Vogan avec lesquels j'ai eu d'utiles conversations, ainsi que Delorme, dont les travaux ont fourni l'essentiel des outils utilisés ici.

2. ENONCE DES RÉSULTATS

2.1.

On désigne par G un groupe de Lie semi-simple réel connexe de centre fini, par K un sous-groupe compact maximal, par $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ leurs algèbres de Lie, par $\mathrm{Mod}(\mathfrak{g}, K)$ la catégorie des $(\mathfrak{g}, K)$-modules.

2.2.

On fixe un sous-groupe parabolique cuspidal P de G, de décomposition de Langlands $P = MAN$; un élément σ de $\hat{M}_d$ (série discrète de M); et un élément λ de $i\mathfrak{a}^*$ (ensemble des formes linéaires imaginaires pures sur $\mathfrak{a}$, algèbre de Lie de A). On note W le groupe de Weyl de A, $W_{\sigma,\lambda}$ le stabilisateur de (σ, λ) dans W; on rappelle la suite exacte de groupes

$$1 \to W^0_{\sigma,\lambda} \to W_{\sigma,\lambda} \to R_{\sigma,\lambda} \to 1,$$

où $W^0_{\sigma,\lambda}$ est engendré par des réflexions, et $R_{\sigma,\lambda}$ est abélien; ce dernier opère naturellement dans $(S\mathfrak{a}_c)^{W^0_{\sigma,\lambda}}$, ensemble des éléments $W^0_{\sigma,\lambda}$-invariants de $S\mathfrak{a}_c$, que l'on notera $\mathscr{B}$.

D'après [De.1], proposition A.4, il existe un espace vectoriel complexe ℓ, une représentation de $R_{\sigma,\lambda}$ dans ℓ, et une application $\mathscr{B} \to S\ell$ qui est un isomorphisme d'algèbres et de $R_{\sigma,\lambda}$-modules.

Le $(\mathfrak{g}, K)$-module "série principale" $I_{P,\sigma,\lambda}$ est somme directe de modules simples, de multiplicité 1, indexés par les éléments de $\widehat{R_{\sigma,\lambda}}$, soit

$$I_{P,\sigma,\lambda} = \bigoplus_{\chi \in \widehat{R_{\sigma,\lambda}}} I^{\chi}_{P,\sigma,\lambda}.$$

On notera $\mathscr{E}$ l'ensemble des $I^{\chi}_{P,\sigma,\lambda}$, χ parcourant $\widehat{R_{\sigma,\lambda}}$, et $\mathrm{Ext}(\mathfrak{g}, K; \mathscr{E})$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}(\mathfrak{g}, K)$ formée des modules de longueur finie dont tous les sous-quotients simples appartiennent à $\mathscr{E}$.

THÉORÈME 1. *L'algèbre admissible sobre de la catégorie* $\mathrm{Ext}(\mathfrak{g}, K; \mathscr{E})$ *est le produit croisé* $(\widehat{S\mathfrak{a}_c})^{W^0_{\sigma,\lambda}} \times_s R_{\sigma,\lambda}$.

THÉORÈME 2. (i) *Le groupe* $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g},K}(I_{P,\sigma,\lambda}, I_{P,\sigma,\lambda})$ *est isomorphe à l'espace* $\mathrm{Hom}_{R_{\sigma,\lambda}}(\ell, \mathrm{End}(\mathbf{C}[R_{\sigma,\lambda}]))$ *et aussi à l'ensemble des applications de* $R_{\sigma,\lambda}$ *dans* ℓ^*.

(ii) *Soit Φ un élément de* $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g},K}(I_{P,\sigma,\lambda}, I_{P,\sigma,\lambda})$, ϕ *l'élément correspondant de* $\mathrm{Hom}_{R_{\sigma,\lambda}}(\mathscr{b}, \mathrm{End}(\mathbf{C}[R_{\sigma,\lambda}]))$. *Alors Φ est de cup-carré nul si et seulement si l'on a* $\phi(b_1)\cdot\phi(b_2)=\phi(b_2)\cdot\phi(b_1)$ *pour tous* $b_1 . b_2 \in \mathscr{b}$.

(iii) *Dans ce cas, Φ est le dérivée d'une déformation formelle de* $I_{P,\sigma,\lambda}$.

(iv) *Pour tous* $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{R_{\sigma,\lambda}}$, *on a*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g},K}(I^{\chi_1}_{P,\sigma,\lambda}, I^{\chi_2}_{P,\sigma,\lambda}) = (\mathscr{b}^*)^{(\chi_1^{-1}\chi_2)}$$

(*composante isotypique de type* $\chi_1^{-1}\chi_2$ *de* $\mathscr{b}^*$ *sous l'action de* $R_{\sigma,\lambda}$).

2.3. On considère ici un $(\mathfrak{g}, K)$-module simple tempéré E.

THÉORÈME 3. (i) *L'algèbra admissible sobre de la catégorie* $\mathrm{Ext}(\mathfrak{g}, K; \{E\})$ *est une algèbre de séries formelles.*

(ii) *Tout élément de* $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g},K}(E, E)$ *est la dérivée d'une déformation formelle de E et, en particulier, est de cup-carré nul.*

3. ALGÈBRES ET CATÉGORIES

Pour plus de détails, on renvoie à [Gu.4].

3.1. *Généralités*

Nous considérerons uniquement des catégories $\mathscr{C}$ abéliennes et satisfaisant aux conditions suivantes:

— les groupes $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$, pour $X, Y \in \mathscr{C}$, sont des espaces vectoriels complexes et la composition des morphismes et une opération bilinéaire

— pour tout objet simple X de $\mathscr{C}$, $\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(X) = \mathbf{C}$.

Tous les foncteurs considérés seront supposés $\mathbf{C}$-linéaires.

Nous considérerons uniquement des algèbres complexes à unité; si A est une algèbre, on désigne par mod A la catégorie des A-modules à gauche de dimension finie; si $\mathscr{E}$ est un ensemble de A-modules simples de dimension finie, on note $\mathrm{Ext}(A, \mathscr{E})$ la sous-catégorie pleine formée des modules de longueur finie dont tous les sous-quotients simples appartiennent à $\mathscr{E}$.

3.2. *Déformations formelles*

Rappelons tout d'abord la définition des déformations formelles des A-modules. Soit (E, π) un A-module; une *déformation formelle de E* est un morphisme φ de A dans l'algèbre de séries formelles End $E[[t]]$, soit

$$\varphi(a) = \sum_{n \geq 0} \varphi_n(a) \cdot t^n$$

avec $\varphi_n \in \mathrm{Hom}(A, \mathrm{End}\, E)$ et $\varphi_0 = \pi$. La relation $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ s'écrit, en utilisant le langage des cochaînes, cobords, cocycles, et cup-produits:

$$\varphi_n \in C^1(A, \mathrm{End}\, E), \qquad \varphi_1 \in Z^1(A, \mathrm{End}\, E)$$
$$\sum_{p=1}^{n-1} \varphi_p \operatorname{cup} \varphi_{n-p} = -d\varphi_n \qquad \forall n \geqslant 2.$$

On dit que deux déformations formelles φ et φ' sont *équivalentes* s'il existe une série formelle $u = \sum_{n \geqslant 0} u_n t^n \in \mathrm{End}\, E[[t]]$ vérifiant $\varphi(a) \cdot u = u \cdot \varphi'(a)$ et telle que u_0 soit inversible.

Le classe $[\varphi_1]$ du 1-cocycle φ_1 dans $H^1(A, \mathrm{End}\, E) = \mathrm{Ext}^1_A(E, E)$ ne dépend que de la classe d'équivalence de φ et est appelée *dérivée de la déformation formelle* φ.

Il sera utile dans ce qui suit de reformuler la définition des déformations formelles dans le langage des catégories.

Définition. Une *déformation formelle* d'un objet E d'une catégorie $\mathscr{C}$ est un triplet $((X_p), (u_p), (i_{p,q}))$ où

— $p, q = 1, 2, \ldots$ et $q \leqslant p$

— $X_p \in \mathscr{C}$ et $X_1 = E$

— u_p est un morphisme surjectif $X_{p+1} \to X_p$

— $i_{p,q}$ est un isomorphisme $X_{p-q+1} \to \mathrm{Ker}(u_q \circ u_{q+1} \circ \cdots \circ u_p)$.

On passe de la première définition à la seconde en posant

— $X_p = E \oplus \cdots \oplus E$ (p termes) avec action de A donnée par

$$a \to \begin{pmatrix} \pi(a) & \varphi_1(a) & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_{p-2}(a) & \varphi_{p-1}(a) \\ 0 & \pi(a) & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_{p-3}(a) & \varphi_{p-2}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \pi(a) \end{pmatrix}$$

— $u_p(x_1, \ldots, x_p) = (x_2, \ldots, x_p)$

— $i_{p,q}(x_1, \ldots, x_{p-q+1}) = (x_1, \ldots, x_{p-q+1}, 0, \ldots, 0)$.

L'avantage de la seconde définition réside dans le fait suivant: soit $\mathscr{E}$ un ensemble d'objets simples de $\mathscr{C}$ et $\mathrm{Ext}(\mathscr{C}, \mathscr{E})$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{C}$ formée des objets de longueur finie dont tous les sous-quotients simples appartiennent à $\mathscr{E}$; alors les déformations formelles d'un objet E de $\mathscr{E}$ sont les mêmes dans $\mathscr{C}$ et dans $\mathrm{Ext}(\mathscr{C}, \mathscr{E})$.

3.3. *Un résultat utile sur les foncteurs*

Définissons $\mathscr{C}$ et $\mathrm{Ext}(\mathscr{C}, \mathscr{E})$ comme ci-dessus; soit T un foncteur exact de $\mathscr{C}$ dans une autre catégorie $\mathscr{C}'$; pour tous $A, B \in \mathscr{C}$ et tout $n = 0, 1, ..., T$ définit naturellement des applications linéaires

$$T^n_{A,B}: \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{C}}(A, B) \to \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{C}'}(T(A), T(B)).$$

Supposons $T(E)$ simple pour tout $E \in \mathscr{E}$; alors T induit un foncteur

$$T_0: \mathrm{Ext}(\mathscr{C}, \mathscr{E}) \to \mathrm{Ext}(\mathscr{C}', T(\mathscr{E})).$$

On a alors le résultat suivant:

(i) Fixons un entier $n_0 > 0$ et supposons que, pour $A, B \in \mathscr{E}$, $T^n_{A,B}$ est bijectif pour tout $n < n_0$ et injectif pour $n = n_0$; alors les mêmes propriétés on lieu pour $A, B \in \mathrm{Ext}(\mathscr{C}, \mathscr{E})$.

(ii) Si la condition (i) est vérifiée pour $n_0 = 1$, T_0 est pleinement fidèle.

(iii) Si la condition (i) est vérifiée pour $n_0 = 2$, T_0 est une équivalence de catégories.

(La démonstration est identique à celle de [Gu.1, proposition 2.1].)

3.4. *Algèbres et catégories admissibles*

Nous dirons qu'une algèbre A est admissible si, en notant R son radical (intersection des annulateurs des A-modules simples), les conditions suivantes sont remplies:

— A/R est de dimension finie, donc est de la forme $\prod_{i=1}^m \mathrm{End}\, V_i$ où les V_i sont des espaces vectoriels de dimension finie

— R/R^2 est de dimension finie

— A est séparée et complète pour la topologie R-adique, et par suite est la limite projective des algèbres de dimension finie A/R^n.

Nous dirons que A est *sobre* si en outre tous les V_i sont de dimension 1.

Nous dirons qu'une catégorie $\mathscr{C}$ est *admissible* si

— $\mathscr{C}$ ne contient qu'un nombre fini d'objets simples, que nous noterons $V_1, ..., V_m$

— $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}}(V_i, V_j)$ est de dimension finie pour tous i et j

— tout objet de $\mathscr{C}$ est de longueur finie.

Il est immédiat que si A est une algèbre admissible, la catégorie mod A est admissible; réciproquement on démontre que toute catégorie admissible est équivalente à une catégorie mod A où A est une algèbre admissible sobre, unique à isomorphisme près; nous l'appellerons *algèbre admissible sobre de la catégorie*.

3.5. *Produits croisés*

3.5.1. *Généralités.* Considérons une algèbre B et un groupe fini G opérant dans B par automorphismes; on appelle *produit croisé* $B \times_s G$ l'ensemble A des applications $a: G \to B$ muni de la multiplication suivante:

$$(a_1 * a_2)(g) = \sum_{g' \in G} a_1(g') \cdot g'(a_2(g'^{-1}g)).$$

Donnons-nous en outre un caractère ω de B, invariant par G; si (E, π) est un G-module, on définit une représentation $\tilde{\pi}$ de A dans E par

$$\tilde{\pi}(a) = \sum_{g \in G} \omega(a(g)) \cdot \pi(g).$$

Supposons maintenant que B est l'algèbre $\widehat{SV}_c$, complétée de l'algèbre symétrique complexe d'un espace vectoriel réel V de dimension finie dans lequel G opère linéairement. Alors l'algèbre $A = \widehat{SV}_c \times_s G$ est admissible et ses modules simples sont exactement les $(E, \tilde{\pi})$ où (E, π) parcourt $\hat{G}$; A est sobre si et seulement si G est abélien.

3.5.2. *Groupes* Ext^n_A *pour* $A = \widehat{SV}_c \times_s G$. On a les résultats suivants:

(i) si X et Y sont des G-modules, il existe des isomorphismes

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathrm{mod}\,A}(X, Y) = \mathrm{Ext}^n_A(X, Y) = \mathrm{Hom}_G(\Lambda^n V_c, \mathrm{Hom}(X, Y))$$

qui transforment les cup-produits en produits extérieurs;

(ii) en particulier si G est abélien et si X et Y sont des caractères χ et η, on a

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathrm{mod}\,A}(X, Y) = \mathrm{Ext}^n_A(X, Y) = (\Lambda^n V_c^*)^{(\chi^{-1}\eta)}$$

(composante isotypique de type $\chi^{-1}\eta$);

(iii) si $X = Y = \mathbf{C}[G]$, il existe un isomorphisme d'algèbres

$$\mathrm{Ext}^*_A(\mathbf{C}[G], \mathbf{C}[G]) = \Lambda^* V_c^* \times_s G.$$

3.5.3 LEMME. *Soit E le A-module associé comme ci-dessus au G-module trivial. L'algèbre admissible sobre de la catégorie* $\mathrm{Ext}(A, \{E\})$ *est l'algèbre* $\widehat{SV^G_c}$ *où* V^G_c *désigne l'ensemble des éléments G-invariants de V.*

DÉMONSTRATION. Ecrivons B au lieu de $\widehat{SV_c^G}$; le projecteur isotypique $V_c \to V_c^G$ définit un morphisme d'algèbres $p: \widehat{SV}_c \to B$, puis un morphisme d'algèbres P de A vers B: $P(a) = \sum_g p(a(g))$; P est surjectif. Soit T le foncteur exact de mod B vers mod A associé à P, X le B-module de dimension 1; on a $T(X) = E$. Considérons les applications linéaires

$$T^n_{X,X}: \mathrm{Ext}^n_B(X, X) \to \mathrm{Ext}^n_A(E, E);$$

on a $\mathrm{Ext}^n_B(X, X) = \Lambda^n(V_c^G)^*$ et $\mathrm{Ext}^n_A(E, E) = (\Lambda^n V_c^*)^G$; $T^n_{X,X}$ est l'application naturelle $\Lambda^n(V_c^G)^* \to (\Lambda^n V_c^*)^G$, qui est injective pour tout n, et bijective pour $n = 0, 1$. If suffit alors d'appliquer le résultat du n° 3.3.

4. NOTATIONS ET RAPPELS SUR LES $(\mathfrak{g}, K)$-MODULES

4.1.

On utilise les notations du n° 2.1; en outre on écrira souvent $\mathcal{U}$ au lieu de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

4.2.

Pour tout $\mu \in \hat{K}$ (ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de K), on note E_μ l'espace de μ et $\mathcal{I}_\mu$ son annulateur dans $\mathcal{U}(\mathfrak{k})$.

4.3.

Pour $\mu, \nu \in \hat{K}$ on pose

$$\mathcal{U}^{\nu,\mu} = \{u \in \mathcal{U} \mid \mathcal{I}_\mu \cdot u \subset \mathcal{U} \cdot \mathcal{I}_\nu\};$$

on a

$$\mathcal{U}^{\nu,\mu} \cdot \mathcal{U}^{\pi,\nu} \subset \mathcal{U}^{\pi,\mu} \qquad \forall \mu, \nu, \pi \in \hat{K}$$

$$\mathcal{U} = \sum_{\nu \in \hat{K}} \mathcal{U}^{\nu,\mu} + \mathcal{U} \cdot \mathcal{I}_\mu \qquad \forall \mu \in \hat{K}$$

(cf. [Di, 9.1.5]).

4.4.

Si X est un $(\mathfrak{g}, K)$-module et si $\mu \in \hat{K}$, on note $X^{(\mu)}$ la composante isotypique de X de type μ, et on pose $\bar{X}^{(\mu)} = \mathrm{Hom}_K(E_\mu, X^{(\mu)})$, de sorte que l'on a

$$X^{(\mu)} = E_\mu \otimes \bar{X}^{(\mu)} \qquad \text{(en tant que } K\text{-modules)}$$

et

$$X = \bigoplus_{\mu \in \hat{K}} X^{(\mu)}.$$

On a aussi

$$\mathscr{U}^{\nu, \mu} \cdot X^{(\mu)} \subset X^{(\nu)}$$

(cf. [Di, 9.1.2]).

4.5.

On fixe un sous-groupe parabolique cuspidal de G, avec décomposition de Langlands $P = MAN$, et un élément σ de $\hat{M}_d$ (série discrète de M). On note W le groupe de Weyl de A, W_σ le stabilisateur de σ dans W; on rappelle que l'on a une suite exacte

$$1 \to W_\sigma^0 \to W_\sigma \to R_\sigma \to 1.$$

On pose $\mathscr{A} = S\mathfrak{a}_c$ (algèbre symétrique complexe de l'algèbre de Lie de A) et $\mathscr{B} = \mathscr{A}^{W_\sigma^0}$ (ensemble des éléments de $\mathscr{A}$ qui sont invariants sous W_σ^0). Le groupe R_σ opère par automorphismes dans $\mathscr{B}$; pour tout $\chi \in \widehat{R_\sigma}$ (groupe dual du groupe abélien R_σ) on note $\mathscr{B}^{(\chi)}$ la composante isotypique de $\mathscr{B}$ de type χ et on a $\mathscr{B}^{(\chi)} \cdot \mathscr{B}^{(\chi')} \subset \mathscr{B}^{(\chi\chi')}$; en particulier $\mathscr{B}^{(1)}$ est l'ensemble des éléments W_σ-invariants de $\mathscr{A}$.

4.6.

On note I ou $I_{P,\sigma}$ le K-module usuel, restriction à K d'une série principale quelconque $I_{P,\sigma,\lambda}$ où $\lambda \in \mathfrak{a}_c^*$; on a donc $I = \bigoplus_{\mu \in \hat{K}} I^{(\mu)}$; on note P^μ le projecteur correspondant à $I^{(\mu)}$. On désigne par A_σ l'ensemble des K-types minimaux de I, et par γ, δ, etc. ses éléments. On rappelle qu'il existe une action naturelle, simplement transitive, de $\widehat{R_\sigma}$ sur A_σ; elle sera notée $(\chi, \gamma) \to \chi \cdot \gamma$; pour, $\gamma, \delta \in A_\sigma$, $\chi(\delta, \gamma)$ sera l'unique élément de $\widehat{R_\sigma}$ transformant γ en δ. On rappelle aussi que les K-types minimaux sont de multiplicité 1, de sorte que l'on a $I^{(\gamma)} = E_\gamma$.

4.7.

Pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}_c^*$, on note r_λ la représentation de $\mathscr{U}$ ou de K dans $I_{P,\sigma,\lambda}$. Pour $\mu, \nu \in \hat{K}$ et $u \in \mathscr{U}$, on note $r_\lambda^{\nu,\mu}(u)$ la restriction de $P^\nu \cdot r_\lambda(u)$ à $I^{(\mu)}$.

4.8.

Pour tout A-module de dimension finie (V, π), on note I_V ou $I_{P,\sigma,V}$ le $(\mathfrak{g}, K)$-module induit, et r_π la représentation correspondante; en tant que K-module, on peut écrire $I_V = I \otimes V$ avec action de K sur I; par suite

$$I_V^{(\mu)} = I^{(\mu)} \otimes V.$$

On définit de même $r_\pi^{\nu,\mu}(u)$ comme restriction de $(P^\nu \otimes \mathrm{id}_V)\cdot r_\pi(u)$ à $I^{(\mu)} \otimes V$; on le considère comme un élément de $\mathrm{Hom}(I^{(\mu)} \otimes V, I^{(\nu)} \otimes V)$ ou encore de $\mathrm{End}\, V \otimes \mathrm{Hom}(I^{(\mu)}, I^{(\nu)})$.

4.9.

On fixe maintenant λ_0 dans $i\mathfrak{a}^*$; on a alors des groupes $W_{\sigma,\lambda_0} \subset W_\sigma$, $W^0_{\sigma,\lambda_0} \subset W^0_\sigma$, $R_{\sigma,\lambda_0} \subset R_\sigma$, et une suite exacte

$$1 \to W^0_{\sigma,\lambda_0} \to W_{\sigma,\lambda_0} \to R_{\sigma,\lambda_0} \to 1.$$

On notera $\mathscr{B}'$ l'ensemble des éléments W^0_{σ,λ_0}-invariants de $\mathscr{A}$, de sorte que l'on a $\mathscr{B} \subset \mathscr{B}' \subset \mathscr{A}$. On écrira aussi R au lieu de R_σ et R' au lieu de R_{σ,λ_0}; on choisit un supplémentaire R'' de R' dans R (ce qui est possible parce que R est une puissance du groupe à deux éléments, i.e., un espace vectoriel sur le corps à deux éléments), ce qui permet d'écrire

$$R = R' \times R'', \qquad \hat{R} = \widehat{R'} \times \widehat{R''} \quad \text{avec} \quad \widehat{R''} = R'^{\perp}.$$

4.10.

Pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}_c^*$, on note $\mathbf{C}_\lambda$ le $\mathscr{A}$-module "évaluation en λ"; on dit qu'un $\mathscr{A}$-module est *primaire de type* $\mathbf{C}_\lambda$ s'il est de dimension finie et si tous ses sous-quotients simples sont isomorphes à $\mathbf{C}_\lambda$. Définitions analogues pour $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.

4.11.

Si Y est un $\mathscr{B}$-module primaire de type $\mathbf{C}_{\lambda_0}$, tout sous-espace vectoriel de Y, stable par $\mathscr{B}^{R''}$, est stable par $\mathscr{B}$. Cela résulte facilement de [De.1, lemme 4 et proposition A.1], et du fait que tout $\mathscr{B}$-module E est un sous-$\mathscr{B}$-module d'un $\mathscr{A}$-module (en effet, W^0_σ étant engendré par des réflexions, $\mathscr{A}$ est un $\mathscr{B}$-module libre, et l'application $x \to 1 \otimes x$ de E dans $\mathscr{A} \otimes_{\mathscr{B}} E$ est injective).

4.12.

On fixe un élément γ_0 dans A_σ; le $(\mathfrak{g}, K)$-module I_{λ_0} se décompose en sous-modules simples, chacun de multiplicité 1; pour tout $\gamma \in A_\sigma$, $I^{(\gamma)}$ est contenu dans un unique sous-module simple, et deux éléments γ_1, γ_2 conduisent au même sous-module simple si et seulement s'ils sont conjugués par un élément de $\widehat{R''}$; pour tout $\chi \in \widehat{R'}$, on notera $I^\chi_{\lambda_0}$ le sous-module simple contenant $\chi \cdot \gamma_0$, et donc admettant comme K-types minimaux exactement les éléments $\chi'' \cdot \chi \cdot \gamma_0$ avec $\chi'' \in \widehat{R''}$.

4.13.

Pour tous $\mu, \nu \in \hat{K}$, et tout $u \in \mathscr{U}$, les applications $\lambda \to r_\lambda(u)$ et $\lambda \to r_\lambda^{\nu,\mu}(u)$ sont polynômiales, donc définissent un morphisme d'algèbres

$$r_\cdot : \mathscr{U} \to S\mathfrak{a}_c \otimes \mathrm{End}\, I$$

et diverses applications

$$r^{\nu,\mu}_{\cdot}: \mathscr{U}^{\nu,\mu} \to Sa_c \otimes \mathrm{Hom}(I^{(\mu)}, I^{(\nu)})$$

vérifiant une relation de chaînes évidente (cf. [De.1, propositions 1 et 2]).

4.14.

Pour tout A-module de dimenson finie (V, π), on a

$$r_\pi = (\pi \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{End}\, I}) \circ r.$$

en identifiant $\mathrm{End}\, I_V$ à $\mathrm{End}\, V \otimes \mathrm{End}\, I$, et de même

$$r^{\nu,\mu}_\pi = (\pi \otimes \mathrm{id}) \circ r^{\nu,\mu}_{\cdot}$$

(cf. [De.1, propositions 1 et 2]). Autrement dit, si l'on écrit, pour $u \in \mathscr{U}$,

$$r^{\nu,\mu}_{\cdot}(u) = \sum_n P_n(u) \otimes T_n(u)$$

avec $P_n(u) \in Sa$, $T_n(u) \in \mathrm{Hom}(I^{(\mu)}, I^{(\nu)})$, on a, pour $v \otimes f \in V \otimes I^{(\mu)}$,

$$r^{\nu,\mu}_\pi(u) \cdot (v \otimes f) = \sum_n \pi(P_n(u)) \cdot v \otimes T_n(u) \cdot f. \tag{1}$$

4.15.

Pour tous $\gamma, \delta \in A_\sigma$ on a

$$r^{\delta,\gamma}_{\cdot}(\mathscr{U}^{\delta,\gamma}) = \mathscr{B}^{(\chi(\delta,\gamma))} \otimes \mathrm{Hom}(I^{(\gamma)}, I^{(\delta)}) \tag{2}$$

(cf. [De.1, théorème 3 et n° 2.4]). Rappelons que $I^{(\gamma)} = E_\gamma$ et $I^{(\delta)} = E_\delta$.

4.16.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{R}$ (resp., $\mathscr{R}'$) l'ensemble des représentations de $\mathscr{B}$ (resp., $\mathscr{B}'$) dans E qui sont primaires de type $\mathbf{C}_{\lambda_0}$. L'application naturelle de restriction $\mathscr{R}' \to \mathscr{R}$ est bijective.

Démonstration. Notons $\mathscr{I}$ (resp., $\mathscr{I}'$) l'annulateur de $\mathbf{C}_{\lambda_0}$ dans $\mathscr{B}$ (resp., $\mathscr{B}'$); d'après [De.1, proposition A.2], pour tout entier n, l'application naturelle de $\mathscr{B}/\mathscr{I}^n$ dans $\mathscr{B}'/\mathscr{I}'^n$ est bijective; notre assertion résulte de là et du fait que tout élément de $\mathscr{R}$ (resp., $\mathscr{R}'$) est annulé par une puissance de $\mathscr{I}$ (resp., $\mathscr{I}'$).

5. Démonstration du Théorème 1

5.1. *Généralités*

La démonstration qu'on va lire est très proche de celle du théorème 2 de [De.2], relative au cas où I_{λ_0} est simple mais non nécessairement unitaire; on a jugé utile de l'écrire en détails pour la clarté de l'exposé.

Nous noterons

— $\mathscr{E}$ l'ensemble des $(\mathfrak{g}, K)$-modules simples $I^{\chi}_{\lambda_0}$ où χ parcourt $\widehat{R'}$

— $\mathscr{C}$ la catégorie $\mathrm{Ext}(\mathfrak{g}, K; \mathscr{E})$

— $\mathscr{D}$ l'algèbre produit croisé $\mathscr{B}' \times_s R'$

— $\widehat{\mathscr{B}}'$ l'algèbre complétée de $\mathscr{B}'$ en l'annulateur de $\mathbf{C}_{\lambda_0}$ (isomorphe à l'algèbre des séries formelles en $l = \dim A$-indéterminées)

— $\hat{\mathscr{D}} = \widehat{\mathscr{B}}' \times_s R'$ la complétée de $\mathscr{D}$

— mod $\hat{\mathscr{D}}$ la catégorie des $\hat{\mathscr{D}}$-modules de dimension finie, équivalente à celle des $\mathscr{D}$-modules dont la restriction à $\mathscr{B}'$ est primaire de type $\mathbf{C}_{\lambda_0}$ (voir par exemple [Gu.4, proposition 1.4.9]).

La donnée d'un $\mathscr{D}$-module équivaut à celle d'un espace vectoriel E et d'une représentation τ de $\mathscr{B}'$ (resp., R') dans E vérifiant

$$\tau(r', b') = \tau(r') \cdot \tau(b') \cdot \tau(r')^{-1} \qquad \forall r' \in R', \quad b' \in \mathscr{B}';$$

ou encore d'un $\mathscr{B}'$-module $\widehat{R'}$-gradué i.e., de la forme $E = \bigoplus_{\chi \in \widehat{R'}} E^{(\chi)}$ avec

$$\tau(\mathscr{B}'^{(\chi)}) \cdot E^{(\chi')} \subset E^{(\chi\chi')}.$$

L'équivalence entre ces définitions est donnée par

$$E^{(\chi)} = \{x \in E \mid \tau(r') \cdot x = \langle \chi, r' \rangle \cdot x \ \forall r' \in R'\}.$$

Nous allons construire un foncteur $\Psi: \mathscr{C} \to \mathrm{mod}\, \hat{\mathscr{D}}$, puis montrer qu'il est pleinement fidèle, et enfin essentiellement surjectif.

5.2. Lemme. *Tout objet X de $\mathscr{E}$ est un sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module d'un module I_V où V est un $\mathfrak{a}$-module primaire de type $\mathbf{C}_{\lambda_0}$, canoniquement associé à X.*

Démonstation. (a) Pour tout entier positif q, le $\mathfrak{a}$-module $H_q(\mathfrak{n}, X)$ est somme directe finie de sous-espaces propres généralisés $H_q(\mathfrak{n}, X)_{\lambda+\rho}$ où $\lambda \in \mathfrak{a}_c^*$ (cf. [H.S], formule 2.29); $H_q(\mathfrak{n}, X)_{\lambda+\rho}$ est nul pour $q > 0$ et $\lambda = \lambda_0$ ([H.S]), par contre $H_0(\mathfrak{n}, X)_{\lambda_0+\rho}$ est non nul.

(b) Le foncteur $X \to H_0(\mathfrak{n}, X)_{\lambda_0+\rho}$ est exact. En effet considérons une suite exacte dans $\mathscr{C}$:

$$0 \to X' \to X \to X'' \to 0;$$

la suite exacte d'homologie

$$\cdots \to H_1(\mathfrak{n}, X'') \to H_0(\mathfrak{n}, X') \to H_0(\mathfrak{n}, X) \to H_0(\mathfrak{n}, X'') \to 0$$

donne, par restriction, une suite exacte analogue avec $\lambda_0 + \rho$ en indice; mais $H_1(\mathfrak{n}, X'')_{\lambda_0+\rho}$ est nul.

(c) Le $(\mathfrak{m}, K_M)$-module $H_0(\mathfrak{n}, X)_{\lambda_0+\rho}$ est somme directe de séries discrètes. En effet, c'est vrai si X est un module $I^{\chi}_{\lambda_0}$ (résultat de Vogan cité dans [De.1, proposition 6]); cela reste vrai pour X quelconque parce que les groupes Ext^1 entre séries discrètes sont nuls (résultat non publié de Schmid et Zuckerman). Il en résulte que le $(\mathfrak{m}+\mathfrak{a}, K_M)$-module $H_0(\mathfrak{n}, X)_{\sigma, \lambda_0+\rho}$ (composante isotypique de type σ) est facteur direct dans $H_0(\mathfrak{n}, X)$; de plus il est non nul ([De.1, théorème 2]).

(d) Posons

$$V = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{m}, K_M}(E_\sigma, H_0(\mathfrak{n}, X)_{\lambda_0+\rho} \otimes \mathbf{C}_{-\rho});$$

c'est un $\mathfrak{a}$-module primaire de type $\mathbf{C}_{\lambda_0}$, non nul. Il résulte de (b) et (c) que le foncteur $X \to V$ est exact.

(e) Le $(\mathfrak{m}+\mathfrak{a}, K_M)$-morphisme naturel $X \to H_0(\mathfrak{n}, X)_{\sigma, \lambda_0+\rho}$ définit, par réciprocité de Frobenius, un $(\mathfrak{g}, K)$-morphisme $\varphi_X \colon X \to I_V$. On va montrer que φ_X est *injectif.* On procède par récurrence sur la longueur $l(X)$ de X. Si $l(X) = 1$, X est un $I^{\chi}_{\lambda_0}$; le morphisme $X \to V$ est non nul, donc aussi φ_X (réciprocité de Frobenius); et comme X est simple, φ_X est injectif.

Supposons maintenant l'assertion vraie pour $l(X) < n$ et démontrons-la pour $l(X) = n$; on a une suite exacte $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ avec $l(X') < n$ et $l(X'') < n$; comme le foncteur $X \to I_V$ est exact, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{X'}"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_X"'] & X'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{X''}"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & I_{V'} \arrow[r] & I_V \arrow[r] & I_{V''} \arrow[r] & 0; \end{tikzcd}$$

enfin φ_X est injectif parce que $\varphi_{X'}$ et $\varphi_{X''}$ le sont.

5.3. *Construction du foncteur Ψ*

Soit X un objet de $\mathscr{C}$; on peut le considérer comme un sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module d'un I_V où V est un $\mathfrak{a}$-module primaire de type $\mathbf{C}_{\lambda_0}$; on notera π la représentation de $\mathfrak{a}$ dans V. Pour tout $\gamma \in A_\sigma$, $X^{(\gamma)}$ est inclus dans le sous-espace $I_V^{(\gamma)} = V \otimes E_\gamma$, donc de la forme $V_\gamma \otimes E_\gamma$ avec $V_\gamma = \bar{X}^{(\gamma)}$. Les formules (1) et (2) montrent que, pour $\gamma, \delta \in A_\sigma$, $\pi(\mathscr{B}^{(\chi(\delta,\gamma))})$ envoie $\bar{X}^{(\gamma)}$ dans $\bar{X}^{(\delta)}$; ou encore: pour tout $\chi \in \hat{R}$ et tout $\gamma \in A_\sigma$, on a

$$\pi(\mathscr{B}^{(\chi)}) \cdot \bar{X}^{(\gamma)} \subset \bar{X}^{(\chi \cdot \gamma)}. \tag{3}$$

Posons

$$Y = \bigoplus_{\gamma \in A_\sigma} \bar{X}^{(\gamma)} = \bigoplus_{\chi \in \hat{R}} \bar{X}^{(\chi \cdot \gamma_0)};$$

c'est un $\mathscr{B}$-module pour la représentation définie par (3). Posons

$$Y_0 = \bigoplus_{\chi \in \widehat{R'}} \bar{X}^{(\chi \cdot \gamma_0)};$$

c'est un sous-espace vectoriel de Y, stable par $\mathscr{B}^{R''}$ car $\mathscr{B}^{R''} = \bigoplus_{\chi \in \widehat{R'}} \mathscr{B}^{(\chi)}$. Let n° 4.11 montre que Y_0 est stable par $\mathscr{B}$; on notera τ la représentation de $\mathscr{B}$ dans Y_0; pour $\chi \in \hat{R}$ et $\chi' \in \widehat{R'}$ on a

$$\tau(\mathscr{B}^{(\chi)}) \cdot \bar{X}^{(\chi' \cdot \gamma_0)} \subset \bar{X}^{(\chi\chi' \cdot \gamma_0)}$$

et

$$\tau(\mathscr{B}^{(\chi)}) \cdot \bar{X}^{(\chi' \cdot \gamma_0)} = 0 \qquad \text{si} \quad \chi \notin \widehat{R'}.$$

Le n° 4.16 montre que τ se prolonge de façon unique en une représentation, encore notée τ, de $\mathscr{B}'$ dans Y_0.

Définissons une représentation τ de R' dans Y_0 par

$$\tau(w) \cdot \xi = \langle \chi, w \rangle \cdot \xi \qquad \forall w \in R', \quad \chi \in \widehat{R'}, \quad \xi \in \bar{X}^{(\chi \cdot \gamma_0)};$$

on a

$$\tau(w \cdot b) = \tau(w) \cdot \tau(b) \cdot \tau(w)^{-1}$$

pour $w \in R'$, $b \in \mathscr{B}$, et cela reste vrai pour $b \in \mathscr{B}'$ par unicité du prolongement.

On a donc défini sur Y_0 une structure de $\mathscr{D}$-module; on le notera $\Psi(X)$; il est clair que Ψ est, de façon naturelle, un foncteur exact.

5.4. *Cas où X est simple*

Dans ce cas, X est de la forme $I^{\chi}_{\lambda_0}$ avec $\chi \in \widehat{R'}$; les K-types minimaux de X sont les $\chi'' \cdot \chi \cdot \gamma_0$ avec $\chi'' \in \widehat{R''}$; Y_0 est réduit à $\bar{X}^{(\chi \cdot \gamma_0)}$, qui est de dimension 1; $\Psi(X)$ est le $\mathscr{D}$-module de dimension 1 où $\mathscr{B}'$ opère via l'évaluation en λ_0, et R'—via le caractère χ.

5.5. LEMME. *Le foncteur Ψ est pleinement fidèle.*

Démonstration. D'après le n° 3.3 il suffit de prouver que, pour tous $X_1, X_2 \in \mathscr{E}$, i.e., de la forme $I_{\lambda_0}^{\chi_1}$ et $I_{\lambda_0}^{\chi_2}$, l'application naturelle

$$\Psi^1_{X_1, X_2}: \operatorname{Ext}^1_{\mathfrak{g}, K}(X_1, X_2) \to \operatorname{Ext}^1_{\mathscr{D}}(\Psi(X_1), \Psi(X_2))$$

est injective. On doit donc montrer que si l'on a une suite exacte dans $\mathscr{C}$:

$$0 \to X_2 \to X \to X_1 \to 0 \tag{4}$$

et si la suite exacte

$$0 \to \Psi(X_2) \to \Psi(X) \to \Psi(X_1) \to 0 \tag{5}$$

est scindée, il en est de même de (4).

On a $\Psi(X_i) = \bar{X}_i^{(\gamma_i)}$ où $\gamma_i = \chi_i \cdot \gamma_0$. Supposons par exemple $\chi_1 = \chi_2 (= \chi)$, l'autre cas étant très semblable. Posons $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = \chi \cdot \gamma_0$; on a alors $\Psi(X) = \bar{X}^{(\gamma)}$; l'hypothèse signifie que la suite exacte

$$0 \to X_2^{(\gamma)} \to X^{(\gamma)} \to X_1^{(\gamma)} \to 0$$

est scindée sous l'action de $\mathscr{U}^{\gamma, \gamma}$; on peut donc écrire $X^{(\gamma)} = X_2^{(\gamma)} \oplus Y$ où Y est un sous-espace vectoriel stable sous $\mathscr{U}^{\gamma, \gamma}$. Considérons les sous-$(\mathfrak{g}, K)$-modules suivants de X: $\mathscr{U} \cdot X_2^{(\gamma)} = X_2$ et $\mathscr{U} \cdot Y$; $X_2 \cap \mathscr{U} \cdot Y$ est nul ou égal à X_2. Supposons-le égal à X_2; alors $(\mathscr{U} \cdot Y)^{(\gamma)}$ contient $X_2^{(\gamma)}$; mais, en vertu de 4.3, on a

$$\mathscr{U} \cdot Y = \bigoplus_{\nu \in \hat{K}} \mathscr{U}^{\nu, \gamma} \cdot Y + \mathscr{U} \cdot \mathscr{I}_\gamma \cdot Y = \bigoplus_{\nu \in \hat{K}} \mathscr{U}^{\nu, \gamma} \cdot Y$$

d'où

$$(\mathscr{U} \cdot Y)^{(\gamma)} = \mathscr{U}^{\gamma, \gamma} \cdot Y = Y$$

—une contradiction qui prouve que $X_2 \cap \mathscr{U} \cdot Y$ est nul. Par ailleurs l'image de $\mathscr{U} \cdot Y$ dans X_1 est un sous-module non nul de X_1, donc égal à X_1; ceci montre que l'on a $X = X_2 \oplus \mathscr{U} \cdot Y$, et que la suite (4) est scindée.

5.6. Lemme. *Le foncteur Ψ est essentiellement surjectif.*

Démonstration. Soit (E, τ) un objet de mod $\hat{\mathscr{D}}$, c'est-à-dire encore un $\mathscr{D}$-module dont la restriction à $\mathscr{B}'$ est primaire de type $\mathbf{C}_{\lambda_0}$; écrivons, comme en 5.1

$$E = \bigoplus_{\chi \in \hat{K}'} E^{(\chi)}. \tag{6}$$

Notons (V, π) le $\mathscr{A}$-module induit $V=\mathscr{A}\otimes_{\mathscr{B}'}E$; comme $\mathscr{B}'$ est l'ensemble des éléments W^0_{σ,λ_0}-invariants de $\mathscr{A}$ et que W^0_{σ,λ_0} est engendré par des réflexions, $\mathscr{A}$ est un $\mathscr{B}'$-module libre; l'application $\xi\to 1\otimes\xi$ de E dans V est un $\mathscr{B}'$-morphisme injectif; on notera V_0 son image, et $V_0=\bigoplus_{\chi\in\widehat{R'}}V_0^{(\chi)}$ la décomposition correspondant à (6). Formons le $(\mathscr{g}, K)$-module I_V avec représentation notée r_π, puis son sous-module

$$X=r_\pi(\mathscr{U})\cdot\left(\bigoplus_{\chi\in\widehat{R'}} I^{(\chi\cdot\gamma_0)}\otimes V_0^{(\chi)}\right)$$

$$=\sum_{\chi\in\widehat{R'}} r_\pi(\mathscr{U})\cdot(I^{(\chi\cdot\gamma_0)}\otimes V_0^{(\chi)}).$$

D'après 4.3 on a

$$X=\sum_{\chi\in\widehat{R'}}\sum_{\nu\in\hat{K}} r_\pi(\mathscr{U}^{\nu,\chi\cdot\gamma_0}).(I^{(\chi\cdot\gamma_0)}\otimes V_0^{(\chi)})$$

$$=\bigoplus_{\nu\in\hat{K}}\sum_{\chi\in\widehat{R'}} r_\pi(\mathscr{U}^{\nu,\chi\cdot\gamma_0})\cdot(I^{(\chi\cdot\gamma_0)}\otimes V_0^{(\chi)}).$$

Pour tout $\chi'\in\widehat{R'}$ on a

$$X^{(\chi'\cdot\gamma_0)}=\sum_{\chi\in\widehat{R'}} r_\pi(\mathscr{U}^{\chi'\cdot\gamma_0,\chi\cdot\gamma_0})\cdot(I^{(\chi\cdot\gamma_0)}\otimes V_0^{(\chi)});$$

d'après 4.14 et 4.15 on a

$$\begin{aligned}
&r_\pi(\mathscr{U}^{\chi'\cdot\gamma_0,\chi\cdot\gamma_0})\cdot(I^{(\chi\cdot\gamma_0)}\otimes V_0^{(\chi)})\\
&\quad=(\mathrm{id}\otimes\pi)\cdot(r^{\chi'\cdot\gamma_0,\chi\cdot\gamma_0})\cdot(\mathscr{U}^{\chi'\cdot\gamma_0,\chi\cdot\gamma_0})\cdot(I^{(\chi\cdot\gamma_0)}\otimes V_0^{(\chi)})\\
&\quad=(\mathrm{id}\otimes\pi)\cdot(\mathrm{Hom}(I^{(\chi\cdot\gamma_0)}, I^{(\chi'\cdot\gamma_0)})\otimes\mathscr{B}^{(\chi^{-1}\chi')})\cdot(I^{(\chi\cdot\gamma_0)}\otimes V_0^{(\chi)})\\
&\quad=I^{(\chi'\cdot\gamma_0)}\otimes\pi(\mathscr{B}^{(\chi^{-1}\chi')})\cdot V_0^{(\chi)}
\end{aligned}$$

d'où

$$X^{(\chi'\cdot\gamma_0)}=\sum_{\chi\in\widehat{R'}} I^{(\chi'\cdot\gamma_0)}\otimes\pi(\mathscr{B}^{(\chi^{-1}\chi')})\cdot V_0^{(\chi)}$$

$$\tilde{X}^{(\chi'\cdot\gamma_0)}=\sum_{\chi\in\widehat{R'}} \pi(\mathscr{B}^{(\chi^{-1}\chi')})\cdot V_0^{(\chi)}\subset V_0^{(\chi')};$$

cette inclusion est en réalité une égalité car, prenant $\chi=\chi'$ on a $\mathscr{B}^{(\chi^{-1}\chi')}=\mathscr{B}^{(1)}$-sous-algèbre qui contient l'unité.

6. Démonstation du Théorème 2

D'après le n° 3.5.2 il existe des isomorphismes

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathrm{mod}\,\mathscr{D}}(\mathbf{C}[R_{\sigma,\lambda}], \mathbf{C}[R_{\sigma,\lambda}]) = \mathrm{Hom}_{R_{\sigma,\lambda}}(\Lambda^n \mathscr{E}, \mathrm{End}(\mathbf{C}[R_{\sigma,\lambda}]))$$

et

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathrm{mod}\,\mathscr{D}}(\mathbf{C}_{\chi_1}, \mathbf{C}_{\chi_2}) = (\Lambda^n \mathscr{E}^*)^{(\chi_1^{-1}\chi_2)}$$

transformant les cup-produits en produits extérieurs; les assertions (i), (ii), (iv) du théorème 2 sont donc vraies si l'on se place dans la catégorie $\mathrm{Ext}(\mathfrak{g}, K; \mathscr{E})$ au lieu de $\mathrm{Mod}(\mathfrak{g}, K)$. Mais il est clair que les groupes $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g},K}(I^{\chi_1}_{P,\sigma,\lambda}, I^{\chi_2}_{P,\sigma,\lambda})$ sont les mêmes dans ces deux catégories; il en est de même de l'ensemble des couples (η, ξ) vérifiant η cup $\xi = 0$. En effet notons

$$0 \to I^{\chi_1}_{P,\sigma,\lambda} \to U \to I^{\chi_2}_{P,\sigma,\lambda} \to 0$$

et

$$0 \to I^{\chi_2}_{P,\sigma,\lambda} \to V \to I^{\chi_1}_{P,\sigma,\lambda} \to 0$$

des suites exactes représentant η et ξ; on a, dans chacune des catégories, une suite exacte (de cohomologie)

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(I^{\chi_1}_{P,\sigma,\lambda}, U) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(I^{\chi_1}_{P,\sigma,\lambda}, I^{\chi_2}_{P,\sigma,\lambda}) \\ \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^2(I^{\chi_1}_{P,\sigma,\lambda}, I^{\chi_1}_{P,\sigma,\lambda}) \to \cdots \end{aligned}$$

et η cup ξ n'est autre que l'image de ξ par le morphisme (de liaison) δ; donc η cup ξ est nul si et seulement si ξ est dans l'image de $\mathrm{Ext}^1(I^{\chi_1}_{P,\sigma,\lambda}, U)$, et ceci est indépendant de la catégorie considérée.

Reste à démontrer l'assertion (iii). Comme on l'a dit au n° 3.2, les déformations formelles de $I_{P,\sigma,\lambda}$ dans la catégorie $\mathrm{Mod}(\mathfrak{g}, K)$ sont les mêmes que dans $\mathrm{Ext}(\mathfrak{g}, K; \mathscr{E})$, donc sont aussi les déformations formelles de $\mathbf{C}[R_{\sigma,\lambda}]$ dans $\mathrm{Mod}\,\hat{\mathscr{D}}$. On est donc ramené à prouver ce que suit:

Lemme. *Reprenons les notations de* 3.5.2. *Tout élément* Φ_1 *de cup-carré nul de* $\mathrm{Ext}^1_A(\mathbf{C}[G], \mathbf{C}[G])$ *est la dérivée d'une déformation formelle de* $\mathbf{C}[G]$.

Démonstration. Notons φ_1 l'élément de $\mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{End}\,\mathbf{C}[G])$ correspondant à Φ_1; on a

$$\Phi_1(a) = \sum_g \varphi_1(a(g)_1) \cdot \pi(g) \qquad \forall a \in A$$

où π désigne la représentation régulière gauche de G dans $\mathbf{C}[G]$, et $a(g)_n$ la composante de $a(g)$ dans $S^n V_c$. Comme les éléments $\varphi_1(v)$ de End $\mathbf{C}[G]$ sont deux à deux permutables, φ_1 se prolonge en un morphisme d'algèbres φ de SV_c dans End $\mathbf{C}[G]$, de composantes notées $\varphi_n: S^n V_c \to \text{End } \mathbf{C}[G]$; alors Φ_1 est la dérivée de la déformation formelle suivante:

$$\Phi(a)(t) = \sum_g (a(g)_0 + \sum_{n \geqslant 1} t^n \cdot \varphi_n(a(g)_n)) \cdot \pi(g).$$

7. Démonstration du Théorème 3

Il existe une série principale $I_{P,\sigma,\lambda}$ (σ série discrète, λ imaginaire pur) telle que E en soit une composante simple I_λ^χ, et on peut supposer que $\chi = 1$; l'équivalence de catégories Ψ transforme alors I_λ^χ en le $\hat{\mathscr{D}}$-module associé au $R_{\sigma,\lambda}$-module trivial; le lemme 3.5.3 montre que l'algèbre admissible sobre de la catégorie Ext($\mathfrak{g}$, K; $\{E\}$) est $\widehat{S\mathscr{E}^{R_{\sigma,\lambda}}}$. Ceci démontre l'assertion (i), et (ii) s'en déduit comme au théorème 2(iii).

8. Remarques et Problèmes

8.1. *Groupes* $\text{Ext}^n_{\mathfrak{g},K}$

Le théorème 2(iv) fournit en fait les groupes $\text{Ext}^1_{\mathfrak{g},K}$ entre deux (g, K)-modules simples tempérés quelconques E et F; on démontre en effet (communication écrite de Vogan) que si $\text{Ext}^1_{\mathfrak{g},K}(E, F)$ est non nul, E et F sont des composantes simples d'une même série principale. Par ailleurs il semble raisonnable de conjecturer que le théorème 2(iv) se généralise de la façon suivante:

$$\text{Ext}^n_{\mathfrak{g},K}(I^{\chi_1}_{P,\sigma,\lambda}, I^{\chi_2}_{P,\sigma,\lambda}) = (\Lambda^n \mathscr{E}^*)^{(\chi_1^{-1}\chi_2)};$$

c'est en tous cas vrai lorsque $W^0_{\sigma,\lambda} = \{1\}$ (cf. [Gu.2]). Par contre on ne sait rien dire dans le cas où σ est une limite de séries discrètes.

8.2. *Géometric différentielle locale sur* $\hat{G}_{\text{temp}}$

Procédant par analogie avec la Géometrie Algébrique, il est tentant, étant donné un élément E de $\hat{G}_{\text{temp}}$, d'appeler *espace vectoriel tangent* (complexifié) *à* $\hat{G}_{\text{temp}}$ *au point* E, soit $T_E(\hat{G}_{\text{temp}})$, l'espace $\text{Ext}^1_{\mathfrak{g},K}(E, E)$; et *cône tangent* le sous-ensemble $\mathbf{C}_E(\hat{G}_{\text{temp}})$ formé des éléments qui sont des dérivées de déformations formelles de E. Le théorème 3(i) dit alors que $\mathbf{C}_E(\hat{G}_{\text{temp}}) = T_E(\hat{G}_{\text{temp}})$, ce qui, en Géométrie Algébrique, exprimerait une certaine régularité de $\hat{G}_{\text{temp}}$ au point E.

Mais ici il existe des Ext^1 non nuls entre des points distincts, et il est intéressant de "regrouper" de tels points; en particulier de considérer des modules de la forme $E = I_{P,\sigma,\lambda}$, $\sigma \in \hat{M}_d$, $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$, comme des "points généralisés" de $\hat{G}_{\text{temp}}$. On peut alors garder la même définition que plus haut pour $T_E(\hat{G}_{\text{temp}})$; par contre, pour $\mathbf{C}_E(\hat{G}_{\text{temp}})$, on devra diviser l'ensemble des dérivées de déformations formelles par le groupe $\mathscr{C}$ des éléments inversibles de $\mathrm{End}_{\mathfrak{g},K}(E)$ opérant dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g},K}(E, E)$ par $(g \cdot \varphi)(X) = g \cdot \varphi(X) \cdot g^{-1}$ (cela résulte de l'équivalence entre déformations formelles définie au n° 3.2). Le théorème 2(iii) dit alors que

$$\mathbf{C}_E(\hat{G}_{\text{temp}}) = \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g},K}(E, E)_0/\mathscr{C}$$

où $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g},K}(E, E)_0$ désigne l'ensemble des éléments de $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g},K}(E, E)$ qui sont de cup-carré nul. En outre on peut donner une description géométrique simple d'un "gros" sous-ensemble de $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g},K}(E, E)_0/\mathscr{C}$: notons $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g},K}(E, E)_{0,\text{irr}}$ le sous-ensemble de $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g},K}(E, E)_0$ formé des éléments ξ ayant la propriété suivante: pour tout $\varphi \in \xi$ l'ensemble des opérateurs $\varphi(X)$ et $\pi(X)$ est irréductible dans E; définissons $\mathscr{E}$ comme au n° 2.1 et notons $\mathscr{E}^*_{\text{irr}}$ le sous-ensemble de $\mathscr{E}^*$ formé des points dont le stabilisateur dans $R_{\sigma,\lambda}$ est trivial. Alors il existe une bijection naturelle de $\mathscr{E}^*_{\text{irr}}/R_{\sigma,\lambda}$ sur $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g},K}(E, E)_{0,\text{irr}}/\mathscr{C}$.

8.3. *Fonctions régulières sur* $\hat{G}_{\text{temp}}$

L'analogue de l'algèbre des fonctions continues nulles à l'infini sur une variété est ici la $\mathbf{C}^*$-algèbre réduite de G, soit $\mathbf{C}^*_r(G)$; A. Wassermann a démontré qu'elle a une structure très simple: elle se décompose en produit direct (au sens des $\mathbf{C}^*$-algèbres) d'algèbres $\mathbf{C}^*_r(G)_{P,\sigma}$ où $P = MAN$ décrit l'ensemble des sous-groupes paraboliques cuspidaux de G et σ-l'ensemble des séries discrètes de M; de plus chaque $\mathbf{C}^*_r(G)_{P,\sigma}$ est Morita-équivalente (au sens du produit tensoriel par l'algèbre K des opérateurs compacts dans un espace hilbertien) au produit croisé $\mathbf{C}_0(i\mathfrak{a}^*)^{W^0_{\sigma,0}} \times_s R_{\sigma,0}$ où $\mathbf{C}_0$ désigne l'algèbre des fonctions continues nulles à l'infini.

Parallèlement, l'analogue de l'algèbre des fonctions $\mathbf{C}^\infty$ à décroissance rapide sur une variété est l'algèbre de Schwartz–Harish–Chandra, notée $\mathscr{C}(G)$; d'après J. Arthur, elle se décompose aussi en produit direct (au sens "à décroissance rapide") d'algèbres $\mathscr{C}(G)_{P,\sigma}$. Il semble alors raisonnable de formuler les conjectures suivantes:

(a) $\mathscr{C}(G)_{P,\sigma}$ est Morita-équivalente (au sens du produit tensoriel par l'algèbre des matrices à décroissance rapide) au produit croisé $\mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*)^{W^0_{\sigma,0}} \times_s R_{\sigma,0}$ (où $\mathscr{S}$ désigne l'algèbre des fonctions de Schwartz).

(b) Notons M l'annulateur d'une série principale $I_{P,\sigma,\lambda}$ dans $\mathscr{C}(G)_{P,\sigma}$; la séparée-complétée de $\mathscr{C}(G)_{P,\sigma}$ en l'idéal M est Morita-équivalente à l'algèbre $(S\mathfrak{a})^{W^0_{\sigma,0}} \times_s R_{\sigma,\lambda}$

Ces conjectures sont liées au problème de la trivialité du cocycle formé par les intégrals d'entrelacement $\mathscr{A}_{w,\lambda}$ ($w \in W_\sigma$, $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$), i.e., à la question de savoir s'il existe une famille d'opérateurs inversibles $\mathscr{B}_\lambda$, dépendant différentiablement de λ et vérifiant $\mathscr{A}_{w,\lambda} = \mathscr{B}_{w\cdot\lambda}^{-1} \cdot \mathscr{B}_\lambda$; elles sont vraies pour $G = SL(2, \mathbf{R})$.

8.4. *Comparaison avec le cas des groupes nilpotents*

Dans ce cas il peut exister, en notant E le G-module différentiable associé à une représentation unitaire irréductible, des éléments de $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g}}(E, E)$ qui ne sont pas de cup-carré nul, et d'autres qui le sont mais qui ne sont pas dérivées de déformations formelles (cf. [Go.Le]); de plus l'algèbre admissible sobre de la catégorie $\mathrm{Ext}(\mathfrak{g}; \{E\})$ est en général non commutative, et donc n'est pas une algèbre de séries formelles (cf. [Du.1], [Go.Le]); par contre l'analogue de la conjecture (b) du n° 8.2 est vraie ([Du.1]).

8.5. *Comparaison avec le cas des groupes de déplacements*

Les résultats de ce travail sont à rapprocher de ceux qui concernent les groupes de déplacements: notons Γ un groupe produit semi-direct $\Gamma = V \times_s G$ où V est un espace vectoriel réel de dimension finie dans lequel le groupe G (fini et abélien) opère linéairement; munissons $\mathbf{C}[G]$ d'une structure de Γ-module où V opère trivialement, et G—via la représentation régulière gauche; notons enfin $\mathscr{E}$ ($= \hat{G}$) l'ensemble des composantes simples de $\mathbf{C}[G]$. Alors l'algèbre admissible sobre de la catégorie $\mathrm{Ext}(G, \mathscr{E})$ est le produit croisé $\widehat{SV_c} \times_s G$, et on a un isomorphisme d'algèbres graduées

$$\mathrm{Ext}^*_G(\mathbf{C}[G], \mathbf{C}[G]) = \Lambda^* V_c^* \times_s G$$

(cf. [Gu.4] et [Du.2]).

Bibliograpie

[Ar] J. Arthur, Harmonic analysis of the Schwartz space on a reductive Lie group, I, II, thesis, 1972.

[Be.Gi] A. Beilinson et V. Ginsburg, Mixed categories, Ext-duality, and representations, preprint, 1986.

[Be.Gi.Sc] A. Beilinson, V. Ginsburg, et V. Schechtman, Koszul duality, *J. Geom. Phys.* **5** (1988), 317–350.

[B.G.G] J. Bernstein, I. Gelfand, et S. Gelfand, Structure locale de la catégorie des modules de Harish-Chandra, *C. R. Acad. Sci. Paris* **286** (1978), 435–437 et 495–497.

[Bo.Wa] A. Borel et N. Wallach, Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups, *Ann. Math. Studies* **94**, 1980.

[Cl.De] L. Clozel et P. Delorme, Le théorème de Paley–Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs, II, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **23** (1990), 193–228.

[De.1] P. Delorme, Homomorphismes de Harish–Chandra liés aux K-types minimaux des séries principales généralisées des groupes de Lie réductifs connexes, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **17** (1984), 117–156.

[De.2] P. DELORME, Self-extensions de modules de Harish–Chandra irréductibles et une question de I. M. Gelfand, *Astérisque* No. 124–125 (1985), 31–48.

[De.3] P. DELORME, Formules limites et formules asymptotiques pour les multiplicités dans $L^2(G/\Gamma)$, *Duke Math. J.* **53** (1986), 691–731.

[Di] J. DIXMIER, "Algèbres enveloppantes," Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[Du.1] F. DU CLOUX, Extensions entre représentations unitaires irréductibles des groupes de Lie nilpotents, *Astérisque* No. 124–125 (1985), 129–212.

[Du.2] F. DU CLOUX, Sur les n-existensions des représentations induites des produits semi-directs, *Astérisque* No. 124–125 (1985), 49–128.

[Gab] P. GABRIEL, Des catégories abéliennes, *Bull. Soc. Math. France* **90** (1962), 323–448.

[Gai] P. Y. GAILLARD, Koszul duality for $Spin(n, 1)$ and $SU(n, 1)$, à paraître.

[Ge] I. M. GELFAND, The cohomology of infinite dimensional Lie algebras; some questions of integral geometry, *in* "Actes Congrès intern. Nice, 1970."

[Ge.Po.1] I. M. GELFAND ET V. A. PONOMAREV, Catégorie des modules d'Harish–Chandra sur l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz, *Dokl. Akad. Nauk* **176** (1967), 243–246.

[Ge.Po.2] I. M. GELFAND ET V. A. PONOMAREV, Classification des représentations infinitésimales indécomposables du groupe de Lorentz, *Dokl. Akad. Nauk* **176**, 502–505.

[Ge.Po.3] I. M. GELFAND ET V. A. PONOMAREV, Remarks on the classification of a pair of commuting linear transformations in a finite dimensional space, *Funktsional. Anal. i Prilozhen* **3** (1969), 81–82.

[Ge.Gr.Po] I. M. GELFAND, M. I. GRAEV, ET V. A. PONOMAREV, Classification des représentations linéaires du groupe $SL(2, \mathbb{C})$, *Dokl. Akad. Nauk* **194** (1970), 1002–1005.

[Go.Le] E. GOUBAULT ET C. LE BRIS, Groupes Ext^1 et déformations de représentations de certaines algèbres de Lie nilpotentes, *Bull. Sci. Math.* **116** (1992), 465–486.

[Gu.1] A. GUICHARDET, Représentations de longueur finie des groupes de Lie inhomogènes, *Astérisque* No. 124–125 (1985), 213–252.

[Gu.2] A. GUICHARDET, Sur les groupes Ext^n des représentations des groupes de Lie semi-simples, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **21** (1988), 333–358.

[Gu.3] A. GUICHARDET, Sur les groupes Ext^n des représentations des groupes de Lie semi-simples, II, *Bull. Sci. Math.* **114** (1990), 23–39.

[Gu.4] A. GUICHARDET, Algèbres, catégories, représentations de longueur finie des groupes de Lie, preprint, Ecole Polytechnique.

[He.Sc] H. HECHT ET W. SCHMID, Characters, asymptotics and n-homology of Harish-Chandra modules, *Acta Math.* **151** (1983), 49–151.

[Kh.1] S. M. KHOROSHKIN, Sur la catégorie des modules de Harish–Chandra du groupe $SU(n, 1)$, *Funktsional Anal. i Prilozhen* **14** (1980), 85–86.

[Kh.2] S. M. KHOROSHKIN, Représentations indécomposables des groupes de Lorentz, *Funktsional Anal. i Prilozhen* **15** (1981), 50–60.

[Mi] B. MITCHELL, Theory of categories, Academic Press, New York, 1965.

[Na.Ro] L. A. NAZAROVA AND A. V. ROITER, Sur un problème de I. M. Gelfand *Funktsional Anal. i Prilozhen* **7** (1973), 55–71.

[Sp] B. SPEH, Indecomposable representations of semi-simple Lie groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **265** (1981), 1–34.

[Vo] D. VOGAN, Representations of real reductive Lie groups, Birkhäuser, Basel, 1981.

[Wa] N. WALLACH, Real reductive groups, Academic Press, 1988.

[Was] A. WASSERMANN, Une démonstration de la conjecture de Connes–Kasparov, *C. R. Acad. Sci.* **304** (1987), 559–562.