中学校入学初期における生徒の比例的推論の多様性
—筆記調査の結果と示唆—

日　野　圭　子

宇都宮大学教育学部紀要
第63号　第1部　別刷
平成25年（2013）3月

Variations of Students' Proportional Reasoning at the Beginning of Lower Secondary Schools

HINO Keiko

中学校入学初期における生徒の比例的推論の多様性
―筆記調査の結果と示唆―

Variations of Students' Proportional Reasoning at the Beginning of Lower Secondary Schools

日野　圭子
HINO Keiko

1．はじめに

本研究の目的は，比例的推論の進展の視点から，小学校と中学校の比例に関わる学習の接続を捉えることである。比例的推論は，伴って変わる２量の間の比例関係を前提として未知の量を求めたり量を比較したりする数学的推論の１つであり，そこには，量が伴って変わることのセンス，複数の比較，いくつかの情報を同時に心的に蓄えたり処理したりすることが含まれる（Lesh et al., 1988）。比例的推論の研究の歴史は長く，我が国でも多くの研究が行われてきている。我が国では，比例の内容は，小学校と中学校でスパイラルに指導されており，小中の接続の観点からも興味深い研究対象である。しかし，比例的推論の多くの研究は小学校段階を対象としており，中学校での生徒の学習を捉えた研究はあまりない。一方，中学校の比例の内容では，関数的思考や数学的モデル化の視点から教材研究や指導の研究が行われているが，それらと比例的推論との関わりについては，あまり考察されていない。

本研究は，文化的・言語的な道具としての表現や記号形式が，人の思考過程の組織化に決定的な役割を果たすという立場に立っている（日野，2003，2010）。このような立場から見ると，中学校での数や式，関数の学習は，生徒の比例的推論の進展の契機となり得る。なぜなら，これらの学習には，文字式を中心とする記号形式の学習が含まれるためである。例えば，中学校では，比例はy=axによって，２つの変数の間の一意対応として定義される。大谷・中村（2002）は，そこには「負の数への拡張，内比から外比への観点の変更，また，操作手続きから対象へ転換を伴い，『方法の対象化』という言葉では捉えられない複雑な過程」（p. 15）が含まれると述べている。

本稿では，小学校での比例の学習を終えて間もない中学校入学初期における生徒の比例的推論の様子を考察する。また，得られた結果をもとに，中学校１年での数や式，また，関数（特に比例）の学習指導の在り方について検討する。

2．研究の視点

（1）比例的推論の発達における「特定の比」と「比率としての比」

比例的推論の研究では，子どもが使う様々な思考方略の特徴，思考方略と課題変数との関係，発達の段階のモデルや発達を特徴づける観点などが議論されてきている。その中で，Kaput & West (1994) は，内包量の概念化，使用の仕方として，本質的に異なる２つの方法を区別し，発達のモデルを示している。なお，ここでの量は，対象とされる実態，状況，出来事などが持つあらゆる質の中から，特定の「質」に対して考えられた概念であり，数と「参照物（referent）」（対象を測定する単位を持つ）を含んでいる。また，内包量は，2つの外延量から構成される「YあたりX」という言葉遣いで記述され

る量を意味し，比率，様々な比の様態，単位変換の比率などをすべて含めて包括的に考えている。

異なる2つの方法のうちの１つは，「比率としての比」（rate-ratio）であり，実態・状況・出来事の一般的な記述としての内包量の概念化である。もう１つは，「特定の比」（particular ratio）であり，特定の例についての比の記述である。前者は，問題状況において，比の不変性を一般的に捉えており，y=ax のaでは，このような比の概念を仮定している。後者では，比の不変性は，特定の量のペアの関連づけとして捉えられている。２量間の乗法関係を記述するとき, また, 比例式を用いてy (ドル)/x (ポンド) = 5 (ドル)/3 (ポンド) のようにレートを換算するときには，特定の比が使われる。

Kaput らは，「比率としての比」の概念は，「特定の比」の経験，つまり，ある特定の量のペアを関連づける心的操作から，それを一般化していくことで，認知的に構築されると考える。そこには，形成された単位を認知的対象にして抽象化する過程が含まれる。そして，「比率としての比」の理解を支える３つのアイデアを指摘している。

- 特定の内包量間の数値的な同値性：数値面での同値性の認識であり，1:2=2:4，2/3=6/9 等を指す。
- 状況の記述間の意味的な同値性：状況の記述の仕方についての同値性の認識であり，例えば「1g あたり 10 円」と「100g あたり 1000 円」は同じ状況を述べていることが分かることを指す。
- 記述されている状況における，内包量の参照物の均質性：これは，例えば，決められた「価格」が1 g や 100g だけでなく，想定されるすべての重さに対して適用されるというアイデアである。状況においてモデル化されている性質が均質であるときに限って，同値性は適用される。均質性は，状況の性質であって，記述の性質ではない。記述が適用される範囲や，サンプルの取り方（平均の考え）等が問題となる。

特に，与えられた１組の単位の対が他の単位の対と同値であることを理解し，それがモデル化されている状況のすべての例に適用されることを知ることが,「比率としての比」の核心であると述べている。

その後，Kaput らは，インフォーマルな比例的推論として彼らが同定する３つの推論パターンについて「比率としての比」の理解がどの程度必要とされるのかを分析している。３つの推論パターンとは，「調整されたビルドアップ・ビルドダウン」「乗除によって簡略化されたビルドアップ・ビルドダウン」「ユニットファクター方略」である。我が国でもこれらの推論パターンは認知されており，後者の２つはそれぞれ「倍比例」「帰一法」等の言葉で呼ばれている。第１の推論パターンは，特に呼び名はないが，「加減を用いた素朴な倍比例」と考えることができよう。表１は，それぞれの推論パターンを具体例とともに説明したものである。

３つの推論パターンの中で，最も「比率としての比」の理解が必要とされるのは，「ユニットファクター方略」である。なぜなら,「ユニットファクター（１あたり）は比率そのものだから」(p. 258) である。一方，「ビルドアップ・ビルドダウン」では，解決者の推論パターンの使い方によって，どの程度「比率としての比」が要求されるかが異なる。もしも，単に与えられた単位の対を繰り返し足しているのであれば，「特定の比」以上の理解は特に必要ではない。しかし，例えば，繰り返し足していったときに，求める答に丁度たどり着くことが出来ない場合，単位の対の取り直しが必要となる。その場合には，「特定の比」を越えて，比の普遍性を認識することが要求される。これは，どちらのビルドアップ・ビルドダウンにおいても言えることである。

(2) 研究上の問い

本稿では，上述した枠組みを用いて，生徒の２量の関係の調べ方や表し方を調査していく。第１の

表1．３つのインフォーマルな推論パターン

推論パターン	推論例	推論の特徴
調整されたビルドアップ・ビルドダウン	銀器 7 14 21 28 35 磁器 4 8 12 16 20	2つの参照物AとBを区別し，意味的対応を作り，A，Bの中でそれぞれ単位を作り対応を作る。第3の量と第4の未知量との関連をつける。そして，第3の量が得られるまで，2量をそれぞれ繰り返し増加（減少）させ，調整する。
乗除によって簡略化されたビルドアップ・ビルドダウン	392÷7＝56（テーブルマット） 4×56＝224（個）	A，Bの単位を作り，第3の量，第4の未知量との関連をつけるところは上と同じである。計算では，それぞれ増加（減少）させていくのではなく，除法によって単位の数を知り，対応する単位量にその単位の数を掛けて未知の全体量を決定する。
ユニットファクター（１あたり）方略	4÷7＝4/7（銀器1個に対して磁器4/7個） 392×4/7＝224（個）	A，Bの単位を作り，第3の量，第4の未知量との関連をつけるところは上と同じであるが，１あたり量を作る時にどちらの単位をどちらの単位で割るかを判断しなくてはならない。計算では，実際に除法によって１あたり量を決定し，その１当たり量と第3の量をかけて未知量を決定する。

（注）推論例での問題：「あるレストランでは7個の銀器と4個の磁器を各テーブルマットにセットする。昨晩，35個（392個）の銀器をテーブルにセットしたとすると，そこで磁器は何個使われただろうか。」

理由は，Kaputらも述べているように，y=axのaは「比率としての比」の概念を仮定しており，内包量の概念化は,そこに至るまでの認識の道筋を見ていく上での指標を与えてくれると考えるためである。彼らと類似の視点は,他の研究者においても見られる。そこでは,単位を作ること,作り直すこと,作った単位を問題解決に使うことの重要性が，認知的側面，メタ認知的側面等から探られている（例えば,Thompson, 1994; Lamon, 2005）。Kaputらの概念枠組みは，それと同時に，同値性，均質性の認識が「比率としての比」を支えるアイデアとして重視されており，2量の間に成立している比例関係をどの程度一般化して捉えているかという一般化に関わる側面も重視されている。この一般化の側面は，代数的思考の核心を構成しており（Kaput, 2008; Kaput, Blanton & Moreno, 2008），中学校における比例の学習を問題にしている本研究に対して有益な知見を提供してくれると考える。

第２の理由は，我が国の比例的推論の研究において類似の視点が提案され，とりわけ，乗法・除法の概念理解との関係で研究されてきていることである。例えば，高橋（2000）は，小数の乗法の授業の中で，累加と比例の見方による解決を比較し，比例の見方を進展させていく活動を提案している。そして，児童の思考過程の分析から，単位を取り直す活動が，比例モデルへの変容や立式の意味理解の助けとなっていることを指摘している。中村（2011）は，整数の乗法・除法の問題で，単位とする２量の対を自ら作り出す（「１とみる大きさを考えだす」）こと，そして，その対を用いて，２量の対応関係を把握し，再測定することが，比例関係に意識的に着目する上で鍵となると述べている。

しかし，これらの研究は小学校段階を対象としており，その後の学習の様子は追跡されていない。また，欠損値問題及び比較問題という求答形式の問題に対する児童の反応が調べられており，それ以外の問題についてはあまり調べられていない。本稿では，「特定の比」及び「比率としての比」の観点から，中学校に入学して間もない生徒の思考の様子を見ていく。その際，求答形式の問題だけでなく，数量の対応や変化の法則性をグラフや式によって記号化する問題を含めて扱っていく。

本稿における研究上の問いは次の通りである。

- 生徒はどの程度「比率としての比」を理解しているか。
- 生徒の内包量の概念化の特徴は,比例関係をグラフや式に表すことにどのように関わっているか。
- 得られた結果は,中学校１年生の数や式の学習や比例の学習に対してどのような示唆を与えるか。

3. 研究の方法

(1) 筆記調査の目的と対象

本稿では，2011年４月に，栃木県内公立中学校２校の１年生171名に対して行った筆記調査の結果の一部を報告する。この調査は，生徒の比例的推論や数，式等の学習の様子を探っていくために，その後予定しているインタビューの対象者を選出する目的で行った。生徒は正負の数の学習を始めたばかりであった。調査は，数学を担当する教師に依頼して実施した。実施時間は約50分であった。

(2) 調査問題

調査問題は４問あり，問１，問２は比例の求答問題（欠損値問題と比較問題），問３は求答問題および２量の比例関係を把握し，グラフや式に表す問題，問４は「比例」の言葉の意味や例を問う問題である。本稿では，問１～３(図１)の結果について報告する。

問１は針金の長さと重さについての欠損値問題，問２は部屋の面積と人数についての比較問題である。どちらも異種の量を扱い，生徒にとって馴染みのある教科書タイプの問題とした。また，問題文中の比の数値的な特徴は, 6 : 390 = 10 : x, 20 : y = 12 : 6のように,「1」を含んではいないが,「1 : (整数)」の形に直すことが出来るように設定した。

問３は,「平成13年度教育課程実施状況調査」の問題を改変したもので，６つの小問から構成した。(1)，(2)，(5)は欠損値問題である。(3)，(4)，(6)は，ガソリンと走行距離の関係をグラフ，ことばの式，文字式で表す問題である。グラフについては，書式を用意せずに自由に描いてもらうことで，生徒が２量の関係をどのように捉えたかを探ることを意図した。また, 筆者の以前の調査 (日野, 2011) では，文字式による表現の正答率が非常に低い結果が得られている。そのため今回の調査では，文字式だけでなく，ことばの式による表現も求め，生徒の反応の違い等を探ることを意図した。

問１．長さが 6 メートルで重さが 390 グラムの針金があります。この針金 10 メートルの重さはどれだけになると思いますか。

問２．ア，イ，ウの３つの部屋のそれぞれに，次のように人が入りました。

　アの部屋の大きさは 20m^2 です。アの部屋には 12 人が入りました。
　イの部屋の大きさは 20m^2 です。アの部屋には 6 人が入りました。
　ウの部屋の大きさは 12m^2 です。アの部屋には 6 人が入りました。

ア，イ，ウの中で，一番混んでいる部屋はどれですか？

問３．Ａさんの自動車は，ガソリン 10 リットルあたり 150km 走ります。Ａさんの自動車について，次の問いに答えてください。

(1) ガソリン 30 リットルでは何 km 走りますか。
(2) 60km 走るには，ガソリンは何リットル必要ですか。
(3) ガソリンの量と走る道のりの関係を表すグラフを下に書いてください。（スペースは省略）
(4) ガソリンの量(リットル)と走る道のり(km)の関係を表すことばの式を書きましょう。
(5) この車で 800km 走るには，ガソリンは何リットル必要ですか。ぴったりの答が出ないときは，「約何リットル」と答えてもいいです。
(6) ガソリンの量を x リットル，走る道のりを y km とします。 x と y の関係を表す式を書きましょう。

図１．調査問題

(3) データの集計・分析

全解答をエクセルシートに整理した後，問１～３のデータを，２つの部分に分けて集計･分析を行っ

た。１つは，生徒の比の不変性の認識についての集計・分析である。問１，問２，問３(1)(2)のデータを用い，生徒の記述から読み取れる思考方略を，次の２つの側面から見ていった。((5)は機械的な除法による解答が殆どを占めたため分析の対象から外している。)

(ア) 同値な特定の比を作り出したり，使ったりしているか

(イ) 同値な特定の比についての記述があるか

(ア)については，読み取れる場合には１点，読み取れない場合には０点のように数値化した。(イ)については，どこか１問についてでも記述がある場合には１点とし，全く記述がない場合は０点とした。

もう１つは，生徒が比例関係をどのように表現したかについての集計・分析である。ここでは，問３(3)(4)(6)のデータを用い，生徒のグラフ及び式による表現を，２つの側面から見ていった。１つは，問題文を読んで，文章を描写するどのようなデータを生成しているかという点である。ここでは，生徒がグラフの目盛りに使った数値や，式の中で使った数値に着目した。もう１つは，数値データをどのようなグラフの形式，あるいは，式の形式に変換しているかという点である。例えば，棒グラフや表といった形式，あるいは，式に等号が含まれているかいないかといった形式に着目した。

４. 結果と考察

(1) 生徒の比の不変性の認識について

表２は，問１，問２，問３(1)(2)について，生徒の思考方略を(ア)から捉えた結果，見出された解答のバリエーションを示している。表３は，表２をもとに，個々の生徒の解答を点数化したときの結果を示す。また，(イ)は，表３の「単位の対の記述」の欄の中で，記述の「有」「無」によって示した。

表２. 生徒の思考方略と単位対の生成・使用の関係

思考方略	単位の対の生成・使用		解答例
	点数	内容	
帰一法	1	(a, b)から(1, c)を作る。乗除の計算。	問 1. 390÷6＝65　65×10＝650. 問 2. アイウを $1m^2$ あたりの人数や 1 人あたりの面積で比べる.
	1	(a, b)から(1, c)を作る。加減を含む計算。	問 1. 1m=65g　65×4＝260　390＋260＝650.
倍比例	1	新たな単位の対は作らないが(a, b)を使う。	問 1. 390× 5/3 ＝650. 問 3 (1). 30÷10＝3　150×3＝450.　問 3(2). 150÷60＝2.5　10÷2.5＝4.
公倍数	1	(a, b)から(ac, bc)を作る。(c は自然数)	問 2. アとウを，12 と 20 の公倍数の $60m^2$ にして，$60m^2$ での人数を比べる. 問 2. ウを×2 をして，$24cm^2$ で 12 人にして比べる.
半分	1	(1, 1/2)を作り，(a, b)と比べる。	問 2. ウは部屋の半分に人がいる。アは部屋の半分が 10 なので半分以上に人がいる。
その他	1	(a, b)から(a/3, b/3)を作る。	問 1. 390÷3＝130　130×5＝650
内項･外項の積	0	−	問 1 . 6:390=10:x, 6×x= 390×10, x = 650
直感	0	−	問 2. なんとなく. 問 2. $12m^2$ で 6 人はきつい. 問 2. $20m^2$ の部屋に 12 人も入っている.
差	0	−	問 2. 差によってアとウを比べる
片方の量の無視	0	−	問 1. 390×10＝3900. 問 3(2). 150÷60＝2.5
機械的な計算	0	−	問 3(2). 4500÷60＝75. 問 3(1). 30×150=4500.
その他	0	−	問 1. 6＋4=10　390＋40＝430. 問 1. 10－6＝4　390×4＝1760.

表３．問題解決における単位対の生成・使用に関する生徒の人数と割合

４問中，単位対の生成・使用が見られた問題数	人数（%）	単位の対の記述があるか否か	人数（%）
0	20（12）	無	19（11）
		有	1（1）
1	19（11）	無	14（8）
		有	5（3）
2	19（11）	無	9（5）
		有	10（6）
3	42（25）	無	14（8）
		有	28（16）
4	45（26）	無	9（5）
		有	36（21）

(注)この他に判定できない解答の生徒が 26 名いる。また，%は 171 名中の割合を示す。

表２に見るように，生徒は思考方略においても，更には，同値な特定の比を作り出したり，作り直したりしている様子においても，多様であった。約４分の１の生徒は，４問すべての問題解決において，単位対を生成，使用しており，同値な比を作ったり使ったりする活動を活発に行っていた。また，彼らの殆どが，単位の対についての記述も残していた。従って，これらの生徒は，比の不変性についての意識が高いと言える。その一方で，12%の生徒は，単位対の生成，使用が，４問のいずれにおいても見られなかった。彼らは，直感に頼ったり，機械的な乗除の計算に頼ったりして，問題に対する答を導いていた。単位対の生成，使用の頻度が少ない生徒は，当然のことながら，単位の対についての記述も少なかった。

単位対の生成，使用が１回の生徒は，問１あるいは問３(1)において単位に関わる活動をしており，これらの問題が比較的単位への注目を促しやすいことがわかる。その一方で，問２の比較問題は，反応が多様であり，単位対を適切に作り出し，使うことが易しくはなかったようである。問３(2)では，機械的な乗除の計算が他に比べて多く見られ，やはり，単位への注目がされにくかった。

(2) 生徒の比例関係のグラフ・式による表現について

ここでは，問３(3)（グラフ），(4)（ことばの式），(6)（文字式）についての結果を述べる。

① 生徒が作り出したグラフ

表４は，「無解答」と「その他」(34%) 以外の 114 名の生徒が，問題文から作り出した数値データのタイプを分類したものである。各タイプに属する生徒数の，全171 名に対する割合も示している。

文章から数値データを生成するためには，「10 リットルあたり 150km」の記述から２量の間の比が一定であることを読み取り，比を一定に保ちながら新たなデータを生成する必要がある。表４が示すように，生徒の 43%（A，Bタイプ）が，「10 リットルあたり 150km」から比の一定性を読み取ってデータを生成した。推論の過程は筆記からは捉えにくいが，数名の生徒の筆跡やインタビューからは，一方が２倍，３倍…になれば他方も２倍，３倍…になるという倍比例の推論，前の数値から一定の数量を加えて次の数値を作るという累加による推論が行われていたようである。但し，6 名 (4%) の生徒は，途中で数値がずれていったり，もとにする初期データが間違っているにも拘わらず，そのデータを使って数値を生成していったりしており，推論が緻密ではなかった。なお，この中で，Aタイプの生徒は，文章中の記述から「1 リットルで 15km」という比を作り，その比をもとに数値データを生成した。彼らは単位の取り直しを行っていた。

表４．数値データのタイプと生徒の割合

タイプ	解答例
A （24%）	10L で 150km の情報から，1L で 15km を作り出し，1L, 15km をベースにして，次々にデータを作る (例) (1L, 15km) (2L, 30km) (3L, 45km)…のように数値を作る
B （19%）	10L で 150km の情報のみをベースにして，次々にデータを作る (例) (10L, 150km) (20L, 300km) (30L, 450km)…のように数値を作る
C （14%）	10L で 150km という情報と，(1)および(2)から得られた情報（またはその一部）を使う (例) (10L, 150km) (30L, 450km) (4L, 60km)を数値として使う
D （2%）	Ｃタイプと同様であるが，得られた情報を不適切に使う (例) (450km) (4L) を数値として使う
E （8%）	問題の情報を使わない（数値が使われていない図的表現を含む） (例) (1, 1) (2, 2) (3, 3) (4, 4)…のように数値を作る

一方，24%の生徒（Ｃ，Ｄ，Ｅタイプ）は，比を一定に保ちながら新たなデータを生成したわけではなかった。彼らは，問題文の情報と，直前に解いた(1)と(2)の答を使う等して，図を作り出していた。Ｃタイプの生徒は，これら１，２あるいは３つの情報をデータとして使った。最もよく利用されたのは，問題文の記述（10リットルで150km）であった。以下に挙げた解答例では，図２の生徒は，データの数値を，出てきた答(誤答している)の順に並べており，大小の順序を考慮していない。図３の生徒は，「10リットルで150km」という文章の記述のみを表現している。このように，Ｃタイプの生徒は，１つ１つの数値の対を個別のデータとして扱っていることがわかる。

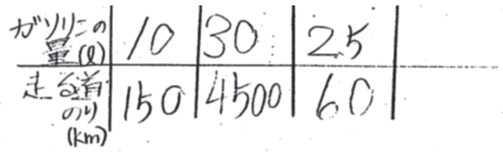


図２．生徒がかいたグラフ(1)

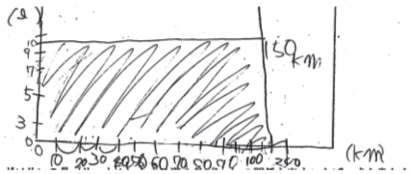


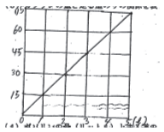
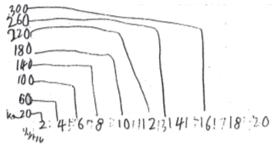
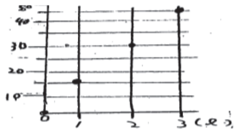
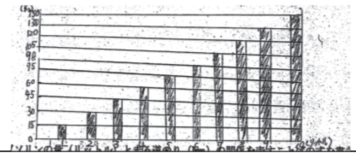
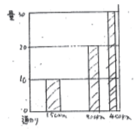
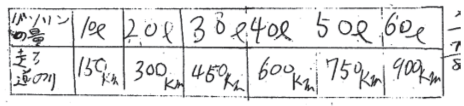
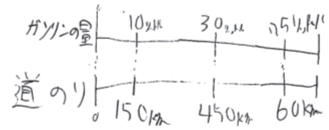
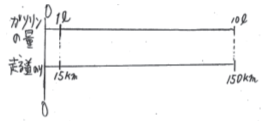
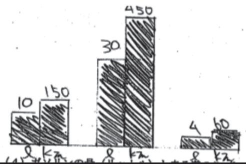
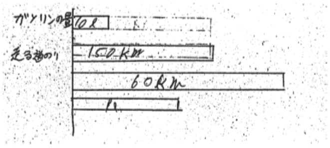
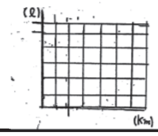
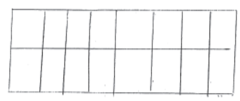
図３．生徒がかいたグラフ(2)

Ｄタイプの生徒は，(1)の答450kmと，(2)の答4リットルのみを取り出して図として表現をしており，ガソリンの量と距離との間に関係があると考えていたかどうか疑わしい。Ｅタイプは，問題文の数値情報を使わなかった生徒であり，ｘ軸，ｙ軸ともに0, 1, 2, 3, 4, …と機械的に目盛りを打って直線を描いたり，グラフの枠のみを描いたりしていた。

表５は，「無解答」以外の115名が作り出した図の種類と生徒の割合 (171名中)を示している。「グラフを書いて下さい」と明記したにも拘わらず，生徒は多様な図を描いた。これは，問題の読み取りミスばかりでなく，生徒がイメージするグラフが多様であり，また，曖昧であることを意味している。

縦軸と横軸を設定し，データである数値の対を，それを座標とする点や棒を使ってある程度適切に配置している生徒は32% (「グラフ表現」に分類) であった。「グラフ表現」では，数値の対を配置するために，平面上の位置が使われていることに注意したい。但し，「グラフ」では様々な違いを持つ不完全な図が混じっている。対応あるいは変化の一方に偏った表現も見られた。一方，16%の生徒が表を，8%の生徒が数直線を描いた。これらも，生徒にとっては「グラフ」なのであろう。これらの図が「グラフ表現」と異なる点は，データである数値の対を，１次元的に配置している点である。更に，４%の生徒が描いた「１次元の棒グラフ」は，１次元的な配置からの脱却の難しさを示している。これら

表５．図の種類と生徒の割合

図の種類	解答例
「グラフ表現」	
・グラフ (23%)	  
・棒グラフ (9%)	 
「表」 (16%)	
「数直線」 (8%)	 
「１次元の棒グラフ」 (4%)	 
「枠のみ」 (8%)	 

の生徒は，２つの量を１つの軸上に並べてかき込んでおり，２量の対応の把握が曖昧な生徒もいた。また，8%の生徒は，グラフや表の枠だけを描いていた。

② 生徒が作り出した式

表６は，無答以外の生徒が問題文から作り出した式を分類したものである。表７は，各種類の解答に属する生徒数と，全171名に対する割合を示している。

グラフと同様に，適切な式を作るためには，「10リットルあたり150km」の記述から２量の間の比が一定であることを読み取り，1リットルでは15km進むことを推論する必要がある。「15」という情報を適切に組み入れた式を作った生徒は，表６では「15の入った式」に分類された。生徒数は，ことばの式では28名(16%)，文字式では36名(21%)であった。彼らは，単位対を適切に生成し，それを使って適切な式を作ることができた。一方，文章中にある「150」を直接式に組み入れた生徒，また，「15」は導いたものの，それを不適切に式に組み入れた生徒も，それぞれにおいて10%前後存在した。

また，予想に反して多かったのが，「不十分な解答」である。表６で示されているように，不十分な解答には様々なタイプがあるが，どれも，２量の関係が他者に分かるような形で表されていない。その中でも特に多かったのが，「フレーズ型の式」であった。生徒は，等号を含まない乗除の様々な

表6．生徒が作り出したことばの式，文字式の種類

分類	ことばの式での解答例	文字式での解答例
＜正解＞		
15 の入った式	15×ガソリンの量＝走る道のり，走る道のり÷15＝ガソリンの量	x×15＝y, y÷x=15, y÷15＝x
意味のある比例定数	走る道のり÷ガソリンの量＝1ℓ で走る道のり，ガソリンの量×1ℓ あたり走る道のり＝走る道のり	y÷x＝1ℓ で走る道のり
＜不十分な解答＞		
意味不明瞭な比例定数	ガソリンの量×□＝走る道のり，ℓ×□＝km，ガソリンの量×[x]＝走る道のり	○×x＝y，y÷x＝□，x×？＝y，y÷x＝□，y÷x＝□　□=x×y　y＝□
センテンス型	走る道のり×ガソリンの量＝走る道のり，km÷リットル＝km，ℓ×km＝ℓ	x÷y＝x，y÷x＝y，x×y＝y
答を求める式	走る道のり×ガソリンの量＝答，道のり÷ガソリン＝答，走る道のり÷ガソリンの量＝，ガソリン÷走る道のり＝何 km 走れるか	y×x＝答，x÷ykm＝，x×y＝km，y÷x＝
フレーズ型	走る道のり÷ガソリンの量，ℓ×km，道のり×ガソリンの量，量×道のり，ℓ÷km	y÷x，x÷y，x×y，x リットル×ykm
数字式	150×3＝450	―
その他	1ℓ＝15km	―
＜不正解＞		
150 の入った式	道のり÷150＝ガソリンの量，ガソリンの量×150＝走る道のり，走る道のり÷ガソリンの量＝150	y÷150＝x，x×150＝y，y÷x＝150
不適切な式	15×走る道のり＝ℓ，km÷リットル＝1km ほど走る量	x×y＝15

表7．ことばの式，文字式の解答の種類と人数・割合

分類	ことばの式	文字式
正解	33 (19%)	37 (22%)
不十分な解答	65 (38%)	73 (43%)
不正解	23 (13%)	15 (9%)
無答	50 (29%)	46 (27%)
計	171	171

式を作っていた。ここからは，「関係を表す」ということの意味が，生徒に理解されていないことが読み取れる。また，生徒にとっての式は，演算が組み込まれた形をしていることがうかがえる。関連して，「答を求める式」を作った生徒も，それぞれ７名前後存在した。ここからも，生徒の式に対する考えをうかがうことができる。

ことばの式と文字式の解答のタイプは，同一の生徒では同じであることが多かった。日野（2011）では，文字式のみの解答を扱ったため，今回の調査では，ことばの式による解答も要求したが，結果的に正答率は，どちらも同程度であった。ことばの式で表すことが，正答率を上げることにはならなかった。この結果は，表現の仕方（ことばの式か文字式か）よりも，表現の内容としての２量の関係を，生徒がどのように理解しているかが重要であることを示していると考える。

5．議論

(1) 結果の考察

本稿では，中学校に入学して間もない生徒の比例的推論の様子を，筆記調査への結果を通して述べてきた。ここでは，調査を通して見えてきた研究の問いに対する答を整理する。

比の不変性についての認識から見たとき，比較的よい状態でスタートを切ったのは，４分の１の生徒であったと言える。彼らは，問題文から適切に単位対を生成したり，単位対を使ったりして答を導いていた。また，これらの生徒の殆どが単位の対の記述を残しており，他の生徒と比べると，単位についての意識が高いことが分かる。但し，事前調査で扱った求答問題での比の数値的特徴は，それ程難易度の高いものではないことに注意したい。従って，より複雑な数値的特徴を組み入れた問題を扱った場合，達成を示す生徒の割合が更に減少することが容易に予想できる。

その他の４分の３の生徒は，比の不変性の認識において多様な状況であった。「特定の比」と「比率としての比」を両極とする高まりの観点から見ると，これら両極の間は重層的になっている（Thompson, 1994）。生徒の中には，「特定の比」に近い認識の者も，「比率としての比」に近い認識の者もいる。この部分をどのように子どもが乗り越えていくかは研究上の課題である。本稿の結果は，それは小学校のみならず，中学校における課題でもあることを示している。

また，比の不変性についての認識から見ると，比例的推論は，式，グラフによって場面を表すことと興味深い関係にある。直接的に関係する側面と，そうではない側面の両方が確認できるためである。直接的な関わりが見られるのは，問題文に書かれた比率についての情報を読み取り，適切なデータを生成する部分である。ここでは，書かれた比の不変性を意識し，適切な単位対を作ったり使ったりすることが求められる。つまり，それが出来ないと，グラフや式での表現に支障を来すことになる。筆記調査の結果を見ると，グラフにおいて，43％の生徒は比の一定性を読み取ってデータを生成していたが，それをしていない生徒も見られた。式においては，ことばの式では16%，文字式では21%の生徒が，問題から１リットルでは15km進むことを推論することができたが，そうではない生徒も多数存在した。（注：グラフにおいて％が高いのは，ＡとＢタイプを含めているためである。Ａタイプに限ると24%となり，式と同程度の割合になる。）

一方，今回の調査を通して，グラフや式という表現に特徴的な面においても，学習の必要があることが見えてきた。これらの学習は，内容のみならず，表現の形式に関わる側面である。グラフにおいては，１次元の表現から２次元の表現への切り替えの学習である。Moritz (2003) は，データの１次元的な配置を「単一の側面」と呼んでいる。Moritzの３～９年生への調査では，「単一の側面」には，表の他に，様々な１次元的な配置を示す図や絵が分類された。本調査の生徒は，場面を表す図や絵を描くことはなかったが，数直線という特徴的な図を描いていた。我が国の小学校では，数量の乗除の関係を扱う際に数直線がよく使われる。生徒の中には，小学校の学習で馴染み深い１次元的な配置と，グラフという２次元的な配置との違い，また，数量の変化する関係を表すために，複数のデータを配置する仕方を１次元から２次元へと変えていくことの意味や価値が伝わりにくい生徒がいる。式においては，答を求める式から，事柄や関係を表す式への切り替えの学習である（杉山，2008）。この大きな切り替えを意識した小学校から中学校にわたる式の系統的な指導が必要である。それは，小学校のみならず，中学校においても引き続き行われるべきである。

(2) 中学校１年での数と式，比例の学習指導に対する示唆

ここでは，得られた結果に基づいて，中学校１年の数と式，また，比例の学習指導に対する示唆を述べる。生徒の比例的推論における多様性は，比例的推論を進展させる機会を，これらの内容の学習時に取り入れることが大切であることを示している。とりわけ，単位を取り直したり，取り直した単位を活用したりする機会を増やし，「特定の比」から「比率としての比」の認識へと生徒を押し上げていくことを配慮すべきである。そのような機会は，様々に考えることができるが，少なくとも以下の２つの機会を含めて考えたい。

- 求答問題において，表，グラフ，式等の表現を用いながら解を求めたり，問題を解決したりする。
- 問題場面を，表，グラフ，式等の表現で表したり，表された表現から内容や関連性を読み取ったりする。

前者の機会は，教科書を見ると，比例の利用の学習において与えられているが，問題場面，問題で扱う量，問題で扱う比の数値的特徴，均質性の特徴など，比例的推論の研究で得られている知見を利用することができる。その際，比例関係を前提にして解決を進めるだけでなく，比例関係にあるかどうかを探ったり，証拠を持ち出して判断したり，また，比例関係を仮定することが有効であるかどうかを考えたりするような活動を積極的に取り入れたい。このような比例的推論の「推論」としての側面は，近年の研究で重視されており，中学校での達成の中身として注目する必要がある。そこでは，得られているデータの扱いが大切となる。データを自ら作り出し，それを記号化したりする機会も生まれる。また,「１」が示されていない比のデータを使うことも有益である。小学校において，生徒は,「１」当たりについてのデータでの経験を積んできている。しかし，データに「１」がなくなると，本稿の生徒のように困難を示すことが多い。このことは，逆に，その場面が，生徒に比の不変性を意識させ，単位の取り直しの作業を促す機会となり得ることを示している。これは，小学校での比例的推論の研究で主張されている（例えば，田端，1989；中村，2011）ことであり，中学校においても注意したい。また，関連して，一次方程式の内容に関連付けながら，変化の割合が一定であることを探ったり，判断したり，利用したりする活動の可能性も考えたい。

後者の機会は，場面等を異なる表現によって表し，比較したり関連づけたりする機会である。問題の解を求めるよりも，概念・技能の理解を深めることに重点がある。この側面も，比例の学習で既に見られるが，より積極的な扱いを考えることができよう。例えば，小学校では正の数の範囲であった変数，変域を負の数にまで拡張するところには，中学校の比例の学習の特徴が現われる。その際，負の範囲を含めて比例と考えることの根拠や意味を，異なる表現を使いながら考える活動も取り入れることができよう。比例の学習のみならず，正負の数，文字と式等の内容においても，このような表現活動を取り入れることは可能である。例えば，正負の数の乗法において，正の範囲で定義してきた乗法を，負の数に対しても定義して行く際に，表やグラフを使うことで，定義の根拠を視覚的に示すことができる。文字と式の内容においては,一般化された数としての文字の意味が学習される。その際，文字式という表現だけでなく，表やグラフという表現を利用することで，生徒の文字の意味の理解を深めることになるだろう。このように，異なる表現によって示された情報は，生徒の概念・技能の理解を促進すると考えられる。

どちらの機会においても，表，グラフ，式等の表現が作り出され，使われる。これらの表現は，数量の間の関係という目に見えない現象を視覚化し，操作や思考の対象とすることを可能にしてくれる重要な道具である。従って，これらの道具の価値や視点，ルールを示すよい機会ともなり得る。実際，

本稿の生徒がかき表した様々な独特の表現が示唆するように，グラフで表すこと，式で表すことの価値についての生徒の意識は乏しい。とりわけ，グラフについては，中学校１年の教科書を見る限り，比例の学習で座標平面が導入されており，それ以前の数と式の学習では殆ど扱われていない。小学校6年で比例や反比例のグラフの学習を基礎として，中学校１年の早い時期に座標平面を導入し，数と式の学習の中で，グラフ表現を活用し，概念・技能の理解と関連づけながら，グラフで表すことの価値に生徒の目を向けるような扱いを考える必要がある。

６．今後の課題

比の不変性の認識は，比例的推論の発達において重要であることが指摘されている。本稿では，この観点から，中学校１年生の思考の様子を調べ，不変性の認識が，グラフや式を用いて比例関係を表現することとどのように関係しているかを探ってきた。しかし，調査方法の制約などのために，ごく一部を考察するに留まっている。今後，得られた結果を基に，調査問題を改善し，比例的推論の様子を更に調べていく必要がある。Kaput (2008) は，「代数的推論の核心は，目的的な一般化と一般化での推論に寄与する複雑な記号化の過程から成っている」(p. 9) と述べ，「一般化」「記号化」を鍵として代数的推論を捉えている。小学校を中心に研究されてきた比例的推論を，中学校での学習の中で進展していく推論として捉える上で，代数的推論についての研究は参考になると考える。

また，本稿では，事前調査の結果を述べてきた。この後，比の不変性の認識の状態が異なる生徒数名に対して，数回のインタビューを年間にわたって行った。生徒の学習の様子や違いについての考察を行い，中学校１年の期間における適切な指導・支援について具体的な提案をしていくことは，今後の課題である。その際，推論と記号使用の間の構成的な関係を授業の中で実現するため，比例や関数に関わる数学的実践や談話の視点を取り入れることを考えて行きたい。

引用・参考文献

日野圭子. (2003).『教室における子どもの学習プロセスを視座とする比例的推論の指導ユニットの開発』平成12年度～平成14年度科学研究費補助金研究成果報告書.

日野圭子. (2010).『比例的推論の進展を促す数学的表記の探求による授業の開発と評価』平成19年度～平成21年度科学研究費補助金研究成果報告書.

日野圭子. (2011).「異なる問題場面における生徒の比例の式の扱い：「比例」学習前の中１生徒への筆記調査から」『宇都宮大学教育学部教育実践総合センター紀要』34, 39-48.

Kaput, J. J., & West, M. M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 237-287). Albany, NY: State University of New York Press.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York: Routledge.

Kaput, J. J., Blanton, M. L., & Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19-55). New York: Routledge.

Lamon, S. J. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding (Second edition)*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Herbert, & M. Behr (Eds.), *Number concepts* *and operations in the middle grades* (pp. 93-118). Reston, VA: NCTM.

Moritz, J. (2003). Constructing coordinate graphs: Representing corresponding ordered values with variation in two-dimensional space. *Mathematics Education Research Journal, 15*(3), 226-251.

中村光一. (2011).「整数の乗法，除法の問題場面での４年生の子どもの比例的推論の実態」『日本数学教育学会誌』93(6), 2-10.

大谷実・中村雅恵 (2002).「中学校との接続性を配慮した比例の学習指導：文化－歴史的活動理論に基づく教授実験のデザイン」『日本数学教育学会誌』84(6), 11-22.

杉山吉茂. (2008).『初等科数学科教育学序説』東洋館出版社.

田端輝彦. (1989).「乗法の意味指導の一考察:比例的推論の力を伸ばす場としての乗法の意味指導」『第22回数学教育論文発表会論文集』, 297-300.

高橋久誠. (2000).「小数の乗法の授業構成に関する考察」『上越数学教育研究』15, 85-94.

Thompson, P. W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. In G. Harel & J. Confrey (eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 179-234). New York: State University of New York Press.

本研究は，平成22－25年度科学研究費補助金基盤研究（C）「小学校と中学校の接続の観点からの比例的推論の進展の契機の探究」の助成を受けて行われている。