CORE
Metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

小さい魔方陣たちを包む魔方陣について

内　田　　伏　一
（山形大学　名誉教授）

山形大学紀要（自然科学）第18巻第４号別刷
平成29年（2017）２月

リサイクル適性Ⓐ
この印刷物は、印刷用の紙へ
リサイクルできます。

Bull. of Yamagata Univ., Nat. Sci., Vol.18, No.4, Feb. 2017

小さい魔方陣たちを包む魔方陣について

内田　伏一*

Abstract

In this paper,　we consider magic squares which include many small magic squares. Mainly, we consider magic square of odd order n which includes small magic squares of orders k ＝ 3, 4, ⋯ , n － 2 with mutually different unit constants. Also, we consider magic squares similar to Savage's magic square of order 9.

0. はじめに　次の図0.1abcはいずれも3方陣を包む5方陣である．とくに，図0.1aの5方陣は典型的な親子方陣の1つとして江戸時代には知られていた．また，寺村周太郎は図0.1aの形の3方陣を包む5方陣について調べ，その基本型が605個で，このような5方陣の総数は174,240個であると示している，という記述が文献[1]にある．この基本型の個数については筆者も確認済みである．

1	18	21	22	3
2	10	17	12	24
19	15	13	11	7
20	14	9	16	6
23	8	5	4	25

図0.1a

21	6	16	15	7
5	20	10	19	11
2	25	12	9	17
23	13	3	4	22
14	1	24	18	8

図0.1b

25	4	3	19	14
1	22	23	7	12
9	16	5	18	17
6	15	13	11	20
24	8	21	10	2

図0.1c

図0.2abcは4方陣を包む6方陣である．先の5方陣の中の3方陣の場合と同じで，6方陣の中の4方陣の入り方もこの3種類に限られる．

4	3	28	35	36	5
6	11	25	24	14	31
10	22	16	17	19	27
29	18	20	21	15	8
30	23	13	12	26	7
32	34	9	2	1	33

図0.2a

1	4	10	35	30	31
36	33	27	2	6	7
11	25	24	14	34	3
22	16	17	19	28	9
18	20	21	15	5	32
23	13	12	26	8	29

図0.2b

36	30	29	5	9	2
35	7	8	32	28	1
6	23	18	22	11	31
3	13	20	16	25	34
4	12	21	17	24	33
27	26	15	19	14	10

図0.2c

図0.3abは，いずれも7方陣の中に5方陣が包まれ，5方陣の中に3方陣が包まれている．これを**親子方陣**という．7方陣について，5方陣と3方陣の入り方は他にもある．

とくに，図0.1a，図0.2a，図0.3aのように中心が同じ位置にある小方陣たちを包むものを**同心親子方陣**という．

*山形大学名誉教授

1	2	38	40	42	45	7
3	13	30	33	34	15	47
4	14	22	29	24	36	46
39	31	27	25	23	19	11
41	32	26	21	28	18	9
44	35	20	17	16	37	6
43	48	12	10	8	5	49

図 0.3a

1	2	38	40	42	45	7
3	33	18	28	27	19	47
4	17	32	22	31	23	46
39	14	37	24	21	29	11
41	35	25	15	16	34	9
44	26	13	36	30	20	6
43	48	12	10	8	5	49

図 0.3b

この節に示した方陣は，よく知られたものであり，作者を特定できるものではない．

一般に，親子方陣型の n 方陣の場合，この中に包まれる小さい方陣たちの個数は，n 方陣自身を入れても，$n/2$ より小さいことを注意しておく．

本稿では，小さい魔方陣たちを包む魔方陣について考察する．

次数 n の魔方陣に包まれる可能性のある小方陣の次数は $3 \sim n-2$ であるが，これらのすべての次数の小方陣を包む n 方陣を，完全包括 n 方陣という．さらに，単位定和がすべて異なる完全包括 n 方陣を完全へんげ n 方陣という．

このような方陣の実例を挙げ，その作り方について解説する．

また，Savage の方陣およびそれに類似の魔方陣についても考察する．

本研究は，阿部楽方さんから文献 [2] を提供され，村越喜信さんから文献 [4] を提供されたことにより発展した．ここに記して両氏に感謝する．

1. Savage 方陣から完全包括方陣へ　図 1.1a は 1909 年に Savage が発表したと，文献 [2] に紹介されている 9 方陣である．4 方陣 2 個と 5 方陣 2 個を包んでおり，これらの 4 個の方陣はいずれも汎魔方陣である．この 9 方陣の場合，この中に包まれる小さい方陣たちの個数は 9 方陣自身を入れると 5 個になり，9/2 より大きい数になっている．

75	53	11	25	14	65	48	42	36
10	26	74	54	49	43	32	15	66
71	57	7	29	33	16	67	50	39
8	28	72	56	68	46	40	34	17
52	69	13	30	41	35	18	64	47
12	27	38	51	77	80	20	3	61
37	59	76	9	24	4	60	81	19
73	6	23	45	58	79	21	2	62
31	44	55	70	5	1	63	78	22

図 1.1a　　Savage 作　1909 年

図 1.1b は Savage の方陣にならって作成された 11 方陣である．3 方陣 1 個，4 方陣 2 個，5 方陣 2 個，7 方陣 2 個と 9 方陣を包んでいる．この 11 方陣の場合，この中に包まれる小さい方陣たちの個数は 11 方陣自身を入れると 9 個になる．また，11 方陣自身を入れると次数の違う方陣を 6 個包んでいる．これも文献 [2] に紹介されている．

1	4	119	120	83	84	36	42	64	37	81
121	118	3	2	39	38	86	80	58	41	85
108	107	16	13	21	49	89	79	67	76	46
14	15	106	109	101	73	33	55	43	68	54
100	22	99	23	18	105	60	94	28	63	59
97	25	70	52	103	61	19	53	69	77	45
26	96	30	92	62	17	104	24	98	65	57
95	27	40	56	35	72	102	9	113	116	6
29	93	66	82	87	50	20	12	110	115	7
48	90	31	34	75	78	71	111	11	8	114
32	74	91	88	47	44	51	112	10	5	117

図 1.1b　　阿部楽方作　1988 年 3 月

このような作業の流れの中で，図 1.2a が阿部楽方により作成された 15 方陣である．この 15 方陣は，次数 3〜13 の方陣をすべて包み，15 方陣自身を入れて，次数の違う方陣たちを 12 個包んでいる．一般に，n 方陣が次数 3〜$n-2$ の方陣を全て包む場合，この n 方陣を**完全包括 n 方陣**という．図 1.2a は最初に作成された完全包括方陣である．

図 1.2b は完全包括 17 方陣である．大まかに言えば，この 17 方陣は先の 15 方陣から親子方陣の作り方にならって作られている．この作り方の成功によって，阿部楽方は奇数次数 ($\geqq 15$) の完全包括方陣の存在を確信したものと思う．図 1.2ab および奇数次数の完全包括方陣の存在予想が文献 [2] に記されている．

102	216	21	142	1	196	136	4	199	33	193	34	192	149	77
214	22	103	3	195	141	6	198	135	168	58	161	65	128	98
23	101	215	194	143	2	197	137	5	138	88	144	82	62	164
84	225	30	112	181	46	130	7	202	70	156	80	146	173	53
223	31	85	47	113	179	9	201	129	182	44	81	145	162	64
32	83	224	180	45	114	200	131	8	87	139	178	48	126	100
90	222	27	96	219	24	124	10	205	37	189	41	185	94	132
220	28	91	217	25	97	12	204	123	188	38	127	99	79	147
29	89	221	26	95	218	203	125	11	157	69	176	50	76	150
191	55	93	42	134	163	153	104	115	75	118	109	117	154	72
35	171	133	184	92	63	73	122	111	108	151	49	177	155	71
86	67	186	68	105	166	211	209	13	19	190	106	43	160	66
140	159	40	158	121	60	15	17	213	207	36	183	120	61	165
78	74	187	52	175	54	20	14	208	210	170	110	119	57	167
148	152	39	174	51	172	206	212	18	16	56	116	107	59	169

図 1.2a　　阿部楽方作　1988 年 7 月　　$n=15$

134	248	53	174	33	228	168	36	231	65	225	66	224	181	109	142	148
246	54	135	35	227	173	38	230	167	200	90	193	97	160	130	280	10
5	133	247	226	175	34	229	169	37	170	120	176	114	94	196	13	277
116	257	62	144	213	78	162	39	234	102	188	112	178	205	85	288	2
255	63	117	79	145	211	41	233	161	214	76	113	177	194	96	274	16
64	115	256	212	77	146	232	163	40	119	171	210	80	158	132	270	20
122	254	59	128	251	56	156	42	237	69	221	73	217	126	164	22	268
252	60	123	249	57	129	44	236	155	220	70	159	131	111	179	23	267
61	121	253	58	127	250	235	157	43	189	101	208	82	108	182	266	24
223	87	125	74	166	195	185	136	147	107	150	141	149	186	104	265	25
67	203	165	216	124	95	105	154	143	140	183	81	209	187	103	26	264
118	99	218	100	137	198	243	241	45	51	222	138	75	192	98	263	27
172	191	72	190	153	92	47	49	245	239	68	215	152	93	197	28	262
110	106	219	84	207	86	52	46	240	242	202	4	289	89	199	261	29
180	184	71	206	83	204	238	244	50	48	88	286	1	91	201	30	260
278	6	151	32	259	285	8	283	9	271	21	14	275	273	18	3	279
12	284	139	258	31	5	282	7	281	19	269	276	15	17	272	11	287

図 1.2b　　阿部楽方作　1989 年 1 月　　$n = 17$

2．単位定和の違う方陣から完全へんげ方陣へ　一般に，p 方陣の定和を K_p とし，K_p/p を**単位定和**と呼ぶ．単位定和の値はその p 方陣に含まれるすべての成分の平均値に一致する．

図 2.1a の 6 方陣は完全包括 6 方陣である．この 6 方陣の場合，

$$K_3/3 = 18, \quad K_4/4 = 18.25, \quad K_6/6 = 18.5$$

であり，単位定和の値がすべて互いに異なっている．このように，完全包括方陣で単位定和の値が互いに異なる方陣を**完全へんげ方陣**という．図 2.1ab も文献 [2] に紹介されている．

図 2.1a の 6 方陣は最初に発見された完全へんげ方陣である．

小林寿雄作 1989 年 2 月

8	21	25	19	4	34
28	22	11	12	24	14
7	13	27	26	29	9
30	17	10	16	5	33
23	2	32	35	18	1
15	36	6	3	31	20

図 2.1a

図 2.1b は 17 方陣であり，互いに異なる単位定和の値が 9 個である．これを 9 へんげ 17 方陣という．奇数次の方陣については，完全へんげ方陣の存在は不明であった．

文献 [2] に示されている図 2.1b の原図には，仕切りの線がもっと多く引かれている．これは 4 方陣が 1 個ではなく合計 8 個包まれていることを示すためである．完全へんげ方陣への解説の流れのみに目を向けるため，その部分を省略している．また，原図には数値の誤植が 8 行目と 10 行目にあったが，訂正してある．

264	25	256	33	266	23	20	270	210	81	191	100	138	153	148	141	146
29	260	27	262	31	258	22	268	94	197	83	208	134	157	143	145	147
28	261	30	259	26	263	215	75	85	206	96	195	130	161	144	149	142
257	32	265	24	255	34	236	54	193	98	212	79	196	163	189	87	91
231	58	223	66	233	56	271	19	132	159	198	93	128	92	102	204	200
62	227	60	229	64	225	216	74	113	178	126	180	89	174	164	108	176
61	228	63	226	59	230	52	238	185	106	111	162	202	117	127	183	115
224	65	232	57	222	67	249	41	109	104	181	151	168	121	136	172	166
38	251	14	275	244	45	53	237	187	179	110	140	123	170	155	119	125
274	15	254	35	219	70	51	77	76	272	217	246	55	43	42	250	269
253	36	273	16	205	84	213	245	214	18	73	44	235	247	248	40	21
13	276	37	252	17	243	239	186	69	78	137	158	12	285	280	1	182
194	95	241	48	46	289	50	103	220	211	152	131	277	4	9	288	107
201	88	72	160	154	124	47	175	192	190	86	177	2	281	284	11	221
207	82	129	234	135	165	242	114	97	99	203	112	287	8	5	278	68
39	199	49	218	184	122	169	150	101	156	118	173	10	283	282	3	209
90	267	240	71	105	167	120	139	188	133	171	116	279	6	7	286	80

図 2.1b　　阿部楽方作　1989 年 9 月　　$n = 17$

図 2.2a　　村越喜信作　2001 年 6 月　　$n = 12$

3	133	8	11	18	112	123	132	111	107	81	31
1	143	138	135	128	34	23	14	35	39	65	115
9	137	15	121	10	16	104	126	113	22	117	80
12	134	13	131	136	130	42	20	33	124	29	66
106	40	19	127	27	109	43	87	93	120	47	52
116	30	141	5	25	119	103	59	53	26	99	94
142	4	140	6	77	69	75	97	41	72	63	84
144	2	95	51	122	24	37	71	105	74	83	62
118	28	82	64	108	38	101	45	67	55	68	96
17	129	102	44	21	125	57	89	86	90	61	49
88	58	7	139	98	48	92	54	60	56	79	91
114	32	110	36	100	46	70	76	73	85	78	50

$K_p/p = 73 - 6/p\ ;\ p = 3, 4, 5, 6, \cdots, 10, 12.$

ここまで完全包括偶方陣の作成は進んでいなかった．文献 [4] に紹介されている図 2.2a の 12 方陣は完全包括 12 方陣であるばかりでなく完全へんげ 12 方陣である．この図を一般化して，次数の高い完全へんげ偶方陣を作成できるが，この作者は 4 方陣をたくさん包ませる完全へんげ重複方陣の作成へと進んでおり，60 方陣などサイズが大きすぎて紹介できないものが多い．

図 2.3ab は筆者が作成した完全へんげ 9 方陣である．完全へんげ奇方陣として最初に作成されたものである．この段階では，大きい次数の完全へんげ奇方陣を作成できる見通しは立っていなかった．

33	10	25	75	26	70	46	27	57
5	35	43	42	41	45	74	68	16
73	69	58	9	59	11	6	31	53
56	38	32	44	78	14	23	3	81
24	54	48	36	2	66	55	17	67
79	28	19	39	30	61	29	22	62
15	51	60	40	49	18	52	72	12
8	47	71	63	77	4	34	64	1
76	37	13	21	7	80	50	65	20

図 2.3a　　2010 年 4 月

57	81	1	20	24	80	22	79	5
35	8	51	65	40	42	44	15	69
19	38	61	41	62	4	60	32	52
34	63	29	53	7	54	45	59	25
46	16	64	27	73	26	33	14	70
55	3	68	49	58	2	50	56	28
39	76	11	30	21	77	31	78	6
18	36	72	74	67	9	37	13	43
66	48	12	10	17	75	47	23	71

図 2.3b　　2010 年 4 月

次に示す 7 方陣たちは，すべて完全へんげ 7 方陣である．先に示した完全へんげ 9 方陣の完成以前に作成したものである．ただし，残念ながらこれらの 7 方陣はすべて非正規形である．正規形の 7 方陣の中に完全へんげ方陣が存在するか否かはまだ分かっていない．図 2.3ab および次の 7 方陣たちは文献 [5] に紹介してある．

1 − 1 ×

44	13	34	49	7	9	47
35	22	3	30	57	37	19
39	18	53	11	26	24	32
28	56	2	16	45	51	5
1	38	55	41	12	6	50
48	14	4	46	31	33	27
8	42	52	10	25	43	23

1 − 2 ×

55	41	14	38	4	51	7
9	35	33	44	31	18	40
53	5	25	11	58	24	34
8	52	30	20	42	26	32
27	19	50	39	17	12	46
22	21	13	48	1	56	49
36	37	45	10	57	23	2

1 − 3 ×

40	53	2	47	6	33	22
14	18	41	26	49	7	48
57	15	29	44	3	45	10
1	51	21	23	52	25	30
36	11	55	8	38	20	35
5	43	16	46	28	31	34
50	12	39	9	27	42	24

2 − 1

3	54	21	22	46	13	44
8	49	33	31	25	29	28
55	30	5	32	24	12	45
27	11	52	47	9	6	51
53	2	35	14	42	56	1
50	17	23	20	38	39	16
7	40	34	37	19	48	18

2 − 2 ×

1	22	33	41	49	36	21
55	34	23	7	27	6	51
8	47	35	54	2	29	28
57	30	3	32	24	26	31
25	13	52	12	44	19	38
20	53	17	15	43	39	16
37	4	40	42	14	48	18

2 − 3

17	11	74	76	29	28	52
58	70	7	5	67	19	61
37	27	64	35	44	2	78
36	50	42	34	45	26	54
59	49	20	57	22	66	14
41	79	8	33	48	65	13
39	1	72	47	32	81	15

2 − 4

36	2	57	54	7	27	34
12	20	53	19	52	47	14
45	41	10	11	49	35	26
4	61	31	51	9	18	43
59	32	5	21	39	55	6
33	3	60	38	24	13	46
28	58	1	23	37	22	48

2 − 5

63	6	35	50	32	44	29
14	21	74	7	70	18	55
8	73	34	30	41	1	72
49	61	5	48	23	37	36
52	25	38	51	20	64	9
16	28	71	15	60	42	27
57	45	2	58	13	53	31

3 − 1

22	61	13	45	34	6	36
23	32	41	14	12	60	35
51	3	42	29	52	33	7
27	10	59	24	17	49	31
39	53	4	47	44	11	19
54	40	2	21	8	28	64
1	18	56	37	50	30	25

3 − 2

21	45	16	12	44	40	39
18	36	25	60	32	4	42
34	8	53	24	20	52	26
58	22	15	56	33	31	2
1	46	48	5	28	30	59
38	3	54	37	41	9	35
47	57	6	23	19	51	14

3 − 3

13	64	25	27	46	5	51
35	31	9	54	39	34	29
42	10	49	28	17	63	22
4	32	65	57	7	6	60
52	30	19	1	58	59	12
40	8	53	44	48	2	36
45	56	11	20	16	62	21

3 − 4

35	60	2	48	13	34	25
12	47	37	4	29	40	48
57	32	7	41	58	19	3
27	17	52	21	11	56	33
36	1	59	43	46	8	24
45	9	42	16	6	38	61
5	51	18	44	54	22	23

3 − 5

19	16	4	40	32	60	39
46	43	55	1	48	5	12
9	59	25	26	7	35	49
47	31	15	27	41	38	11
37	3	53	58	24	14	21
29	56	8	6	45	30	36
23	2	50	52	13	28	42

3 − 6

26	30	21	45	40	16	32
52	29	38	14	43	28	6
22	50	20	23	41	18	36
57	4	31	58	15	44	1
11	39	42	12	13	46	47
35	2	55	25	49	10	34
7	56	3	33	9	48	54

3 − 7

21	7	53	1	71	50	49
52	6	60	65	17	34	18
22	69	20	42	35	16	48
12	63	36	64	5	14	58
61	37	13	10	54	68	9
38	11	62	25	47	43	26
46	59	8	45	23	27	44

3 − 8

15	25	26	37	56	33	53
62	34	52	43	32	16	6
39	17	51	30	44	35	29
64	31	12	65	23	46	4
1	70	36	2	22	47	67
40	7	60	41	49	10	38
24	61	8	27	19	58	48

4 − 1

12	33	52	10	28	24	44
39	46	6	30	54	11	17
27	2	32	50	8	55	29
41	48	1	23	38	37	15
16	18	56	34	19	20	40
42	35	13	3	25	49	36
26	21	43	53	31	7	22

4 − 2

13	28	27	6	55	26	41
16	30	25	49	29	9	38
46	11	44	32	3	52	8
21	42	24	54	12	10	33
34	31	22	1	43	45	20
18	19	50	37	14	7	51
48	35	4	17	40	47	5

4 − 3

28	52	5	24	11	50	26
40	4	27	38	44	29	14
7	22	55	25	32	8	47
42	43	2	6	37	54	12
13	21	53	49	18	1	41
36	20	31	9	51	39	10
30	34	23	45	3	15	46

4 − 4

52	20	61	13	37	46	16
1	45	24	22	31	55	67
47	62	7	69	36	3	21
35	44	25	17	41	50	33
38	6	60	56	32	23	30
53	42	9	40	57	29	15
19	26	59	28	11	39	63

4 − 5

11	50	53	33	26	20	59
24	60	17	40	13	52	46
66	1	38	36	70	37	4
9	29	71	32	28	22	61
64	42	3	41	45	51	6
44	2	63	47	8	39	49
34	68	7	23	62	31	27

4 − 6

37	22	11	50	26	38	19
8	35	46	6	9	51	48
33	39	18	34	55	1	23
15	30	45	4	28	40	41
42	21	27	53	29	17	14
52	31	7	44	43	24	2
16	25	49	12	13	32	56

4 − 7

26	17	29	25	34	31	27
1	18	33	21	15	49	52
48	19	40	38	35	4	5
6	54	24	36	9	13	47
46	28	10	16	43	39	7
32	2	50	45	11	12	37
30	51	3	8	42	41	14

なお，完全へんげ 7 方陣の配置図になる可能性のある図形は，ここに掲げた 23 図に限られることが分かっている．また，識別番号の後に×印があるのは，正規形の 7 方陣では実現できないことを確認済みのものである．

図 2.4a は筆者が作成した 15 方陣である．3 方陣と 5 方陣を包んでいないので完全包括方陣ではないが，10 へんげ 15 方陣である．

図 2.4a　　　　　　　　　　2010 年 6 月　　　　　　　　　　$n = 15$

145	148	78	156	93	114	49	181	47	216	12	94	134	146	82
66	179	139	100	96	120	83	158	70	106	122	60	168	111	117
137	71	18	86	153	108	210	3	225	20	208	188	40	85	143
129	58	155	75	150	140	76	221	7	204	24	198	30	190	38
81	126	135	147	72	80	142	224	4	107	121	37	191	118	110
73	99	170	91	157	132	61	8	220	213	15	189	39	185	43
152	102	88	128	62	89	162	9	219	16	212	29	199	41	187
177	154	11	5	65	10	186	206	197	26	202	56	172	182	46
51	74	217	223	163	218	42	1	22	214	14	77	151	44	184
215	104	23	116	21	25	195	28	201	115	196	159	69	178	50
13	124	205	112	207	203	33	200	27	2	113	211	17	48	180
92	57	193	6	209	173	34	36	133	68	161	138	167	52	176
136	171	35	222	19	55	194	192	95	160	67	31	90	164	64
141	103	98	59	54	183	53	63	149	144	131	127	105	119	166
87	125	130	169	174	45	175	165	79	84	97	101	123	32	109

$K_p/p = 114 - 15/p$; $p = 4, 6, 7, 8, \cdots, 11, 12, 13, 15$

図 2.4b も筆者が作成した 17 方陣である．12 へんげ 17 方陣になっている．

図 2.4b　　　　　　　　　　2010 年 6 月　　　　　　　　　　$n = 17$

156	101	211	76	132	146	183	79	213	162	130	190	102	177	115	41	251
99	109	105	187	200	169	136	210	82	172	120	126	166	124	168	226	66
218	91	173	175	106	123	119	149	143	104	188	122	170	137	155	171	121
29	231	178	179	74	98	216	111	181	11	281	274	18	32	260	236	56
263	114	61	103	208	186	70	285	7	283	9	272	20	259	33	250	42
127	194	117	201	81	92	193	286	6	280	12	265	27	258	34	54	238
113	165	160	84	204	191	88	96	196	217	75	22	270	37	255	65	227
289	85	64	287	4	145	86	80	257	13	279	21	271	44	248	67	225
3	207	228	5	288	147	206	1	212	131	161	19	273	45	247	68	224
284	144	10	150	110	14	276	15	116	214	256	118	174	51	241	71	221
8	148	282	142	182	278	16	277	176	2	78	264	28	240	52	90	202
192	108	138	197	17	23	24	267	266	30	243	153	223	242	50	198	94
100	184	154	95	275	269	268	25	26	262	49	35	139	245	47	215	77
209	89	140	252	31	38	253	57	58	59	60	229	230	246	222	219	73
83	203	152	40	261	254	39	235	234	233	232	63	62	36	46	220	72
48	239	151	43	55	107	112	134	135	159	163	164	167	195	199	205	189
244	53	141	249	237	185	180	158	157	133	129	128	125	97	93	69	87

$K_p/p = 146 - 17/p$; $p = 4, 6, 7, 8, \cdots, 13, 14, 15, 17$

3．完全へんげ奇方陣　先に示した図 2.4ab の配置図に 3 方陣と 5 方陣の入り方を工夫して，図 3.1abcd の完全へんげ奇方陣を作成できたので紹介しよう．なお，図 3.1abcd は文献 [6] において既に紹介している．

図 3.1a　　　　2010 年 6 月　　　　$n = 15$

124	148	71	156	93	114	77	38	190	223	5	13	215	189	39
78	151	139	100	96	115	104	111	117	27	201	204	24	47	181
137	66	67	86	153	113	161	193	35	92	136	125	103	106	122
121	83	138	162	89	62	128	146	82	58	170	219	9	214	14
152	102	88	61	132	157	91	101	127	164	64	212	16	15	213
90	107	145	142	80	72	147	225	3	168	60	48	180	22	206
81	126	135	76	140	150	75	36	192	169	59	46	182	26	202
224	74	44	133	94	84	63	129	166	11	217	45	183	97	131
4	154	184	95	134	144	165	32	99	187	41	222	6	179	49
17	195	130	70	159	149	174	18	51	109	167	52	176	188	40
211	33	98	158	69	79	54	210	177	31	119	163	65	191	37
194	7	141	220	216	56	55	23	10	160	73	116	196	199	29
34	221	87	8	12	172	173	205	218	68	155	2	112	200	28
203	19	120	42	20	43	85	105	118	171	175	178	198	21	197
25	209	108	186	208	185	143	123	110	57	53	50	30	1	207

$K_p/p = 114 - 15/p \;\; ; \; p = 3, 4, 5, 6, \cdots, 11, 12, 13, 15$

図 3.1b　　　　2010 年 6 月　　　　$n = 17$

137	234	70	82	187	148	127	51	245	277	19	18	278	176	120	76	220
214	169	73	209	111	50	159	238	58	10	286	266	30	100	196	198	98
89	55	138	153	146	246	158	155	141	157	139	160	136	168	128	170	126
154	90	200	223	6	207	105	202	94	12	284	279	17	273	23	257	39
145	152	147	62	109	144	226	289	7	283	13	53	243	44	252	249	47
96	142	206	149	185	103	104	68	228	75	221	21	275	247	49	242	54
150	143	151	107	241	87	106	74	222	88	208	215	81	261	35	235	61
288	16	140	42	9	285	113	199	189	282	14	172	124	263	33	217	79
8	280	156	254	287	11	183	5	97	258	38	167	129	264	32	219	77
84	225	135	201	45	112	281	101	72	131	190	130	166	265	31	66	230
212	71	161	95	251	184	15	195	224	4	165	227	69	28	268	65	231
276	43	125	99	194	80	274	93	163	132	41	162	191	27	269	63	233
20	253	171	197	102	216	22	203	133	164	255	3	134	26	270	60	236
204	117	123	181	24	267	262	260	259	40	46	48	121	25	192	59	237
92	179	173	115	272	29	34	36	37	256	250	248	175	2	271	56	240
239	86	119	67	52	78	85	114	116	118	174	186	188	205	213	232	193
57	210	177	229	244	218	211	182	180	178	122	110	108	91	83	1	64

$K_p/p = 148 - 51/p \; ; \; p = 3, 4, 5, 6, \cdots, 13, 14, 15, 17$

図 3.1c　　2010 年 6 月　　$n = 13$

88	127	46	60	7	134	115	138	38	154	22	165	11
120	9	27	169	141	69	42	26	150	92	84	51	125
77	14	167	35	116	61	107	100	76	18	158	48	128
117	113	34	110	81	66	56	129	47	160	16	33	143
63	142	59	6	149	80	78	31	145	21	155	139	37
68	64	132	99	79	5	130	104	72	83	93	28	148
44	108	112	98	4	162	49	147	29	12	164	30	146
105	85	74	124	67	73	55	75	95	58	118	41	135
71	91	102	52	109	103	121	3	101	168	8	133	43
10	131	123	19	94	151	111	13	20	161	96	137	39
166	45	53	157	82	25	65	163	156	2	15	140	36
57	54	153	70	114	24	32	40	89	90	126	159	97
119	122	23	106	62	152	144	136	87	86	50	1	17

$K_p/p = 88 - 39/p\ ;\ p = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13$

図 3.1d　　2010 年 6 月　　$n = 11$

64	59	96	9	58	51	78	29	99	20	108
12	35	11	94	95	91	77	48	80	98	30
97	10	93	89	39	50	37	115	13	74	54
19	111	62	70	3	32	118	40	88	28	100
66	109	17	33	117	67	6	38	90	81	47
86	49	57	116	34	5	68	114	14	83	45
71	42	79	4	69	119	31	104	24	43	85
120	7	65	113	23	56	46	53	60	25	103
8	121	63	15	105	72	82	2	75	106	22
27	55	110	87	21	84	52	26	36	112	61
101	73	18	41	107	44	76	102	92	1	16

$K_p/p = 64 - 33/p\ ;\ p = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11$

さらに，次数が 19 と 21 の完全へんげ奇方陣を図 3.2ab に示しておく．

図 3.2a　　2010 年 10 月　　$n = 19$

184	47	186	199	182	235	201	114	254	166	202	149	219	337	31	312	56	60	308
336	163	94	175	180	150	133	134	234	146	222	246	122	39	329	30	338	297	71
109	164	205	178	190	167	218	304	64	240	128	157	211	176	192	210	158	195	173
112	244	196	118	169	204	188	142	226	258	110	207	161	279	89	101	267	300	68
172	187	193	181	120	119	259	227	141	108	260	156	212	353	15	284	84	285	83
147	208	197	124	116	324	115	70	298	99	269	80	288	19	349	49	319	69	299
171	221	160	256	274	32	117	361	7	98	270	121	247	20	348	50	318	75	293
113	130	309	145	224	111	78	241	248	357	11	356	12	22	346	51	317	77	291
255	238	59	223	144	257	290	6	127	325	43	360	8	23	345	52	316	82	286
168	152	232	272	107	10	179	352	81	165	249	9	359	265	103	53	315	85	283
200	216	136	96	261	358	189	16	287	5	203	305	63	266	102	301	67	86	282
95	220	237	215	155	72	123	355	46	321	61	185	250	275	93	303	65	280	88
273	148	131	153	213	296	245	13	322	47	307	4	183	276	92	306	62	289	79
14	347	191	17	97	24	25	26	27	332	333	334	335	350	251	313	55	292	76
354	21	177	351	271	344	343	342	341	36	35	34	33	3	18	314	54	294	74
159	239	154	91	268	29	37	38	40	41	104	310	320	323	326	340	252	295	73
209	129	214	277	100	339	331	330	328	327	264	58	48	45	42	2	28	311	57
230	105	217	228	139	87	125	126	135	143	174	198	206	231	236	262	278	66	253
138	263	151	140	229	281	243	242	233	225	194	170	162	137	132	106	90	1	302

$K_p/p = 184 - 57/p\ ;\ p = 3, 4, 5, \cdots, 15, 16, 17, 19$

図 3.2b　　2010 年 10 月　　$n = 21$

237	113	363	158	205	222	235	245	199	423	21	362	82	55	389	52	392	107	337	141	303
170	220	143	428	163	202	207	196	248	7	437	70	374	384	60	391	53	329	115	273	171
168	311	209	80	298	242	224	225	219	236	208	234	210	227	217	223	221	230	214	252	192
304	62	300	274	175	286	132	3	441	435	9	430	14	418	26	50	394	356	88	151	293
364	183	119	16	239	331	281	440	4	10	434	13	431	28	416	388	56	94	350	339	105
146	261	259	301	128	169	269	247	197	433	11	427	17	39	405	387	57	102	342	153	291
144	382	140	276	325	81	185	251	193	111	333	122	322	40	404	380	64	104	340	154	290
246	194	226	406	42	173	172	243	275	121	323	118	326	41	403	379	65	106	338	155	289
198	250	218	38	402	271	272	127	201	344	100	439	5	45	399	378	66	108	336	156	288
49	377	240	25	426	12	370	277	114	215	316	6	438	398	46	368	76	120	324	160	284
395	67	204	419	18	432	74	167	330	86	229	436	8	397	47	73	371	191	253	161	283
24	410	232	27	429	22	314	318	19	424	206	123	317	396	48	72	372	343	101	165	279
420	34	212	417	15	422	130	126	425	20	238	85	321	383	61	71	373	345	99	292	152
415	23	228	59	381	408	407	285	200	35	33	32	31	414	358	69	375	346	98	294	150
29	421	216	385	63	36	37	159	244	409	411	412	413	44	30	68	376	347	97	295	149
360	75	231	393	54	58	77	89	90	91	93	334	357	365	366	361	359	348	96	296	148
84	369	213	51	390	386	367	355	354	353	351	110	87	79	78	43	83	349	95	297	147
341	92	233	166	264	109	112	117	124	125	133	136	309	310	313	315	328	270	400	299	145
103	352	211	278	180	335	332	327	320	319	311	308	135	134	131	129	116	2	174	302	142
249	176	241	307	138	157	162	177	178	179	181	182	184	186	190	255	256	257	280	305	401
195	268	203	137	306	287	282	267	266	265	263	262	260	258	254	189	188	187	164	1	139

$K_p/p = 222 - 21/p\ ;\ p = 3, 4, 5, \cdots, 17, 18, 19, 21$

4. 完全へんげ奇方陣の作り方　図 3.1a の完全へんげ 15 方陣の場合について，その作り方を説明しよう．ここで示す作り方についても文献 [6] において既に紹介したものである．

零和 15 方陣すなわち -112 から 112 までの 225 個の数を使った 15 方陣において考察する．この零和陣において，p 方陣の定和を k_p で表示する．

まず，図 4.1a を使って説明しよう．右上の 3×2 の矩形に含まれる $\circ$ 印の 6 個の数の和は，次の 2 つの式で表される．

$$3(k_{15} - k_{13}),\quad 2(k_{15} - k_{12}).$$

よって，$k_{15} - k_{13}$ は 2 の倍数であり，$k_{15} - k_{12}$ は 3 の倍数である．ここでは，$k_{15} - k_{13} = 2$ として考察を進めよう．この結果，$k_{15} = 0$ と合せて，

$$k_p = p - 15\ ;\ p = 4, 6, 7, 8, \cdots, 12, 13, 15.$$

となる．この条件の下に，数の和が 2 になる 2 つの数の対がたくさん必要になる．この節では，このような数の対 $x, 2-x$ を**補数対**と呼び，このような 2 つの数を互いに他方の**補数**と呼ぶことにしよう．

7 方陣の外部で $*$ 印以外の部分はすべて補数対に分割される．

9 方陣，11 方陣，13 方陣，15 方陣の右下の $*$ 印の 2 数 (これを**スミ数対**と呼ぶ) の和は，その 2 数を含む 2 つの列の数の和を考慮すれば，いずれも -28 になる．

次に，3 方陣の左上隅の数 s の値を決めよう．この 3 方陣の定和は $k_3 = s + 2$ である．一方，この 3 方陣には $*$ 印 2 個が含まれ，その 2 数の和は -28 であり，その他に 3 組の補数対が含まれる．よって，3 方陣に含まれる 9 個の数の和は $3k_3 = s - 22$ となる．2 つの等式から k_3 を消去して，$s = -14$ を得る．また，$k_3 = -12$ となる．

さて，-112 から 112 までの数の中で，補数対を作ることのできない数は，$1, -112, -111$ の 3 個の数である．この中で，$-112, -111$ を $*$ 印の中に割り振り，1 を 7 方陣に含ませることにしよう．

数の和が -28 となる 2 数の対を，$(-112, 84), (-111, 83), (-82, 54), (-81, 53)$ と決めよう．この 4 組を右下から順に配置する．3 方陣部分がうまく作られるなら，この順序にはこだわらなくても良い．

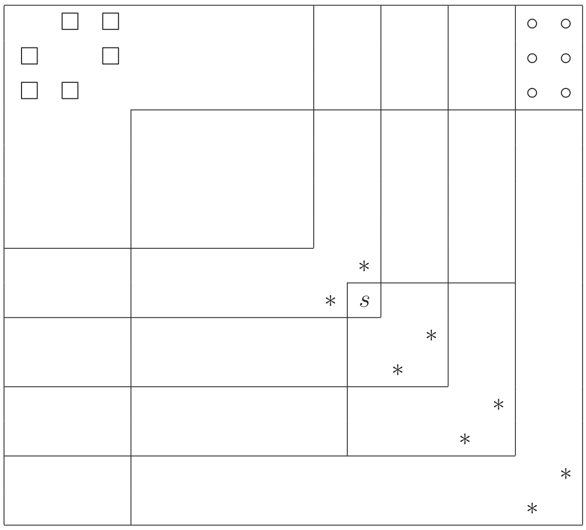

図 4.1a

それを 図 4.1b に記入する．以下，表の幅を考慮して，表の中では $-x$ を $\underline{x}$ で表示する．この結果，3 方陣部分が決定し，さらに -14 の補数 16 の位置が決定する．

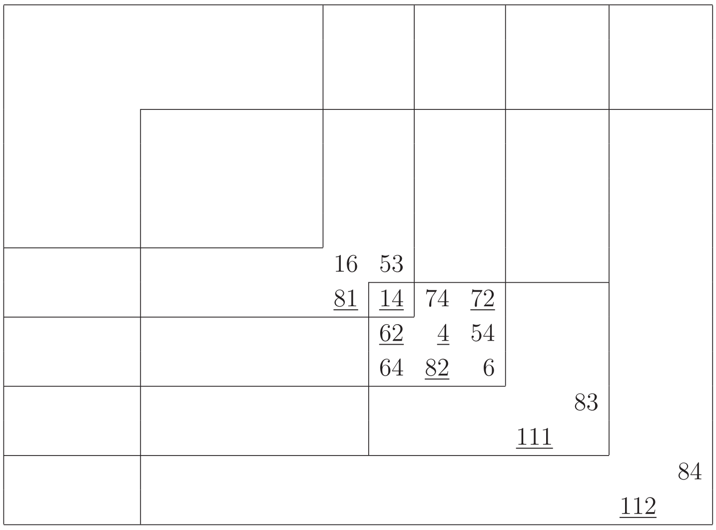

図 4.1b

新に補数対からはみ出した数は $-51, -52$ である．この 2 数を含む 4 方陣で $k_4 = -11$ となるものを作る．すでに 図 4.1b に表れている数を除くことは当然であるが，これ以外の制約はない．

この 4 方陣の図 4.1c を 図 4.1b に埋め込むのだが，埋め込み方については後に述べる．ここでは，4 方陣の変換によって 4 方陣の隅に位置することができる数は 図 4.1c の中で，

$$49, 15, -37, -38, 19, 44, -33, -41 \ \cdots \ (1)$$

の 8 個であることを注意しておく．

49	$\underline{24}$	$\underline{51}$	15
$\underline{52}$	19	44	$\underline{22}$
29	$\underline{33}$	$\underline{41}$	34
$\underline{37}$	27	37	$\underline{38}$

図 4.1c

7 方陣部分の作り方

図 4.1c の 4 方陣に含まれる数で，$-51, -52$ 以外の数を並べてみる．それを 図 4.1d の上段に示し，その補数を下段に示しておく．

49	44	37	34	29	27	19	15	-22	-24	-33	-37	-38	-41
-47	-42	-35	-32	-27	-25	-17	-13	24	26	35	39	40	43

図 4.1d

ここで，図 4.1a の □ 印の 6 個の数の和について考察しておく．7 方陣の定和 $k_7 = -8$ より，7 方陣の上段 3 行分の数の和は -24 になる．一方，□ 印の 6 箇所以外は 5 組の 3 個の数の和が 3 になる 3 数の組に分割されている．よって，□ 印の 6 個の数の和は -39 になる．

7 方陣の中の 4 方陣の外部を，1 および 図 4.1d の下段の 14 個の数と 9 組の補数対を使って作りたい．まず，図 4.1a の □ 印の 6 個の数に当たる数の候補を 図 4.1d の下段の数から探す．運よく，

$$-47, -42, -35, 24, 26, 35$$

の 6 個の数の和が -39 になっている．このような数の組を探し出せない場合には，1 組の補数対を崩して作る．図 4.1d の下段の残りの数

$$-32, -27, -25, -17, -13, 39, 40, 43$$

および 1 と 9 組の補数対を使って，9 組の 3 個の数の和が 3 になる 3 数の組を作りたい．それを図 4.1e のように表示しよう．

43	40	39	-32	1	$x+2$	$-x$	$u+2$	$-u$
-13	-17	-25	22	$a+2$	$y+2$	$-y$	$v+2$	$-v$
-27	-20	-11	13	$-a$	$-x-y-1$	$x+y+3$	$-u-v-1$	$u+v+3$

図 4.1e

縦に並んだ 3 数の和は，いずれも 3 になっている．9 組の補数対がどこに使われているか確かめて欲しい．これらの数を和が 3 になる 3 数の組をうまく配置して，次の 図 4.1f を作る．図の中心の t は先の (1) に示した 4 方陣の隅に現れる数である．

$-x$	35	-42	43	-20	1	$-x-y-1$
-35	$x+y+3$	26	-13	-17	$a+2$	$x+2$
24	-47	$-y$	-27	40	$-a$	$y+2$
$-v$	$u+v+3$	$-u$	t			
39	-11	-25				
$u+2$	$v+2$	$-u-v-1$				
-32	13	22				

図 4.1f

図 4.1f の上段の 3 行の和，左側の 3 列の和および副対角線 (左下がりの対角線) の和を計算して，次の等式を得る．

$$a = 0,\ y = 24 - 2x,\ v = -8,\ u = x - 14,\ x + t = 38.$$

ここで，$t = 49$ とすれば，$x = -11$ となり，7 方陣を次のように決めることができる．

11	35	$\underline{42}$	43	$\underline{20}$	1	$\underline{36}$
$\underline{35}$	38	26	$\underline{13}$	$\underline{17}$	2	$\underline{9}$
24	$\underline{47}$	$\underline{46}$	$\underline{27}$	40	0	48
8	$\underline{30}$	25	49	$\underline{24}$	$\underline{51}$	15
39	$\underline{11}$	$\underline{25}$	$\underline{52}$	19	44	$\underline{22}$
$\underline{23}$	$\underline{6}$	32	29	$\underline{33}$	$\underline{41}$	34
$\underline{32}$	13	22	$\underline{37}$	27	37	$\underline{38}$

図 4.1g

この図を 図 4.1b にはめ込む．上述したのは作業がうまく運んだ場合の説明である．実際の作業では図 4.1f において，4 方陣の上部の 4 列の入れ替え，4 方陣の左側の 4 行の入れ替え，さらに 4 方陣の隅の数の入れ替えなど，試行錯誤を繰り返して 図 4.1g にたどり着くことになる．
このような煩雑さは残るが，紙と鉛筆とポケット電卓 (または算盤) があれば，手作業でやれる仕事になった．

7 方陣の部分がうまく処理できれば，残りの作業は補数対を対のまま割り振る作業が残るのみである．この部分の作業は完全へんげ偶方陣の作り方と全く同じである．
5 方陣部分を最初に作り，後は小方陣ごとに左上から右下へと副対角線の和に注意しながら作業を進めるのみである．

拡張の際の注意事項

図 3.1a の完全へんげ 15 方陣に使った配置図を自然に拡張したものが，一般の n 方陣 (n：奇数) にも適用できるかどうかについて調べてみた．その結果，配置図については自然な拡張で良いようだが，小方陣の定和について若干の調整が必要になることが分かった．
以下，零和 n 方陣においての説明である．

<u>n が 3 で割り切れる場合</u>　p 方陣の定和を $k_p = p - n$ と置き，$n = 15$ の場合と全く同様の作業ができる．

<u>n が 3 で割り切れない場合</u>　p 方陣の定和を $k_p = 3(p - n)$ と変更する．
$n = 15$ の場合と殆ど同じ作業ができる．ただし，定和の変更によって，数の和が 6 になる 2 つの数の対 $x, 6 - x$ がたくさん必要になる．この結果，4 方陣に入れるべき数が 2 個から 6 個に増えることになる．

このように 2 つの場合に分けて作業を実行することにした理由は，3 方陣を所定の場所に埋め込むことができるようにするためである．

ここに示した完全へんげ奇方陣の作り方によって，次数の大きい完全へんげ奇方陣も作成可能だと思われる．
次数の大きい完全へんげ奇方陣を表示することは困難である．若干の次数について，方陣作成の基礎データを与えておく．
● 完全へんげ 23 方陣作成の基礎データ：1〜529$(= 23^2)$　　$K_p = 268p - 69,\ p = 3, 4, \cdots, 21, 23.$

7 方陣部分　$K_7 = 1807,\ K_4 = 1003$

322	529	134	83	264	268	207
137	153	217	528	269	120	383
299	85	329	193	271	416	214
241	220	343	143	399	319	142
272	237	295	316	144	141	402
127	362	315	277	453	265	8
409	221	174	267	7	278	451

スミ数対 (2 数和 $= 398$)8 組

397	396	395	394	393	392	259	258
1	2	3	4	5	6	139	140

337	258			
140	199	351	185	$K_3 = 735$
	231	245	259	
	305	139	291	

3 方陣部分

● 完全へんげ 25 方陣作成の基礎データ：1〜625$(=25^2)$　　$K_p=316p-75,\ p=3,4,\cdots,23,25.$

7 方陣部分　$K_7=2137,\ K_4=1189$

371	454	232	279	296	316	189
448	134	220	178	299	360	498
233	84	443	491	353	272	261
141	397	410	235	548	184	222
312	300	336	320	155	302	412
340	372	236	301	332	400	156
292	396	260	333	154	303	399

スミ数対 (2 数和 $=482$)9 組

481	480	479	478	477	476	331	330	329
1	2	3	4	5	6	151	152	153

391	329		
153	241	430	202
	252	291	330
	380	152	341

$K_3=873$

3 方陣部分

● 完全へんげ 27 方陣作成の基礎データ：1〜729$(=27^2)$　　$K_p=366p-27,\ p=3,4,\cdots,25,27.$

7 方陣部分　$K_7=2535,\ K_4=1437$

244	295	391	729	3	366	507
409	629	303	20	712	359	103
418	299	225	349	383	373	488
704	4	390	396	314	363	364
28	728	342	271	433	365	368
438	254	406	429	367	272	369
294	326	478	341	323	437	336

スミ数対 (2 数和 $=678$)10 組

677	676	623	622	569	568	515	514	461	460
1	2	55	56	109	110	163	164	217	218

393	460		
218	339	497	235
	253	357	461
	479	217	375

$K_3=1071$

3 方陣部分

● 完全へんげ 29 方陣作成の基礎データ：1〜841$(=29^2)$　　$K_p=424p-87,\ p=3,4,\cdots,27,29.$

7 方陣部分　$K_7=2881,\ K_4=1609$

424	214	392	500	484	492	375
389	411	387	456	390	307	541
327	574	437	316	398	473	356
532	339	401	351	459	349	450
364	399	509	274	353	461	521
391	487	394	634	348	447	180
454	457	361	350	449	352	458

スミ数対 (2 数和 $=674$)11 組

673	672	671	670	669	668	499	498	497	496	495
1	2	3	4	5	6	175	176	177	178	179

511	495		
179	337	612	236
	294	395	496
	554	178	453

$K_3=1185$

3 方陣部分

5. 単位定和列の変種　完全へんげ 15 方陣の場合について，図 3.1a の配置図と同じ配置図を使って，単位定和列がどのように変化できるかを調べてみた．図 3.1a の単位定和列と違うものとして，図 5.1abcdef を得た．図 3.1a を加えた 7 個および，これらの補数陣 (方陣の各項を 226 から引いた数に置き換えた方陣)7 個の単位定和列，合計 14 種が，図 3.1a の配置図と同じ配置図による完全へんげ 15 方陣の単位定和列の種類である．これらの図については文献 [5] において紹介している．なお，図 5.1a に当たる文献 [5] の図に間違いがあったが，図 5.1a は訂正済みのものである．

115	72	83	52	98	176	179	7	223	9	221	26	204	95	135
162	128	71	132	143	12	127	119	111	122	108	116	114	53	177
78	134	102	161	104	157	39	219	11	214	16	203	27	197	33
87	84	174	159	30	178	63	13	217	18	212	28	202	35	195
69	200	76	68	146	62	154	67	163	19	211	29	201	36	194
73	54	218	56	158	64	152	215	15	123	107	124	106	41	189
191	103	51	147	96	126	61	216	14	206	24	196	34	58	172
86	49	210	149	17	136	47	145	166	209	21	198	32	148	82
144	181	20	81	213	94	183	4	85	207	23	5	225	155	75
25	180	140	22	79	97	185	192	43	105	167	130	100	165	65
205	50	90	208	151	133	45	38	187	3	125	224	6	170	60
89	70	186	173	31	91	142	138	175	10	8	184	168	182	48
141	160	44	57	199	139	88	92	55	220	222	2	46	188	42
112	193	40	77	74	66	80	99	110	117	121	129	137	171	169
118	37	190	153	156	164	150	131	120	113	109	101	93	1	59

図 5.1a　　2010 年 7 月　　$K_p/p = 115 - 30/p$

116	224	14	77	96	68	172	9	223	20	212	142	90	61	171
186	75	48	46	155	120	137	117	115	207	25	32	200	129	103
44	45	157	225	97	160	39	222	10	121	111	174	58	158	74
119	99	130	6	218	7	188	18	214	52	180	31	201	173	59
135	100	113	184	94	133	8	47	185	26	206	35	197	49	183
72	164	112	136	5	187	91	208	24	104	128	124	108	67	165
95	60	193	93	102	92	132	213	19	195	37	194	38	69	163
85	43	220	55	30	57	210	161	138	203	29	196	36	110	122
147	189	12	177	202	175	22	4	71	199	33	13	219	125	107
21	209	118	205	28	152	153	42	63	101	139	82	150	143	89
211	23	114	27	204	80	79	190	169	3	131	221	11	146	86
191	34	123	105	54	53	176	192	145	16	17	217	140	148	84
41	198	109	127	178	179	56	40	87	216	215	2	15	149	83
106	98	144	181	50	62	64	66	73	76	151	154	162	167	141
126	134	88	51	182	170	168	166	159	156	81	78	70	1	65

図 5.1b　　2010 年 7 月　　$K_p/p = 116 - 45/p$

117	157	41	194	131	74	45	201	33	21	213	207	27	87	147
219	166	32	54	40	88	160	138	96	126	108	93	141	78	156
36	37	68	103	180	189	146	12	222	204	30	51	183	186	48
53	148	150	84	5	198	121	17	217	176	58	95	139	66	168
155	15	181	123	193	6	86	18	216	59	175	135	99	159	75
98	100	153	122	202	7	77	212	22	209	25	206	28	65	169
81	136	134	79	8	197	124	214	20	71	163	94	140	80	154
218	13	120	125	24	19	187	177	110	70	164	55	179	90	144
16	221	114	109	210	215	47	4	57	191	43	9	225	92	142
44	119	188	173	60	26	161	165	83	97	111	67	167	118	116
190	115	46	61	174	208	73	69	151	3	137	223	11	132	102
200	101	50	107	130	205	52	91	152	14	23	224	112	170	64
34	133	184	127	104	29	182	143	82	220	211	2	10	172	62
192	31	128	85	158	38	39	49	56	129	145	162	171	199	113
42	203	106	149	76	196	195	185	178	105	89	72	63	1	35

図 5.1c　　2010 年 7 月　　$K_p/p = 117 - 60/p$

118	9	218	115	168	111	12	206	30	92	144	114	122	35	201
73	94	10	224	61	68	221	135	101	146	90	55	181	128	108
11	162	142	15	125	175	121	13	223	116	120	185	51	191	45
72	163	119	16	5	225	151	132	104	147	89	215	21	106	130
117	77	160	153	220	6	18	102	134	95	141	22	214	200	36
156	166	32	152	164	7	74	97	139	64	172	88	148	179	57
204	80	70	76	8	159	154	105	131	67	169	52	184	171	65
222	20	112	140	98	62	58	193	82	217	19	213	23	158	78
14	216	124	96	138	174	178	4	43	183	53	25	211	155	81
100	145	109	126	99	75	219	71	103	93	83	69	167	41	195
136	91	127	110	137	161	17	165	133	3	143	212	24	39	197
113	54	187	59	180	79	63	209	170	26	28	207	84	38	198
123	182	49	177	56	157	173	27	66	210	208	2	29	50	186
194	31	129	149	34	150	176	188	189	37	40	44	46	203	85
42	205	107	87	202	86	60	48	47	199	196	192	190	1	33

図 5.1d　　2010 年 7 月　　$K_p/p = 118 - 75/p$

119	53	52	44	26	224	225	18	220	24	214	34	204	61	177
51	171	95	101	194	13	118	116	122	126	112	128	110	130	108
50	143	67	212	137	120	14	223	15	207	31	195	43	166	72
87	170	100	185	8	182	11	42	196	114	124	71	167	147	91
138	151	68	10	183	5	188	19	219	27	211	37	201	85	153
200	17	140	7	186	12	181	135	103	36	202	104	134	65	173
98	38	221	184	9	187	6	215	23	208	30	190	48	66	172
216	16	125	217	20	25	99	209	54	210	28	193	45	75	163
22	222	113	21	218	213	139	4	29	175	63	152	86	83	155
60	105	192	189	32	33	142	199	123	89	55	88	150	162	76
178	133	46	49	206	205	96	39	115	3	149	161	77	168	70
131	35	191	197	40	58	121	179	146	90	111	102	56	169	69
107	203	47	41	198	180	117	59	92	148	127	2	136	176	62
129	64	164	145	79	78	80	81	82	132	144	154	165	141	57
109	174	74	93	159	160	158	157	156	106	94	84	73	1	97

図 5.1e　　2010 年 7 月　　$K_p/p = 119 - 90/p$

120	96	13	16	53	221	216	30	210	40	200	52	188	163	77
93	18	94	157	224	24	125	107	133	123	117	128	112	87	153
14	95	222	187	83	115	19	223	17	197	43	180	60	110	130
31	205	124	144	8	212	11	51	189	114	126	108	132	171	69
116	209	35	10	213	5	147	21	219	42	198	58	182	71	169
203	75	82	7	145	12	211	106	134	56	184	79	161	174	66
158	37	165	214	9	146	6	208	32	192	48	176	64	162	78
218	20	122	215	23	92	34	225	26	196	44	179	61	156	84
22	220	118	25	217	148	206	4	15	167	73	36	204	101	139
46	129	185	127	50	47	181	195	143	85	27	54	186	91	149
194	111	55	113	190	193	59	45	97	3	155	201	39	86	154
137	57	166	177	62	65	136	160	191	33	41	202	28	81	159
103	183	74	63	178	175	104	80	49	207	199	2	38	68	172
152	70	138	164	72	142	141	121	109	105	100	90	89	173	29
88	170	102	76	168	98	99	119	131	135	140	150	151	1	67

図 5.1f　　2010 年 7 月　　$K_p/p = 120 - 105/p$

6. サベージ型方陣など　小方陣の配置図が両対角線に関して線対称になる方陣またはそれに近い型の方陣を**サベージ型方陣**と呼ぶ．サベージ型 13 方陣を図 6.1a に示す．本項以降の内容の大半は文献 [7] に既に紹介されている．

図 6.1a　　　　　　　　2012 年 2 月

26	28	129	128	31	168	61	107	34	35	115	117	126
142	144	41	42	139	2	109	63	136	135	55	44	53
74	96	8	158	14	160	59	7	141	125	93	47	123
122	48	15	159	9	157	114	166	32	80	33	99	71
143	27	156	10	162	12	57	112	83	60	113	127	43
3	167	161	13	155	11	110	84	58	52	121	64	106
66	104	36	131	39	134	85	56	111	108	65	97	73
103	67	77	90	132	86	40	153	21	147	19	164	6
94	76	138	29	87	38	133	148	18	154	20	24	146
82	88	137	130	105	49	4	23	151	17	149	72	98
124	46	37	45	62	118	163	16	150	22	152	101	69
75	119	89	50	68	78	116	1	140	165	25	79	100
51	95	81	120	102	92	54	169	30	5	145	70	91

$K_r/r = 85\ (r = 4, 5, 6, 7, 9, 13),\ K_3^{(1)}/3 = 86,\ K_3^{(2)}/3 = 84$

図 6.1a の 13 方陣の作り方の概略を述べておく．2 つの 3 方陣の定和が同じにはなれないので，若干の工夫が必要になる．

まず，2 つの 3 方陣の左下がりの対角線に，83,84,85,86,87 と順に並べてみる．この結果，2 つの 3 方陣の定和は 252 と 258 になる．残りの方陣たちの定和は

$$K_r/r = 85\ ;\ r = 4, 5, 6, 7, 9, 13$$

と決めておく．この結果，9 方陣の外部は 2 数和が 170 になる 2 数対で埋め尽くされる．2 つの 4 方陣も 2 数和が 170 になる 2 数対で埋め尽くすようにしたい．

この場合，2 つの 5 方陣への数の配分が問題になる．左下の 5 方陣で 3 方陣の外部には 2 数和が 167 になる 7 組の 2 数対と 2 数和が 182 になる 1 組の 2 数対が必要で，右上の 5 方陣で 3 方陣の外部には 2 数和が 173 になる 7 組の 2 数対と 2 数和が 158 になる 1 組の 2 数対が必要になる．

まず，2 つの 3 方陣において，86 の下の数を a，84 の右の数を b とおく．この場合，3 方陣に使われる数は図 6.1b の枠線の内部の数である．上下 2 数の和が 170 になるように揃えてある．

$a-2$	$a-1$	a	$a+1$	$a+2$	$b-2$	$b-1$	b	$b+1$	$b+2$
$172-a$	$171-a$	$170-a$	$169-a$	$168-a$	$172-b$	$171-b$	$170-b$	$169-b$	$168-b$

図 6.1b

5 方陣を埋める残りの数を図 6.1c のように表示する．

$a-2$	$169-a$	$a-1$	$168-a$	s	$167-s$	t	$167-t$
$b+1$	$172-b$	$b+2$	$171-b$	$170-s$	$s+3$	$170-t$	$t+3$
u	$167-u$	v	$167-v$	w	$167-w$	z	$182-z$
$170-u$	$u+3$	$170-v$	$v+3$	$170-w$	$w+3$	$170-z$	$z-12$

図 6.1c

図 6.1c の各枠内の上段の 2 数を左下の 5 方陣に，各枠内の下段の 2 数を右上の 5 方陣に次のように割り振り，2 つの 5 方陣が作成できれば，残りの数たちはすべて 2 数和が 170 になる 2 数対に分割できる．

				$b+1$	$s+3$	$u+3$	$z-12$	$170-t$
				$172-b$	$170-s$	$170-u$	$t+3$	$170-z$
				$b-1$	$170-b$	83	$b+2$	$171-b$
				$168-b$	84	b	$w+3$	$170-w$
$a-2$	$169-a$	$a+1$	$172-a$	85	$b-2$	$169-b$	$v+3$	$170-v$
t	$167-t$	$170-a$	86	$a+2$				
u	$167-u$	87	a	$171-a$				
z	$168-a$	v	w	s				
$a-1$	$182-z$	$167-v$	$167-w$	$167-s$				

図 6.1d

この図 6.1d が 2 つの 5 方陣になる条件式を求めると，次のように表示できる．

$$s = 3b - 170 \qquad t = 2b - a - 1 \qquad u = 9b - 6a - 156$$
$$v = 3b - 2a + 7 \qquad w = 5b - 2a - 165 \qquad z = 5a - 11b + 585$$

$a = 38,\ b = 58$ と置いた結果が図 6.1a の 2 つの 5 方陣である．残りはすべて 2 数和 170 の 2 数対に分割される．このような 2 数対を利用して 2 つの汎 4 方陣を作り，9 方陣を完成させる．最後に，包括方陣を完成させる方法で 13 方陣を完成させるという手順で，図 6.1a を得る．

7．サベージ型 9 方陣　図 1.1a の Savage 9 方陣の中心数を変化させてみる．1〜39 の奇数を中心数とするサベージ型の 9 方陣の例を挙げておく．これらの 9 方陣の補数陣および図 1.1a の 9 方陣を加えると，全体として 1〜81 のすべての奇数を中心数とするサベージ型の 9 方陣の存在が分かる．いずれも 2011 年 11 月に筆者が作成したものである．

11	77	78	18	8	44	28	40	65
79	17	12	76	57	54	7	64	3
14	74	81	15	60	58	53	10	4
80	16	13	75	59	2	63	9	52
33	55	51	45	1	27	34	62	61
32	31	38	35	49	19	69	70	26
29	37	43	30	46	71	25	20	68
41	56	5	36	47	22	66	73	23
50	6	48	39	42	72	24	21	67

8	18	80	77	61	50	4	6	65
81	76	9	17	58	21	7	64	36
75	78	20	10	48	54	53	5	26
19	11	74	79	16	1	63	49	57
38	51	39	55	3	60	59	62	2
24	34	40	41	47	12	30	72	69
37	22	46	25	56	73	68	13	29
43	52	33	23	35	67	70	32	14
44	27	28	42	45	31	15	66	71

10	77	78	17	63	54	3	2	65
79	16	11	76	59	9	27	64	28
13	74	81	14	34	62	52	4	35
80	15	12	75	26	1	50	57	53
40	51	46	45	5	61	55	60	6
33	32	43	31	48	18	69	70	25
29	38	44	39	37	71	24	19	68
36	58	7	30	56	21	66	73	22
49	8	47	42	41	72	23	20	67

1	37	80	63	71	21	15	8	73
81	62	2	36	69	24	9	72	14
61	78	39	3	35	70	31	33	19
38	4	60	79	6	5	67	45	65
26	56	49	50	7	68	66	30	17
58	23	32	16	59	10	41	76	54
25	18	44	46	55	77	53	11	40
22	64	34	48	20	52	74	43	12
57	27	29	28	47	42	13	51	75

10	76	77	17	59	42	3	4	81
78	16	11	75	60	31	32	64	2
13	73	80	14	56	54	34	8	37
79	15	12	74	5	1	63	58	62
30	53	50	47	9	61	57	55	7
35	36	27	39	52	18	68	69	25
40	6	51	48	44	70	24	19	67
43	49	33	26	38	21	65	72	22
41	45	28	29	46	71	23	20	66

1	25	80	73	60	40	12	13	65
81	72	2	24	63	23	22	64	18
71	78	27	3	46	57	41	14	32
26	4	70	79	10	9	62	50	59
45	43	37	54	11	61	53	49	16
47	20	52	15	56	5	29	76	69
21	38	51	44	36	77	68	6	28
19	55	33	35	48	67	74	31	7
58	34	17	42	39	30	8	66	75

14	71	72	21	58	40	8	4	81
73	20	15	70	80	32	11	59	9
17	68	75	18	38	76	37	30	10
74	19	16	69	2	1	57	52	79
33	36	53	56	13	42	78	46	12
47	39	54	3	48	22	63	64	29
49	5	43	50	44	65	28	23	62
7	77	35	31	41	25	60	67	26
55	34	6	51	45	66	27	24	61

1	23	80	73	63	41	12	11	65
81	72	2	22	61	20	30	64	17
71	78	25	3	43	60	39	13	37
24	4	70	79	10	9	58	56	59
38	51	42	46	15	62	53	48	14
47	34	45	16	50	5	27	68	77
18	19	49	54	52	69	76	6	26
32	55	21	40	44	75	66	29	7
57	33	35	36	31	28	8	74	67

7	77	78	14	60	50	6	4	73
79	13	8	76	62	29	27	72	3
10	74	81	11	52	56	30	15	40
80	12	9	75	2	1	71	58	61
38	35	54	49	17	57	59	44	16
31	34	47	26	55	18	66	67	25
39	28	46	37	43	68	24	19	65
32	51	41	33	36	21	63	70	22
53	45	5	48	42	69	23	20	64

1	21	80	73	63	40	15	11	65
81	72	2	20	61	28	29	64	12
71	78	23	3	41	58	37	14	44
22	4	70	79	10	9	62	53	60
45	47	33	50	19	59	51	52	13
43	38	49	16	48	5	25	76	69
32	35	46	42	39	77	68	6	24
17	56	36	31	54	67	74	27	7
57	18	30	55	34	26	8	66	75

6	77	78	13	72	41	5	4	73
79	12	7	76	69	18	35	70	3
9	74	81	10	31	67	30	34	33
80	11	8	75	2	1	71	55	66
39	36	48	51	21	68	54	32	20
46	42	44	14	49	22	61	62	29
38	15	50	40	52	63	28	23	60
19	57	16	47	56	25	58	65	26
53	45	37	43	17	64	27	24	59

1	19	80	73	67	29	17	14	69
81	72	2	18	60	31	25	68	12
71	78	21	3	36	66	27	37	30
20	4	70	79	10	9	65	49	63
42	38	45	48	23	61	62	28	22
46	44	41	11	54	5	33	76	59
40	24	43	39	50	77	58	6	32
13	64	15	51	53	57	74	35	7
55	26	52	47	16	34	8	56	75

5	77	78	12	72	45	4	3	73
79	11	6	76	63	16	40	64	14
8	74	81	9	35	70	34	22	36
80	10	7	75	2	1	71	62	61
47	21	66	38	25	65	48	46	13
24	41	50	15	67	26	56	57	33
39	44	20	43	51	58	32	27	55
18	68	42	52	17	29	53	60	30
69	23	19	49	37	59	31	28	54

1	17	80	73	67	39	12	11	69
81	72	2	16	63	24	30	68	13
71	78	19	3	31	64	25	52	26
18	4	70	79	10	9	65	53	61
28	49	48	46	27	62	66	14	29
44	47	51	15	41	5	33	76	57
45	20	37	58	38	77	56	6	32
21	59	40	36	42	55	74	35	7
60	23	22	43	50	34	8	54	75

4	77	78	11	71	40	12	3	73
79	10	5	76	59	28	27	72	13
7	74	81	8	38	68	24	44	25
80	9	6	75	2	1	70	57	69
56	58	39	17	29	62	66	23	19
61	15	45	14	64	30	51	52	37
20	22	47	43	67	53	36	31	50
16	63	42	60	18	33	48	55	34
46	41	26	65	21	54	35	32	49

1	15	80	73	67	26	27	11	69
81	72	2	14	62	36	21	68	13
71	78	17	3	30	66	23	41	40
16	4	70	79	10	9	65	56	60
20	43	49	57	31	63	64	24	18
48	47	51	12	42	5	33	76	55
46	22	37	45	50	77	54	6	32
25	59	19	58	39	53	74	35	7
61	29	44	28	38	34	8	52	75

17	63	64	24	79	13	12	16	81
65	23	18	62	49	35	34	80	3
20	60	67	21	38	75	6	14	68
66	22	19	61	2	1	78	76	44
37	9	50	72	33	77	71	15	5
70	40	46	4	41	25	55	56	32
39	69	43	42	8	57	31	26	54
7	73	11	36	74	28	52	59	29
48	10	51	47	45	58	30	27	53

1	13	80	73	67	29	26	11	69
81	72	2	12	56	37	25	68	16
71	78	15	3	34	65	21	43	39
14	4	70	79	10	9	66	58	59
44	36	41	46	35	62	64	22	19
23	50	51	17	61	5	31	76	55
27	20	38	57	60	77	54	6	30
45	49	48	42	18	53	74	33	7
63	47	24	40	28	32	8	52	75

10	69	70	17	52	47	20	19	65
71	16	11	68	57	34	27	64	21
13	66	73	14	39	61	36	35	32
72	15	12	67	18	1	62	59	63
31	49	45	41	37	60	58	26	22
44	51	55	23	30	2	77	78	9
43	24	33	53	50	79	8	3	76
29	54	42	40	38	5	74	81	6
56	25	28	46	48	80	7	4	75

1	11	80	73	63	23	34	15	69
81	72	2	10	56	44	20	68	16
71	78	13	3	32	67	19	46	40
12	4	70	79	14	9	66	57	58
41	27	49	48	39	61	65	18	21
38	50	62	17	37	5	29	76	55
25	45	24	59	51	77	54	6	28
36	60	26	47	35	53	74	31	7
64	22	43	33	42	30	8	52	75

8．サベージ型対称 9 方陣など　サベージ型方陣について，若干の成果を得たので紹介しよう．図 8.1a はサベージ型 9 方陣であり，対称 (定和点対称型)9 方陣である．図 8.1b は 3 方陣 2 個を含むサベージ型 9 方陣である．

1	14	76	73	52	36	32	21	64
77	72	2	13	34	43	42	63	23
71	74	16	3	54	56	20	37	38
15	4	70	75	24	17	60	57	47
49	55	31	29	41	53	51	27	33
35	25	22	65	58	7	12	78	67
44	45	62	26	28	79	66	8	11
59	19	40	39	48	69	80	10	5
18	61	50	46	30	9	6	68	81

図 8.1a　　2011 年 11 月

1	14	76	73	48	32	23	38	64
77	72	2	13	40	56	65	24	20
71	74	16	3	59	21	37	63	25
15	4	70	75	17	39	61	28	60
58	18	53	35	41	57	19	52	36
47	29	31	43	55	7	12	78	67
34	42	45	51	33	79	66	8	11
44	54	50	27	30	69	80	10	5
22	62	26	49	46	9	6	68	81

図 8.1b　　2011 年 11 月

この 2 つの図では，17〜65 の数を使って 2 つの 5 方陣の部分を作り，1〜16 および 66〜81 を使って 2 つの 4 方陣の部分を作っている．

41	248	78	90	96	102	252	253	61	66	232	65	85	170	172	226	228
42	249	212	200	194	188	38	37	229	224	58	225	205	120	118	62	64
43	247	264	198	181	184	22	21	258	233	76	77	82	254	35	72	218
44	246	92	26	109	106	268	269	32	57	214	213	208	255	36	73	217
244	46	236	54	9	278	277	16	152	136	127	142	168	51	239	119	171
245	45	231	59	12	281	274	13	144	160	169	128	124	174	116	113	177
250	40	23	267	279	10	15	276	163	125	141	167	129	187	103	190	100
251	39	24	266	280	11	14	275	121	143	165	132	164	60	230	223	67
74	216	263	27	162	122	157	139	145	161	123	156	140	34	256	227	63
180	110	259	31	151	133	135	147	159	1	286	285	8	273	17	47	243
75	215	107	183	138	146	149	155	137	4	289	282	5	272	18	48	242
87	203	108	182	148	158	154	131	134	287	2	7	284	105	185	197	93
112	178	219	71	126	166	130	153	150	288	3	6	283	104	186	196	94
195	95	30	261	222	221	220	33	28	270	271	52	53	25	199	192	98
210	80	29	260	68	69	70	257	262	20	19	238	237	91	265	189	101
179	97	83	117	175	176	191	206	81	50	49	88	89	204	211	235	234
193	111	207	173	115	114	99	84	209	240	241	202	201	86	79	56	55

図 8.2a　　2011 年 12 月

さらに，図 8.2a のサベージ型 17 方陣を得た．この 17 方陣には 3 方陣が 2 個，4 方陣が 2 個，5 方陣が 2 個，6 方陣が 2 個，7 方陣が 2 個，8 方陣が 2 個，9 方陣が 3 個，13 方陣が 1 個，17 方陣が 1 個，合計 17 個の方陣が含まれている．さらに，この 17 方陣には，配置図の特性による変換があるが，それ以外にも，2 個の 4 方陣の特徴による変換がある．実際，2 個の 4 方陣に独立に 90 ゜回転を施しても，　2 個の 4 方陣を入れ替えても，サベージ型 17 方陣になっている．

9. 重複方陣　図 9.1a は Frierson が 1911 年に発表した重複 13 方陣として，文献 [2] の 23 ページに紹介されている．

157	13	23	147	109	31	111	138	36	66	102	100	72
145	25	17	153	61	139	59	32	134	104	68	98	70
16	154	144	26	57	56	30	112	136	99	105	60	110
22	148	156	14	113	114	140	58	34	65	71	133	37
97	73	94	76	151	18	21	89	146	135	35	29	141
79	91	78	92	27	82	150	155	11	63	107	33	137
74	96	75	95	143	159	15	20	88	115	55	101	69
90	80	93	77	19	24	81	149	152	54	116	103	67
164	6	3	167	85	142	158	12	28	64	106	108	62
7	163	168	86	1	132	44	39	125	50	48	118	124
162	8	84	2	169	38	126	131	45	120	122	52	46
5	83	161	10	166	129	43	40	128	123	117	49	51
87	165	9	160	4	41	127	130	42	47	53	121	119

図 9.1a　　Frierson 作　　1911 年

この 13 方陣には，3 方形 1 個，4 方陣 4 個，5 方陣 2 個，7 方陣 2 個，9 方陣 2 個，11 方陣 1 個，13 方陣 1 個の合計 13 個が含まれている．ただし，3 方形と記したのは対角線上の数の和が定和に一致しないことを示している．この 13 方陣では，すべての小方陣の単位定和 (その小方陣内のすべての数の平均値) がいずれも 85 になっている．

1	15	111	117	51	54	78	7	9	109	119
107	121	5	11	71	68	44	113	115	3	13
16	2	116	110	45	88	50	10	8	118	108
120	106	12	6	77	34	72	114	112	14	4
41	81	86	36	87	33	63	76	46	49	73
60	62	39	83	37	61	85	65	57	55	67
82	40	58	64	59	89	35	42	80	79	43
18	32	94	100	84	47	52	24	26	92	102
90	104	22	28	38	75	70	96	98	20	30
31	17	101	95	53	56	74	25	23	103	93
105	91	27	21	69	66	48	99	97	29	19

図 9.1b　　阿部楽方作　　1988 年 2 月

図 9.1b の 11 方陣は，文献 [2] の 28 ページに示されている阿部楽方の作品である．3 方陣が 1 個，4 方陣 4 個，7 方陣 4 個，11 方陣 1 個の合計 10 個を含んでいる．実は，この他に対角線和が成り立たない 7 方形を 1 個含んでいる．

ここでは，図 9.1a と図 9.1b の 2 つの方陣に関して考察した結果について述べよう．

図 9.1a に関しては，同じ配置図を使い，単位定和の値を変化させることによって，3 方形を 3 方陣にした修正 13 方陣について紹介する (**9.1** 参照)．

図 9.1b に関しては，作者が，「7 方陣が 5 個含まれるものが作られると思う．作って下さい」というコメントを残している．このコメントに応え作成した改良 11 方陣について紹介する (**9.3** 参照)．

9.1 修正 13 方陣

91	82	162	11	27	33	97	98	127	128	137	1	111
85	88	160	13	146	140	76	75	46	45	36	62	133
84	89	9	164	117	165	73	71	63	2	95	134	39
86	87	15	158	56	8	100	102	110	78	132	51	122
151	22	141	32	49	114	77	145	28	29	144	116	57
147	26	169	4	154	90	21	107	41	156	17	120	53
38	135	16	157	19	40	106	96	152	47	126	139	34
10	163	20	153	124	105	42	59	83	113	60	35	138
65	108	81	92	67	64	167	6	109	161	12	101	72
74	99	66	80	94	166	129	14	37	155	143	23	25
168	5	93	68	79	7	44	159	136	18	30	150	148
3	70	115	104	121	54	31	112	149	125	123	43	55
103	131	58	69	52	119	142	61	24	48	50	130	118

図 9.2a　　2012 年 2 月

91	85	84	86	27	33	97	98	127	128	137	1	111
82	88	89	87	146	140	76	75	46	45	36	62	133
162	160	9	15	117	165	73	71	63	2	95	134	39
11	13	164	158	56	8	100	102	110	78	132	51	122
151	22	141	32	49	114	77	145	28	29	144	116	57
147	26	169	4	154	90	21	107	41	156	17	120	53
38	135	16	157	19	40	106	96	152	47	126	139	34
10	163	20	153	124	105	42	59	83	113	60	35	138
65	108	81	92	67	64	167	6	109	161	12	101	72
74	99	66	80	94	166	129	14	37	155	18	125	48
168	5	93	68	79	7	44	159	136	143	30	123	50
3	70	115	104	121	54	31	112	149	23	150	43	130
103	131	58	69	52	119	142	61	24	25	148	55	118

図 9.2b　　2012 年 2 月

図 9.2a の 13 方陣には，3 方陣 ($K_3 = 240$) が 1 個，4 方陣 ($K_4 = 346$)4 個，5 方陣 ($K_5 = 413$)2 個，7 方陣 ($K_7 = 586$)2 個，9 方陣 ($K_9 = 759$)2 個，11 方陣 ($K_{11} = 932$)1 個，13 方陣 ($K_{13} = 1105$)1 個の合計 13 個の方陣が含まれている．さらに，単位定和の値は 7 種類である．

図 9.2a の 13 方陣において，左上隅の 4 方陣と右下隅の 4 方陣を中央の区切り線を込めて，主対角線に関して反転させると，元の配置図とは異なるが同じような性質をもった 13 方陣を得る．それを図 9.2b に示す．

9.2 修正 13 方陣の作り方

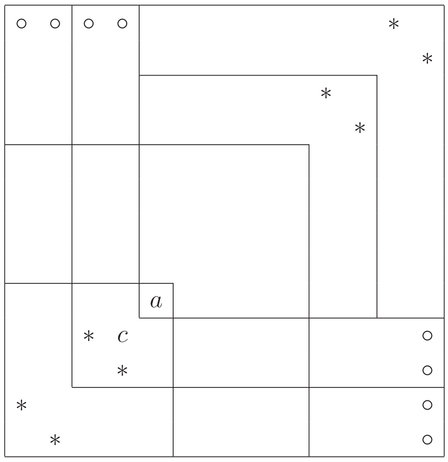

図 9.3a

図 9.3a は，図 9.1a および図 9.2a の 13 方陣の配置図を取り出したものである．3 方陣の中心数を c と置き，中央の 5 方陣と 3 方陣の交わりの数を a と置く．

4 個の 4 方陣はいずれも左右または上下に 2 等分されている．よって，$K_{13} - K_{11} = K_{11} - K_9$ が成り立っている．この値を t と置く．このとき，$K_4 = 2t$ となる．

正規形の 13 方陣の定和は $K_{13} = 1105$ であるから，

$$a + 6t = 1105 \quad \cdots (1)$$

が成り立つ．また，3 方陣において次の等式が成り立つ．

$$a + t = 3c \quad \cdots (2)$$

この 2 つの等式から a を消去してまとめると，$3c = 5(221 - t)$ となり，c は 5 の倍数であることが分かる．よって

$$t = 3(73 - c/5) + 2 \equiv 2(\mathrm{mod} 3).$$

図 9.1a の場合，$t = 170 (\equiv 2(\mathrm{mod} 3))$ である．この場合には $a = c = 85$ となり，3 方陣を作り得ない．

修正 13 方陣では $\boxed{t = 173}$ と置いて作業を進める．

この t の値を等式 (1),(2) に代入して，$a = 67, c = 80$ を得る．この結果，小方陣の定和に関して次の値が決まる．

$$K_3 = 240, \quad K_4 = 346, \quad K_5 = 413, \quad K_9 = 759, \quad K_{11} = 932.$$

さらに，3 方陣を含む 7 方陣について $K_7 = 586$ となる．それで，もう一方の 7 方陣の定和も 586 と決めることにする．図 9.3a の 2 つの 7 方陣と 2 つの 9 方陣の隅に，それぞれ 2 個の $*$ 印を付けてある．上述の定和の値と $t = 173$ を使い，$*$ 印を含む 2 列分の値を計算して，それぞれの $*$ 印 2 個の数の和は 134 になる．

このような状況の下で修正 13 方陣の作成作業を実行することになる．2 数和が 173 となる 2 数対をたくさん使用するので，このような 2 数対を**補数対**と呼ぶことにする．1〜169$(= 13^2)$ を補数対に分けると，1,2,3 がはみ出すことになる．それで，1,2,3 を図 9.2a のように $*$ 印に割り振る．さらに，3 方陣を図 9.2a のように決める．この結果，補数対からはみ出す数は 40,41,42,105,106,107 の 6 個である．この 6 個と 9 組の補数対および 67 を使って，中央の 5 方陣を作ることになる．

この部分の作業が最大の難関であった．試行錯誤の末に，5 方陣の配置を図 9.3b のように設定した．

$173-x$	$173-b$	$173-v$	$173-r$	r
$173-y$	a	u	107	41
y	40	106	v	$173-u$
x	105	42	b	$173-a$
67	z	w	$173-w$	$173-z$

図 9.3b

$K_5 = 413$ を使い，5 方陣になる条件式をまとめると，$r = 28$ および次の等式を得る．

$$u = 80 - b,\quad v = 186 - a,\quad w = 198 - a + b,\quad x = 93 + a - b,$$
$$y = a - b - 12,\quad z = 95 - a + b,\quad a + b = 149.$$

ここで，上の等式より得られる $w = z + 103 \leqq 169$ および $x = y + 105 \leqq 169$ を使って，z, y の範囲を制限し，上の等式をさらに使って，不等式 $29 \leqq a - b \leqq 76$ を得る．$a - b$ として，この不等式の範囲にある奇数を選ぶことになる．その値を代入して確かめることによって，

$$a - b = 29, 31, 33, 43, 45, 47, 49, 51, 57, 59, 75$$

の場合に既出の数とかち合わないで 5 方陣を作ることができる．

$a - b = 31$ と置いて図 9.3b の 5 方陣を定め，残りの作業は補数対をうまく配分する常套手段で図 9.2a を完成させることができた．

9.3 改良 11 方陣

図 9.4a の 11 方陣の配置図は図 9.1b の 11 方陣の配置図に若干の区切りの線を追加したものになっている．

この 11 方陣には，3 方陣が 1 個，4 方陣 4 個，7 方陣 9 個，11 方陣 1 個の合計 15 個が含まれており，図 9.1b の作者の予測を上回る個数の 7 方陣を含んでいる．

1	8	115	120	40	63	80	3	6	117	118
114	121	2	7	82	59	42	116	119	4	5
16	9	112	107	69	71	43	14	11	110	109
113	106	15	10	53	51	79	111	108	13	12
34	88	70	52	46	75	62	48	74	33	89
66	56	35	87	77	61	45	68	54	64	58
83	39	78	44	60	47	76	67	55	86	36
17	24	99	104	73	38	72	19	22	101	102
98	105	18	23	49	84	50	100	103	20	21
32	25	96	91	37	65	81	30	27	94	93
97	90	31	26	85	57	41	95	92	29	28

図 9.4a　　2012 年 2 月

9.4 改良 11 方陣の作り方

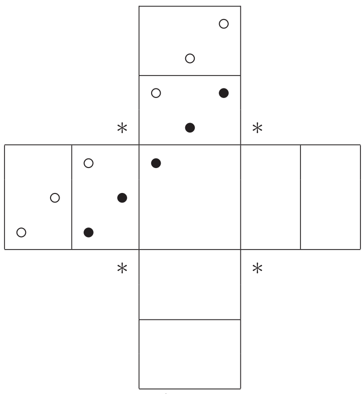

図 9.4b

図 9.1b の 11 方陣を観察して，次のことが分かった．

a)　4 隅の 4 方陣を切り取って張り合わせると，重複 4 方陣性 8 方陣になる．

b)　7 方陣の対角和成立の鍵は，11 方陣から 4 方陣を除いた十字形にある．

上記の観察結果に基づき，1〜32 および 90〜121 を使って重複 4 方陣性 8 方陣を作り，上下左右に 2 等分した 4 方陣を図 9.4a の 4 隅の 4 方陣として配置する．残りの数 33〜89 を使って十字形の部分を作る．図 9.4b の十字形の部分の作り方について説明しよう．

この十字形の図 9.4b において，中央が 3 方陣で，$2\times\ 3$ の矩形 8 個が矩形陣であれば，先に作った 4 個の 4 方陣を張り合わせて 11 方陣ができ上がる．この 11 方陣の中央には 7 方陣 1 個が必然的に含まれる．

残り 8 個の 7 方陣を含ませるための作業を続ける．まず，1 個の $*$ 印と 6 個の $\circ$ 印の位置の数の和を $427(=61\times 7)$ とする．合計 4 か所で同じように揃えることができれば，図 9.1b の作者が意図した位置に 7 方陣 4 個を含ませることができる．次に，5 個の $\bullet$ 印の位置の数の和を $305(=61\times 5)$ とする．合計 4 か所で同じように揃えることができれば，さらに 4 個の 7 方陣を含ませることができる．

最後の部分については，虫のよい注文かなと思いながら作業を実行した．結果として，思惑通りに図 9.4a の 11 方陣を完成させることができた．

9.5 重複方陣とは

文献 [2] によれば，重複方陣の定義は確定していないようである．本稿の冒頭に示したように親子方陣型の n 方陣の場合には，包まれる方陣たちの個数は $n/2$ 以下であった．当初は，重複方陣として，包まれる方陣たちの個数が $n/2$ より大きくなる n 方陣が考察の対象になり，Savage の方陣や Frierson の方陣が作られたようである．その後，大まかに言えば，包まれる方陣たちの個数が n 以上になる n 方陣を**重複方陣**と呼ぶようになったと思われる．

最後に 2014 年 10 月に筆者が作成した 1 つの 17 方陣を図 9.5 に示す．

51	6	107	184	199	275	163	59	237	188	108	129	167	48	248	8	288
251	157	156	21	139	57	204	240	56	96	200	102	194	176	120	233	63
105	110	236	239	106	112	77	145	151	160	136	213	83	220	76	203	93
246	44	154	148	140	104	149	78	218	137	159	42	254	153	143	10	286
64	219	161	186	7	103	245	158	138	132	164	280	16	14	282	170	126
135	217	92	60	142	289	50	208	88	175	121	122	174	277	19	264	32
133	232	79	147	252	45	97	257	39	144	152	267	29	124	172	287	9
54	235	155	80	150	214	73	131	189	99	197	11	285	111	185	13	283
242	61	141	216	146	82	223	5	165	212	84	183	113	117	179	27	269
187	28	229	134	180	130	123	100	46	230	190	243	53	221	75	30	266
109	268	67	162	116	166	173	196	250	4	66	260	36	26	270	49	247
70	101	273	276	127	41	168	253	47	24	284	18	191	201	95	206	90
226	195	23	20	169	255	128	43	249	272	12	3	278	238	58	224	72
68	115	261	258	15	171	91	98	25	265	262	74	33	241	192	225	71
228	181	35	38	281	125	205	198	271	31	34	222	263	2	55	259	37
89	178	177	52	210	182	17	274	234	209	94	85	81	69	65	256	193
207	118	119	244	86	114	279	22	62	87	202	211	215	227	231	1	40

図 9.5

図 9.5 の 17 方陣は，図 3.1b の 17 方陣とは配置図が違うが，完全へんげ 17 方陣の 1 つの配置図を下敷きにして作成した．

この 17 方陣には，

左上隅の数が 51 である 7 方陣, 9 方陣, 11 方陣, 13 方陣, 15 方陣, 17 方陣
左上隅の数が 148 である 4 方陣, 6 方陣, 8 方陣, 10 方陣, 12 方陣, 14 方陣
左上隅の数が 97 である 3 方陣, 5 方陣, 7 方陣, 9 方陣, 11 方陣

が包まれており，これらの p 方陣の単位定和は $K_p/p = 148 - 51/p$ である．

この中で，10 方陣，(左上隅の数が 51 である)11 方陣，12 方陣，13 方陣，14 方陣，15 方陣，17 方陣はいずれも完全へんげ方陣である．さらに，右上に 6 方陣が 3 個，左下にも 6 方陣が 3 個，合計 6 個の 6 方陣で単位定和が 148 のものが包まれている．合計 23 個の方陣が包まれる 17 方陣である．また単位定和の値は 15 種類である．

基本的には，先に示した完全へんげ 15 方陣と同じ作り方を採用しているが，3 方陣と 5 方陣の入る場所が 15 方陣の場合とは異なり，さらに 6 個の 6 方陣の対角線和を定和 888 に揃えるため，作成するための難易度は格段に高くなっている．

10. おわりに

180	13	146	1	225	2	224	6	220	8	218	10	216	15	211
79	113	147	115	111	116	110	121	105	122	104	123	103	124	102
80	213	46	223	3	221	5	212	14	209	17	206	20	200	26
4	120	215	29	197	32	194	**37**	189	217	9	68	158	54	172
222	106	11	34	192	35	**191**	39	**187**	214	12	77	149	56	170
16	198	125	196	30	**195**	31	**63**	163	**119**	107	21	205	91	135
210	28	101	193	**33**	190	**36**	167	**59**	44	**182**	23	203	97	129
98	22	219	**109**	112	**165**	70	**184**	38	**67**	159	**40**	186	131	95
128	204	7	117	**114**	61	**156**	188	**42**	41	**185**	126	100	136	90
43	134	162	133	127	**47**	82	**130**	145	**108**	132	173	53	139	87
183	92	64	93	99	179	**144**	96	**81**	94	118	199	27	140	86
137	45	157	176	207	49	51	**151**	52	55	164	201	24	141	85
89	181	69	50	19	177	175	75	174	171	62	202	25	142	84
18	143	178	60	65	57	58	66	138	148	150	153	154	155	152
208	83	48	166	161	169	168	160	88	78	76	73	72	74	71

図 10.1　　　　2016 年 5 月

図 10.1 は 5 方陣を斜めに含む変則的な完全包括 15 方陣であり，含まれている各方陣の単位定和の値がすべて 113 になっている．ここに，5 方陣に属する数は太字で記載してある．

阿部楽方さんが最初に作成した図 1.2a の完全包括 15 方陣でも，含まれている各方陣の単位定和の値がすべて 113 になっているが，小方陣たちの入り方が技巧的で探し出すのも楽ではない．

本稿で採択した完全へんげ 15 方陣の配置図を活用してみようと思ったが，5 方陣を入れる場所が無い．それで，5 方陣を斜めに含ませることを考えてみた結果，図 10.1 を得たので，ここに記載しておく．

参考文献

[1] 平山諦，阿部楽方：方陣の研究，1983 年，大阪教育図書

[2] 阿部楽方：包括方陣，へんげ方陣，重複方陣，1989 年

[3] 阿部楽方：完全へんげ偶方陣の一般的作法，2002 年，数理科学 10 月号，サイエンス社

[4] 村越喜信：世界一精密な魔方陣「完全緑華 60 方陣の解説」2007 年 10 月

[5] 内田伏一：魔方陣雑録 2，2010 年

[6] 内田伏一：完全へんげ奇方陣について，2012 年，数理科学 5 月号，サイエンス社

[7] 内田伏一：魔方陣雑録 3，2013 年