JOURNAL OF ALGEBRA 30, 305–316 (1974)

Sur les Algèbres Admettant un Tore d'Automorphismes Donné*†

FIRMIN BRATZLAVSKY

Université Libre de Bruxelles, Faculté des Sciences, Département de Mathématique, Bruxelles, Belgique

Communicated by J. Tits

Received December 30, 1972

Toutes les structures considérées dans cet article (espaces vectoriels, groupes algébriques, algèbres) sont supposées définies sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque.

Les tores maximaux d'automorphismes d'une algèbre A étant conjugués dans $\mathrm{Aut}(A)$, leur figure de poids représente un invariant de A, d'où un principe de classification des algèbres.

Appelons *tores linéaire d'ordre n*, un couple (V, T) formé d'un espace vectoriel V de dimension n et d'un tore algébrique $T \subset GL(V)$ et désignons par $\mathfrak{A}(V, T)$ l'espace des algèbres T-invariantes. Nous dirons que deux algèbres sont *T-isomorphes* (resp. *T-strictement isomorphes*) s'il existe un élément du normalisateur (resp. du centralisateur) de T dans $GL(V)$, qui transforme l'une des algèbres en l'autre. De plus nous dirons que (V, T) est un tore admissible, s'il existe une algèbre $A \in \mathfrak{A}(V, T)$ pour laquelle T soit maximal dans $\mathrm{Aut}(A)$.

L'objet du présent article est de démontrer les deux théorèmes de finitude suivants.

THÉORÈME 1. *Toute classe d'isomorphie de $\mathfrak{A}(V, T)$ est réunion d'un nombre fini de classes de T-isomorphie stricte.*

THÉORÈME 2. *Le nombre de tores linéaires admissibles non isomorphes d'ordre n est fini.*

* Cet article est extrait d'une thèse présentée en janvier 1971 à l'Université Libre de Bruxelles.

† Le rapporteur a informé l'auteur de ce que G. Favre a obtenu des résultats très voisins de ceux du présent article (mémoire à paraître aux Manuscripta Math.).

Une des applications du théorème 1 est, d'une part, la possibilité de construire des familles d'algèbres dépendant de paramètres essentiels et, d'autre part, un nouveau moyen de montrer la non isomorphie de deux algèbres.

1. Tores Linéaires et Figures de Poids

1.1. Nous entendons par *figure de poids*, un couple (X, μ) formé d'un groupe commutatif libre X de rang fini et d'une fonction μ sur X, à valeurs dans l'ensemble des nombres entiers naturels $\mathbf{N}$, dont le support est une partie génératrice finie.

Si le groupe X est de rang r et que $\sum \mu(\chi) = n$, on dit que (X, μ) est une figure de poids de *rang* r et *d'ordre* n. Si $r = n$, on dit que (X, μ) est une figure de poids *libre*. Dans ce cas, on représente (X, μ) par l'expression $(X, (\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n})$ où $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} = \sup \mu$.

Les figures de poids s'introduisent de manière naturelle lorsqu'on considère les tores linéaires (algébriques).

Soit (V, T) un tore linéaire d'ordre n (cf. Introduction). Nous savons qu'il existe une décomposition de V en somme directe $V = \coprod_{i \in I} V_i$ telle que, pour $t \in T$, on a $tV_i \subset V_i$ et $t|_{V_i} = \chi_i(t) \cdot 1_{V_i}$.

Les caractères particuliers de T que sont les χ_i, sont appelés les *poids* de (V, T), ils engendrent le groupe $X^*(T)$ de tous les caractères de T. Par *multiplicité* du poids χ_i, on entend la dimension de l'espace poids V_i correspondant.

Au tore linéaire (V, T) est donc associée la figure de poids $(X^*(T), \mu_T)$ où μ_T est la fonction qui, à tout caractère de T, associe sa multiplicité en tant que poids de (V, T).

En particulier, si T est maximal dans $GL(V)$, la figure de poids de (V, T) est une figure de poids libre.

Le caractère invariant de la définition implique que deux tores linéaires isomorphes ont des figures de poids isomorphes.

Toute figure de poids est manifestement isomorphe à la figure de poids d'un tore linéaire unique (à un isomorphisme près).

1.2. Soient (X, μ) une figure de poids d'ordre n, X' un facteur direct de X, $\bar{X}$ le groupe commutatif libre X/X', φ l'homomorphisme canonique $X \to \bar{X}$, et $\bar{\mu}$ l'application $\bar{X} \to \mathbf{N}$ définie par

$$\bar{\mu}(\bar{\chi}) = \sum_{\chi \in \varphi^{-1}(\bar{\chi})} \mu(\chi).$$

Il est clair que le couple $(\bar{X}, \bar{\mu})$ est une figure de poids. Nous l'appelons la *figure de poids quotient* de (X, μ) par X'. Nous écrivons $(\bar{X}, \bar{\mu}) = (X, \mu)/X'$.

Remarquons que si (X, μ) est la figure de poids d'un tore linéaire (V, S), alors le sous-tore (V, T) de (V, S), où $T = \bigcap_{\chi \in \ker \varphi} \ker \chi$, a une figure de poids isomorphe à $(\bar{X}, \bar{\mu})$.

Réciproquement, soient (V, T) un sous-tore d'un tore linéaire (V, S), f l'injection canonique $T \to S$, f^* la surjection: $X^*(S) \to X^*(T)$, alors $\sup \mu_T = f^*(\sup \mu_S)$ et $(X^*(T), \mu_T) \cong (X^*(S), \mu_S)/\ker f^*$.

En particulier, supposons (V, T) isomorphe à un tore linéaire donné (V, T') et désignons par h l'isomorphisme $(X^*(T), \mu_T) \to (X^*(T'), \mu_{T'})$. Dès lors, $h \circ f^*$ est un homomorphisme surjectif de $X^*(S) \to X^*(T')$ qui applique $\sup \mu_S$ sur $\sup \mu_{T'}$. Le nombre de tels homomorphismes étant fini et T étant entièrement défini par un tel homomorphisme—puisque $T = \bigcap_{\chi \in \ker(h \circ f^*)} \ker \chi$—on en déduit la proposition:

PROPOSITION 1. *Tout tore linéaire ne possède qu'un nombre fini de sous-tores isomorphes à un tore linéaire donné.*

1.3. Considérons la figure de poids libre $(X, (\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n})$ et soit X_Δ' le plus petit facteur direct de X contenant une partie donnée Δ de X. Nous entendons par *figure de poids définie par les générateurs* $\alpha_1, ..., \alpha_n$ *et l'ensemble de relations* Δ, la figure de poids quotient $(X, (\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n})/X_\Delta'$; nous la représentons plus simplement par $(X, (\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n})/\Delta$. Toute figure de poids d'ordre n peut être définie par n générateurs et un ensemble de relations.

2. TORES LINÉAIRES ET ALGÈBRES

2.1. Soit (V, T) un tore linéaire. Désignons par $\mathcal{Cl}(V)$ l'espace vectoriel $\{(V, \pi) \mid \pi \in \operatorname{Hom}(V \times V, V)\}$ des algèbres admettant V comme espace vectoriel sous-jacent, et soit $\mathcal{Cl}(V, T)$ le sous-espace des algèbres T-invariantes: $\mathcal{Cl}(V, T) = \{A \in \mathcal{Cl}(V) \mid T \subset \operatorname{Aut}(A)\}$.

Soient $P = \{a_1, ..., a_m\}$ l'ensemble des poids de (V, T), $V_1, ..., V_m$ les espaces poids correspondants, $x_{i1}, ..., x_{ir_i}$ une base de V_i. Une algèbre $A = (V, \pi)$ appartient à $\mathcal{Cl}(V, T)$ si et seulement si ses équations de structure sont de la forme

$$\pi(x_{sp}, x_{tq}) = 0 \qquad \text{si} \quad a_s \cdot a_t \notin P$$

et

$$\pi(x_{ip}, x_{jq}) = \sum_{r=1}^{r_k} C_{ip,jq}^{kr} x_{kr} \qquad \text{si} \quad a_i \cdot a_j = a_k \in P.$$

L'ensemble $\mathcal{Cl}(V, T)$ est donc un sous-espace de $\mathcal{Cl}(V)$, de dimension $\sum_{a_k = a_i \cdot a_j} \mu(a_i) \cdot \mu(a_j) \cdot \mu(a_k)$.

L'objet du présent paragraphe est l'étude de $\mathcal{Cl}(V, T)$ du point de vue des classes d'isomorphismes. Désignons par $\bar{g}$ la transformation induite dans l'espace $\mathcal{O}\!\ell(V)$ par l'élément g de $GL(V)$. Soit $\mathcal{N}(T)$ (resp. $\mathcal{Z}(T)$), le normalisateur (resp. le centralisateur) de T dans $GL(V)$.

Nous dirons (cf. Introduction) que deux algèbres A_1, $A_2 \in \mathcal{O}\!\ell(V, T)$ sont T-isomorphes (resp. strictement T-isomorphes) s'il existe un élément $g \in \mathcal{N}(T)$ (resp. $g \in \mathcal{Z}(T)$) tel que $\bar{g}(A_1) = A_2$.

Comme $\mathcal{Z}(T)$ est d'indice fini dans $\mathcal{N}(T)$, on a immédiatement le lemme:

Lemme 1. *Toute classe de T-isomorphie de $\mathcal{O}\!\ell(V, T)$ est la réunion d'un nombre fini de classes de T-isomorphie stricte.*

Lemme 2. *Soient A un élément de $\mathcal{O}\!\ell(V, T)$, S un tore maximal de* $\mathrm{Aut}(A)$ *contenant T, $\mathcal{T} = \{T' \subset S \mid T'$ est conjugué à T dans $GL(V)\}$, $\mathcal{B}$ l'ensemble des classes de T-isomorphie dans l'ensemble des éléments de $\mathcal{O}\!\ell(V, T)$ isomorphes à A.*

Il existe une application $\sigma\colon \mathcal{T} \to \mathcal{B}$ et une seule, telle que si $T' \in \mathcal{T}$ et $g \in GL(V)$ est tel que ${}^{g}T' = T$, alors $\bar{g}(A) \in \sigma(T')$; de plus, cette application est surjective.

En effet, la classe de T-isomorphie de $\bar{g}(A)$ ne dépend pas de g mais uniquement de T', car si g' est un autre élément de $GL(V)$ tel que ${}^{g'}T' = T$, on a $gg'^{-1} \in \mathcal{N}(T)$ et $\overline{gg'^{-1}}(\bar{g}'(A)) = \bar{g}(A)$; d'où l'existence de σ.

Soient maintenant $B \in \mathcal{O}\!\ell(V, T)$, une algèbre isomorphe à A, et $h \in GL(V)$ tel que $\bar{h}(B) = A$; dès lors ${}^{h}T$, inclus dans $\mathrm{Aut}(A)$, est inclus dans un tore maximal $S' \subset \mathrm{Aut}(A)$. En vertu de [1, Corollaire 16.6] il existe un élément $a \in \mathrm{Aut}(A)$ tel que ${}^{a}S' = S$, d'où ${}^{ah}T \subset S$. Posant $g = (ah)^{-1}$, on a $B = \bar{g}(A) \in \sigma(T')$ où $T' = {}^{g}T$, ce qui établit la surjectivité.

Le nombre de sous-tores T' de S conjugués à T étant fini (Proposition 1), toute classe d'isomorphie de $\mathcal{O}\!\ell(V, T)$ est la réunion d'un nombre fini de classes de T-isomorphie, ce qui, compte tenu du Lemme 1, établit le théorème 1 énoncé dans l'introduction.

Le lemme 2 établit en particulier la proposition:

Proposition 2. *Si T est un tore maximal d'automorphismes pour une algèbre $A \in \mathcal{O}\!\ell(V, T)$, toute algèbre de $\mathcal{O}\!\ell(V, T)$ isomorphe à A est T-isomorphe à A.*

Corollaire. *Si T est un tore maximal d'automorphismes pour une algèbre $A \in \mathcal{O}\!\ell(V, T)$ et que la figure de poids de (V, T) admet comme seul automorphisme l'identité, toute algèbre appartenant à $\mathcal{O}\!\ell(V, T)$ et isomorphe à A est strictement T-isomorphe à A.*

Il suffit de remarquer que dans ces conditions $\mathcal{N}(T) = \mathcal{Z}(T)$.

2.2. Une conséquence du théorème 1 est la possibilité de construire des familles d'algèbres dépendant de "paramètres essentiels" dans le sens précisé ci-dessous.

Soit E une partie irréductible localement fermée de $\mathcal{Cl}(V, T)$, invariante par l'action de $\mathscr{L}(T)$. La dimension de l'orbite d'un élément générique A de E est $\dim \mathscr{L}(T) - \dim \mathrm{Aut}(A) \cap \mathscr{L}(T)$, et

$$N(E) = \dim E - \dim \mathscr{L}(T) + \dim \mathrm{Aut}(A) \cap \mathscr{L}(T)$$

est la dimension de l'ensemble des classes de T-isomorphie stricte lorsque ce dernier ensemble est un ensemble algébrique. D'après le théorème 1, $N(E)$ est donc aussi la dimension de l'ensemble des classes d'isomorphie de E lorsque celui-ci est un ensemble algébrique.

Nous appelons ce nombre $N(E)$, le *nombre de paramètres essentiels* dont dépend l'élément générique A de E, que l'ensemble des classes d'isomorphie de E soit ou non un ensemble algébrique.

PROPOSITION 3. *Soit E une partie irréductible de $\mathcal{Cl}(V, T)$ invariante par $\mathscr{L}(T)$. Si tous les poids de (V, T) ont la multiplicité 1 et que l'élément générique A de E admet T comme tore maximal d'automorphismes, le nombre de paramètres essentiels dont dépend cet élément est*

$$N(E) = \dim E - \dim V + \dim T.$$

En effet, dans ces conditions, $\mathscr{L}(T)$ est un tore maximal de $GL(V)$ et par conséquent $\dim \mathscr{L}(T) = \dim V$, et $\mathrm{Aut}(A) \cap \mathscr{L}(T) = T$.

Au paragraphe 4, nous donnons des exemples d'application de cette formule.

3. Figures de Poids Admissibles

3.1. Rappelons (cf. Introduction) qu'un tore linéaire (V, T) est dit admissible s'il existe une algèbre $A \in \mathcal{Cl}(V, T)$ pour laquelle T est maximal dans $\mathrm{Aut}(A)$.

Nous dirons qu'une *figure de poids est admissible*, si elle est la figure de poids d'un tore linéaire admissible.

PROPOSITION 4. *Toute figure de poids admissible d'ordre n peut être définie par n générateurs $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et un ensemble Δ de relations de la forme $\alpha_i \alpha_j \alpha_k^{-1}$.*

Cette proposition est un cas particulier de la proposition 4′ énoncée ci-après.

Soient:

$A = (V, \pi)$ une algèbre de dimension n;
T un tore maximal d'automorphismes de A;
(X, μ) la figure de poids de (V, T);
(V, S) un tore linéaire maximal de $GL(V)$, contenant T;
$(e_1, \ldots, e_n)$ une base diagonalisante de (V, S);

$(Y, (\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n})$ la figure de poids (libre) de (V, S) dont les éléments du support sont indexés de manière telle que l'espace de poids α_i est Ke_i (K corps de base);
f l'injection canonique $T \to S$;
f^* la surjection canonique $Y \to X : \alpha \mapsto \alpha \circ f$;

$\pi(e_i, e_j) = \sum C_{ij}^k e_k$, les équations de structure de A;

$I = [1, n]$;

$I' = \{(i, j, k) \in I \times I \times I \mid C_{ij}^k \neq 0\}$;

$\Delta = \{\alpha_i \alpha_j \alpha_k^{-1} \in \ker f^* \mid (i, j, k) \in I'\}$;

Y_Δ' le plus petit facteur direct de Y contenant Δ.

Proposition 4'. *Avec les notations qui précèdent, on a*: $T = (\bigcap_{\alpha \in \Delta} \ker \alpha)^\circ$ *et* $(X, \mu) \cong (Y, (\alpha_i)_{i \in I})/Y_\Delta'$.[1]

Démonstration. Soit $T' = (\bigcap_{\alpha \in \Delta} \ker \alpha)^\circ$. Comme $T \subset T'$, pour montrer que $T = T'$, il suffit de montrer que $T' \subset \mathrm{Aut}(A)$, c'est à dire que pour tout $t' \in T'$ et pour tout couple $(i, j) \in I \times I$:

$$t' \pi(e_i, e_j) = \pi(t' e_i, t' e_j). \tag{1}$$

La relation (1) est évidemment vérifiée si $\pi(e_i, e_j) = 0$. Soit $\pi(e_i, e_j) \neq 0$; dès lors, $\pi(e_i, e_j)$ est un vecteur poids de (V, T), de poids $a_k = f^*(\alpha_i \cdot \alpha_j)$. L'espace des vecteurs propres de a_k est engendré par les e_l tels que $f^*(\alpha_l) = a_k$.

Mais pour un tel e_l et pour tout $t' \in T'$, on a

$$\begin{aligned} t' e_l &= \alpha_l(t') \cdot e_l \\ &= \alpha_i(t') \cdot \alpha_j(t') \cdot e_l \text{, d'où la relation (1).} \end{aligned}$$

Pour établir la 2ème partie de la proposition, il suffit, comme $(X, \mu) \cong (Y, (\alpha_i)_{i \in I})_{/\ker f^*}$, de montrer que $Y_\Delta' = \ker f^*$ ou encore que le sous-groupe Y_Δ de Y, engendré par les éléments $\alpha \in \Delta$, est d'indice fini dans $\ker f^*$.

Les relations $T = \bigcap_{\alpha \in \ker f^*} \ker \alpha \subset (\bigcap_{\alpha \in Y_\Delta} \ker \alpha)^\circ \subset (\bigcap_{\alpha \in \Delta} \ker \alpha)^\circ = T$ impliquent $T = (\bigcap_{\alpha \in Y_\Delta} \ker \alpha)^\circ$.

Considérons le sous-groupe fermé de $S : D = \bigcap_{\alpha \in Y_\Delta} \ker \alpha$ et désignons par $\bar{D}$ l'annulateur de D dans Y. Nous avons les inclusions $Y_\Delta \subset \bar{D} \subset \ker f^*$. Le tore T étant d'indice fini dans D, l'annulateur $\bar{D}$ est d'indice fini dans $\ker f^*$. Par ailleurs, $\bar{D}$ est le plus petit sous-groupe de Y contenant Y_Δ tel que $Y/\bar{D}$ soit sans p-torsion: Y_Δ est donc d'indice fini dans $\bar{D}$ et la proposition est établie.

[1] $(\bigcap_{\alpha \in \Delta} \ker \alpha)^\circ$ représente la composante neutre de $(\bigcap_{\alpha \in \Delta} \ker \alpha)$.

COROLLAIRE. *Le nombre de figures de poids admissibles non isomorphes, d'ordre donné n, est inférieur à* $2^{n(n^2-n+2)/2}$.

Ceci démontre le deuxième théorème de finitude annoncé dans l'introduction.

3.2. Considérons la figure libre $(Y, (\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n})$. On dit que $\Delta \subset \{\alpha_i\alpha_j\alpha_k^{-1}\}$ est une partie *réduite*, si le rang du plus petit facteur direct engendré par Δ, Y_Δ', est égal au cardinal de Δ.

Pour toute partie $\Delta \subset \{\alpha_i\alpha_j\alpha_k^{-1}\}$, la figure de poids $(Y, (\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n})/\Delta$ n'est pas nécessairement admissible. Ainsi, on vérifie que la figure $(Y, (\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant 3})/\Delta$ avec $\Delta = \{\alpha_1\alpha_1\alpha_2^{-1}, \alpha_1\alpha_1\alpha_3^{-1}\}$, n'est pas admissible.

On a cependant la proposition:

PROPOSITION 5. *Soit* $\Delta \subset \{\alpha_i\alpha_j\alpha_k^{-1}\}$. *Si la figure de poids* $(Y, (\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n})/\Delta$ *a tous ses poids de multiplicité* 1, *elle est admissible.*

Plus précisément, soient:

(V, S) un tore linéaire dont la figure de poids est la figure libre $(Y, (\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n})$;

$(e_1, \ldots, e_n)$ une base diagonalisante de (V, S) telle que e_i soit de poids α_i ;

Δ une partie de $\{\alpha_i\alpha_j\alpha_k^{-1}\}$ telle que la figure de poids

$$(X, \mu) = (Y, (\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n})/\Delta$$

ait tous ses poids de multiplicité 1

T le sous-tore de S dont la figure de poids est (X, μ); $C_{ij}^k(A)$ les constantes de structure par rapport à la base $(e_1, \ldots, e_n)$ d'une algèbre $A \in \mathcal{A}(V, T)$; $\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{A}(V, T) \mid C_{ij}^k(A) \neq 0$ pour (i, j, k) tel que $\alpha_i\alpha_j\alpha_k^{-1} \in \Delta\}$.

Dans ces conditions:

(i) *Toutes les algèbres appartenant à* $\mathcal{U}$ *admettent* T *comme tore maximal d'automorphismes.*

(ii) *Si* Δ *est réduit et que l'on désigne par* s *le cardinal de* Δ, *par* s' *le nombre de produits de* 2 *poids distincts de* (X, μ) *qui sont également des poids, par* s'' *le nombre de poids de* (X, μ) *dont le carré est un poids, alors l'élément générique de* $\mathcal{A}(V, T)$ *dépend de* $2s' + s'' - s$ *paramètres essentiels.*

Démonstration. (i) Désignons par I le segment $[1, n]$. Les poids de (X, μ) ayant la multiplicité 1, à tout $(i, j) \in I \times I$ correspond au plus un nombre $k \in I$ tel que $\alpha_i\alpha_j\alpha_k^{-1} \in \Delta$. Pour toute algèbre $A \in \mathcal{U}$, on a donc $\pi(e_i, e_j) = C_{ij}^k e_k$. Si $T' \subset S$ est un tore d'automorphismes d'une telle algèbre, on a: $T' \in (\bigcap_{\alpha\in\Delta} \ker \alpha)^\circ = T$, ce qui démontre la première partie de la proposition puisque S est le centralisateur de T dans $GL(V)$.

(ii) est une conséquence de la proposition 3. Nous avons en effet $\dim \mathcal{O}\!\mathcal{l}(V, T) = 2s' + s''$; $\dim T = \dim V - s$; $\dim \mathscr{X}(T) = \dim V$.

3.3. Nous dirons qu'un tore linéaire (V, T) est *cn-admissible* (resp. *cn-nilpotent-admissible*) s'il existe une algèbre de carré nul[2] (resp. nilpotente de carré nul) qui ait T pour tore maximal d'automorphismes, et qu'une figure de poids est *cn*-admissible (resp. *cn*-nilpotente-admissible) si elle est la figure de poids d'un tore linéaire *cn*-admissible (resp. *cn*-nilpotent-admissible).

Les deux propositions ci-dessous se démontrent comme les propositions précédentes.

PROPOSITION 6. *Toute figure de poids cn-admissible (resp. cn-nilpotente-admissible) d'ordre n, peut être définie par n générateurs* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *et un ensemble* Δ *de relations de la forme* $\alpha_i\alpha_j\alpha_k^{-1}$ *avec* $i < j$ *(resp.* $i < j < k$*).*

PROPOSITION 7. *Soit* $\Delta \subset \{\alpha_i\alpha_j\alpha_k^{-1} \mid i < j\}$ *(resp.* $\Delta \subset \{\alpha_i\alpha_j\alpha_k^{-1} \mid i < j < k\}$*). Si la figure* $(Y, (\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n})/\Delta$ *a tous ses poids de multiplicité* 1, *elle est cn-admissible (resp. cn-nilpotente-admissible).*

4. APPLICATIONS

Nous utilisons les résultats du paragraphe 2 pour construire des exemples d'ensembles algébriques d'algèbres non isomorphes.

4.1. Considérons la figure de poids (X, μ) de rang 1 et d'ordre m, dont le support est $P = \{a, a^2, \ldots, a^m\}$.

Soients:

V un espace vectoriel de dimension m;

T un tore de $GL(V)$ tel que la figure de poids de (V, T) soit (X, μ);

$e_1, \ldots, e_m$ une base diagonalisante de (V, T) indexée de manière telle que e_i appartienne à l'espace de poids a^i de (V, T).

Toute algèbre $A \in \mathcal{O}\!\mathcal{l}(V, T)$ a des équations de structure de la forme

$$\begin{cases} e_i \cdot e_j = C_{ij}^{i+j} e_{i+j} & \text{pour tout } (i, j) \text{ tel que } 2 \leqslant i + j \leqslant m, \\ e_i \cdot e_j = 0 & \text{pour les autres } (i, j). \end{cases}$$

On en déduit que toute algèbre $A \in \mathcal{O}\!\mathcal{l}(V, T)$ est nilpotente et que $\dim \mathcal{O}\!\mathcal{l}(V, T) = (m(m-1))/2$.

Dans les propositions qui suivent, le tore linéaire (V, T) considéré est le tore défini ci-dessus.

[2] Une algèbre A est dite de carré nul si $x^2 = 0$ pour tout $x \in A$.

PROPOSITION 8. *Supposons $m \geqslant 5$ et soient*

$$\mathscr{U} = \{A \in \mathcal{A}(V, T) \mid C_{1i}^{1+i} \cdot C_{23}^{5} \neq 0 \text{ avec} : 2 \leqslant i \leqslant m-1\}$$

$$\mathscr{F} = \{A \in \mathcal{A}(V, T) \mid C_{1i}^{1+i} = C_{23}^{5} = 1 \text{ avec} : 2 \leqslant i \leqslant m-1\}$$

(i) *Toutes les algèbres $A \in \mathscr{U}$ admettent T comme tore maximal d'automorphismes.*

(ii) *L'élément générique de $\mathcal{A}(V, T)$ dépend de $N = ((m-1)(m-2))/2$ paramètres essentiels.*

(iii) *$\mathscr{F}$ est une variété de dimension N, d'algèbres 2 à 2 non isomorphes.*

Démonstration. (i) Soient $\chi_1, \ldots, \chi_m$ les poids d'un tore S de $GL(V)$ contenant T. Une condition nécessaire pour que le tore S soit un tore d'automorphismes d'une algèbre $A \in \mathscr{U}$ est que l'on ait pour tout $s \in S$ et pour tout i tel que $2 \leqslant i \leqslant m-1$:

$$\chi_1(s) \cdot \chi_i(s) = \chi_{1+i}(s) \qquad \text{et} \qquad \chi_2(s) \cdot \chi_3(s) = \chi_5(s),$$

c'est-à-dire, pour tout $i : \chi_i = (\chi_1)^i$.

Cette condition étant suffisante, on a $S = T$.

(ii) Il suffit d'appliquer la proposition 3.

(iii) La figure de poids de (V, T) admettant comme seul automorphisme l'identité, et T étant un tore maximal d'automorphismes pour toute algèbre $A \in \mathscr{U}$, les classes d'isomorphie dans $\mathscr{U}$ sont toutes des classes de T-isomorphie stricte (Section 2, Proposition 2, Corollaire).

Il suffit donc, pour établir (iii), de montrer que l'orbite $\mathscr{Z}(T)(A)$ de toute algèbre $A \in \mathscr{U}$ par l'action du centralisateur de T rencontre $\mathscr{F}$ en un et un seul point.

Soit $g \in \mathscr{Z}(T)$ et posons $g \cdot e_i = g_i e_i$. Les coordonnées $\bar{C}_{ij}^{i+j}$ de l'algèbre $\bar{A} = \bar{g}(A)$ satisfont aux relations:

$$g_i g_j C_{ij}^{i+j} = g_{i+j} \bar{C}_{i+j}^{i+j}. \tag{1}$$

Nous en déduisons:

$$g_2 = (g_1)^2 \cdot \frac{C_{13}^4 C_{14}^5 \bar{C}_{23}^5}{\bar{C}_{13}^4 \bar{C}_{14}^5 C_{23}^5},$$

$$g_i = (g_1)^i \cdot \frac{C_{13}^4 C_{14}^5 \bar{C}_{23}^5}{\bar{C}_{13}^4 \bar{C}_{14}^5 C_{23}^5} \cdot \frac{C_{12}^3 C_{13}^4 \cdots C_{1,i-1}^i}{\bar{C}_{12}^3 \bar{C}_{13}^4 \cdots \bar{C}_{1,i-1}^i} \qquad \text{avec} \qquad 3 \leqslant i \leqslant m.$$

Ces relations montrent que si A et $\bar{A}$ appartiennent à $\mathscr{F}$ on a $g_i = (g_1)^i$ pour tout i, c'est-à-dire que $g \in T$ et donc que $A = \bar{A}$.

4.2. *Remarques.* Désignons par $\mathscr{Ab}(V, T)$ et $\mathscr{Cn}(V, T)$, respectivement le sous-ensemble des algèbres commutatives et le sous-ensemble des algèbres de carré nul de $\mathscr{A}(V, T)$. Il résulte encore de la Proposition 3 (Section 2), que les éléments génériques de

$$\mathscr{U}_1 = \mathscr{U} \cap \mathscr{Ab}(V, T) \qquad \text{et de} \qquad \mathscr{U}_2 = \mathscr{U} \cap \mathscr{Cn}(V, T)$$

dépendent respectivement de

$$N_1 = \dim \mathscr{Ab}(V, T) - m + 1 \qquad \text{et de} \qquad N_2 = \dim \mathscr{Cn}(V, T) - m + 1$$

paramètres essentiels. Si $m = 2n$ (resp. $m = 2n + 1$), $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F} \cap \mathscr{Ab}(V, T)$ est une variété de dimension $N_1 = (n - 1)^2$ (resp. $n(n - 1)$) d'algèbres commutatives, 2 à 2 non isomorphes et $\mathscr{F}_2 = \mathscr{F} \cap \mathscr{Cn}(V, T)$ est une variété de dimension $N_2 = n^2 - 3n + 1$ (resp. $n(n - 2)$) d'algèbres de carré nul, 2 à 2 non isomorphes.

En particulier, si l'on explicite les identités de Jacobi auxquelles doivent satisfaire les algèbres appartenant à $\mathscr{F}_2$ pour être des algèbres de Lie, on obtient les résultats suivants [3]:

si $m = 6$, $\mathscr{F}_2$ ne contient qu'une seule algèbre de Lie;

si $m = 7$ ou 8, l'ensemble des algèbres de Lie appartenant à $\mathscr{F}_2$ constitue une variété de dimension 1;

si $9 \leqslant m \leqslant 11$, l'ensemble des algèbres de Lie appartenant à $\mathscr{F}_2$ est constitué:

(a) d'une variété de dimension 1, si la caractéristique du corps de base est différente de 2 et de 3;

(b) de la réunion de deux variétés de dimension 1, si la caractéristique est 2 ou 3;

si $m = 12$ ou 13, avec $p \neq 2$ et $p \neq 3$, $\mathscr{F}_2$ ne contient que 2 algèbres de Lie;

si $m \geqslant 14$, avec $p = 0$, $\mathscr{F}_2$ se réduit à la seule algèbre de Lie, d'équations de structure: $e_1 \cdot e_i = e_{i+1}$, $e_2 \cdot e_i = e_{i+2}$, $e_k \cdot e_l = 0$.

Signalons que toutes les algèbres de Lie appartenant à $\mathscr{F}_2$ sont des algèbres filiformes suivant la définition introduite par M. Vergne dans [4]. En particulier, pour $m = 7$, la famille d'algèbres que nous obtenons est celle indiquée dans Bourbaki [2], (Exemple no. 18, Section 4).

Nous pouvons bien entendu exhiber beaucoup d'autres sous-ensembles localement fermés de $\mathcal{Cl}(V, T)$ dont tous les éléments admettent T comme tore maximal d'automorphismes.

4.3. Nous donnons ci-dessous un exemple de sous-ensemble de $\mathcal{Cl}(V, T)$ dont tous les éléments admettent un même sur-tore T' de T comme tore maximal d'automorphismes.

Cet exemple conduit à une famille d'algèbres de Lie nilpotentes de classe 2, dépendant de "beaucoup" de paramètres essentiels.

Supposons que la dimension m de l'espace vectoriel ci-dessus soit égale à $2n$. Désignons par $\mathcal{C}n(V_1, V, T)$ la sous-variété des algèbres $A = (V, \pi) \in \mathcal{C}n(V, T)$ pour lesquelles la restriction $\pi|_{V_1 \times V} = 0$, où V_1 est le sous-espace de V engendré par $e_2, ..., e_{2i}, ..., e_{2n}$. En d'autres termes:

$$\mathcal{C}n(V_1, V, T) = \{A \in \mathcal{Cl}(V, T) \mid C_{ii}^{2i} = C_{2i,j}^{2i+j} = 0 \text{ et } C_{ij}^{i+j} + C_{ji}^{i+j} = 0\}.$$

Toutes les algèbres appartenant à $\mathcal{C}n(V_1, V, T)$ étant nilpotentes et de classe $\leqslant 2$, sont des algèbres de Lie. On vérifie que, lorsque $m \geqslant 12$, les algèbres appartenant à l'ensemble

$$\mathcal{C}n_0(V_1, V, T) = \left\{A \in \mathcal{C}n(V_1, V, T) \mid C_{1,2i+1}^{2i+2} \cdot C_{3,2j+1}^{2j+4} \cdot C_{5,7}^{12} \neq 0 \text{ pour } \begin{matrix} 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ 2 \leqslant j \leqslant n-2 \end{matrix}\right\}$$

admettent un tore maximal d'automorphismes, de dimension 3, dont la figure de poids possède comme seul automorphisme l'identité.

Si $n = 2k$ (resp. $2k + 1$), c'est-à-dire si $\dim V = m = 4k$ (resp. $4k + 2$), $\dim \mathcal{C}n(V_1, V, T) = k^2$ (resp. $k^2 + k$). Le nombre de paramètres essentiels dont dépend l'élément générique de $\mathcal{C}n(V_1, V, T)$ est donc:

$$N_4 = \dim \mathcal{C}n(V_1, V, T) - m + 3 = k^2 - 4k + 3 \text{ (resp. } k^2 - 3k + 1).$$

Comme en (iii) Proposition 8, on vérifie que

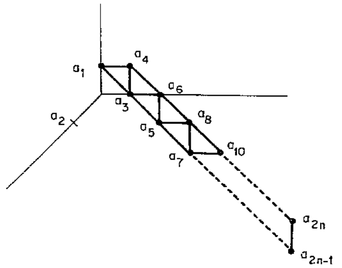
$$\left\{A \in \mathcal{C}n(V_1, V, T) \mid C_{1,2i+1}^{2i+2} = C_{3,2j+1}^{2j+4} = C_{5,7}^{12} = 1 \text{ pour } \begin{matrix} 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ 2 \leqslant j \leqslant n-2 \end{matrix}\right\}$$

est une variété de dimension N_4 d'algèbres (de Lie nilpotentes de classe 2) deux à deux non isomorphes.

Précisons que les poids $a_1, ..., a_{2n}$ correspondant aux espaces poids $Ke_1, ..., Ke_{2n}$ du tore maximal dont il est question ci-dessus, satisfont aux relations:

$$\left.\begin{aligned} a_{2i+1} &= a_1^{1-i} \cdot a_3^{\,i} \\ a_{2i+2} &= a_1^{2-i} \cdot a_3^{\,i} \end{aligned}\right\} \text{ pour tout } i \text{ tel que } 1 \leqslant i \leqslant n-1.$$

On peut les représenter dans $(Z)^3$ par un diagramme de la forme:



Bibliographie

1. A. Borel, Groupes linéaires algébriques, *Ann. of Math.* **64** (1956), 20–82.
2. N. Bourbaki, "Groupes et algèbres de Lie," Chapitre 1, Hermann, Paris, 1960.
3. F. Bratzlavsky, Constructions de variétés de dimension 1 d'algèbres de Lie nilpotentes de classe $\geqslant 6$, deux à deux non isomorphes, à paraître.
4. M. Vergne, Réductibilité de la variété des algèbres de Lie Nilpotentes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **263** (1966).