Advances in Mathematics **162**, 217 242 (2001)
doi:10.1006/aima.2000.1981, available online at http://www.idealibrary.com on IDEAL®

Une q-spécialisation pour les fonctions symétriques monomiales

Michel Lassalle

Centre National de la Recherche Scientifique, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau, France
E-mail: lassalle@chercheur.com

Communicated by Alain Lascoux

Received April 25, 2000; accepted October 19, 2000;
published online July 23, 2001

We obtain the specialization of monomial symmetric functions on the alphabet $(a-b)/(1-q)$. This gives a remarkable algebraic identity, and four new developments for the Macdonald polynomial associated with a row. The proofs are given in the framework of λ-ring theory.

1. INTRODUCTION

Dans l'étude des fonctions symétriques, le problème suivant est important en vue des applications. Si f est une fonction symétrique et q une indéterminée, quelle est la valeur de $f(1, q, q^2, ..., q^{N-1})$? Pour la plupart des fonctions symétriques classiques, cette "spécialisation" est connue depuis très longtemps [1, 8, 9].

C'est le cas par exemple pour les fonctions de Schur, les sommes de puissances, les fonctions complètes ou les fonctions élémentaires. Dans ces deux derniers cas le résultat est connu depuis Cauchy (1843) et Heine (1847): on obtient les polynômes de Gauss.

Cependant la spécialisation $f(1, q, q^2, ..., q^{N-1})$ n'avait pas encore été explicitée lorsque f est une fonction symétrique monomiale. C'est un des résultats de cet article. Plus généralement nous obtenons la spécialisation des fonctions symétriques monomiales sur l'alphabet $(a-b)/(1-q)$.

Il faut souligner que nous pouvons donner *deux formulations* distinctes pour cette spécialisation. L'équivalence de ces deux expressions produit une identité algébrique multivariée, difficile à démontrer directement, et qui présente un intérêt indépendant.

Nos résultats sont énoncés et démontrés dans le cadre de la théorie des λ-anneaux. Dans l'étude des fonctions symétriques, cette théorie est une méthode particulièrement efficace, et pourtant peu utilisée. Cet article en

0001-8708/01 $35.00

présente une nouvelle illustration. On trouvera dans [6] une autre application.

Cependant nos résultats ont également des liens naturels avec la combinatoire des permutations. On peut en donner une démonstration dans ce cadre, au moins pour la première de nos formulations.

La notion de "spécialisation" d'une fonction symétrique est étroitement associée à celle de "modification" de cette fonction. Si q et t sont deux indéterminées, et $f(X)$ une fonction symétrique évaluée sur l'alphabet X, on peut ainsi définir les fonctions symétriques "modifiées" $f[X(1-t)]$, $f[X/(1-q)]$ ou $f[X(1-t)/(1-q)]$.

Lorsque f est la fonction symétrique complète h_n, la fonction symétrique modifiée $h_n[X(1-t)/(1-q)]$ (resp. $h_n[X(1-t)]$) est le polynôme de Macdonald $P_{(n)}(q, t)$ (resp. le polynôme de Hall–Littlewood $P_{(n)}(t)$) associé à la partition-ligne (n) [9].

Nos résultats permettent d'obtenir quatre nouveaux développements pour $P_{(n)}(q, t)$. Nous explicitons ce développement sur les fonctions complètes et élémentaires classiques, d'une part. Et sur les fonctions complètes et élémentaires modifiées, d'autre part.

Donnons maintenant le plan de cet article. Les sections 2 et 3 présentent nos notations et les éléments de théorie des λ-anneaux dont nous aurons besoin. Ces sections sont presque intégralement reprises de [6]. Les sections 4 à 6 démontrent les deux formulations de notre résultat principal. La section 7 compare ces deux formulations, en déduit une identité algébrique multivariée, et indique rapidement ses rapports avec la combinatoire des permutations. La section 8 montre que la spécialisation d'une fonction symétrique monomiale sur l'alphabet $(1-t)/(1-q)$ est essentiellement un polynôme en q et t à coefficients entiers positifs. Les sections 9 et 10 introduisent les polynômes de Macdonald et donnent les nouveaux développements annoncés.

L'auteur remercie Alain Lascoux pour son aide amicale.

2. NOTATIONS

Une *partition* λ est une suite décroissante finie d'entiers positifs. On dit que le nombre n d'entiers non nuls est la *longueur* de λ. On note $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ et $n = l(\lambda)$. On dit que $|\lambda| = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ est le *poids* de λ, et pour tout entier $k \geqslant 1$ que $m_k(\lambda) = \text{card}\{j : \lambda_j = k\}$ est la *multiplicité* de k dans λ. On appelle *part* de λ tout entier k tel que $m_k(\lambda) \neq 0$. On pose

$$z_\lambda = \prod_{k \geqslant 1} k^{m_k(\lambda)} m_k(\lambda)!.$$

Soit **Sym** l'algèbre des fonctions symétriques. Nous choisissons les notations les plus répandues, c'est-à-dire celles de [9], et non celles de [7], bien que celles de [7] soient plus adaptées aux λ-anneaux.

Soit $A=\{a_1, a_2, a_3, ...\}$ un ensemble de variables, qui peut être infini (nous dirons que A est un alphabet). On introduit les fonctions génératrices

$$E_u(A)=\prod_{a\in A}(1+ua), \qquad H_u(A)=\prod_{a\in A}\frac{1}{1-ua}, \qquad P_u(A)=\sum_{a\in A}\frac{a}{1-ua}$$

dont le développement définit les fonctions symétriques *élémentaires* $e_k(A)$, *complètes* $h_k(A)$ et *sommes de puissances* $p_k(A)$:

$$E_u(A)=\sum_{k\geqslant 0}u^k e_k(A), \qquad H_u(A)=\sum_{k\geqslant 0}u^k h_k(A),$$

$$P_u(A)=\sum_{k\geqslant 1}u^{k-1}p_k(A).$$

Lorsque l'alphabet A est infini, chacun de ces trois ensembles de fonctions forme une base algébrique de **Sym**$[A]$, l'algèbre des fonctions symétriques sur A, c'est-à-dire que chaque ensemble est composé d'éléments algébriquement indépendants.

On peut donc définir l'algèbre **Sym** des fonctions symétriques, sans référence à l'alphabet A, comme l'algèbre sur $\mathbf{Q}$ engendrée par les fonctions e_k, h_k ou p_k.

Pour toute partition μ, on définit les fonctions e_μ, h_μ ou p_μ en posant

$$f_\mu=\prod_{i=1}^{l(\mu)}f_{\mu_i}=\prod_{k\geqslant 1}f_k^{m_k(\mu)},$$

où f_i désigne respectivement e_i, h_i ou p_i. Les fonctions e_μ, h_μ, p_μ forment une base linéaire de l'algèbre **Sym**.

On a

$$e_n=\sum_{|\mu|=n}(-1)^{n-l(\mu)}\frac{p_\mu}{z_\mu},$$

$$h_n=\sum_{|\mu|=n}\frac{p_\mu}{z_\mu}.$$

Pour toute partition μ, on peut définir les fonctions symétriques *monomiales* m_μ et les *fonctions de Schur* s_μ, qui forment également une base linéaire de l'algèbre **Sym**. La fonction symétrique monomiale m_μ est la somme de tous les monômes *distincts* ayant pour exposant une permutation de μ.

Si A et B sont deux alphabets, on définit la somme $A+B$ et la différence $A-B$ de ces deux alphabets en posant

$$\begin{aligned} H_u(A+B) &= H_u(A)\, H_u(B), & E_u(A+B) &= E_u(A)\, E_u(B) \\ H_u(A-B) &= H_u(A)\, H_u(B)^{-1}, & E_u(A-B) &= E_u(A)\, E_u(B)^{-1}. \end{aligned} \tag{1}$$

3. λ-ANNEAUX

Nous allons utiliser le fait que l'anneau des polynômes possède une structure de λ-anneau. Un λ-anneau est un anneau commutatif avec unité muni d'opérateurs qui vérifient certains axiomes. Nous renvoyons le lecteur à [3] pour la théorie générale, et au chapitre 2 de [10] pour son application à l'analyse multivariée.

Nous n'utiliserons cette théorie que dans le cadre élémentaire suivant. Soit $A=\{a_1, a_2, a_3, ...\}$ un alphabet quelconque. On considère l'anneau $\mathbf{R}[A]$ des polynômes en A à coefficients réels. La structure de λ-anneau de $\mathbf{R}[A]$ consiste à définir une action de **Sym** sur $\mathbf{R}[A]$.

3.1. *Action de* **Sym**

Les fonctions p_k formant un système de générateurs algébriques de **Sym**, écrivant tout polynôme sous la forme $\sum_{c,\,U} cU$, avec c constante réelle et U un monôme en $(a_1, a_2, a_3, ...)$, on définit une action de **Sym** sur $\mathbf{R}[A]$, notée $[\,\cdot\,]$, en posant

$$p_k\Big[\sum_{c,\,U} c\,U\Big] = \sum_{c,\,U} c\,U^k.$$

Pour tous polynômes $P, Q \in \mathbf{R}[A]$ on en déduit immédiatement

$$p_k[PQ] = p_k[P]\, p_k[Q], \qquad p_\mu[PQ] = p_\mu[P]\, p_\mu[Q].$$

L'action ainsi définie s'étend à tout élément de **Sym**. Ainsi on a

$$E_u\Big[\sum_{c,\,U} cU\Big] = \prod_{c,\,U} (1+uU)^c, \qquad H_u\Big[\sum_{c,\,U} cU\Big] = \prod_{c,\,U} (1-uU)^{-c},$$

et aussi

$$h_k[P] = (-1)^k\, e_k[-P]. \tag{2}$$

On notera le comportement différent des constantes $c \in \mathbf{R}$ et des monômes U:

$$\begin{aligned} &p_k[c] = c, \qquad h_k[c] = \binom{c+k-1}{k}, \qquad e_k[c] = \binom{c}{k} \\ &p_k[U] = U^k = h_k[U], \qquad e_k[U] = 0, i > 1, \qquad e_1[U] = U. \end{aligned} \tag{3}$$

Il est plus correct de caractériser les "monômes" U comme éléments *de rang* 1 (i.e. $U \neq 0, 1$ tels que $e_k[U] = 0 \ \forall k > 1$), et les "constantes" $c \in \mathbf{R}$ comme les éléments invariants par les p_k (on dira aussi élément *de type binomial*).

Lorsqu'on utilise la théorie des λ-anneaux pour démontrer une identité algébrique, il est donc *toujours nécessaire de préciser le statut de chaque élément.* Dans cet article nous n'utiliserons que des éléments de rang 1.

3.2. *Extension aux séries formelles*

On remarquera que si $a_1, a_2, ..., a_N$ sont des éléments de rang 1, alors

$$p_k[a_1 + a_2 + \cdots + a_N] = a_1^k + a_2^k + \cdots + a_N^k$$

est la valeur de la somme de puissances $p_k(a_1, a_2, ..., a_N)$.

Pour tout alphabet $A = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$, on note $A^\dagger = \sum_i a_i$ la somme de ses éléments. Lorsque A est formé d'éléments de rang 1, on a ainsi pour toute fonction symétrique f,

$$f[A^\dagger] = f(A). \tag{4}$$

En particulier si q est de rang 1, on a

$$p_k(1, q, q^2, q^3, ..., q^{N-1}) = p_k\left[\sum_{i=0}^{N-1} q^i\right] = p_k\left[\frac{1-q^N}{1-q}\right].$$

Il est donc naturel de vouloir étendre l'action de **Sym** aux fonctions rationnelles à coefficients réels. Pour cela on pose

$$p_k\left(\frac{\sum cU}{\sum dV}\right) = \frac{\sum cU^k}{\sum dV^k}$$

avec c, d constantes réelles et U, V des monômes en $(a_1, a_2, a_3, ...)$.

L'action ainsi définie s'étend à tout élément de **Sym**. L'anneau des fonctions rationnelles (et plus généralement des séries formelles) à coefficients réels est ainsi muni d'une structure de λ-anneau.

3.3. *Formulaire*

Les relations fondamentales suivantes sont des conséquences directes des relations (3). Elles sont par exemple démontrées dans [7]. Pour tous P, Q on a d'abord

$$h_n[P+Q] = \sum_{k=0}^{n} h_{n-k}[P]\, h_k[Q]$$

$$e_n[P+Q] = \sum_{k=0}^{n} e_{n-k}[P]\, e_k[Q].$$

Soit de manière équivalente

$$\begin{aligned} &H_u[P+Q] = H_u[P]\, H_u[Q], \qquad && E_u[P+Q] = E_u[P]\, E_u[Q] \\ &H_u[P-Q] = H_u[P]\, H_u[Q]^{-1}, \qquad && E_u[P-Q] = E_u[P]\, E_u[Q]^{-1}. \end{aligned} \tag{5}$$

Ces relations généralisent les définitions (1).

Si P est de rang 1 et Q arbitraire, on a

$$e_n[PQ] = P^n e_n[Q].$$

Si P et Q sont de rang 1, PQ est donc de rang 1, et on a

$$E_u[PQ] = 1 + u\, PQ, \qquad H_u[PQ] = (1 - u\, PQ)^{-1}. \tag{6}$$

Pour tous P, Q on a les formules de Cauchy suivantes

$$\begin{aligned} h_n[PQ] &= \sum_{|\mu|=n} \frac{1}{z_\mu} p_\mu[P]\, p_\mu[Q] \\ &= \sum_{|\mu|=n} m_\mu[P]\, h_\mu[Q] \\ &= \sum_{|\mu|=n} s_\mu[P]\, s_\mu[Q]. \end{aligned} \tag{7}$$

Ou de manière équivalente,

$$\begin{aligned} e_n[PQ] &= \sum_{|\mu|=n} \frac{(-1)^{n-l(\mu)}}{z_\mu} p_\mu[P]\, p_\mu[Q] \\ &= \sum_{|\mu|=n} m_\mu[P]\, e_\mu[Q] \\ &= \sum_{|\mu|=n} s_\mu[P]\, s_{\mu'}[Q], \end{aligned} \tag{8}$$

où μ' désigne la partition transposée de μ.

3.4. *q-calcul*

Pour toute indéterminée a on note

$$(a;q)_n = \prod_{i=0}^{n-1} (1-aq^i), \qquad (a;q)_\infty = \prod_{i\geqslant 0} (1-aq^i)$$

qu'on considère comme série formelle en a et q.

Soient trois éléments a, b, q et un alphabet $X=\{x_1, x_2, ..., x_N\}$. On suppose tous ces eléments de rang 1. Les relations (5) et (6) impliquent

$$E_u\left[\frac{aX^\dagger}{1-q}\right] = \prod_{i\geqslant 0} E_u[aq^iX^\dagger] = \prod_{k=1}^{N} \prod_{i\geqslant 0} E_u[aq^ix_k]$$
$$= \prod_{k=1}^{N} \prod_{i\geqslant 0} (1+uaq^ix_k) = \prod_{k=1}^{N} (-uax_k;q)_\infty.$$

De même on a

$$H_u\left[\frac{aX^\dagger}{1-q}\right] = \prod_{i\geqslant 0} H_u[aq^iX^\dagger] = \prod_{k=1}^{N} \prod_{i\geqslant 0} H_u[aq^ix_k]$$
$$= \prod_{k=1}^{N} \prod_{i\geqslant 0} \frac{1}{1-uaq^ix_k} = \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{(uax_k;q)_\infty}.$$

On en déduit

$$H_1\left[\frac{a-b}{1-q}X^\dagger\right] = H_1\left[\frac{aX^\dagger}{1-q}\right]\left(H_1\left[\frac{bX^\dagger}{1-q}\right]\right)^{-1} = \prod_{k=1}^{N} \frac{(bx_k;q)_\infty}{(ax_k;q)_\infty}. \tag{9}$$

Pour tout entier $n\geqslant 0$ on note désormais

$$g_n(X;q,t) = h_n\left[\frac{1-t}{1-q}X^\dagger\right]. \tag{10}$$

On a la série génératrice

$$H_1\left[\frac{1-t}{1-q}X^\dagger\right] = \sum_{n\geqslant 0} g_n(X;q,t) = \prod_{i=1}^{N} \frac{(tx_i;q)_\infty}{(x_i;q)_\infty}.$$

Les deux propriétés suivantes sont des conséquences immédiates de (9) et de la relation

$$(a;q)_\infty = (1-a)(aq;q)_\infty.$$

Cependant nous en donnons une démonstration directe à titre d'exemple. On va couper l'alphabet $(1-t)/(1-q)\, X^\dagger$ en deux morceaux. Il y a deux façons différentes de le faire en écrivant

$$\frac{1-t}{1-q}=q\frac{1-t}{1-q}+1-t=\frac{q-t}{1-q}+1.$$

PROPOSITION 1. *On a*

$$\sum_{n\geqslant 0} q^n g_n(X;q,t)=H_1\left[q\frac{1-t}{1-q}X^\dagger\right]=\left(\prod_{i=1}^{N}\frac{1-x_i}{1-tx_i}\right)H_1\left[\frac{1-t}{1-q}X^\dagger\right].$$

Preuve. En appliquant (5) on a

$$\begin{aligned}H_1\left[q\frac{1-t}{1-q}X^\dagger\right]&=H_1\left[\frac{1-t}{1-q}X^\dagger+(t-1)\,X^\dagger\right]\\&=H_1[(t-1)\,X^\dagger]\,H_1\left[\frac{1-t}{1-q}X^\dagger\right]\\&=H_1[tX^\dagger]\,H_1[X^\dagger]^{-1}\,H_1\left[\frac{1-t}{1-q}X^\dagger\right].\ \blacksquare\end{aligned}$$

PROPOSITION 2. *On a*

$$H_1\left[\frac{q-t}{1-q}X^\dagger\right]=\prod_{i=1}^{N}(1-x_i)\,H_1\left[\frac{1-t}{1-q}X^\dagger\right].$$

Preuve. En appliquant (5) on a

$$\begin{aligned}H_1\left[\frac{q-t}{1-q}X^\dagger\right]&=H_1\left[\frac{1-t}{1-q}X^\dagger-X^\dagger\right]\\&=H_1\left[\frac{1-t}{1-q}X^\dagger\right]H_1[X^\dagger]^{-1}.\ \blacksquare\end{aligned}$$

4. NOTRE RÉSULTAT PRINCIPAL

Etant donnée une partition μ, on note $C_\mu\subset\mathbf{N}^{l(\mu)}$ l'ensemble des vecteurs entiers *distincts* obtenus par permutation des parts de μ. On dit également que $c\in C_\mu$ est un "dérangement" de μ. Pour tout $c=(c_1,\ldots,c_{l(\mu)})\in C_\mu$, on note $[c_i]=\sum_{1\leqslant k\leqslant i}c_k$ la somme partielle d'ordre i.

Soient a, b, q trois éléments de rang 1. Nous considérons l'alphabet A tel que

$$A^{\dagger}=\frac{a-b}{1-q}.$$

L'alphabet A est la différence, au sens de (1), des deux alphabets infinis $\{a, aq, aq^2, ...\}$ et $\{b, bq, bq^2, ...\}$.

Soit m_μ la fonction symétrique monomiale associée à la partition μ. Nous explicitons la valeur de $m_\mu[A^{\dagger}]$. En particulier pour $a=1$ et $b=q^N$, compte-tenu de (4), notre résultat donne la valeur de

$$m_\mu\left[\frac{1-q^N}{1-q}\right]=m_\mu(1, q, ..., q^{N-1}).$$

Et pour $a=1$ et $b=0$ celle de

$$m_\mu\left[\frac{1}{1-q}\right]=m_\mu(1, q, q^2, q^3, ...).$$

THÉORÈME 1. *Soient a, b, q trois éléments de rang* 1. *Pour toute partition μ on a*

$$m_\mu\left[\frac{a-b}{1-q}\right]=\sum_{c\in C_\mu}\prod_{i=1}^{l(\mu)}\frac{a^{c_i}q^{[c_i-1]}-b^{c_i}}{1-q^{[c_i]}}. \tag{11}$$

Le corollaire suivant était connu: voir [1, chapitre 2], et l'exemple 1.2.5 de [9]. Compte-tenu de (9), il s'agit du "théorème q-binomial" classique

$$H_u\left[\frac{1-t}{1-q}\right]=\frac{(tu;q)_\infty}{(u;q)_\infty}=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(t;q)_n}{(q;q)_n}u^n.$$

COROLLAIRE. *Pour tout entier n on a*

$$e_n\left[\frac{a-b}{1-q}\right]=\prod_{i=1}^{n}\frac{aq^{i-1}-b}{1-q^i}$$

$$h_n\left[\frac{a-b}{1-q}\right]=\prod_{i=1}^{n}\frac{a-bq^{i-1}}{1-q^i}.$$

Preuve du corollaire. La première relation est la transcription du théorème pour la partition-colonne $\mu=1^n$. On a alors $m_{1^n}=e_n$. Il n'y a qu'un seul dérangement de μ, avec $c_i=1$ et $[c_i]=i$. La seconde relation s'en déduit par (2), en échangeant a et b. ∎

On remarquera que le théorème 1 est vérifié lorsque μ est une partition-ligne (n). On a alors $m_{(n)} = p_n$. Il n'y a qu'un seul dérangement de μ, avec $c_1 = [c_1] = n$. Le théorème 1 redonne dans ce cas la relation

$$p_n\left[\frac{a-b}{1-q}\right] = \frac{a^n - b^n}{1-q^n},$$

ce qui est précisément la définition de l'action de p_n.

On note désormais

$$Z_\mu(a, b; q) = \sum_{c \in C_\mu} \prod_{i=1}^{l(\mu)} \frac{a^{c_i} q^{[c_{i-1}]} - b^{c_i}}{1 - q^{[c_i]}}.$$

Pour toute part k de μ, on note $\mu\backslash\{k\}$ la partition ν, de longueur $l(\mu) - 1$, telle que $m_k(\nu) = m_k(\mu) - 1$, $m_j(\nu) = m_j(\mu)$ $(j \neq k)$.

PROPOSITION 3. *Pour toute partition μ on a*

$$(1 - q^{|\mu|}) Z_\mu(a, b; q) = \sum_{k,\, m_k(\mu) \neq 0} (a^k q^{|\mu| - k} - b^k) Z_{\mu\backslash\{k\}}(a, b; q). \qquad (12)$$

Preuve. On considère tous les dérangements de μ dont la dernière composante est $c_{l(\mu)} = k$. On a alors $[c_{l(\mu)-1}] = |\mu| - k$ et $[c_{l(\mu)}] = |\mu|$. Par construction la somme de toutes ces contributions est exactement

$$Z_{\mu\backslash\{k\}}(a, b; q) \frac{(a^k q^{|\mu| - k} - b^k)}{1 - q^{|\mu|}}. \quad \blacksquare$$

Partant du cas initial $\mu = (n)$ la relation (12) détermine uniquement Z_μ par récurrence sur la longueur $l(\mu)$. Le théorème 1 sera donc démontré si l'on établit que le membre de gauche de (11) satisfait la même relation de récurrence.

Les deux membres de (11) étant clairement homogènes de degré $|\mu|$, il suffit de démontrer le théorème dans le cas particulier $a = 1$, ce que nous supposerons désormais.

5. DÉMONSTRATION

Nous sommes ainsi conduits à démontrer le théorème 1 sous la forme suivante.

THÉORÈME 2. *Soient q et t deux éléments de rang* 1. *Pour toute partition μ on a*

$$(1-q^{|\mu|})\, m_\mu\left[\frac{1-t}{1-q}\right] = \sum_{k,\, m_k(\mu)\neq 0} (q^{|\mu|-k}-t^k)\, m_{\mu\setminus\{k\}}\left[\frac{1-t}{1-q}\right].$$

Preuve. Soit $X=\{x_1, x_2, ..., x_N\}$ un alphabet de cardinal N dont les éléments sont de rang 1. Compte-tenu de la relation (4), de la définition (10) et de la formule de Cauchy (7), on a immédiatement

$$g_n(X; q, t) = h_n\left[\frac{1-t}{1-q}X^\dagger\right] = \sum_{|\mu|=n} m_\mu\left[\frac{1-t}{1-q}\right] h_\mu(X).$$

En identifiant les parties homogènes de chaque membre, le théorème 2 est donc équivalent à la relation suivante

$$\begin{aligned}&\sum_{n\geqslant 0} (1-q^n)\, g_n(X; q, t)\\ &\quad= \Big(\sum_{k\geqslant 1} h_k(X)\Big)\Big(\sum_{n\geqslant 0} q^n g_n(X; q, t)\Big) - \Big(\sum_{k\geqslant 1} t^k h_k(X)\Big)\Big(\sum_{n\geqslant 0} g_n(X; q, t)\Big).\end{aligned}$$

Soit encore

$$\begin{aligned}&\sum_{n\geqslant 0} (1-q^n)\, g_n(X; q, t)\\ &\quad= \Big(\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1-x_i} - 1\Big)\Big(\sum_{n\geqslant 0} q^n g_n(X; q, t)\Big)\\ &\quad\quad - \Big(\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1-tx_i} - 1\Big)\Big(\sum_{n\geqslant 0} g_n(X; q, t)\Big).\end{aligned}$$

On applique alors la proposition 1. Le membre de gauche peut s'écrire

$$\Big(1-\prod_{i=1}^{N} \frac{1-x_i}{1-tx_i}\Big) H_1\left[\frac{1-t}{1-q}X^\dagger\right].$$

Et le membre de droite s'écrit

$$\left[\Big(\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1-x_i} - 1\Big)\Big(\prod_{i=1}^{N} \frac{1-x_i}{1-tx_i}\Big) - \Big(\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1-tx_i} - 1\Big)\right] H_1\left[\frac{1-t}{1-q}X^\dagger\right].$$

D'où l'assertion. ∎

6. SECONDE FORMULATION

Il est remarquable qu'il existe une seconde formulation de notre résultat principal.

THÉORÈME 3. *Soient a, b, q trois éléments de rang* 1. *Pour toute partition μ on a*

$$m_\mu\left[\frac{a-b}{1-q}\right]=\sum_{c\in C_\mu}\prod_{i=1}^{l(\mu)}\frac{a^{c_i}q^{(l(\mu)-i)\,c_i}-b^{c_i}}{1-q^{[c_i]}}.$$

Notre démonstration du théorème 3 est exactement parallèle à celle du théorème 1. On note

$$W_\mu(a,b;q)=\sum_{c\in C_\mu}\prod_{i=1}^{l(\mu)}\frac{a^{c_i}q^{(l(\mu)-i)\,c_i}-b^{c_i}}{1-q^{[c_i]}}.$$

PROPOSITION 4. *Pour toute partition μ on a*

$$(1-q^{|\mu|})\,W_\mu(a,b;q)=\sum_{k,\,m_k(\mu)\neq 0}(a^k-b^k)\,W_{\mu\backslash\{k\}}(qa,b;q).$$

Preuve. On considère tous les dérangements de μ dont la dernière composante est $c_{l(\mu)}=k$. On a alors $[c_{l(\mu)}]=|\mu|$. Par construction la somme de toutes ces contributions est exactement

$$W_{\mu\backslash\{k\}}(qa,b;q)\,\frac{(a^k-b^k)}{1-q^{|\mu|}}. \quad ∎$$

Partant du cas initial évident $\mu=(n)$, la proposition 4 détermine uniquement W_μ par récurrence sur la longueur $l(\mu)$. Le théorème 3 sera donc démontré si l'on établit que $m_\mu[(a-b)/(1-q)]$ satisfait la même relation de récurrence. Par homogénéité il suffit de le démontrer dans le cas particulier $a=1$, ce que nous supposerons désormais.

Nous pouvons donc démontrer le théorème 3 sous la forme suivante.

THÉORÈME 4. *Soient q et t deux éléments de rang* 1. *Pour toute partition μ on a*

$$(1-q^{|\mu|})\,m_\mu\left[\frac{1-t}{1-q}\right]=\sum_{k,\,m_k(\mu)\neq 0}(1-t^k)\,m_{\mu\backslash\{k\}}\left[\frac{q-t}{1-q}\right].$$

Preuve. Soit $X=\{x_1, x_2, ..., x_N\}$ un alphabet de cardinal N dont les éléments sont de rang 1. Compte-tenu de (4) la formule de Cauchy (7) s'écrit

$$h_n\left[\frac{u-t}{1-q}X^\dagger\right]=\sum_{|\mu|=n} m_\mu\left[\frac{u-t}{1-q}\right]h_\mu(X).$$

On va choisir $u=1$ et $u=q$.

En identifiant les parties homogènes de chaque membre, le théorème 4 est équivalent à la relation suivante

$$\sum_{n\geqslant 0}(1-q^n)\,h_n\left[\frac{1-t}{1-q}X^\dagger\right]$$
$$=\left(\sum_{k\geqslant 1} h_k(X)-\sum_{k\geqslant 1} t^k h_k(X)\right)\left(\sum_{n\geqslant 0} h_n\left[\frac{q-t}{1-q}X^\dagger\right]\right).$$

Soit encore

$$\sum_{n\geqslant 0}(1-q^n)\,g_n(X;q,t)$$
$$=\left(\prod_{i=1}^N \frac{1}{1-x_i}-\prod_{i=1}^N \frac{1}{1-tx_i}\right)\left(\sum_{n\geqslant 0} h_n\left[\frac{q-t}{1-q}X^\dagger\right]\right).$$

Par la proposition 1 le membre de gauche peut s'écrire

$$\left(1-\prod_{i=1}^N \frac{1-x_i}{1-tx_i}\right)H_1\left[\frac{1-t}{1-q}X^\dagger\right].$$

Et par la proposition 2 le membre de droite peut s'écrire

$$\left(\prod_{i=1}^N \frac{1}{1-x_i}-\prod_{i=1}^N \frac{1}{1-tx_i}\right)\prod_{i=1}^N(1-x_i)\,H_1\left[\frac{1-t}{1-q}X^\dagger\right].$$

D'où l'assertion. ∎

7. UNE IDENTITÉ REMARQUABLE

La comparaison des théorèmes 1 et 3 produit l'identité remarquable suivante.

THÉORÈME 5. *Pour toute partition μ on a*

$$\sum_{c\in C_\mu}\prod_{i=1}^{l(\mu)}\frac{a^{c_i}q^{[c_i-1]}-b^{c_i}}{1-q^{[c_i]}}=\sum_{c\in C_\mu}\prod_{i=1}^{l(\mu)}\frac{a^{c_i}q^{(l(\mu)-i)\,c_i}-b^{c_i}}{1-q^{[c_i]}}.$$

Un cas particulier intéressant est obtenu en faisant $a=q$ et $b=1$.

PROPOSITION 5. *Pour toute partition μ on a*

$$\sum_{c\in C_\mu}\prod_{i=1}^{l(\mu)}\frac{1-q^{(l(\mu)-i+1)\,c_i}}{1-q^{[c_i]}}=\frac{l(\mu)!}{\prod_i m_i(\mu)!}.$$

Ce résultat est une q-généralisation de la propriété classique suivante [8, p. 85], qu'on retrouve lorsque q tend vers 1.

PROPOSITION 6. *Pour toute partition μ on a*

$$\sum_{c\in C_\mu}\prod_{i=1}^{l(\mu)}\frac{1}{[c_i]}=\frac{1}{z_\mu}.$$

Soient $X=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ et $Y=\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ deux alphabets de cardinal n. On note S_n le groupe des permutations de n lettres. Le groupe S_n opère sur les fonctions rationnelles en X et Y par l'action diagonale

$$f^\sigma(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)=f(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(1)}, ..., y_{\sigma(n)}).$$

Par homogénéité et parce que les indéterminées $x_i=q^{\mu_i}$, $y_i=(bq/a)^{\mu_i}$ sont indépendantes, l'égalité du théorème 5 est en fait *équivalente* à l'identité multivariée suivante, qui est une propriété des fonctions rationnelles.

THÉORÈME 6. *On a*

$$\sum_{\sigma\in S_n}\left(\frac{y_1-x_1}{1-x_1}\frac{y_2-x_1x_2}{1-x_1x_2}\frac{y_3-x_1x_2x_3}{1-x_1x_2x_3}\cdots\frac{y_n-x_1x_2\cdots x_n}{1-x_1x_2\cdots x_n}\right)^\sigma$$
$$=\sum_{\sigma\in S_n}\left(\frac{y_1-x_1{}^n}{1-x_1}\frac{y_2-x_2{}^{n-1}}{1-x_1x_2}\frac{y_3-x_3{}^{n-2}}{1-x_1x_2x_3}\cdots\frac{y_n-x_n}{1-x_1x_2\cdots x_n}\right)^\sigma.$$

Le caractère remarquable de cette identité est déjà apparent sur le cas particulier $Y=(1, 1, ..., 1)$.

PROPOSITION 7. *Pour tout alphabet* $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *on a*

$$\sum_{\sigma \in S_n} \left(\frac{1 - x_1{}^n}{1 - x_1} \frac{1 - x_2{}^{n-1}}{1 - x_1 x_2} \frac{1 - x_3{}^{n-2}}{1 - x_1 x_2 x_3} \cdots \frac{1 - x_n}{1 - x_1 x_2 \cdots x_n} \right)^\sigma = n!.$$

Ce résultat généralise la propriété classique suivante, d'abord établie par Littlewood [8, p. 85] qui l'a démontrée par récurrence, et en a déduit la proposition 6.

PROPOSITION 8. *Pour tout alphabet* $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *on a*

$$\sum_{\sigma \in S_n} \left(\frac{1}{x_1(x_1 + x_2) \cdots (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)} \right)^\sigma = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}.$$

Preuve. On considère l'identité de la proposition 7, dans laquelle on substitue q^{x_i} à x_i. Elle devient

$$\sum_{\sigma \in S_n} \left(\frac{1 - q^{n x_1}}{1 - q^{x_1}} \frac{1 - q^{(n-1) x_2}}{1 - q^{x_1 + x_2}} \frac{1 - q^{(n-2) x_3}}{1 - q^{x_1 + x_2 + x_3}} \cdots \frac{1 - q^{x_n}}{1 - q^{x_1 + x_2 \cdots + x_n}} \right)^\sigma = n!.$$

On obtient l'énoncé en prenant la limite $q \to 1$. ∎

Alain Lascoux a obtenu une preuve directe de cette identité multivariée, en utilisant les différences divisées. Il a également souligné que le théorème 6 peut être considéré comme l'égalité de deux statistiques sur le groupe des permutations. Nous présentons rapidement l'essentiel de ses remarques.

Etant donnée une permutation $\sigma \in S_n$ de n lettres $\{a_1, ..., a_n\}$, soit $\Gamma(\sigma)$ l'ensemble de ses cycles. Pour tout cycle $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_k) \subset \{a_1, ..., a_n\}$, notons $|\gamma| = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i$. Alors on sait [7, Sect. 1.2.7] que pour toute partition μ on a

$$\left(\prod_{i \geq 1} m_i(\mu)! \right) m_\mu = \sum_{\sigma \in S_{l(\mu)}} (-1)^{l(\mu) - \operatorname{card}(\Gamma(\sigma))} \prod_{\gamma \in \Gamma(\sigma)} p_{|\gamma|}.$$

Par exemple on a $m_{kl} = p_k p_l - p_{k+l}$, chacun des termes correspondant aux deux cycles $(k), (l)$ de $\{k, l\}$ et au cycle (k, l) de $\{l, k\}$. On en déduit immédiatement

$$\left(\prod_{i \geq 1} m_i(\mu)! \right) m_\mu \left[\frac{a - b}{1 - q} \right] = \sum_{\sigma \in S_{l(\mu)}} (-1)^{l(\mu) - \operatorname{card}(\Gamma(\sigma))} \prod_{\gamma \in \Gamma(\sigma)} \frac{a^{|\gamma|} - b^{|\gamma|}}{1 - q^{|\gamma|}}.$$

Par homogénéité et parce que les indéterminées $x_i = q^{\mu_i}$, $y_i = (bq/a)^{\mu_i}$ sont indépendantes, les théorèmes 1 et 3 impliquent immédiatement les deux résultats suivants.

THÉORÈME 7. *Soient* $X=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *et* $Y=\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ *deux alphabets de cardinal n. On a*

$$\sum_{\sigma\in S_n}\left(\frac{y_1-x_1}{1-x_1}\frac{y_2-x_1x_2}{1-x_1x_2}\frac{y_3-x_1x_2x_3}{1-x_1x_2x_3}\cdots\frac{y_n-x_1x_2\cdots x_n}{1-x_1x_2\cdots x_n}\right)^\sigma$$

$$=\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{\substack{\gamma\in\Gamma(\sigma)\\ \gamma=(\gamma_1,...,\gamma_k)}}\frac{y_{\gamma_1}y_{\gamma_2}\cdots y_{\gamma_k}-x_{\gamma_1}x_{\gamma_2}\cdots x_{\gamma_k}}{1-x_{\gamma_1}x_{\gamma_2}\cdots x_{\gamma_k}}.$$

THÉORÈME 8. *Soient* $X=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *et* $Y=\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ *deux alphabets de cardinal n. On a*

$$\sum_{\sigma\in S_n}\left(\frac{y_1-x_1{}^n}{1-x_1}\frac{y_2-x_2{}^{n-1}}{1-x_1x_2}\frac{y_3-x_3{}^{n-2}}{1-x_1x_2x_3}\cdots\frac{y_n-x_n}{1-x_1x_2\cdots x_n}\right)^\sigma$$

$$=\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{\substack{\gamma\in\Gamma(\sigma)\\ \gamma=(\gamma_1,...,\gamma_k)}}\frac{y_{\gamma_1}y_{\gamma_2}\cdots y_{\gamma_k}-x_{\gamma_1}x_{\gamma_2}\cdots x_{\gamma_k}}{1-x_{\gamma_1}x_{\gamma_2}\cdots x_{\gamma_k}}.$$

Tandis que le théorème 6 concerne la symétrisation de deux fonctions rationnelles, les théorèmes 7 et 8 font intervenir la structure des cycles d'une permutation, ce qui est une information non immédiate sur cette permutation.

Il serait intéressant de démontrer et d'interpréter ces résultats de manière combinatoire.

Une preuve directe du théorème 7 peut être obtenue par récurrence sur l'entier n. Les deux membres de cette identité sont linéaires en y_n. Il suffit donc de la démontrer, par exemple, pour $y_n=1$ et $y_n=x_n$. Cette vérification par récurrence est facile, et laissée au lecteur.

Cependant cette démonstration par récurrence ne semble pas possible pour le théorème 8. Nous ne connaissons pas de preuve directe de ce théorème.

Exemple. Le cas $n=1$ est trivial. Dans le cas $n=2$, les deux identités des théorèmes 7 et 8 s'écrivent

$$\frac{y_1-x_1}{1-x_1}\frac{y_2-x_1x_2}{1-x_1x_2}+\frac{y_2-x_2}{1-x_2}\frac{y_1-x_1x_2}{1-x_1x_2}$$

$$=\frac{y_1-x_1{}^2}{1-x_1}\frac{y_2-x_2}{1-x_1x_2}+\frac{y_2-x_2{}^2}{1-x_2}\frac{y_1-x_1}{1-x_1x_2}$$

$$=\frac{y_1-x_1}{1-x_1}\frac{y_2-x_2}{1-x_2}+\frac{y_1y_2-x_1x_2}{1-x_1x_2}.$$

8. COEFFICIENTS ENTIERS POSITIFS

Nous allons voir que dans l'énoncé du théorème 3,

$$m_\mu\left[\frac{1-t}{1-q}\right]=\sum_{c\in C_\mu}\prod_{i=1}^{l(\mu)}\frac{q^{(l(\mu)-i)\,c_i}-t^{c_i}}{1-q^{[c_i]}}$$

le membre de droite met en évidence un polynôme en q et t à coefficients entiers positifs.

THÉORÈME 9. *Pour toute partition μ on a*

$$m_\mu\left[\frac{1-t}{1-q}\right]=\frac{l(\mu)!}{\prod_i m_i(\mu)!}\left(\prod_{i=1}^{l(\mu)}\frac{q^{i-1}-t}{1-q^i}\right)\frac{G_\mu(q,t)}{q^{|\mu|-l(\mu)}G_\mu(q,1/q)},$$

où $G_\mu(q,t)$ est un polynôme en q et t, et $q^{|\mu|-l(\mu)}G_\mu(q,1/q)$ un polynôme en q. Les coefficients de $G_\mu(q,t)$ sont entiers positifs.

Preuve. Considérons le polynôme $F_\mu(q)$ défini par

$$F_\mu(q)=\prod_{\substack{(r_k)\\ 0\leqslant r_k\leqslant m_k(\mu)}}\frac{1-q^{\sum_{k\geqslant 1}kr_k}}{1-q}.$$

C'est évidemment un polynôme en q à coefficients entiers positifs. Posons

$$G_\mu(q,t)=F_\mu(q)\sum_{c\in C_\mu}\prod_{i=1}^{l(\mu)}\frac{q^{(l(\mu)-i)\,c_i}-t^{c_i}}{q^{l(\mu)-i}-t}\,\frac{1-q}{1-q^{[c_i]}}.$$

Il est clair qu'on définit ainsi un polynôme en q et t à coefficients entiers positifs. On a immédiatement

$$q^{|\mu|-l(\mu)}G_\mu(q,1/q)=F_\mu(q)\sum_{c\in C_\mu}\prod_{i=1}^{l(\mu)}\frac{1-q^{(l(\mu)-i+1)\,c_i}}{1-q^{l(\mu)-i+1}}\,\frac{1-q}{1-q^{[c_i]}}.$$

On en déduit que $q^{|\mu|-l(\mu)}G_\mu(q,1/q)$ est un polynôme en q. D'autre part on a

$$G_\mu(q,t)=F_\mu(q)\left(\prod_{i=1}^{l(\mu)}\frac{1-q}{q^{i-1}-t}\right)\sum_{c\in C_\mu}\prod_{i=1}^{l(\mu)}\frac{q^{(l(\mu)-i)\,c_i}-t^{c_i}}{1-q^{[c_i]}}.$$

Mais en appliquant la proposition 5 on a aussi

$$\frac{l(\mu)!}{\prod_i m_i(\mu)!}F_\mu(q)=q^{|\mu|-l(\mu)}\left(\prod_{i=1}^{l(\mu)}\frac{1-q^i}{1-q}\right)G_\mu(q,1/q).$$

D'où l'énoncé. ▮

Exemple. Dans le cas particulier d'une partition $\mu=(n,k)$, avec deux parts distinctes $n\neq k$, on a

$$F_{n,k}(q)=\frac{1-q^n}{1-q}\frac{1-q^k}{1-q}\frac{1-q^{n+k}}{1-q}.$$

Le polynôme $G_{n,k}(q,t)$ est donné par

$$G_{n,k}(q,t)=\frac{q^n-t^n}{q-t}\frac{1-t^k}{1-t}\frac{1-q^k}{1-q}+\frac{q^k-t^k}{q-t}\frac{1-t^n}{1-t}\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Dans le cas général, il serait intéressant de disposer d'une interprétation combinatoire de $G_\mu(q,t)$.

9. POLYNÔMES DE MACDONALD

La référence pour les polynômes de Macdonald est le chapitre 6 de [9]. Nous rappelons seulement ici les éléments dont nous aurons besoin, en mettant l'accent sur une présentation en termes de λ-anneaux.

Soient deux éléments q, t et un alphabet $X=\{x_1,x_2,...,x_N\}$. On suppose tous ces éléments de rang 1. Pour tout $1\leqslant i\leqslant N$, on pose

$$A_i(X;t)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}.$$

On note T_{x_i} l'opérateur de q-déformation défini par

$$T_{x_i}f(x_1,...,x_N)=f(x_1,...,qx_i,...,x_N).$$

Les polynômes de Macdonald $P_\lambda(X;q,t)$ sont les vecteurs propres de l'opérateur aux différences

$$D(X;q,t)=\sum_{i=1}^{N}A_i(X;t)\,T_{x_i}.$$

On a

$$D(X;q,t)\,P_\lambda(X;q,t)=\left(\sum_{i=1}^{N}q^{\lambda_i}t^{N-i}\right)P_\lambda(X;q,t).$$

On peut munir l'algèbre des fonctions symétriques à coefficients rationnels en q et t d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle_{q,t}$ défini par

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_{q,t} = \delta_{\lambda\mu} z_\lambda p_\lambda \left[\frac{1-q}{1-t} \right].$$

Les polynômes de Macdonald $P_\lambda(X; q, t)$ forment une base orthogonale pour ce produit scalaire. Si on note $Q_\lambda(X; q, t)$ la base duale on a

$$\begin{aligned} H_1 \left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger Y^\dagger \right] &= \sum_\lambda P_\lambda(X; q, t)\, Q_\lambda(Y; q, t) \\ &= \sum_\lambda h_\lambda \left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger \right] m_\lambda(Y) \\ &= \sum_\lambda s_\lambda[(1-t)\, X^\dagger]\, s_\lambda \left[\frac{Y^\dagger}{1-q} \right] \end{aligned}$$

où les deux dernières relations résultent de la formule de Cauchy (7).

On sait [9, relation (4.9), p. 323] que le polynôme de Macdonald $P_{(n)}(X; q, t)$ est proportionnel à $g_n(X; q, t)$. Cependant dans [9] ce résultat n'est pas démontré directement. Il nous parait intéressant d'en présenter une démonstration directe dans le cadre des λ-anneaux.

THÉORÈME 10. *On a*

$$D(X; q, t)\, g_n(X; q, t) = \left(q^n t^{N-1} + \frac{1-t^{N-1}}{1-t} \right) g_n(X; q, t).$$

Preuve. Nous donnons une preuve élémentaire, mais il s'agit d'un cas particulier du théorème 2.1 de [4]. Compte-tenu de la définition (10), il faut prouver

$$\begin{aligned} D(X; q, t)\, H_1 \left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger \right] &= t^{N-1} \sum_{n \geqslant 0} q^n g_n(X; q, t) + \frac{1-t^{N-1}}{1-t} H_1 \left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger \right] \\ &= \left(t^{N-1} \prod_{i=1}^{N} \frac{1-x_i}{1-tx_i} + \frac{1-t^{N-1}}{1-t} \right) H_1 \left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger \right], \end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte de la proposition 1.

Mais on voit facilement que

$$T_{x_i} h_n\left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger\right] = h_n\left[\frac{1-t}{1-q}(X^\dagger + (q-1)\,x_i)\right]$$

$$= h_n\left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger + (t-1)\,x_i\right].$$

En appliquant (5) ceci s'écrit

$$T_{x_i} H_1\left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger\right] = H_1\left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger + (t-1)\,x_i\right]$$

$$= H_1\left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger\right] H_1[(t-1)\,x_i]$$

$$= H_1\left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger\right] \frac{1-x_i}{1-tx_i}.$$

L'assertion est alors une conséquence immédiate de la proposition suivante. ∎

PROPOSITION 9. *On a*

$$\sum_{i=1}^{N} A_i(X;t) = \frac{1-t^N}{1-t}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{1-tx_i} A_i(X;t) = \frac{t^{N-1}}{1-t}\left(1 - \prod_{i=1}^{N} \frac{1-x_i}{1-tx_i}\right).$$

Preuve. Le principe est celui donné dans l'exemple 6.3.2 (a) de [9]. Il suffit de choisir $u=0$ et $u=1/t$ dans l'identité de décomposition en éléments simples suivante

$$\prod_{i=1}^{N} \frac{tu-x_i}{u-x_i} = (t-1)\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i A_i(X;t)}{u-x_i} + t^N.$$

Cette relation est obtenue par une interpolation de Lagrange. Définissons le résultant de deux alphabets A et B par

$$R(A,B) = \prod_{a\in A,\, b\in B} (a-b).$$

On rappelle [5] que si $f(a)$ est un polynôme ayant a^N comme terme de plus haut degré, on a

$$\sum_{a \in A} \frac{f(a)}{R(a, A-a)} = 1$$

pour tout alphabet A de cardinal $N+1$. La relation précédente n'est autre que cette identité écrite pour $A = X + u$ et $f(a) = R(a, X/t)$, c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i - x_i/t}{x_i - u} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \frac{x_i - x_j/t}{x_i - x_j} + \prod_{i=1}^{N} \frac{u - x_i/t}{u - x_i} = 1.$$

10. DÉVELOPPEMENTS

Les théorèmes 1 et 3 permettent d'écrire plusieurs développements explicites pour le polynôme de Macdonald $g_n(X; q, t)$. A chaque fois, il s'agit d'une application élémentaire de la relation (4), de la définition (10) et des formules de Cauchy (7–8).

10.1. *Bases classiques*

Nous retrouvons d'abord deux résultats connus. Le premier est l'exemple 6.8.8(a) de [9]. On a

$$\begin{aligned} g_n(X; q, t) &= \sum_{|\mu| = n} \frac{1}{z_\mu} p_\mu \left[\frac{1-t}{1-q} \right] p_\mu[X^\dagger] \\ &= \sum_{|\mu| = n} \frac{1}{z_\mu} \prod_{i=1}^{l(\mu)} \frac{1 - t^{\mu_i}}{1 - q^{\mu_i}} p_\mu(X). \end{aligned}$$

Le second est l'exemple 6.2.1 de [9]. On a

$$\begin{aligned} g_n(X; q, t) &= \sum_{|\mu| = n} h_\mu \left[\frac{1-t}{1-q} \right] m_\mu[X^\dagger] \\ &= \sum_{|\mu| = n} \prod_{i=1}^{l(\mu)} \frac{(t; q)_{\mu_i}}{(q; q)_{\mu_i}} m_\mu(X) \end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte du corollaire du théorème 1.

Les relations suivantes sont nouvelles. On a

$$g_n(X; q, t) = \sum_{|\mu|=n} m_\mu \left[\frac{1-t}{1-q}\right] h_\mu[X^\dagger]$$
$$= (-1)^n \sum_{|\mu|=n} m_\mu \left[\frac{t-1}{1-q}\right] e_\mu[X^\dagger].$$

Ce qui s'écrit

$$g_n(X; q, t) = \sum_{|\mu|=n} Z_\mu(1, t; q)\, h_\mu(X)$$
$$= (-1)^n \sum_{|\mu|=n} Z_\mu(t, 1; q)\, e_\mu(X). \tag{13}$$

10.2. *Bases "modifiées"*

Dans [9, p. 224] Macdonald introduit les fonctions de Schur "modifiées" $S_\mu(X; t) = s_\mu[(1-t)\, X^\dagger]$. De manière analogue, pour toute partition μ on pose

$$E_\mu(X; t) = e_\mu[(1-t)\, X^\dagger], \qquad H_\mu(X; t) = h_\mu[(1-t)\, X^\dagger].$$

Les fonctions $E_n(X; t)$ et $H_n(X; t)$ sont explicitement connues.

PROPOSITION 10. *Pour tout entier $n \geqslant 1$ on a*

$$E_n(X; t) = (-t)^n\, g_n(X; 0, 1/t) = (-1)^n\, t^{n-N}(t-1) \sum_{i=1}^{N} A_i(X; t)\, x_i^n$$

$$H_n(X; t) = g_n(X; 0, t) = t^{N-1}(1-t) \sum_{i=1}^{N} A_i(X; 1/t)\, x_i^n.$$

Preuve. Les premières égalités sont évidentes. Les secondes résultent de l'exemple 6.3.2 (a) de [9], qui se démontre comme la proposition 9. ∎

On sait ([9], p. 210, 324, et 329) que le polynôme de Macdonald $g_n(X; 0, t) = h_n[(1-t)\, X^\dagger]$ est égal au polynôme de Hall–Littlewood noté $q_n(X; t)$. On a donc

$$E_\mu(X; t) = (-t)^{|\mu|}\, q_\mu(X; 1/t), \qquad H_\mu(X; t) = q_\mu(X; t).$$

En appliquant les formules de Cauchy (7–8), nous obtenons le développement explicite de $g_n(X; q, t)$ sur ces bases

$$\begin{aligned} g_n(X; q, t) &= \sum_{|\mu|=n} m_\mu \left[\frac{1}{1-q}\right] H_\mu(X; t) \\ &= (-1)^n \sum_{|\mu|=n} m_\mu \left[\frac{-1}{1-q}\right] E_\mu(X; t). \end{aligned}$$

Compte-tenu du théorème 1, en posant

$$a_\mu(x) = \sum_{c \in C_\mu} \prod_{i=1}^{l(\mu)} \frac{1}{x^{[c_i]} - 1},$$

ceci s'écrit

$$\begin{aligned} g_n(X; q, t) &= (1/q)^n \sum_{|\mu|=n} a_\mu(1/q)\, H_\mu(X; t) \\ &= (-1)^n \sum_{|\mu|=n} a_\mu(q)\, E_\mu(X; t). \end{aligned} \tag{14}$$

En particulier pour $q = t$ nous obtenons

$$\begin{aligned} h_n(X) &= (1/t)^n \sum_{|\mu|=n} a_\mu(1/t)\, H_\mu(X; t) \\ &= (-1)^n \sum_{|\mu|=n} a_\mu(t)\, E_\mu(X; t). \end{aligned}$$

10.3. *Polynômes de Hall–Littlewood*

Nous pouvons écrire le développement des polynômes de Hall–Littlewood $E_n(X; t)$ ou $H_n(X; t)$ sur les bases classiques. En effet pour $q = 0$ les formules de Cauchy de la section 10.1 deviennent

$$\begin{aligned} E_n(X; t) &= \sum_{|\mu|=n} \frac{(-1)^{n-l(\mu)}}{z_\mu} \prod_{i=1}^{l(\mu)} (1 - t^{\mu_i})\, p_\mu(X) \\ &= (-1)^n \sum_{|\mu|=n} b_\mu(t)\, h_\mu(X) \\ &= t^n \sum_{|\mu|=n} b_\mu(1/t)\, e_\mu(X) \\ &= \sum_{|\mu|=n} (-t)^{n-l(\mu)} (1-t)^{l(\mu)}\, m_\mu(X), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} b_\mu(x) &= (-1)^{l(\mu)} \sum_{c \in C_\mu} (1 - x^{c_1}) \\ &= (-1)^{l(\mu)} \frac{(l(\mu)-1)!}{\prod_i m_i(\mu)!} \sum_k m_k(\mu)(1 - x^k). \end{aligned}$$

De même on a

$$\begin{aligned} H_n(X; t) &= \sum_{|\mu|=n} \frac{1}{z_\mu} \prod_{i=1}^{l(\mu)} (1 - t^{\mu_i})\, p_\mu(X) \\ &= t^n \sum_{|\mu|=n} b_\mu(1/t)\, h_\mu(X) \\ &= (-1)^n \sum_{|\mu|=n} b_\mu(t)\, e_\mu(X) \\ &= \sum_{|\mu|=n} (1-t)^{l(\mu)}\, m_\mu(X). \end{aligned}$$

10.4. *Fonctions élémentaires*

Soit λ une partition arbitraire. On peut poser le problème d'obtenir le développement du polynôme de Macdonald $P_\lambda(X; q, t)$ sur la base des fonctions complètes modifiées $h_\mu[X^\dagger(1-t)/(1-q)]$. Ce problème a été résolu dans [2] pour une partition λ de longueur 2. Nos résultats donnent également la réponse pour une partition-colonne $\lambda = 1^n$.

Considérons l'endomorphisme $\omega_{q,t}$: $f \to \omega_{q,t}(f)$ défini sur toute fonction symétrique homogène par

$$\omega_{q,t}(f)(X) = (-1)^{\deg(f)} f\left[\frac{q-1}{1-t} X^\dagger\right].$$

Compte-tenu de (2) on a immédiatement

$$\omega_{q,t}(g_n(X; q, t)) = e_n(X), \qquad \omega_{t,q}(e_n(X)) = g_n(X; q, t).$$

Et de même

$$\omega_{q,t}(E_\mu(X; t)) = H_\mu(X; q), \qquad \omega_{q,t}(H_\mu(X; t)) = E_\mu(X; q).$$

On sait [9, p. 323] qu'on a $P_{1^n}(X; q, t) = e_n(X)$. En appliquant $\omega_{q,t}$ aux relations (13), on a

$$e_n(X) = \sum_{|\mu|=n} Z_\mu(1, q; t)\, e_\mu\left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger\right]$$

$$= (-1)^n \sum_{|\mu|=n} Z_\mu(q, 1; t)\, h_\mu\left[\frac{1-t}{1-q} X^\dagger\right].$$

Pour $t = q$ la première relation est triviale, ce qui est évident sur l'expression de $W_\mu(1, q; q) = Z_\mu(1, q; q)$. La seconde relation redonne immédiatement la formule classique suivante ([9], exemple 1.2.20, p. 33)

$$e_n(X) = \sum_{|\mu|=n} (-1)^{n-l(\mu)} \frac{l(\mu)!}{\prod_i m_i(\mu)!} h_\mu(X).$$

Pour $q = 0$, en appliquant $\omega_{q,t}$ aux relations (14), nous obtenons

$$e_n(X) = (1/t)^n \sum_{|\mu|=n} a_\mu(1/t)\, E_\mu(X; t)$$

$$= (-1)^n \sum_{|\mu|=n} a_\mu(t)\, H_\mu(X; t).$$

Ces relations sont nouvelles. La seconde donne la forme explicite d'un résultat classique [9, (2.15'), p. 213], qui décompose le polynôme de Hall–Littlewood $P_{1^n}(X; t) = e_n(X)$ sur la base des fonctions $q_\mu(X; t)$.

RÉFÉRENCES

1. G. E. Andrews, The theory of partitions, *in* "Encyclopaedia of Mathematics and Its Applications," Vol. 2, Addison–Wesley, Reading, MA, 1976.
2. N. H. Jing et T. Józefiak, A formula for two-row Macdonald functions, *Duke Math. J.* **67** (1992), 377–385.
3. D. Knutson, "λ-Rings and the Representation Theory of the Symmetric Group," Lecture Notes in Mathematics, Vol. 308, Springer-Verlag, Berlin/New Nork, 1973.
4. L. Lapointe, A. Lascoux, et J. Morse, Determinantal expressions for Macdonald polynomials, *Internat. Math. Res. Notices* **18** (1998), 957–978.
5. A. Lascoux, Notes on interpolation in one and several variables, *available at* http://phalanstere.univ-mlv.fr/~al/.
6. A. Lascoux et M. Lassalle, Une identité remarquable en théorie des partitions, *Math. Annalen* **318** (2000), 299–313.
7. A. Lascoux et M. P. Schützenberger, "Formulaire raisonné de fonctions symétriques," Université Paris 7, 1985.

8. D. E. Littlewood, "The Theory of Group Characters," 2nd ed., Oxford Univ. Press, Oxford, 1950.
9. I. G. Macdonald, "Symmetric Functions and Hall Polynomials," 2nd ed., Clarendon Press, Oxford, 1998.
10. V. Prosper, "Combinatoire des polynômes multivariés," Thèse, Université Paris 7, 1999, *available at* ftp://schubert.univ-mlv.fr/pub/thesis/Vincent.Prosper/vpthesis.html.