Theoretical Computer Science 35 (1985) 271-293
North-Holland

UNE APPLICATION DE LA REPRESENTATION MATRICIELLE DES TRANSDUCTIONS

J.-E. PIN et J. SAKAROVITCH
Université Paris VI et CNRS, LITP, 4 place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05, France

Communicated by M. Nivat
Received September 1982
Revised April 1984

Résumé. On étudie le problème suivant, fréquemment rencontré en théorie des langages: soient n langages $L_1, \ldots, L_n$ reconnus par les monoïdes $M_1, \ldots, M_n$ respectivement. Etant donné une opération φ, on cherche à construire un monoïde M, fonction de $M_1, \ldots, M_n$, qui reconnaisse le langage $(L_1, \ldots, L_n)\varphi$. Nous montrons que la plupart des constructions proposées dans la littérature pour ce type de problème sont en fait des cas particuliers d'une méthode générale que nous exposons ici. Cette méthode s'applique également à certains problèmes moins classiques relatifs par exemple à la réduction du groupe libre ou aux opérations de contrôle sur les T0L-systèmes.

Abstract. We study the following classical problem of formal language theory: let $L_1, \ldots, L_n$ be n languages recognized by the monoids $M_1, \ldots, M_n$ respectively. Given an operation φ, we want to build a monoid M, function of $M_1, \ldots, M_n$, which recognizes the language $(L_1, \ldots, L_n)\varphi$. We show that most of the constructions given in the literature for this kind of problem are particular cases of a general method. This method can also be applied to some less classical problems related for example to the Dyck-reduction of the free-group or to control operations on T0L-systems.

Introduction

Nous considérons ici le problème suivant: soient un, deux ou n langages L_1, $L_2, \ldots, L_n$ sur un alphabet A et φ une opération qui à ces un, deux, ou n langages fait correspondre un autre langage $K = (L_1, L_2, \ldots, L_n)\varphi$; soit maintenant, pour chaque $1 \leq i \leq n$, un monoïde M_i reconnaissant le langage L_i; comment construire une opération ψ qui à ces un, deux ou n monoïdes fait correspondre un monoïde $N = (M_1, M_2, \ldots, M_n)\psi$ qui reconnaît le langage K?

Ce problème est fréquemment rencontré, et traité, dans la littérature sur les langages rationnels. Par exemple, un même monoïde M reconnaît un langage L et son image par un homomorphisme inverse, le produit direct $M_1 \times M_2$ des monoïdes reconnaissant les langages L_1 et L_2 reconnaît le langage $L_1 \cap L_2$, le produit dit 'de Schützenberger' $M_1 \diamond M_2$ de ces deux mêmes monoïdes reconnaît le langage $L_1 L_2$, produit de L_1 et L_2, etc.

De telles constructions sont en général une première étape pour déterminer les propriétés communes à $M_1, M_2, \ldots, M_n$ et à $(M_1, M_2, \ldots, M_n)\psi$, ou, autrement dit, pour étudier les *invariants syntaxiques* de l'opération φ.

Il est possible de donner une présentation unifiée de toutes ces constructions. L'idée-clef de cette présentation est de considérer l'opération φ comme l'inverse d'une transduction. Si cette transduction admet une représentation matricielle, une simple remarque, hissée ici au rang de proposition, donne alors une réponse au problème initial. Le procédé n'est pas universel: toutes les opérations ne peuvent pas s'exprimer comme l'inverse d'une transduction qui admet une représentation matricielle: il en est ainsi par exemple de la complémentation et de l'opération 'étoile'. Cependant, l'étendue du champ d'application de cette méthode est remarquable, insoupçonnée par les auteurs même de cet article qui ne devait être au départ qu'une courte note. Nous nous proposons d'illustrer cette méthode avec toute une série d'exemples, classiques et moins classiques, d'opérations sur les langages. Nous passons en revue les substitutions inverses, l'intersection et l'union, le quotient, le produit, le mélange, de même que, et cela est moins attendu, l'opération de plus long facteur gauche commun, la réduction du groupe libre, et une opération de contrôle sur les T0L-systèmes. Nous donnons ainsi une construction unique qui, pour chaque opération, fournit une preuve directe de résultats, en général déjà connus pour les langages rationnels.

A la liste d'opérations ci-dessus, il faut ajouter les opérations rationnelles qui, à l'évidence—ou plutôt, grâce au théorème de Kleene-Schützenberger—sont justiciables de la même méthode. Nous étudions en détail le cas des fonctions rationnelles inverses et celui des morphismes, dans le but de donner pour ces opérations la 'meilleure' réponse possible au problème, c'est-à-dire la construction qui donne un monoïde aussi petit que possible.

Pour terminer cet article, nous évoquerons, avec deux exemples et une définition formelle, une extension possible de la méthode à des opérations φ dont l'inverse n'a pas, au sens usuel donné à ce terme, une représentation matricielle mais peut être définie par une combinaison 'non linéaire', et éventuellement infinie, des coefficients d'une représentation matricielle. Une étude plus complète de cette famille d'opérations est reportée à un article à venir.

1. Terminologie et notations

Nous suivons, pour l'essentiel, la terminologie et les notations de Berstel [3] et d'Eilenberg [7].

Soit A un ensemble fini, appelé *alphabet*; on note A^* le monoïde libre engendré par A, 1_{A^*} (parfois simplifié en 1) le mot vide élément neutre de A^*, et $A^+ = A^* \setminus 1$.

La longueur d'un mot f de A^* est notée $|f|$.

Si M est un monoïde, on note 1 son élément neutre. On note $\mathcal{P}(M)$ l'ensemble des parties de M. La multiplication de M s'étend en une multiplication sur $\mathcal{P}(M)$

par

$$XY=\{xy \mid x\in X, y\in Y\}.$$

Muni de l'union (comme addition) et de cette multiplication $\mathcal{P}(M)$ est un semi-anneau. L'ensemble vide, élément neutre de l'addition, sera noté 0.

Si P est une partie de M on note P^* le monoïde engendré par P.

L'ensemble des parties rationnelles de M, noté Rat M, est le plus petit ensemble de parties de M contenant les parties finies, et fermé par union, produit et étoile. On note Fin M l'ensemble des parties finies de M.

On note $\mathbb{N}$ et $\mathbb{B}$ respectivement le semi-anneau des entiers positifs ou nuls et le semi-anneau de Boole.

On dit qu'une partie P d'un monoïde M est *reconnue* par un morphisme $\eta: M \to N$ si $P=P\eta\eta^{-1}$, c'est-à-dire s'il existe une partie Q du monoïde N telle que $P=Q\eta^{-1}$. Par extension on dît aussi dans ce cas que le monoïde N reconnaît P. Une partie P d'un monoïde est dite reconnaissable si elle est reconnue par un monoïde fini. Et le théorème de Kleene énonce que les parties reconnaissables d'un monoïde libre finiment engendré coïncident avec les parties rationnelles de ce monoïde.

Soient M et N deux monoïdes. On appelle *transduction de M dans N*, et on note $\tau: M \to N$, toute application de M dans $\mathcal{P}(N)$. En particulier, une fonction de M dans N définit une transduction. Le graphe $\hat{\tau}$ d'une transduction $\tau: M \to N$ est le sous-ensemble de $M\times N$ défini par

$$\hat{\tau}=\{(m, n) \mid n\in m\tau\}.$$

Si $\tau: M \to N$ est une transduction, la *transduction inverse* $\tau^{-1}: N \to M$ est définie par

$$n\tau^{-1}=\{m \mid (m, n)\in \hat{\tau}\}.$$

Une transduction $\tau: M \to N$ s'étend additivement en une application, notée encore τ, de $\mathcal{P}(M)$ dans $\mathcal{P}(N)$:

$$P\tau=\bigcup_{m\in P} m\tau.$$

Une transduction de M dans N est dite *rationnelle* si son graphe est une partie rationnelle du monoïde $M\times N$. En particulier, l'inverse d'une transduction rationnelle est rationnelle.

Si K est un semi-anneau, ce sera $\mathbb{B}$, $\mathbb{N}$ ou $\mathcal{P}(M)$, on note suivant l'usage $K^{n\times n}$ le semi-anneau des matrices carrées de dimension n à coefficients dans K.

On dit qu'une transduction $\tau: A^* \to M$ *admet une représentation matricielle* s'il existe un entier positif n, un morphisme $\mu: A^* \to \mathcal{P}(M)^{n\times n}$, une matrice-ligne λ de $\mathcal{P}(M)^{1\times n}$, et une matrice-colonne ν de $\mathcal{P}(M)^{n\times 1}$ tels que, pour tout f dans A^*,

$$f\tau=\lambda . f\mu . \nu.$$

On a alors le théorème suivant.

Théorème (Kleene-Schützenberger). *Une transduction* $\tau: A^* \to M$ *est rationelle si, et seulement si, elle admet une représentation matricielle à coefficients dans* Rat M.

2. Une remarque élémentaire

Tout morphisme de monoïdes $\eta: M \to N$ se prolonge en un morphisme de semi-anneau de $\mathcal{P}(M)$ dans $\mathcal{P}(N)$ puis en un morphisme du monoïde des matrices (de dimension n) à coefficients dans $\mathcal{P}(M)$ dans celui des matrices (de même dimension) à coefficients dans $\mathcal{P}(N)$, que nous noterons encore η. On peut alors énoncer la proposition suivante.

Proposition 2.1. *Soit* $\tau: A^* \to M$ *une transduction admettant une représentation matricielle* (λ, μ, ν), *et soit* P *une partie de* M, *reconnue par un morphisme* $\eta: M \to N$. *Alors le langage* $P\tau^{-1}$ *est reconnu par le monoïde (de matrices)* $A^*\mu\eta$.

Preuve. Soient $Q = P\eta$ et R le sous-ensemble de $A^*\mu\eta$ défini par

$$R = \{s \mid \lambda\eta.s.\nu\eta \cap Q \neq \emptyset\}.$$

On vérifie sans peine la suite d'égalités:

$$\begin{aligned} R(\mu\eta)^{-1} &= \{f \in A^* \mid f\mu\eta \in R\} = \{f \in A^* \mid \lambda\eta.f\mu\eta.\nu\eta \cap Q \neq \emptyset\} \\ &= \{f \in A^* \mid f\tau\eta \cap Q \neq \emptyset\} = \{f \in A^* \mid f\tau \cap Q\eta^{-1} \neq \emptyset\} \\ &= \{f \in A^* \mid f\tau \cap P \neq \emptyset\} = P\tau^{-1}. \qquad \square \end{aligned}$$

Il s'ensuit immédiatement de cette proposition une propriété des transductions qui admettent une représentation matricielle, qu'elles soient rationnelles ou non.

Corollaire 2.2. *Soit* $\tau: A^* \to M$ *une transduction admettant une représentation matricielle. L'image inverse d'une partie reconnaissable de* M *par* τ *est un langage reconnaissable—donc rationnel—de* A^*.

Preuve. Soit P une partie de M reconnue par un morphisme η de M dans un monoïde fini N. D'après la Proposition 2.1, $P\tau^{-1}$ est reconnu par $A^*\mu\eta$, monoïde de matrices à coefficients dans $\mathcal{P}(N)$ donc monoïde fini également. $\square$

3. Opérations sur les langages

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n alphabets non nécessairement disjoints et $L_1, L_2, \ldots, L_n$ n langages de $A_1^*, A_2^*, \ldots, A_n^*$ respectivement; soit, pour chaque entier $i = 1, 2, \ldots, n$,

$\eta_i : A_i^* \to M_i$ un morphisme reconnaissant L_i. Le morphisme $\eta : \prod_{i=1}^n A_i \to \prod_{i=1}^n M_i$, produit des morphismes η_i, reconnaît le sous-ensemble $L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_n$ de $\prod_{i=1}^n A_i$.

Soit φ une opération sur les n langages L_i; le calcul d'un monoïde reconnaissant $L = (L_1, L_2, \ldots, L_n)\varphi$ résulte de la Proposition 2.1 dans le cas où il existe une transduction τ d'un monoïde libre A^* dans $\prod_{i=1}^n A_i^*$ telle que:

(i) τ admet une représentation matricielle (λ, μ, ν),

(ii) pour tout n-uplet de langages $L_1, L_2, \ldots, L_n$ on a $(L_1, L_2, \ldots, L_n)\varphi = (L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_n)\tau^{-1}$.

En effet, la Proposition 2.1 montre que dans ce cas le langage L est reconnu par $A^*\mu\eta$.

De fait, nous allons voir que la plupart des opérations classiques sur les langages entrent dans cette catégorie.

3.1. Morphisme inverse et substitution inverse

Si l'opération φ est un morphisme inverse θ^{-1}, avec $\theta : B^* \to A^*$, on prend $\tau = \theta$ dont la représentation matricielle est $(1_{A^*}, \theta, 1_{A^*})$. On retrouve ainsi une proposition classique dans l'étude des monoïdes syntaxiques (cf. [7, Vol. B Proposition VII.1.3] par exemple).

Proposition 3.1. *Soit L un langage reconnu par un monoïde M; l'image de L par un morphisme inverse est reconnue également par M.*

Par définition une transduction σ de B^* dans A^* est une *substitution* si c'est un morphisme de B^* dans $\mathcal{P}(A^*)$; elle admet la représentation matricielle $(1_{A^*}, \sigma, 1_{A^*})$ (de dimension 1). La Proposition 2.1 s'applique donc à l'inverse de la substitution σ (i.e., la transduction inverse σ^{-1} et non pas le morphisme inverse de $\mathcal{P}(A^*)$ dans B^*) et on obtient le résultat suivant, établi par Reutenauer [21] pour les langages rationnels.

Proposition 3.2. *Soit L un langage reconnu par M, l'image de L par une substitution inverse est reconnue par $\mathcal{P}(M)$.*

Une substitution n'est pas nécessairement une transduction rationnelle mais on a, conséquence immédiate de la Proposition 3.2, ou spécialisation du Corollaire 2.2, le corollaire suivant.

Corollaire 3.3 ([21]). *L'image par une substitution inverse d'un langage rationnel est un langage rationnel.*

3.2. Intersection et union

Un autre résultat élémentaire et classique de l'étude des monoïdes syntaxiques concerne l'intersection et l'union des langages (cf. [7, Vol. B, Proposition VII.1.3]).

Proposition 3.4. *Soient L_1 et L_2 deux langages de A^*, reconnus respectivement par M_1 et M_2. Alors $M_1 \times M_2$ reconnaît $L_1 \cap L_2$ et $L_1 \cup L_2$.*

Soit $\tau : A^* \to A^* \times A^*$ la transduction définie par $f\tau = (f, f)$ pour tout f dans A^*. Elle admet la représentation matricielle (λ, μ, ν) de dimension 1 où $\lambda = \nu = (1_{A^*}, 1_{A^*})$ et $a\mu = (a, a)$ pour tout a dans A.

On vérifie immédiatement que

$$L_1 \cap L_2 = (L_1 \times L_2)\tau^{-1}$$

et donc $L_1 \cap L_2$ est reconnu par $A^*\mu\eta = \{(f\eta_1, f\eta_2) \mid f \in A^*\}$, sous-monoïde de $M_1 \times M_2$.

L'union est obtenue à l'aide d'une autre transduction $\tau : A^* \to A^* \times A^*$ définie par $f\tau = (f \times A^*) \cup (A^* \times f)$ pour tout f dans A^*.

On vérifie d'une part que

$$L_1 \cup L_2 = (L_1 \times L_2)\tau^{-1}$$

et d'autre part que τ admet la représentation matricielle de dimension 2, (λ, μ, ν), avec $\lambda = ((1, 1), (1, 1))$, $\nu = \lambda^t$ et

$$a\mu = \begin{pmatrix} a \times A^* & 0 \\ 0 & A^* \times a \end{pmatrix} \quad \text{pour tout } a \text{ dans } A.$$

Le langage $L_1 \cup L_2$ est donc reconnu par le monoïde de matrices

$$A^*\mu\eta = \left\{ \begin{pmatrix} f\eta_1 \times M_2 & 0 \\ 0 & M_1 \times f\eta_2 \end{pmatrix} \middle| f \in A^* \right\},$$

isomorphe au même sous-monoïde de $M_1 \times M_2$ que précédemment.

3.3. *Quotient*

Soient L et P deux langages de A^*; par définition (cf., par exemple, [7, Vol. A, p. 35]), le *quotient* (*à gauche*) de L par P, noté $P^{-1}L$, est l'ensemble

$$P^{-1}L = \{f \in A^* \mid Pf \cap L \neq \emptyset\}.$$

Une partie P de A étant fixée, on voit que $P^{-1}L = L\tau^{-1}$ où la transduction τ est la multiplication (à gauche) par P. La représentation matricielle de τ est $(P, \iota, 1_{A^*})$, où ι désigne l'identité sur A^*. Là encore on obtient un résultat qui appartient au folklore (cf. [3, Exercise I.3.6]).

Proposition 3.5. *Soit L un langage de A^* reconnu par un monoïde M; alors, pour toute partie P de A^*, $P^{-1}L$ est reconnu par M.*

Et on retrouve, quand L est un langage rationnel, un résultat ancien, dû cette fois à S. Ginsburg et E. Spanier.

Corollaire 3.6 ([8]). *Le quotient à gauche d'un langage rationnel par une partie quelconque est encore un langage rationnel.*

On a bien entendu des résultats identiques pour le quotient à droite, défini symétriquement.

3.4. Produit

Dans ce paragraphe nous allons retrouver avec notre méthode la construction, due à Schützenberger [25] (dans le cas $n = 2$) et à Straubing [28] (dans le cas général), d'un monoïde reconnaissant le produit $L_1L_2 \ldots L_n$ de n langages à partir des monoïdes reconnaissant chacun des facteurs.

Soit n un entier fixé, supérieur ou égal à 2, et soit $\tau : A^* \to A^* \times A^* \times \cdots \times A^*$ la transduction définie par

$$\forall f \in A^* \quad f\tau = \{(f_1, f_2, \ldots, f_n) \mid \forall i, f_i \in A^* \text{ et } f_1 f_2 \ldots f_n = f\}.$$

De cette définition il suit immédiatement que

$$L_1 L_2 \ldots L_n = (L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_n)\tau^{-1}$$

puis on vérifie facilement (pour être formel, par induction sur la longueur du mot f, puis par induction sur l'entier n) que τ admet la représentation matricelle (λ, μ, ν) suivante, de dimension n:

$$\lambda = ((1, 1, \ldots, 1), 0, 0, \ldots, 0),$$

$$\nu = (0, 0, \ldots, 0, (1, 1, \ldots, 1))^t.$$

Pour chaque a dans A, et chaque entier $k = 1, 2, \ldots, n$ on note a_k l'élément de $A^* \times A^* \times \cdots \times A^*$ dont toutes les coordonnées valent 1 sauf la $k$ième qui est égale à a. Pour chaque a dans A la matrice $a\mu$ est alors définie par

$$(a\mu)_{i,j} = \{a_k \mid i \leqslant k \leqslant j\}.$$

Par exemple, pour $n = 3$, on a

$$a\mu = \begin{pmatrix} (a, 1, 1) & \{(a, 1, 1), (1, a, 1)\} & \{(a, 1, 1), (1, a, 1), (1, 1, a)\} \\ 0 & (1, a, 1) & \{(1, a, 1), (1, 1, a)\} \\ 0 & 0 & (1, 1, a) \end{pmatrix}.$$

On vérifie que pour tout mot u de A^* on a

$$(u\mu)_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j, \\ \{(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in A^* \times A^* \times \cdots \times A^* \mid \\ \quad u_1 = \cdots = u_{i-1} = u_{j+1} = \cdots = u_n = 1 \text{ et } u_i u_{i+1} \ldots u_j = u\} \\ & \text{si } i \leqslant j. \end{cases}$$

Cette construction montre en particulier que la transduction τ est rationnelle.

D'après la Proposition 2.1, le langage $L_1L_2 \ldots L_n$ est reconnu par $A^*\mu\eta$, qui est un sous-monoïde du monoïde des matrices carrées de dimension n dont les coefficients sont des *parties finies* de $\prod_{i=1}^{n} M_i$. On peut être plus précis: $A^*\mu\eta$ est un sous-monoïde du monoïde des matrices carrées P de dimension n dont les coefficients P_{ij} sont des parties finies de $\prod_{i=1}^{n} M_i$ telles que

(i) si $i<j$ et si $(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in P_{ij}$, alors $p_k = 1_{M_k}$ pour $k<i$ ou $k>j$;

(ii) $P_{ii} = \{(1, \ldots, 1, m_i, 1, \ldots, 1)\}$ pour un certain m_i dans M_i;

(iii) si $i>j$, alors $P_{ij} = 0$.

Ce dernier monoïde est appelé 'produit de Schützenberger' des monoïdes M_1, $M_2, \ldots, M_n$ et noté $\diamond_n(M_1, M_2, \ldots, M_n)$. C'est la définition donnée par Straubing [28], qui s'identifie aisément à la définition classique dans le cas $n=2$ (cf. [7, Vol. B, p. 250]). Remarquons que l'opérateur $\diamond$ n'est pas 'associatif': par exemple, $\diamond_3(M_1, M_2, M_3)$ n'est pas, en général, égal à $\diamond_2(M_1, \diamond_2(M_2, M_3))$ ou à $\diamond_2(\diamond_2(M_1, M_2), M_3)$.

On peut maintenant énoncer la proposition suivante.

Proposition 3.7 ([7, 28]). *Si $L_1, L_2, \ldots, L_n$ sont des langages de A^* reconnus respectivement par des monoïdes $M_1, M_2, \ldots, M_n$ alors le langage $L_1L_2 \cdots L_n$ est reconnu par $\diamond_n(M_1, M_2, \ldots, M_n)$.*

Les développements récents de la théorie des variétés des langages rationnels (cf. [27, 19]) ont conduit à considérer plutôt que le produit $L_1L_2 \cdots L_n$ le produit $L_1a_1L_2a_2 \cdots L_{n-1}a_{n-1}L_n$ où les a_i sont des lettres de l'alphabet A. Une construction analogue à la précédente permet alors d'établir la proposition suivante.

Proposition 3.8 ([28]). *Soient $L_1, L_2, \ldots, L_n$ des langages de A^* reconnus respectivement par des monoïdes M_i et soient $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ des lettres de l'alphabet A. Le langage $L_1a_1L_2a_2 \cdots L_{n-1}a_{n-1}L_n$ est reconnu par le monoïde $\diamond_n(M_1, M_2, \ldots, M_n)$.*

3.5. Mélange, infiltration, nabla

Rappelons que, par définition, le *mélange* de deux mots f et g de A^* (en anglais 'shuffle product'), noté $f \circ g$, est la partie de A^* définie par

$$f \circ g = \{f_1g_1f_2g_2 \ldots f_ng_n \mid f_i, g_i \in A^*, f_1f_2 \ldots f_n = f \text{ et } g_1g_2 \ldots g_n = g\}.$$

Le mélange s'étend additivement à $\mathcal{P}(A^*)$:

$$L_1 \circ L_2 = \bigcup_{f \in L_1, g \in L_2} f \circ g$$

et si $\tau: A^* \to A^* \times A^*$ est la transduction définie par

$$\forall f \in A^* \quad f\tau = \{(g, h) \mid g, h \in A^*, f \in g \circ h\},$$

il est clair que d'une part

$$L_1 \circ L_2 = (L_1 \times L_2)\tau^{-1}$$

et que d'autre part τ admet la représentation matricielle (λ, μ, ν) de dimension 1 avec $\lambda = \nu = (1, 1)$ et, pour tout a dans A,

$$a\mu = \{(a, 1), (1, a)\}$$

et on retrouve ainsi la proposition suivante.

Proposition 3.9 ([17]). *Si L_1 et L_2 sont deux langages de A^* reconnus respectivement par les monoïdes M_1 et M_2, le langage $L_1 \circ L_2$ est reconnu par* $\mathrm{Fin}(M_1 \times M_2)$, *le monoïde des parties finies de $M_1 \times M_2$.*

La même construction, appliquée au cas où $L_2 = A^*$ (et $M_2 = \{1\}$), montre que si un langage L de A^* est reconnu par M, l'idéal de mélange engendré par L, c'est-à-dire $L \circ A^*$, est reconnu par le monoïde des parties finies de M contenant 1_M. Cette construction trouve son intérêt quand M est fini [16]. Elle est évidemment trop grossière quand M est infini puisqu'elle ne rend pas compte du résultat de Haines [9], corollaire du théorème de Higman [10], qui assure que, quel que soit L, $L \circ A^*$ est un langage rationnel.

L'*infiltration* est une opération sur les mots, comparable au mélange. Introduite en [4] (sous le nom de shuffle d'ailleurs), elle n'a pas, jusqu'à présent, été considérée pour son effet sur les langages mais pour les propriétés combinatoires remarquables qui la lient au mélange (cf. également [14, Chapitre 6]). Elle s'intègre néanmoins à notre cadre; pour sa définition, les deux notations suivantes sont commodes.

Pour tout entier positif m, $[m]$ désigne l'ensemble $\{1, 2, \ldots, m\}$. Soient $h = a_1 \ldots a_n$ un mot de A^* (les a_i sont des lettres) et I un sous-ensemble, éventuellement vide, de $[|h|]$; on note h_I le mot $a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}$ avec $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ et $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$; par convention, $h_\emptyset = 1$. L'infiltration de deux mots f et g, notée $f \uparrow g$ est alors définie par

$$f \uparrow g = \{h \mid h \in A^*, \exists I, J \subset [|h|], I \cup J = [|h|], h_I = f \text{ et } h_J = g\}$$

et s'étend additivement à $\mathcal{P}(A^*)$. La différence avec le mélange est que l'on *ne suppose pas* I et J disjoints dans la définition de l'infiltration.

Comme pour le mélange, si $\tau : A^* \to A^* \times A^*$ est la transduction définie par

$$f\tau = \{(g, h) \mid g, h \in A^*, f \in g \uparrow h\},$$

on vérifie aisément d'une part que si L_1 et L_2 sont deux langages de A^*,

$$L_1 \uparrow L_2 = (L_1 \times L_2)\tau^{-1}$$

et d'autre part que τ admet la représentation matricielle (λ, μ, ν) de dimension 1 avec $\lambda = \nu = (1, 1)$ et, pour tout a dans A;

$$a\mu = \{(a, a), (a, 1), (1, a)\}.$$

On peut alors énoncer la proposition suivante.

Proposition 3.10. *Si L_1 et L_2 sont deux langages de A reconnus respectivement par les monoïdes M_1 et M_2, le langage $L_1 \uparrow L_2$ est reconnu par* $\mathrm{Fin}(M_1 \times M_2)$.

Une autre variante du mélange a été considérée en [1] sous le nom de *nabla*. Soient $A_1, \ldots, A_n$ n alphabets (non nécessairement disjoints) et $f_1, \ldots, f_n$ des mots de $A_1^*, \ldots, A_n^*$ respectivement. On pose

$$\begin{aligned}\nabla_n(f_1, \ldots, f_n) = \{a_{1,1}a_{1,2} \ldots a_{1,n}a_{2,1} \ldots a_{2,n} \ldots a_{k,1} \ldots a_{k,n} \mid k \geqslant 0,\\ a_{i,j} \in A_j \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant k \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant n,\\ \text{et } a_{1,1} \ldots a_{k,1} = f_1 \text{ ou}\\ a_{1,2} \ldots a_{k,2} = f_2 \ldots \text{ ou } a_{1,n} \ldots a_{k,n} = f_n\}.\end{aligned}$$

Comme les autres opérations sur les mots le nabla s'étend additivement à $\mathcal{P}(A^*)$. On notera que le nabla n'est pas associatif. Ainsi si L_1, L_2 et L_3 sont des langages, on a généralement $\nabla_2(\nabla_2(L_1, L_2), L_3) \neq \nabla_2(L_1, \nabla_2(L_2, L_3))$.

Soit $\tau: A^* \to A_1^* \times \cdots \times A_n^*$ la transduction définie par

$$f\tau = \{(f_1, \ldots, f_n) \in A_1^* \times \cdots \times A_n^* \mid f \in \nabla_n(f_1, \ldots, f_n)\}.$$

Si $L_1, \ldots, L_n$ sont des langages de $A_1^*, \ldots, A_n^*$ respectivement, on a $\nabla_n(L_1, \ldots, L_n) = (L_1 \times \cdots \times L_n)\tau^{-1}$ et τ admet la représentation matricielle (λ, μ, ν) de dimension n^2 suivante: pour tout $a \in A$,

$$\begin{aligned}&(a\mu)_{(1,j)(n,j)} = A_1^* \times \cdots \times A_{j-1}^* \times \{a\} \times A_{j+1}^* \times \cdots \times A_n^*,\\ &(a\mu)_{(i,j)(i-1,j)} = A_1^* \times \cdots \times A_{j-1}^* \times \{1\} \times A_{j+1}^* \times \cdots \times A_n^* \quad \text{si } i \neq 1,\\ &(a\mu)_{(i,j)(i',j')} = 0 \quad \text{dans les autres cas.}\end{aligned}$$

Pour $1 \leqslant j \leqslant n$, $\lambda_{(j,j)} = (1, \ldots, 1)$ et $\lambda_{(i,j)} = 0$ si $i \neq j$; $\nu = \lambda^{\mathrm{t}}$.

Par exemple, pour $n = 2$,

$$a\mu = \begin{pmatrix} 0 & \{a\} \times A^* & 0 & 0 \\ \{1\} \times A^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A^* \times \{a\} \\ 0 & 0 & A^* \times \{1\} & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après la Proposition 2.1 le langage $\nabla_n(L_1, \ldots, L_n)$ est reconnu par $A^*\mu\eta$ qui est isomorphe à un sous-monoïde du monoïde des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & N_n \end{pmatrix}.$$

où les N_i sont de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & m_{i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & m_{i,2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & m_{i,k} \\ & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ m_{i,k+1} & & & & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_{i,n} & & & & 0 \end{pmatrix}$$

avec $m_{i,j} \in M_i$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$.

Or le monoïde des matrices du type N_i n'est aûtre que le produit en couronne, noté $M_i \circ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, de M_i par $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On en déduit la proposition suivante.

Proposition 3.11. *Soient $L_1, \ldots, L_n$ des langages de $A_1^*, \ldots, A_n^*$ reconnus respectivement par les monoïdes $M_1, \ldots, M_n$. Le langage $\nabla_n(L_1, \ldots, L_n)$ est reconnu par le monoïde $\prod_{i=1}^n (M_i \circ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.*

3.6. Plus long facteur gauche commun

Si u et v sont deux mots de A^*, on note $u \wedge v$ leur plus long facteur gauche commun. L'opération ainsi définie sur les mots s'étend aux langages par

$$L_1 \wedge L_2 = \{u_1 \wedge u_2 \mid u_1 \in L_1, u_2 \in L_2\}.$$

Soit $\tau: A^* \to A^* \times A^*$ la transduction définie par $u\tau = (u, u)R$, où

$$R = (1 \times A^*) \cup (A^* \times 1) \cup \Big(\bigcup_{a,b \in A, a \neq b} (aA^* \times bA^*) \Big).$$

On vérifie aisément que

$$u\tau = \{(u_1, u_2) \mid u_1, u_2 \in A^*, u_1 \wedge u_2 = u\}$$

et donc que

$$(L_1 \times L_2)\tau^{-1} = L_1 \wedge L_2.$$

Par ailleurs τ admet la représentation matricielle (λ, μ, ν) de dimension 1 où $u\mu = (u, u)$ $\lambda = (1, 1)$ et $\nu = R$. On peut donc énoncer la proposition suivante.

Proposition 3.12. *Soient L_1 et L_2 deux langages de A^*, reconnus respectivement par M_1 et M_2. Alors $M_1 \times M_2$ reconnait $L_1 \wedge L_2$.*

Et on retrouve en particulier le corollaire suivant.

Corollaire 3.13 ([5]). *Si L_1 et L_2 sont deux langages rationnels, alors $L_1 \wedge L_2$ est un langage rationnel.*

Soit maintenant L un langage algébrique déterministe; si K est un langage rationnel, LK^{-1} est un langage algébrique déterministe [11]. Si J et K sont deux langages rationnels, on démontre (cf. [24]) que $LJ^{-1} \cap LK^{-1}$ est aussi un langage algébrique déterministe et qu'une union finie de telles intersections est encore un langage algébrique déterministe. Par ailleurs, pour tout langage L on a

$$L \wedge L = (L \times L)\tau^{-1} = \bigcup_{i \in I} (LJ_i^{-1} \cap LK_i^{-1})$$

avec

$$R = \bigcup_{i \in I} J_i \times K_i,$$

et on retrouve ainsi la proposition suivante.

Proposition 3.14 ([5]). *Si L est un langage algébrique déterministe, $L \wedge L$ est un langage algébrique déterministe.*

3.7. Réduction du groupe libre

Soient A un alphabet fini et $\bar{A}$ une copie de A. On pose $\tilde{A} = A \cup \bar{A}$. Rappelons ([15]) que le groupe libre $F(A)$ sur l'ensemble A est le quotient de $\tilde{A}^*$ par la congruence engendrée par les relations $a\bar{a} = 1$ et $\bar{a}a = 1$ pour tout $a \in A$. On note D l'ensemble des mots équivalents à 1. Un mot qui ne contient aucune occurrence de facteurs de la forme $a\bar{a}$ ou $\bar{a}a$ est dit réduit. L'ensemble des mots réduits est le rationnel

$$K = \tilde{A}^* \backslash \tilde{A}^* V \tilde{A}^*, \quad \text{où } V = \{a\bar{a} \mid a \in A\} \cup \{\bar{a}a \mid a \in A\}.$$

On démontre que tout mot f de $\tilde{A}^*$ est équivalent à un unique mot $f\delta$ de K. On a défini ainsi une application $\delta : \tilde{A}^* \to \tilde{A}^*$ qui vérifie la propriété suivante: si $u\delta = x_1 \ldots x_n$ avec $x_i \in \tilde{A}$ alors $u \in Dx_1Dx_2D \ldots x_nD$.

Nous allons montrer que δ est représentable. La fonction τ de $\tilde{A}^*$ dans $\tilde{A}^*$ définie par $u\tau = \{u\} \cap K$ est une fonction rationnelle qui admet une représentation matricielle (λ, β, γ). Soit (λ, μ, ν) la représentation matricielle définie par $a\mu = D(a\beta)$ et $\nu = D\gamma$. La propriété rappelée ci-dessus permet de vérifier que (λ, μ, ν) est une représentation matricielle de δ^{-1}.

On a obtenu ainsi une nouvelle preuve du résultat classique.

Proposition 3.15 ([2]). *Si R est un rationnel de $\tilde{A}^*$, alors $R\delta$ est rationnel.*

Le cas de la congruence engendrée par le système $\{(a\bar{a}, 1) \mid a \in A\}$—ou autres variantes [23]—se traite de la même façon.

3.8. T0L-systèmes

On appelle T0L-système un ensemble $G = (A, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ où A est un alphabet et $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ sont des substitutions de A^* dans lui-même. Contrairement à l'usage nous n'incluons pas le choix d'un élément de A^*, appelé axiome, dans la définition.

Soit $B=\{1,\ldots,n\}$. A tout mot $u=i_1\ldots i_r$ de B^*, on associe la substitution $\sigma_u=\sigma_{i_1}\ldots\sigma_{i_r}$ (la substitution associée au mot vide est l'identité). La proposition qui suit est une légère extension d'un résultat de Reutenauer [20] dont nous adaptons également la démonstration.

Proposition 3.16. *Soit G un T0L-système et K, L deux langages rationnels de A^*. Alors le langage $G(K,L)=\{u\in B^*\mid K\sigma_u\cap L\neq\emptyset\}$ est rationnel.*

Preuve. Soit $\tau: B^*\to A^*$ la transduction définie par $u\tau=L\sigma_u^{-1}$. La Proposition 3.2 montre que si L est reconnu par un monoïde M, alors pour toute substitution $\sigma: A^*\to A^*$, $L\sigma^{-1}$ est reconnu par $\mathcal{P}(M)$. En particulier, puisque L est reconnaissable, les langages de la forme $L\sigma^{-1}$ forment un ensemble fini Q. Cette remarque permet de construire une représentation matricielle (λ,μ,ν) de τ: $\mu: B^*\to \mathcal{P}(A^*)^{Q\times Q}$ est défini par

$$i\mu_{R,R'}=R' \quad \text{si } R\sigma_i^{-1}=R',$$

et λ et ν sont définis respectivement par

$$\lambda_R=\begin{cases}1 & \text{si } R=L,\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases} \qquad \nu_R=1 \quad \text{pour tout } R\in Q.$$

On a alors, pour tout $u\in B^*$,

$$\lambda.(u\mu).\nu=\bigcup_{R\in Q}(u\mu)_{L,R}=L\sigma_u^{-1}=u\tau.$$

Maintenant il vient que

$$G(K,L)=\{u\in B^*\mid K\cap L\sigma_u^{-1}\neq\emptyset\}=\{u\in B^*\mid K\cap u\tau^{-1}\neq\emptyset\}=K\tau^{-1}.$$

Par conséquent le résultat cherché découle directement du Corollaire 2.2. □

4. Relations rationnelles

On s'intéresse maintenant au cas où φ est une relation rationnelle de A^* dans B^*. L'inverse de φ admet alors ipso facto une représentation matricielle puisque c'est aussi une relation rationnelle. Si L est un langage de A^*, reconnu par un monoïde M, le langage $L\varphi$ est reconnu par un sous-monoïde de $(\text{Rat } M)^{k\times k}$ où k est la dimension de la représentation de $\tau=\varphi^{-1}$.

Dans les paragraphes suivants on décrit quelques cas particuliers où les propriétés de φ permettent d'être plus précis pour le calcul de ce sous-monoïde qui reconnaît $L\varphi$. Ce type de problème a été considéré en [25], mais dans une optique toute différente, et uniquement pour des langages L rationnels.

4.1. Fonction rationnelle inverse

Si la relation rationnelle φ est telle que $w\tau$ est une partie finie de A^* pour chaque w dans B^*, toute représentation matricielle (λ, μ, ν) de $\tau = \varphi^{-1}$, à condition d'être normalisée (cf. [3, p. 86]), est telle que les coefficients de chaque matrice $w\mu$ sont des parties finies de A^* et le langage $L\varphi$ est reconnu par $(\mathrm{Fin}\ M)^{k\times k}$.

Si φ est l'inverse d'une fonction rationnelle on obtient, toujours en normalisant la représentation matricielle de τ ([3, Proposition IV.1.1]), que $L\varphi$ est reconnu par $M^{k\times k}$. On va préciser ce dernier résultat à l'aide d'une propriété des représentations des fonctions rationnelles et d'une construction algébrique standard.

Notons d'abord que le monoïde des relations sur un ensemble Q est isomorphe au monoïde $\mathbb{B}^{Q\times Q}$ des matrices carrées booléennes de dimension card Q. On confondra dans la suite une relation et la matrice booléenne qui lui correspond.

Définition. Un monoïde N de relations sur Q est *un monoïde de relations non ambigu* si pour toute paire r et s d'éléments de N et tout couple (i, k) appartenant au produit rs il existe un *unique* élément j de Q tel que (i, j) appartient à r et (j, k) appartient à s.

Toute matrice booléenne peut être considérée comme une matrice à coefficients dans $\mathbb{N}$, en donnant au 0 et au 1 leur valeur d'entiers. Il vient alors qu'un monoïde N de relations sur Q est un monoïde de relations non ambigu si, et seulement si, le produit de deux éléments quelconques de N, calculé dans $\mathbb{N}^{Q\times Q}$, est identique à leur produit calculé dans $\mathbb{B}^{Q\times Q}$, i.e., si dans le calcul de ce produit on n'a jamais à effectuer une addition de deux éléments non nuls. On a alors le résultat suivant dû à M.P. Schützenberger.

Théorème 4.1 ([3]). *Toute fonction rationnelle $\tau: B^* \to A^*$ admet une représentation matricielle normalisée (λ, μ, ν) où $B^*\mu$ est un monoïde de matrices dont les supports forment un monoïde de relations non ambigu.*

Le résultat original donne une description plus précise du monoïde $B^*\mu$ mais nous n'en aurons pas besoin ici. Le monoïde des supports des éléments de $B^*\mu$ est appelé le *monoïde de relations non ambigu associé à μ*; par abus de langage nous dirons que c'est *un* monoïde de relations non ambigu associé à τ.

Pour énoncer le résultat que nous avons en vue, nous introduisons maintenant une nouvelle définition du *produit en couronne* de deux monoïdes (cf. [22]). Celle-ci s'appuie sur la notion de monoïde de relations non ambigu alors que la définition classique (cf. [12], par exemple) utilise seulement les monoïdes d'applications.

Définition ([22]). Soient M un monoïde quelconque et N un monoïde de relations non ambigu sur un ensemble Q. Le *produit en couronne* de M par N, que nous noterons $M \circ N$, est l'ensemble des matrices de dimension card Q obtenues en substituant les éléments de M aux coefficients non nuls des éléments de N.

La propriété caractéristique des monoïdes de relations non ambigus fait qu'aucune addition de deux termes non nuls n'apparaît dans le produit de deux matrices ainsi définies et que l'ensemble $M \circ N$ est alors fermé pour la multiplication usuelle des matrices.

La simple application de la Proposition 2.1 au cas des fonctions rationnelles inverses entraîne la proposition suivante.

Proposition 4.2 ([22]). *Soient $\tau : B^* \to A^*$ une fonction rationnelle et N un monoïde de relations non ambigu associé à τ. Soient L un langage de A^* et M un monoïde qui reconnaît L. Alors $L\tau^{-1}$ est reconnu par le produit en couronne de M par N.*

4.2. Morphisme injectif ou codage

Si $\varphi : A^* \to B^*$ est un morphisme injectif, son inverse est une fonction rationnelle: on va pouvoir donner dans ce cas une construction explicite d'un monoïde de relations non ambigu associé à $\tau = \varphi^{-1}$.

Rappelons qu'une partie X de B^* est un *code* si le monoïde X^* engendré par X est libre de base X. En particulier, si $\varphi : A^* \to B^*$ est un morphisme injectif, $X = A\varphi$ est un code.

Etant donné un code X dans B^*, on note P l'ensemble des facteurs gauches propres des mots de X:

$$P = \{u \in B^* \mid \exists v \in B^+, uv \in X\}.$$

A chaque lettre a de B on associe une relation $a\rho$ définie sur P par

$$(p, 1) \in a\rho \quad \text{si et seulement si } pa \in X$$

$$(p, q) \in a\rho \quad \text{si et seulement si } q = pa, \quad \text{pour } q \neq 1.$$

L'application ρ ainsi définie induit un morphisme de B^* dans le monoïde des relations sur P. L'image de B^* par ρ est un monoïde de relations non ambigu qui reconnait X^*. Il est appelé *monoïde sagittal* de X^* et noté[1] Sag(X^*). De plus, si X est un code préfixe, Sag(X^*) est un monoïde de fonctions.

Soit maintenant $\varphi : A^* \to B^*$ un morphisme injectif et posons $X = A\varphi$. Alors $\tau = \varphi^{-1} : B^* \to A^*$ est une fonction rationnelle qui admet la représentation matricielle (λ, μ, ν) où, avec les notations précédentes, $\mu : B^* \to (A^*)^{P \times P}$ est défini par

$$(a\mu)_{p,1} = (pa)\tau,$$

$$(a\mu)_{p,pa} = 1,$$

$$(a\mu)_{p,q} = 0 \quad \text{si } q \neq 1 \text{ et } q \neq pa$$

et

$$\lambda_p = \nu_p = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 1, \\ 0 & \text{si } p = 0. \end{cases}$$

[1] Cette terminologie est due à J. Berstel et D. Perrin.

Si $u \in B^*$, on trouve

$$(u\mu)_{p,q} = (x_1 \dots x_n)\tau \quad \text{où } pu = x_1 \dots x_n q,\ x_1, \dots, x_n \in X,$$
$$p \text{ facteur gauche propre de } x_1.$$

On voit que le monoïde des supports de $B^*\mu$ n'est autre que $\mathrm{Sag}(X^*)$. Compte-tenu de la Proposition 4.2, on a donc démontré le résultat suivant.

Proposition 4.3. *Soit $\varphi : A^* \to B^*$ un morphisme injectif et soit $X = A\varphi$. Si L est un langage de A^* reconnu par M, le langage $L\varphi$ est reconnu par le produit en couronne* $M \circ \mathrm{Sag}(X^*)$.

Nous verrons dans la suite que l'on peut associer à un morphisme injectif un autre monoïde de relations non ambigu, appelé monoïde à pétales.

4.3. *Morphisme littéral*

Par définition, un morphisme $\varphi : A^* \to B^*$ est dit *littéral* (ou strictement alphabétique [3]) si l'image de chaque lettre de A par φ est une lettre de B, i.e., si $A\varphi \subset B$.

Si φ est un morphisme littéral, $\tau = \varphi^{-1}$ admet la représentation $(1, \mu, 1)$ de dimension 1 avec $x\mu = x\varphi^{-1}$ pour tout x dans B.

On retrouve ainsi un résultat démontré indépendamment par Reutenauer [21] et Straubing [27] dans le cas des langages rationnels.

Proposition 4.4. *Soient $\varphi : A^* \to B^*$ un morphisme littéral et L un langage de A^* reconnu par un monoïde M. Alors le langage $L\varphi$ est reconnu par* Fin M.

4.4. *Morphisme faiblement littéral*

Par définition, un morphisme $\varphi : A^* \to B^*$ est dit faiblement littéral (ou alphabétique [3]) si l'image de chaque lettre de A par φ est soit une lettre de B, soit égale au mot vide.

Posons $C = A \cap 1\varphi^{-1}$: C est donc l'ensemble des lettres de A dont l'image par φ est 1. Soit σ la substitution $B^* \to A^*$ définie par $b\sigma = b\varphi^{-1}$ pour tout $b \in B$. On notera que pour tout $u \in B^+$ on a $u\sigma = u\varphi^{-1}$. En revanche $1\sigma = \{1\}$, alors que $1\varphi^{-1} = C^*$. On va démontrer la formule suivante:

$$L\varphi = \begin{cases} (L \backslash C^*)\sigma^{-1} & \text{si } L \cap C^* = \emptyset, \\ (L \backslash C^*)\sigma^{-1} \cup \{1\} & \text{si } L \cap C^* \neq \emptyset. \end{cases} \tag{1}$$

On a en effet $L = (L \cap C^*) \cup (L \backslash C^*)$. Or, $(L \cap C^*)\varphi = \emptyset$ ou $\{1\}$ suivant que $L \cap C^*$ est vide ou non. D'autre part,

$$(L \backslash C^*)\sigma^{-1} = \{u \in B^* \mid u\sigma \cap (L \backslash C^*) \neq \emptyset\}.$$

Mais comme $1 \in C^*$, on a $1\sigma \cap (L \backslash C^*) = \emptyset$ et donc

$$\begin{aligned}(L\backslash C^*)\sigma^{-1} &= \{u \in B^+ \mid u\sigma \cap (L\backslash C^*) \neq \emptyset\}\\ &= \{u \in B^+ \mid u\varphi^{-1} \cap (L\backslash C^*) \neq \emptyset\}\\ &= \{u \in B^+ \mid u \in (L\backslash C^*)\varphi\}\\ &= (L\backslash C^*)\varphi.\end{aligned}$$

Comme $L\varphi = (L\backslash C^*)\varphi \cup (L \cap C^*)\varphi$, la formule (1) est établie. Compte tenu des résultats antérieurs sur les substitutions inverses et les opérations booléennes, et en remarquant que 1 et C^* sont reconnus par U_1, le monoïde à deux éléments composé d'un élément neutre et d'un zéro, on a démontré la proposition suivante.

Proposition 4.5. *Soient $\varphi : A^* \to B^*$ un morphisme faiblement littéral et L un langage de A^* reconnu par un monoïde M. Alors le langage $L\varphi$ est reconnu par* $\mathrm{Rat}(M \times U_1)$ *si $L\varphi$ ne contient pas le mot vide et par $U_1 \times \mathrm{Rat}(M \times U_1)$ si $L\varphi$ contient le mot vide.*

4.5. Morphisme quelconque

Un morphisme quelconque $\varphi : A^* \to B^*$ se factorise en le produit d'une projection, d'un morphisme injectif et d'un morphisme littéral. Posons en effet $C = \{a \in A \mid a\varphi \neq 1\}$ et soit φ_1 la projection de A^* sur C^* (i.e., $a\varphi_1 = a$ si $a \in C$, $a\varphi_1 = 1$ sinon). Soient $\varphi_2 : C^* \to (C \times B)^*$ le morphisme injectif défini par $c\varphi_2 = (c, b_1) \ldots (c, b_n)$ où $b_1 \ldots b_n = c\varphi$ et $\varphi_3 : (C \times B)^* \to B^*$ le morphisme littéral défini par $(c, b)\varphi_3 = b$. Alors $\varphi = \varphi_1\varphi_2\varphi_3$ et les constructions précédentes permettent, à partir d'un monoïde reconnaissant un langage L de A^*, de construire un monoïde reconnaissant $L\varphi$.

Nous allons maintenant donner une autre construction, fondée sur une factorisation différente des morphismes.

Considérons d'abord un ensemble fini X de B^+; on pose

$$Q = \{(1, 1)\} \cup \{(u, v) \in B^+ \times B^+ \mid uv \in X\}.$$

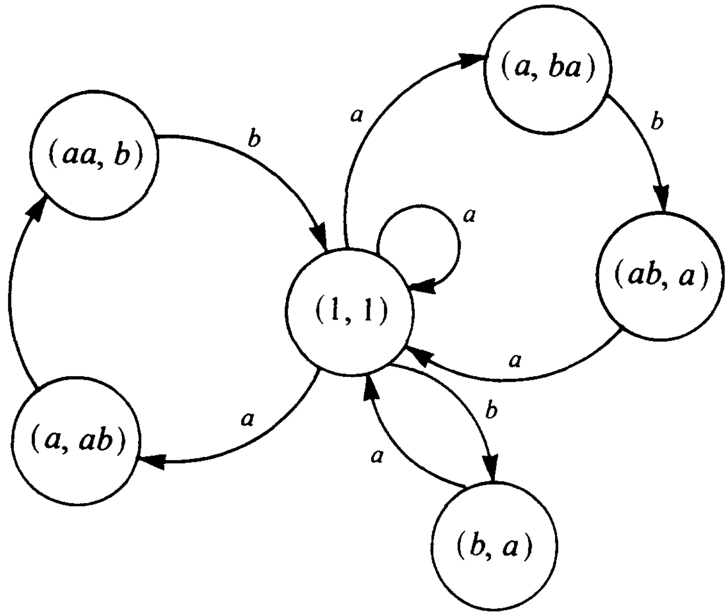
A chaque lettre a de B, on associe une relation $a\rho$ définie sur Q par

$$\begin{array}{lr} ((1, 1), (1, 1)) \in a\rho & \text{si } a \in X,\\ ((1, 1), (a, v)) \in a\rho & \text{pour tout } v \in B^+ \text{ tel que } av \in X,\\ ((u, av), (ua, v)) \in a\rho & \text{pour tout } u, v \in B^+ \text{ tel que } uav \in X,\\ ((u, a), (1, 1)) \in a\rho & \text{pour tout } u \in B^+ \text{ tel que } ua \in X.\end{array}$$

L'application ρ ainsi définie induit un morphisme de B^* dans le monoïde des relations sur Q. L'image de B^* par ρ est un monoïde des relations qui reconnait X^*. Il est appelé *monoïde à pétales* de X^* et noté $\mathrm{Pet}(X^*)$ [13]. On vérifie facilement que si X est un code, alors $\mathrm{Pet}(X^*)$ est un monoïde de relations non ambigu.

Exemple. $B=\{a, b\}$, $X=\{a, aba, ba, aab\}$.

Le diagramme suivant donne, avec les conventions usuelles, une représentation graphique des relations $a\rho$ et $b\rho$:



Soit maintenant $\varphi: A^* \to B^*$ un morphisme et posons $X=A\varphi \cap B^+$ et $I^*=1\varphi^{-1}$. Pour chaque $w \in X$, soit $C(w)$ l'ensemble des lettres de A dont l'image par φ est w. Formellement,

$$C(w)=\{a \in A \mid a\varphi = w\}.$$

On construit maintenant une transduction $\tau: B^* \to A^*$ par sa représentation matricielle (λ, μ, ν) où $\mu: B^* \to \mathrm{Rat}(A^*)^{Q\times Q}$ est définie par

$$(a\mu)_{p,q}=\begin{cases} 1 & \text{si } (p, q) \in a\rho \text{ et } q \neq (1, 1),\\ I^*C(ua) & \text{si } p=(u, a),\ q=(1, 1) \text{ et } ua \in X,\\ I^*C(a) & \text{si } p=q=(1, 1) \text{ et } a \in X,\\ 0 & \text{dans les autres cas}\end{cases}$$

et où

$$\lambda_p=\begin{cases} 1 & \text{si } p=(1, 1),\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases} \quad \text{et} \quad \nu_p=\begin{cases} I^* & \text{si } p=(1, 1),\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Une récurrence, fastidieuse, sur la longueur de w permet le calcul de $w\mu$ pour tout $w \in A^*$.

On trouve

$$\begin{aligned}(w\mu)_{(u,v)(u',v')}=\{z_1a_1 \dots z_na_n \mid\ & n \geq 0,\ a_1, \dots, a_n \in A,\ z_1, \dots, z_n \in I^*\\ & \text{tels que } uwv'=x_1x_2 \dots x_{n+1},\ x_i=a_i\varphi \text{ pour } 1 \leq i \leq n,\\ & uv=x_1 \text{ si } uv \neq 1, \text{ et } u'v'=x_{n+1}\}\end{aligned}$$

si $(u', v') \neq (1, 1)$, et

$$(w\mu)_{(u,v)(1,1)} = \{z_1 a_1 \ldots z_n a_n \mid n \geq 0,\ a_1, \ldots, a_n \in A,\ z_1, \ldots, z_n \in I^* \text{ tels que } uw = x_1 \ldots x_n,\ x_i = a_i\varphi \text{ pour } 1 \leq i \leq n \text{ et } uv = x_1 \text{ si } uv \neq 1\}.$$

La distinction entre les deux cas est rendue nécessaire pour inclure la possibilité $n = 0$. Dans cette éventualité la condition de la première formule devient $uv = u'v' \ldots$.

On voit également, grâce à la seconde formule, que $w\tau = (w\mu)_{(1,1),(1,1)} I^* = w\varphi^{-1}$ et la transduction τ ainsi construite est bien l'inverse de φ.

D'autre part, le monoïde des supports des matrices de B^* n'est autre que le monoïde à pétales de X^*.

Si φ est un morphisme injectif, l'ensemble I défini ci-dessus est vide, chaque ensemble $C(w)$ possède au plus un élément et la représentation μ est à valeurs dans $A^{*Q \times Q}$. De plus X est un code et $\mathrm{Pet}(X^*)$ est un monoïde de relations non ambigu. On a donc démontré le résultat suivant.

Proposition 4.6. *Soit $\varphi : A^* \to B^*$ un morphisme injectif et soit $X = A\varphi$. Si un langage L de A^* est reconnu par un monoïde M, le langage $L\varphi$ est reconnu par le produit en couronne* $M \circ \mathrm{Pet}(X^*)$.

Si φ n'est pas injectif mais si néanmoins X est un code, on a la proposition suivante.

Proposition 4.7. *Soit $\varphi : A^* \to B^*$ un morphisme tel que $X = A\varphi \cap B^+$ est un code. Si un langage L de A^* est reconnu par un monoïde M, le langage $L\varphi$ est reconnu par le produit en couronne* $\mathrm{Rat}\, M \circ \mathrm{Pet}(X^*)$.

Pour traiter du cas des morphismes quelconques, on est amené à poser la définition suivante.

Definition. Soit N un monoïde de relations sur un ensemble Q et soit S un semi-anneau. Nous appelons ***produit de substitution*** de S par N l'ensemble des matrices carrées de dimension $|Q|$ obtenues en substituant les éléments de S aux coefficients non nuls des éléments de N. Nous le noterons encore $S \circ N$.

On vérifie que $S \circ N$ est un sous-monoïde du monoïde (multiplicatif) des matrices $S^{Q \times Q}$. On peut alors énoncer la proposition suivante.

Proposition 4.8. *Soit $\varphi : A^* \to B^*$ un morphisme quelconque et soit $X = A\varphi \cap B^+$. Si L est un langage de A^* reconnu par un monoïde M, le langage $L\varphi$ est reconnu par le produit de substitution* $\mathrm{Rat}\, M \circ \mathrm{Pet}(X^*)$.

5. Opérations non linéaires

Dans ce qui précède, nous avons considéré uniquement des opérations φ dont l'inverse admet une représentation matricielle c'est-à-dire telles qu'il existe une représentation (λ, μ, ν) avec, pour tout mot f,

$$f\varphi^{-1} = \lambda . f\mu . \nu$$

Cette propriété permet de calculer, à partir d'un monoïde M qui reconnaît un langage L, un monoïde qui reconnaît un langage $L\varphi$. Or, il apparaît que ce calcul dépend du seul morphisme μ. On peut donc chercher à généraliser notre méthode à des opérations φ telles que $u\varphi^{-1}$ s'exprime comme une combinaison, mais *pas nécessairement linéaire*, des coefficients d'une matrice $u\mu$. Un exemple, emprunté à [11], va d'abord illustrer cette idée.

Si L est un langage de A^* on note

$$\tfrac{1}{3}L = \{u \mid \exists x, y \in A^*, |x| = |u| = |y| \text{ et } xuy \in L\}.$$

On voit que $\frac{1}{3}L = L\tau^{-1}$ où $\tau : A^* \to A^*$ est la transduction définie par

$$u\tau = A^{|u|}uA^{|u|}.$$

Soit $\mu : A^* \to \mathcal{P}(A^*)^{2\times 2}$ le morphisme défini par

$$a\mu = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

pour tout a dans A. On a, pour tout u dans A^*,

$$u\mu = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & A^{|u|} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u\tau = u\mu_{22}u\mu_{11}u\mu_{22}.$$

Ainsi, $u\tau$ est une combinaison 'non linéaire' des coefficients de $u\mu$. Anticipant sur la généralisation donnée ci-dessous de la Proposition 2.1, on peut conclure que si L est reconnu par un monoïde M, $\frac{1}{3}L$ est reconnu par $M \times C$ où C est un sous-monoïde monogène de $\mathcal{P}(M)$, et donc que $\frac{1}{3}L$ est rationnel quand L l'est.

Pour formaliser la construction ci-dessus on pose d'abord quelques définitions.

Soient M un monoïde et Ξ un alphabet fini. On note $M * \Xi^*$ le *produit libre* (ou coproduit) des monoïdes M et Ξ^*. On sait que $M * \Xi^*$ s'identifie avec l'ensemble des mots de la forme $m_0\xi_1 m_1 \ldots \xi_n m_n$ avec $m_0, \ldots, m_n \in M$ et $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \Xi$ muni du produit

$$\begin{aligned}(m_0\xi_1 m_1 \ldots \xi_n m_n)&(m'_0\xi'_1 m'_1 \ldots \xi'_{n'} m'_{n'}) \\ &= (m_0\xi_1 m_1 \ldots \xi_n (m_n m'_0)\xi'_1 m'_1 \ldots \xi'_{n'} m'_{n'}):\end{aligned}$$

Soit $\theta = \Xi^* \to \mathcal{P}(M)$ un morphisme. Nous noterons $[\theta] : \mathcal{P}(M * \Xi^*) \to \mathcal{P}(M)$ le morphisme de semi-anneau défini par

(a) $\quad u[\theta] = m_0(\xi_1\theta)m_1 \ldots (\xi_n\theta)m_n \quad$ pour $u = m_0\xi_1 m_1 \ldots \xi_n m_n \in M * \Xi^*$,

(b) $\quad X[\theta]=\bigcup_{u\in X} u[\theta] \quad$ pour $X\in\mathcal{P}(M*\Xi^*)$.

Si $\eta: M \rightarrow N$ est un morphisme de monoïdes, nous notons encore η le morphisme induit de $M*\Xi^*$ dans $N*\Xi^*$, et également, comme depuis le début, le morphisme induit de $\mathcal{P}(M)$ dans $\mathcal{P}(N)$. On a alors le lemme suivant, dont la vérification est purement formelle.

Lemme 5.1. *Soient $\eta: M\rightarrow N$ et $\theta:\Xi^*\rightarrow\mathcal{P}(M)$ deux morphismes de monoïdes. Le diagramme suivant est commutatif:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(M*\Xi^*) \arrow[r, "{[\theta]}"] \arrow[d, "\eta"'] & \mathcal{P}(M) \arrow[d, "\eta"] \\
\mathcal{P}(N*\Xi^*) \arrow[r, "{[\theta\eta]}"] & \mathcal{P}(N)
\end{tikzcd}$$

Pour tout n positif nous noterons $\Xi_n=\{\xi_{1,1},\xi_{1,2},\ldots,\xi_{n,n}\}$ un alphabet à n^2 variables et pour toute matrice m de $\mathcal{P}(M)^{n\times n}$ nous noterons également par m le morphisme $m:\Xi_n^*\rightarrow\mathcal{P}(M)$ défini par $(\xi_{i,j})m=m_{i,j}$.

Nous pouvons maintenant généraliser la notion de représentation matricielle d'une transduction.

Definition. Une transduction $\tau: A^*\rightarrow M$ est *représentable* s'il existe un entier n positif, un morphisme $\mu: A^*\rightarrow\mathcal{P}(M)^{n\times n}$, et un élément s de $\mathcal{P}(M*\Xi_n^*)$ tels que, pour tout f dans A^*,

$$f\tau=s[f\mu].$$

On dit alors que le couple (s,μ) *représente* τ.

La Proposition 2.1 se généralise alors en la proposition suivante.

Proposition 5.2. *Soit $\tau: A^*\rightarrow M$ une transduction représentée par (s,μ), et soit P une partie de M, reconnue par un morphisme $\eta: M\rightarrow N$. Alors le langage $P\tau^{-1}$ est reconnu par le monoïde (de matrices) $A^*\mu\eta$.*

Preuve. La vérification suit pas à pas celle de la Proposition 2.1. Soient $Q=P\eta$ et R le sous-ensemble de $A^*\mu\eta$ défini par

$$R=\{m \mid m\in\mathcal{P}(N)^{n\times n}, s\eta[m]\cap Q\neq\emptyset\}.$$

On a

$$R(\mu\eta)^{-1}=\{f \mid f\in A^*, s\eta[f\mu\eta]\cap Q\neq\emptyset\}$$

ce qui s'écrit, d'après le Lemme 5.1, comme

$$\begin{aligned}
R(\mu\eta)^{-1}&=\{f \mid f\in A^*, (s[f\mu])\eta\cap Q\neq\emptyset\}\\
&=\{f \mid f\in A^*, s[f\mu]\cap Q\eta^{-1}\neq\emptyset\}\\
&=\{f \mid f\in A^*, f\tau\cap P\neq\emptyset\}=P\tau^{-1}. \quad\square
\end{aligned}$$

Corollaire 5.3. *Soit $\tau : A^* \rightarrow M$ une transduction représentable. L'image inverse d'une partie reconnaissable de M par τ est un langage reconnaissable—donc rationnel de A^*.*

En [6], Conway a appelé 'regulator' toute transduction qui préserve les langages rationnels et a étudié certaines familles de telles transductions. Avec les inverses de transductions représentables nous avons défini une nouvelle famille de 'regulators' que nous nous proposons d'étudier dans un prochain travail; en particulier nous comparerons cette famille avec celle des 'regularity-preserving relations' de McNaughton et Seiferas [26]. En guise de conclusion, et pour illustrer la possibilité de combinaisons infinies de coefficients dans les transductions représentables nous présentons un dernier exemple.

Si L est un langage de A, soit $L\zeta$ le langage défini par

$$L\zeta = \{u \in A^* \mid \exists n \in \mathbb{N}, p = 2n+1 \text{ est premier},$$
$$\exists x, y \in A^* |x| = |y| = n|u|, \text{ et } xuy \in L\}.$$

Si μ est la representation matricielle définie au début de la présente section, et si s est le sous-ensemble de $A^* * \Xi_2$ défini par

$$s = \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N}, \\ 2n+1 \text{ premier}}} \xi_{22}^n \xi_{11} \xi_{22}^n.$$

On vérifie aisément que ζ^{-1} est représenté par le couple (s, μ) et donc que $L\zeta$, rationnel quand L l'est, est reconnu par le même monoïde que $\frac{1}{3}L$.

Bibliographie

[1] J. Beauquier, On the structure of context-free languages, *Internat. J. Comput. Math.* **11** (1982), 3-19.
[2] M. Benois, Parties rationnelles du groupe libre, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **269** (1969) 1188-1190.
[3] J. Berstel, *Transductions and Context-Free Languages* (Teubner, Stuttgart, 1979).
[4] K.T. Chen, R.H. Fox and R.C. Lyndon, Free differential calculus IV, *Ann. Math.* **68** (1958) 81-95.
[5] C. Choffrut, A closure property of deterministic context-free languages, *Inform. Process. Lett.* **12** (1981) 13-16.
[6] J.H. Conway, *Regular Algebra and finite Machines* (Chapman & Hall, London, 1971).
[7] S. Eilenberg, *Automata, Languages and Machines Vols. A, B* (Academic Press, New York, 1974, 1976).
[8] S. Ginsburg and E.H. Spanier, Quotients of context free languages, *J. Assoc. Comput. Mach.* **10** (1963) 487-492.
[9] L.H. Haines, On free monoids partially ordered by embedding, *J. Combin. Theory* **6** (1969) 94-98.
[10] G. Higman, Ordering by divisibility in abstract algebras, *Proc. London Math. Soc.* **2** (1952) 326-336.
[11] J.E. Hopcroft and J.D. Ullman, *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1979).
[12] G. Lallement, *Semigroups and Combinatorial applications* (Wiley, New York, 1979).
[13] E. Le Rest et M. Le Rest, Sur le calcul du monoïde syntaxique d'un sous-monoïde finiment engendré, *Semigroup Forum* **21** (1980) 173-185.
[14] M. Lothaire, *Combinatorics on Words* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1982).
[15] W. Magnus, A. Karass and D. Solitar, *Combinatorial Group Theory* (Wiley, New York, 1968).
[16] S.W. Margolis and J.E. Pin, Power monoids and finite $\mathcal{J}$-trivial monoids, *Semigroup Forum* **29** (1984) 99-108.

[17] J.-F. Perrot, Variétés de langages et opérations, *Theoret. Comput. Sci.* **7** (1978) 197-210.
[18] J.-E. Pin, Variétés de langages et monoïde des parties, *Semigroup Forum* **20** (1980) 11-47.
[19] J.-E. Pin, Hiérarchies de concaténation, *RAIRO Informatique Théorique* **18** (1984) 23-46.
[20] Ch. Reutenauer, Sur les séries associées à certains systèmes de Lindenmayer, *Theoret. Comput. Sci.* **9** (1979) 363-375.
[21] Ch. Reutenauer, Sur les variétés de langages et de monoïdes, *4th GI Conf.*, Lecture Notes in Computer Science **67** (Springer, Berlin, 1979) pp. 260-265.
[22] J. Sakarovitch, Sur la définition du produit en couronne, dans: G. Pirillo, ed., *Actes du Colloque "Codages et Transduction"* (Editions du C.N.R., 1979) pp. 285-300.
[23] J. Sakarovitch, Syntaxe des langages de Chomsky, Thèse Sci. Math., Univ. Paris VII, Paris, 1979.
[24] J. Sakarovitch, On pushdown automata with modified acceptance condition, à paraître.
[25] M.P. Schützenberger, Sur les relations rationnelles entre monoïdes libres, *Theoret. Comput. Sci.* **3** (1976) 243-259.
[26] J.J. Seiferas and R. McNaughton, Regularity-preserving relations, *Theoret. Comput. Sci.* **2** (1976) 147-154.
[27] H. Straubing, Recognizable sets and power sets of finite semigroups, *Semigroup Forum* **18** (1979) 331-340.
[28] H. Straubing, A generalization of the Schützenberger product of finite monoids, *Theoret. Comput. Sci.* **13** (1981) 137-150.