福井大学 大学院工学研究科 研究報告 第65巻2017年3月
Mem. Grad. Eng. Univ. Fukui, Vol. 65（March 2017）

離散空間上における位相点作用素のシンプレクティック共変性

渡辺大輔 * 柴田喬之 * 橋本貴明 *

Symplectic Covariance of Phase Point Operator on Discrete Space

Daisuke WATANABE* , Takayuki SHIBATA* and Takaaki HASHIMOTO*

(Received February 3, 2017)

The phase point operator $\Delta(q,p)$ is a quantum counterpart of classical phase point (q,p). Its discrete version was formulated for an odd number of lattice points by Cohendet et al. and even case by Leonhardt. They both have symplectic covariance which is of fundamental importance in quantum mechanics. But its explicit form of the projective representation of the symplectic group which appears in the covariance relation is not yet known. We show in this paper the existence and uniqueness of the representation and a method to construct it using the Euclidean algorithm.

Key Words : Discrete space, Phase point operator, Symplectic group, Covariance, Group representation

1. 緒　言

1932 年に Wigner によって Wigner 関数が発見され，熱力学の量子補正の研究に導入された [1]．近年では量子光学や量子カオス，量子計算などの分野で Wigner 関数が応用され，特に量子-古典対応が重要となる研究において再び注目を集めている．一方，離散空間上の Wigner 関数の歴史は比較的新しく，1987 年の Wootters によって素数の格子点からなる離散空間上に対して [2]，また同年 Cohendet et al. により整数スピンに対応する奇数個の格子点からなる離散空間上 (奇数次元の離散空間上) の場合に定式化された [3]．偶数個の格子点からなる離散空間上での Wigner 関数の振る舞いは奇数の場合とは大きく異なり，その後 1995 年に Leonhardt は半整数スピンに対応する偶数次元の離散空間上に Wigner 関数を構成したが，仮想的な自由度 (ghost variable) を取り入れる必要があった [4]．

Wigner 関数は運動量方向に積分すると位置方向の分布関数に，位置方向に積分すると位置の Fourier 変換で与えられる運動量方向の分布関数となり (周辺則)，分布関数としての振る舞いを示す．しかし，その値は負にもなる為，擬分布関数と呼ばれている．また，この周辺則を満たす関数は複数あるが，連続空間上の場合，回転対称性を考えると Wigner 関数が一意に決まることが知られている．

シンプレクティック変換は正準交換関係を不変にするため，量子力学において重要な対称性となっている．連続空間上や奇数次元の離散空間上では，Fourier 作用素で挟むと 90 度回転する（シンプレクティック変換の一部である）という線形の正準変換の中で一番簡単な Fourier 共変性が既に知られている．本論文では，奇数，偶数次元の離散空間上で Cohendet et al. や Leonhardt による Wigner 関数から導かれる位相点作用素が，シンプレクティック共変性を満たすこと，またそのようなシンプレクティック変換の群の射影表現が存在し，かつ唯一であることを示す．

以下 1〜5 章では，離散空間上での位相点作用素の基礎的事項について述べる．6 章では，シンプレクティック共変性について説明する．7 章では，シンプレクティック共変性に必要なシンプレクティック変換の群を離散空間上で定義し，それが 2 つの元 $(h_+,\ h_-)$ から生成されることを示す．8 章では，シンプレクティック群のユニタリ射影表現 $U(S)$ が存在し，更に一意的であることを証明する．9 章では，7 章で示した 2 つの元から低い奇数次元の離散空間上において $U(h_+), U(h_-)$ を必要条件から求め，一般の奇数次元での形を予想する．

*大学院工学研究科物理工学専攻
*Applied Physics Course, Graduate School of Engineering

そしてその予想した形が，位相点作用素をシンプレクティック共変性を満足することを確認する (十分性の確認)．10 章では，9 章と同様に偶数次元の離散空間上において $U(h_+), U(h_-)$ を必要条件から求めるが，7 章で定義したシンプレクティック変換の群では射影表現を満足していないことが分かった．そこで改めて仮想的な自由度 (ghost variable) を考慮し，格子点の数を 2 倍としたシンプレクティック変換の群を再定義し，一般の偶数次元でシンプレクティック共変性を満足する $U(h_+), U(h_-)$ を決定した．

2. 連続空間上の Wigner 関数

2.1 Wigner 関数

Wigner 関数はもともと古典的な位相空間上の関数であり，一般的には次のように定義される．

$$\mathcal{W}(q,p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dr e^{ipr/\hbar}\psi^*(q+\frac{r}{2})\psi(q-\frac{r}{2}) \quad (1)$$

これを運動量方向と位置方向にそれぞれ積分すると，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}(q,p)dp \;=\; |\psi(q)|^2 \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}(q,p)dq \;=\; |\tilde{\psi}(p)|^2 \quad (3)$$

となる．すなわち，Wigner 関数を運動量方向に積分すると位置方向の分布関数，位置方向に積分すると位置の Fourier 変換で与えられる運動量方向の分布関数になり，いわゆる周辺則を満たしている．このことから Wigner 関数は，量子力学的な分布関数に相当するものであることが分かる．しかし，その値は負にもなることから擬分布関数と呼ばれている．

2.2 位相点作用素

Wigner 関数から導かれる，状態によらない構造的な部分を位相点作用素 $\Delta(q,p)$ と定義する．

$$\mathcal{W}(q,p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\mathrm{Tr}[\rho\Delta(q,p)] \quad , \quad \rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (4)$$

具体的に座標表示では

$$\Delta(q,p) = \int_{-\infty}^{\infty} dr e^{ipr/\hbar}|q+\frac{r}{2}\rangle\langle q-\frac{r}{2}| \quad (5)$$

となり，運動量表示では

$$\Delta(q,p) = \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-iqs/\hbar}|p+\frac{s}{2}\rangle\langle p-\frac{s}{2}| \quad (6)$$

となる．

これらの作用素を用いて，次のように古典的なハミルトニアンを Weyl 順序で正準量子化したハミルトニアンに変換することができる．

$$\hat{\mathcal{H}}(\hat{q},\hat{p}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dqdp\mathcal{H}(q,p)\Delta(q,p) \quad (7)$$

このため位相点作用素 $\Delta(q,p)$ は古典的位相点 (q,p) に対応する量子的な作用素と考えられる．

また，位相点作用素は Wigner 関数の周辺則に対応して

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp\Delta(q,p) \;=\; |q\rangle\langle q| \quad (8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq\Delta(q,p) \;=\; |p\rangle\langle p| \quad (9)$$

を満たす．位相点作用素を考える利点として，量子化の対象を拡大できることが挙げられる．

3. Cohendet et al. による Wigner 関数と位相点作用素・Weyl 作用素

ここからは離散空間上の Wigner 関数について述べる．

本章では，Cohendet et al. が奇数個の格子点からなる離散空間上 (奇数次元の離散空間上) に構成した Wigner 関数と，そこで用いられる位相点作用素と Weyl 作用素について述べる [3]．

3.1 Weyl 作用素の定義

Cohendet et al. は奇数次元の離散空間上に Wigner 関数を構成するにあたり，まず Weyl 作用素を定義している．そのオリジナルの定義式が次式である．

$$({W^{C'}}_{m,n}\varphi)(k) = \exp\left(-\frac{4\pi imn}{N}+\frac{4\pi ink}{N}\right) \times\varphi(k-2m) \quad (10)$$

ここで，$m,n,k \in I = \{-\frac{N-1}{2}, -\frac{N-3}{2}, \cdots, \frac{N-3}{2}, \frac{N-1}{2}\}$ であり N を法として考える．

3.2 演算子の定義

位相演算子，シフト演算子，反転演算子を以下，計算の便宜の為次のように定める．

位相演算子 Q は次式のように定義される行列である．

$$Q = \sum_k |k\rangle\omega^k\langle k| \quad (11)$$

ここで，1 の原子 N 乗根を ω としている．

$$\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right) \quad (12)$$

次にシフト演算子 P は次式のように定義される行列である．

$$P = \sum_k |k-1\rangle\langle k| \quad (13)$$

これら Q, P には交換関係として次式のような関係が導かれる．

$$PQ = \omega QP \quad (14)$$

また，反転演算子 T は次式のように定義される行列である．

$$T = \sum_{k} |-k\rangle\langle k| \tag{15}$$

先ほどの Weyl 作用素を I のインデキシングにおいて位相演算子とシフト演算子を用いて表すと，

$$W^{C'}{}_{m,n} = \omega^{-2mn} Q^{2n} P^{-2m} \tag{16}$$

となる．

3.3 位相点作用素の定義

Cohendet et al. は次に，式 (16) の Weyl 作用素の T 変換として位相点作用素を定義している．

$$\Delta^{C}{}_{m,n} = W^{C'}{}_{m,n} T = \omega^{-2mn} Q^{2n} P^{-2m} T \tag{17}$$

この位相点作用素は以下のような性質をもつ．

$$\Delta^{C\dagger}{}_{m,n} = \Delta^{C}{}_{m,n} \tag{18}$$

$$(\Delta^{C}{}_{m,n})^2 \quad = \quad \mathbf{1}_N \tag{19}$$

$$\mathrm{Tr}(\Delta^{C\dagger}{}_{m,n} \Delta^{C}{}_{m',n'}) = N \delta_{m,m'} \delta_{n,n'} \tag{20}$$

$$W^{C'\dagger}{}_{m',n'} \Delta^{C}{}_{m,n} W^{C'}{}_{m',n'} = \Delta^{C}{}_{m-2m',n-2n'} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} &\Delta^{C}{}_{m,n} \Delta^{C}{}_{m',n'} \\ &= \exp\left[\frac{8\pi i}{N}(mn' - nm')\right] \Delta^{C}{}_{-m',-n'} \Delta^{C}{}_{-m,-n} \end{aligned} \tag{22}$$

3.4 Wigner 関数の定義

そして最後に式 (17) の位相点作用素を用いて，連続の場合と同様に奇数次元の離散空間上の Wigner 関数は次のように定義される．

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{m,n} &= \frac{1}{N} \mathrm{Tr}\left[\rho \Delta^{C}{}_{m,n}\right] \quad , \quad (\rho = |\psi\rangle\langle\psi|) \\ &= \frac{1}{N} \langle\psi|\Delta^{C}{}_{m,n}|\psi\rangle \end{aligned} \tag{23}$$

この Wigner 関数は連続空間の場合と同様に，周辺則を満たすことを求めることができる．

4. Leonhardt の Wigner 関数

次に，Leonhardt が構成した偶数個の格子点からなる離散空間上（偶数次元の離散空間上）での Wigner 関数について述べる [4]．

4.1 Leonhardt の記述した Wigner 関数

Leonhardt が構成した Wigner 関数は，奇数，偶数次元の離散空間上において成り立つが，偶数次元の場合整数点の間に仮想的な自由度 (ghost variable) を導入することによって Wigner 関数の構成を可能にしている．

まず，特性関数と呼ばれる次の関数を定義する．

$$\tilde{W}^{L}_{m,n} \equiv \sum_{k}^{N-1} \exp\left[-\frac{4\pi i}{N} m(k+n)\right] \langle k|\rho|k+2n\rangle \tag{24}$$

ここで，Leonhardt は特性関数を 4π で二重逆 Fourier 変換したものを離散的な Wigner 関数と定義している．

$$\mathcal{W}_{\mu,\nu} \equiv \frac{1}{D^2} \sum_{m,n} \exp\left[\frac{4\pi i}{N}(m\nu + n\nu)\right] \tilde{W}^{L}_{m,n} \tag{25}$$

また，式 (25) に式 (24) を代入したものは次のように書ける．

$$\mathcal{W}_{\mu,\nu} = \frac{1}{D} \sum_{m} \exp\left(\frac{4\pi i}{N} m\nu\right) \langle\mu - m|\rho|\mu + m\rangle \tag{26}$$

式 (25) は奇数，偶数両次元の離散空間上で周辺則を満たす Wigner 関数である．ただし，奇数次元の場合 (μ,ν) が整数の位相空間，$D = N$ で構成され，$I = \{-\frac{N-1}{2}, -\frac{N-3}{2}, \cdots, \frac{N-3}{2}, \frac{N-1}{2}\}$ の範囲で和をとる．偶数次元の場合には，(μ,ν) が整数とその間に半整数を入れた位相空間，$D = 2N$ で構成され，$I' = \{0, \frac{1}{2}, 1, \cdots, \frac{2N-1}{2}\}$ の範囲で和をとると，式 (25) の Wigner 関数は実数で 1 に規格化されていている．

4.2 特性関数から Weyl 作用素の導出

特性関数を変形すると，

$$\begin{aligned} \tilde{W}^{L}_{m,n} &= \sum_{k}^{N-1} \omega^{-2m(k+n)} \langle\psi|k+2n\rangle\langle k|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|\omega^{2mn} Q^{-2m} P^{-2n}|\psi\rangle \end{aligned} \tag{27}$$

となり，ここから $\tilde{W}^{L}_{m,n} = \mathrm{Tr}[\rho W^{L}{}_{m,n}]$ とし，Weyl 作用素を

$$W^{L}{}_{m,n} = \omega^{2mn} Q^{-2m} P^{-2n} \tag{28}$$

と定義する．

4.3 Leonhardt の位相点作用素の導出

Leonhardt の位相点作用素は W^L を 4π で二重逆 Fourier 変換することで定義される．

$$\begin{aligned} \Delta^{L}{}_{m,n} = \frac{1}{N} &\sum_{m',n' \in I'} \\ &\times \exp\left[\frac{4\pi i}{N}(mm' + nn')\right] W^{L}{}_{m',n'} \end{aligned} \tag{29}$$

ここで式 (11)，(13) 及び式 (15) で定義した位相演算子，シフト演算子，反転演算子のインデキシングを $I'' = \{0, 1, \cdots, N-1\}$ とすると，式 (29) は

$$\Delta^L{}_{m,n} = \omega^{-2mn} Q^{2n} P^{-2m} T \quad , \quad (m, n \in I') \tag{30}$$

と表せる．

5. 並進共変性

本研究の目的で使用するシンプレクティック共変性について述べる前に，まず並進共変性について述べる．

5.1 連続空間上や奇数次元の離散空間上での並進共変性

連続空間上で定義した位相点作用素や Cohendet et al. が定義した位相点作用素は，位相空間上で原点の位相点作用素を並進を表す群の射影表現である Weyl 作用素で挟むと，その点での位相点作用素が定まるという性質がある．

連続空間上では Weyl 作用素を

$$W(q, p) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(\hat{q}p - \hat{p}q)\right\} \tag{31}$$

とおくことで，位相点作用素は，

$$\Delta(q, p) = W(q, p)\Delta(0, 0)W^\dagger(q, p) \tag{32}$$

と表せる．また，奇数次元の離散空間上では Weyl 作用素を

$$W_{m,n} = \omega^{-mn/2} Q^n P^{-m} \tag{33}$$

とおくことで，位相点作用素は，

$$\Delta_{m,n} = W_{m,n}\Delta_{0,0}W^\dagger{}_{m,n} \tag{34}$$

となる．式 (33) は式 (31) の自然な離散化となっている．

しかし，偶数次元の離散空間上では，仮想的自由度 (ghost variable) を含むために並進を表す群の射影表現が知られていない．

6. シンプレクティック共変性

線形の正準変換であるシンプレクティック変換は，古典力学系を不変にするものとして量子力学において重要な対称性となっている．

また, シンプレクティック変換 S からなるユニタリ表現を $U(S)$ として次式を定義する．

$$U(S)\Delta_{m,n}U^\dagger(S) = \Delta_{S(m,n)} \tag{35}$$

全てのシンプレクティック変換 S に対して，先の並進共変性と同様に式 (35) が成り立つとき，位相点作用素 $\Delta_{m,n}$ はシンプレクティック共変性を持つという．

先行研究では，

- 連続空間上において，位相点作用素をシンプレクティック共変にするようなシンプレクティック変換の一部である回転 R_θ に対応する特定の $U(R_\theta)$
- 奇数次元の離散空間上において，シフト演算子と位相演算子を，a_p, a_q を位相因子として $P \Rightarrow UPU^\dagger = a_p P^\kappa Q^\lambda$，$Q \Rightarrow UQU^\dagger = a_q P^\mu Q^\nu$ と変換する条件 $\kappa\nu - \mu\lambda = 1$

を導入すると，位相点作用素が唯一に決まる [5]．しかし，$U(S)$ の具体的な形は明示されていない．

7. シンプレクティック変換の群

7.1 離散空間上のシンプレクティック変換 S の定義

連続との類推から $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$ の離散空間上においてシンプレクティック変換 S の群 Sp_N を定義する．

$$Sp_N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{Z}_N, |S| = 1_N \right\} \tag{36}$$

7.2 Euclid アルゴリズム

シンプレクティック変換の群 Sp_N は，2 つの元 (h_+, h_-) から成り立っている群 Sp'_N に等しい $(Sp_N = Sp'_N)$ ことを示す．

h_+, h_- を次のように定義する．

$$h_+ \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Sp_N \quad , \quad h_- \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in Sp_N \tag{37}$$

h_+ と h_- それぞれ n 乗したものを S にかける．

$$h_+{}^n \cdot S = \begin{pmatrix} a + nc & b + nd \\ c & d \end{pmatrix} \tag{38}$$

$$S \cdot h_+{}^n = \begin{pmatrix} a & na + b \\ c & nc + d \end{pmatrix} \tag{39}$$

$$h_-{}^n \cdot S = \begin{pmatrix} a & b \\ na + c & nb + d \end{pmatrix} \tag{40}$$

$$S \cdot h_-{}^n = \begin{pmatrix} a + nb & b \\ c + nd & d \end{pmatrix} \tag{41}$$

となる．ここでは行（列）を何倍かしたものをもう一方の行（列）に加える操作を行っている．式 (38)∼(41) を Euclid アルゴリズム 1 とする．

次に, h_t を以下のように定義する．

$$h_t \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ N-1 & 0 \end{pmatrix} \in Sp_N \tag{42}$$

h_t は ${h_-}^{N-1}$ を h_+ で挟んだ形で表せる．

$$h_+ h_-^{N-1} h_+ = h_t \tag{43}$$

したがって，$h_t \in Sp'_N$ でもある．
S に h_t をかけて，

$$h_t \cdot S \;=\; \begin{pmatrix} c & d \\ N-a & N-b \end{pmatrix} \tag{44}$$

$$S \cdot h_t \;=\; \begin{pmatrix} N-b & a \\ N-d & c \end{pmatrix} \tag{45}$$

となる．ここでは行（列）を入れ替えるような操作を行っている．式 (44)，(45) を Euclid アルゴリズム 2 とする．

Euclid アルゴリズム 1，2 を任意シンプレクティック変換 $S \in Sp_N$ の成分に対して応用すると，S は h_+, h_- のみで表すことができ，

$$Sp_N = Sp'_N \tag{46}$$

となる．

8. $U(S)$ の射影表現とその一意性

ここからはシンプレクティック変換 S から得られるユニタリ表現 $U(S)$ が射影表現を持ち，さらに一意性を持つことを説明する．

8.1 射影表現

式 (35) を新たな $U(S')$ で挟むと

$$U(S')U(S)\Delta_{m,n}U^\dagger(S)U^\dagger(S') = \Delta_{S'S(m,n)} \tag{47}$$

と変形できる．ここで，シンプレクティック群の性質から, $S'S = S"$ とすると，

$$U(S")\Delta_{m,n}U^\dagger(S") = \Delta_{S"(m,n)} \tag{48}$$

に変形できる．全ての位相点作用素に対して可換なものは単位行列の位相因子倍であることを利用して，

$$U(S \cdot S') = \mathrm{e}^{i\theta}U(S)U(S') \tag{49}$$

となり，$U(S)$ が射影表現であることを示している．ただし，$U(S)$ はユニタリ性 $(UU^\dagger = 1)$ を満たしている．

8.2 射影表現の一意性

任意のシンプレクティック変換 S は Euclid アルゴリズムによって h_+, h_- のみで表せ，式 (49) と一緒に考えると，任意の $U(S)$ は $U(h_+)$ と $U(h_-)$ のみで表すことができるので，$U(S)$ の定義を

$$U(S) = \prod_{s=\{+,-\}} U(h_s) \tag{50}$$

とする．

ここで，シンプレクティック変換 S について注意が必要である．それは，S ができる h_+ と h_- の組み合わせが 1 つではないとき，すなわち

$$S = \prod_{s\in I_1} h_s = \prod_{s\in I_2} h_s \tag{51}$$

となるときである．I_1, I_2 は $+$ と $-$ の組み合わせでできるもので，それぞれ $+$ と $-$ の順番が異なっているものである．$U_1(S), U_2(S)$ は定義より

$$U_1(S) = \prod_{s\in I_1} U(h_s) \quad , \quad U_2(S) = \prod_{s\in I_2} U(h_s) \tag{52}$$

である．ここで，式 (35) に両辺左から $U^\dagger(S)$，右から $U(S)$ をかけると，

$$U^\dagger(S)\Delta_{m,n}U(S) = \Delta_{S^{-1}(m,n)} \tag{53}$$

となるはずである．このことから $\Delta_{m,n}$ に左から $U_2^\dagger(S)U_1(S)$，右から $U_1^\dagger(S)U_2(S)$ をかけたものを考えると，

$$\left(U_2^\dagger(S)U_1(S)\right)\Delta_{m,n}\left(U_1^\dagger(S)U_2(S)\right) = \Delta_{m,n} \tag{54}$$

となる．更に，上と同様に位相点作用素の可換性も利用して，

$$U_1(S) \doteq U_2(S) \tag{55}$$

となる．つまり，h_+ や h_- の組み合わせが異なっていても，S が等しければ $U(S)$ は一意性を持つことになる．

以後，$U(h_+), U(h_-)$ に関して詳しく述べる．

9. 奇数次元の離散空間上における $U(h_+), U(h_-)$

9.1 $U(h_+), U(h_-)$ の具体的な導出と一般の奇数次元での予想

式 (35) に両辺右から $U(S)$ をかけ，$S = h_\pm$ とすると，

$$U(h_\pm){\Delta^C}_{m,n} = {\Delta^C}_{h_\pm(m,n)}U(h_\pm) \tag{56}$$

となり，前述で求めた位相点作用素を用いて式 (56) を満足する $U(h_+), U(h_-)$ を求める．最後に，ユニタリ性を用いて $U(h_+), U(h_-)$ を決定する．実際に $N =$

3, 5, 7 の次元で計算を行った．具体的に $N = 3$ での $U(h_+), U(h_-)$ を挙げる．

$$U(h_+) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & 1 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega^2 & 1 \end{pmatrix} \tag{57}$$

$$U(h_-) = \begin{pmatrix} \omega^2 & & \\ & 1 & \\ & & \omega^2 \end{pmatrix} \tag{58}$$

このことから，一般の奇数次元の $U(h_+)$ と $U(h_-)$ を

$$U(h_+) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i,k\in I} |i\rangle \omega^{\frac{1}{2}(i-k)(i-k+N)} \langle k| \tag{59}$$

$$U(h_-) = \sum_{i\in I} |i\rangle \omega^{\frac{1}{2}i(i+N)} \langle i| \tag{60}$$

と予想する．

9.2 シンプレクティック共変性の確認

予想した $U(h_+), U(h_-)$ が任意の Cohendet et al. の位相点作用素 $\Delta^C{}_{m,n}$ に対してシンプレクティック共変性

$$U(h_\pm)\Delta^C{}_{m,n}U^\dagger(h_\pm) = \Delta^C{}_{h_\pm(m,n)}$$

を満足していることを確認する．ここでは計算が簡単な為, $U(h_-)$ について述べる．

まず，式 (17) の位相点作用素 $\Delta^C{}_{m,n}$ をブラケットで表すと，

$$\Delta^C{}_{m,n} = \sum_i \omega^{2n(-m+i)} |i\rangle\langle -i+2m| \tag{61}$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned} & U(h_-)\Delta^C{}_{m,n}U^\dagger(h_-) \\ = \;& \sum_i \omega^{2(m+n)(-m+i)} |i\rangle\langle -i+2m| \\ = \;& \Delta^C{}_{m,m+n} = \Delta^C{}_{h_-(m,n)} \end{aligned} \tag{62}$$

となり，シンプレクティック共変性を満たすことを確認した．よって，一般の奇数次元の $U(h_-)$ の形は，

$$U(h_-) = \sum_{i\in I} |i\rangle \omega^{\frac{1}{2}i(i+N)} \langle i|$$

であるといえる．

同様に，$U(h_+)$ に関しても予想した式 (59) が Cohendet et al. の位相点作用素に対してシンプレクティック共変性を満足することを確認した．

10. 偶数次元の離散空間上における $U(h_+), U(h_-)$

10.1 $U(h_+), U(h_-)$ の具体的な導出と問題点

先ほどの奇数次元の離散空間上の $U(h_+), U(h_-)$ の導出を偶数次元の離散空間上でも同様に行う．

具体的に $N = 2$ における Leonhardt の位相点作用素を用いて，シンプレクティック共変性を満足する $U(h_+), U(h_-)$ は，

$$U(h_+) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \tag{63}$$

$$U(h_-) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & i \end{pmatrix} \tag{64}$$

となった．しかし，式 (63)，(64) はシンプレクティック変換の群が式 (36) の定義の下で射影表現を満足していない．この問題点は Leonhardt が偶数次元における離散空間上で Wigner 関数を構成するために，仮想的な自由度 (ghost variable) を導入して変数の数を 2 倍にしたことによる．その為，偶数次元の離散空間上に作用するシンプレクティック群についても考え直す必要がある．

次で偶数次元でのシンプレクティック群を再定義する．

10.2 偶数次元のシンプレクティック変換の群

偶数次元の離散空間上では $\mathbb{Z}_{2N}\times\mathbb{Z}_{2N}$ の空間であり，シンプレクティック変換 S の群 Sp_{2N} を次のように定義する．

$$Sp_{2N} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{Z}_{2N},\ |S| = 1_{2N} \right\} \tag{65}$$

この定義の下で射影表現を考えてみる．

10.3 $U(h_+), U(h_-)$ の射影表現の確認と一般の偶数次元での予想

式 (63) について，

$$\begin{aligned} \{U(h_+)\}^4 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= U({h_+}^4) = U(e) \end{aligned} \tag{66}$$

となり，$U(h_+)$ の射影表現が少なくとも 1 つ確認できた．

$N = 2$ での $U(h_+), U(h_-)$ から一般の偶数次元の形を $\tilde{\omega} = +\omega^{\frac{1}{2}} = +\exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i}}{2\mathrm{N}}\right)$ として，

$$U(h_+) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i,k\in I''} |i\rangle \tilde{\omega}^{(i-k)^2} \langle k| \tag{67}$$

$$U(h_-) = \sum_{i\in I''} |i\rangle \tilde{\omega}^{i^2} \langle i| \tag{68}$$

と予想する．ここで $I'' = \{0, 1, \cdots, N-1\}$ である．

10.4 シンプレクティック共変性の確認

次に奇数次元と同様に予想した $U(h_+), U(h_-)$ が Leonhardt の定義した位相点作用素 $\Delta^L{}_{m,n}$ に対して，シンプレクティック共変性

$$U(h_\pm)\Delta^L{}_{m,n}U^\dagger(h_\pm) = \Delta^L{}_{h_\pm(m,n)}$$

を満足していることの確認を行う．まず式 (30) で定義した Leonhardt の位相点作用素を $\tilde{\omega}$ を用いて，

$$\begin{aligned}\Delta^L{}_{m,n} &= \tilde{\omega}^{-4mn}Q^{2n}P^{-2m}T \\ &= \sum_{i\in I''}\tilde{\omega}^{4n(i-m)}|i\rangle\langle -i+2m|\end{aligned} \quad (69)$$

とする．ここでも計算が簡単な為，$U(h_-)$ の共変性について述べる．

$$\begin{aligned}&U(h_-)\Delta^L{}_{m,n}U^\dagger(h_-) \\ &= \sum_i \tilde{\omega}^{4(m+n)(i-m)}|i\rangle\langle -i+2m| \\ &= \Delta^L{}_{m,m+n} = \Delta^L{}_{h_-(m,n)}\end{aligned} \quad (70)$$

となり，シンプレクティック変換 S の群が Sp_{2N} としたとき，シンプレクティック共変性を確認することができた．よって，一般の偶数次元の $U(h_-)$ の形は，

$$U(h_-) = \sum_{i\in I''}|i\rangle\tilde{\omega}^{i^2}\langle i|$$

であるといえる．

同様に $U(h_+)$ に関しても式 (67) が Leonhardt の位相点作用素に対してシンプレクティック共変性を満足していることを確認した．

11. 結　言

離散空間の場合，正準量子化するとき次のような連続で用いる式を使っても量子化できない．

$$\hat{H} = H(\hat{x}, \hat{p}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

しかし，ハミルトニアンに位相点作用素をかけて積分すると，次の式のように Weyl 順序で正準量子化したものにできる．

$$\hat{H}(\hat{q}, \hat{p}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dqdpH(q,p)\Delta(q,p)$$

つまり位相点作用素さえ分かれば量子化ができることになるが，これは連続と奇数個の格子点からなる離散空間上の場合でしか証明されておらず，偶数個の格子点からなる離散空間上の場合で適用するには位相点作用素を一意的に決める必要がある．

今回我々の研究では，先行研究とは逆に，Cohendet et al. や Leonhardt が定義した位相点作用素を用いて，

$$U(S)\Delta_{m,n}U^\dagger(S) = \Delta_{S(m,n)}$$

というシンプレクティック共変性を満足するシンプレクティック変換 S の群の射影表現が存在するかを調べた．

まず，シンプレクティック変換 S は，Eclid アルゴリズムを用いて

$$h_+ \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h_- \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

の 2 つで表せることが分かった．次に一般次元の $U(S)$ の形は，$U(h_+), U(h_-)$ で表せることが分かり，

$$U(h_+)_{\rm odd} = \sum_{i,k\in I}|i\rangle\omega^{\frac{1}{2}(i-k)(i-k+N)}\langle k|$$

$$U(h_-)_{\rm odd} = \sum_{i\in I}|i\rangle\omega^{\frac{1}{2}i(i+N)}\langle i|$$

$$U(h_+)_{\rm even} = \sum_{i,k\in I''}|i\rangle\tilde{\omega}^{\frac{1}{2}(i-k)^2}\langle k|$$

$$U(h_-)_{\rm even} = \sum_{i\in I''}|i\rangle\tilde{\omega}^{\frac{1}{2}i^2}\langle i|$$

という形を予想し，それぞれの空間で定義された位相点作用素に対して，シンプレクティック共変性を満足するシンプレクティック変換の群が奇数次元では Sp_N で，偶数次元では Sp_{2N} となることが確認できた．

結果，シンプレクティック変換の群の射影表現が存在し，かつ唯一で Eculid アルゴリズムを用いて $U(S)$ の具体的な形を導出することができる．

今後の課題として，連続空間上では奇数，偶数次元の離散空間上と同様にシンプレクティック共変性を満足する群の射影表現が唯一存在するか調べることが挙げられる．

参考文献

[1] E.P.Wigner: Phys.Rev. 40, 749, (1932).

[2] W.K.Wootters: Ann. Phys. (N.Y.) 176, 1 (1987).

[3] O.Cohendet, Ph.Combe, M.Sirugue, and M.Sirugue-Collin: J.Phys. A21, 2875 (1988).

[4] U.Leonhardt: Phys.Rev.Lett. 74, 4101, (1995).

[5] M.Horibe, A.Takami, T.Hashimoto, and A.Hayashi: Phys.Rev. A65, 032105, (2002).