

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI URBINO “CARLO BO”

Dipartimento di Scienze di Base e Fondamenti – DiSBeF

CORSO DI DOTTORATO DI RICERCA IN SCIENZE DI BASE E APPLICAZIONI

Curriculum in “Scienza della Complessità”

XXIX CICLO

**SULLA VALIDITÀ DEL PRINCIPIO DI IDENTITÀ DEGLI INDISCERNIBILI
IN MECCANICA QUANTISTICA: VERSO UNA NUOVA DISCERNIBILITÀ
DEBOLE.**

Settore Scientifico Disciplinare:

M-FIL/02

RELATORE:

Chiar.mo Prof. Gino Tarozzi

DOTTORANDO:

Dott. Roberto Macrelli

ANNO ACCADEMICO

2015/2016

**SULLA VALIDITÀ DEL PRINCIPIO DI IDENTITÀ DEGLI
INDISCERNIBILI IN MECCANICA QUANTISTICA: VERSO
UNA NUOVA DISCERNIBILITÀ DEBOLE**

SOMMARIO

I. INTRODUZIONE	5
II. CHE COS'E' UN OGGETTO?	17
1. La questione della individualità	23
III. INTRODUZIONE AI FONDAMENTI DELLA MECCANICA QUANTISTICA: ASPETTI MATEMATICI, FISICI E FILOSOFICI	26
1. I principi della meccanica quantistica	26
2. Breve cenno sulla struttura della scienza nell'ambito della fisica pre-quantistica	31
2.1. La struttura della scienza nell'ambito della fisica quantistica.....	34
3. Le due scuole "quantistiche"	42
4. Il problema della separabilità.....	44
5. Il ritorno del problema: che cos'è un oggetto?	45
6. Il problema mente-corpo.....	47
7. Le logiche quantistiche	49
8. Il problema della località	57
8.1. L'analisi della località e della separabilità secondo Don Howard.....	60

9. Sulla completezza della meccanica quantistica	65
10. Il paradosso di Einstein, Podolski e Rosen (EPR)	68
11. Il problema della misurazione.....	73
12. Il realismo empirico in meccanica quantistica.....	78
IV. LA STATISTICA QUANTISTICA	83
1. La statistica quantistica.....	90
2. Assiomatizzazioni della statistica quantistica.....	101
V. PROCESSO ALLA NATURA DELLE PARTICELLE IN MECCANICA QUANTISTICA: LA RICERCA DI UN PRINCIPIO DI INDIVIDUALITÀ E IDENTITÀ	109
TESI DEL TESTIMONE A) Le particelle sono non individuali e non discernibili.....	110
A.1. L' "evaporazione" dell'individualità quantistica: il paradosso di Gibbs.....	113
OBIEZIONE AL TESTIMONE A)	116
TESI DEL TESTIMONE B) Le particelle sono non individuali ma sono discernibili.	122
B.1. Contabilità ed estendibilità in meccanica quantistica.....	125
OBIEZIONE AL TESTIMONE B)	132
TESI DEL TESTIMONE C) Le particelle sono individuali ma non discernibili.....	134
OBIEZIONE AL TESTIMONE C)	135
TESI DEL TESTIMONE D) Le particelle sono individuali e discernibili.....	136

D.1. Un principio per l'individualità degli oggetti fisici: il principio di identità degli indiscernibili.	138
PRIMA OBIEZIONE AL TESTIMONE D).....	141
CONTRO-OBIEZIONE DEL TESTIMONE D)	143
PRIMO INTERVENTO DEL GIUDICE.....	146
RIPRENDE LA TESTIMONIANZA IL TESTIMONE D)	147
D.2. Identità relativa, discernibilità debole.	149
SECONDA OBIEZIONE AL TESTIMONE D).....	153
DEPOSIZIONE DELLA GIURIA: La sottodeterminazione della metafisica.	153
VI. LA SENTENZA DEL GIUDICE: IL PRINCIPIO DI IDENTITA' DEGLI INDISCERNIBILI METODOLOGICO.....	158
VII. IN VIAGGIO LUNGO L'AZZURRO FIUME DELLA DISCERNIBILITA' QUANTISTICA: ROTTA VERSO UNA NUOVA WEAK DISCERNIBILITY.....	167
1. Principali e recenti proposte di WD: punti forti, punti deboli. meccanica quantistica.....	172
2. Critica ai fondamenti della WD	177
3. La proposta di Bigaj e gli spazi di Fock.....	180
4. Una nuova WD derivante dalla seconda quantizzazione	181
5. Una parentesi metafisica: quale conclusione poter trarre sulla validità di PII?	186
6. L'evaporazione dello spazio-tempo	190
VIII. PERCHE' LA MECCANICA QUANTISTICA, COSI' COME NESSUN'ALTRA TEORIA, PUO' METTERE LA PAROLA	

“FINE” SULL’ACCESSIONE DEL PRINCIPIO DI IDENTITA’ DEGLI INDISCERNIBILI IN AMBITO MICROSCOPICO	196
1. Meccaniche quantistiche.....	201
IX. CONCLUSIONI	204
APPENDICE	210
X. BIBLIOGRAFIA	216

I. INTRODUZIONE

È abbastanza chiaro che cosa si intenda per diversità: due oggetti A e B sono tra loro diversi se il primo possiede (o non possiede) una qualche caratteristica o proprietà che il secondo non possiede (o possiede). Sembra anche abbastanza naturale considerare la diversità come un concetto primitivo. La diversità inoltre è una relazione simmetrica, anti-riflessiva e non transitiva. La negazione della diversità ($\neg \neq$) è una relazione di equivalenza che non ha un chiaro significato cognitivo ma che è stata chiamata identità in metafisica¹. L'identità è prima di tutto una nozione epistemologica, come è stata mostrata da Frege (1884, 1969)² nel suo *Die Grundloggen der Arithmetik*: per definire l'identità, Frege ha utilizzato l'aforisma di Leibniz “*Eadem sunt quorum unum potest substitui alteri salva veritate*”, cioè due cose sono identiche se permutando i nomi si mantiene la verità³. Ciò si evidenzia nel calcolo dei predicati del primo ordine dove si hanno le relazioni di identità (le I-relazioni) come ha osservato Quine (1976a): Si definisca una relazione riflessiva e sostitutiva per il quale vale $(x)(x=x)$ e $x=y \rightarrow (\varphi(x,x) \rightarrow \varphi(x,y))$, dove φ è una qualsiasi forma di un linguaggio fissato L e $\varphi(x,y)$ sostituisce uno o più occorrenze libere di x in $\varphi(x,x)$ con y . Questa definizione però non è l'identità assoluta (o “in sé”), ma l'identità in

¹ L'identità verrà intesa come fatto puramente epistemico, cioè è il dato ottenuto dal non aver trovato alcuna proprietà o caratteristica che permetta di determinare se due oggetti sono tra loro diversi.

² Anche se in seguito ha cambiato idea. A differenza di Frege, Schrödinger (1952) ha mostrato come la mancanza di identità in meccanica quantistica non sia un problema di natura epistemica ma di tipo ontologico.

³ Cfr. Church (1956, p. 300).

relazione a tutti i predicati appartenenti al linguaggio L nel quale si esprime il calcolo dei predicati, inoltre questa nozione presenta anche delle altre problematiche: È chiaro che da un punto di vista intuitivo $a=b$ nel linguaggio L del primo ordine esprime qualcosa di simile a: “secondo la nostra conoscenza il termine a e b si riferiscono allo stesso oggetto”. Siano dunque a e b due nomi per due elementi, rispettivamente A e B , di un certo dominio D (che ha cardinalità numerabile \aleph_0). Il principio di identità degli indiscernibili di Leibniz afferma che

$$(F(a) \leftrightarrow F(b)) \rightarrow a = b, \forall F \text{ predicato monadico.}$$

Ma l'insieme dei possibili predicati F normalmente ha cardinalità \aleph_0 , mentre i possibili sottoinsiemi di D sono 2^{\aleph_0} , esiste quindi un sottoinsieme S di D non espresso da alcun predicato del linguaggio L tale che l'identità degli indiscernibili potrebbe non valere. Questo prova che l'identità definita attraverso un linguaggio numerabile del primo ordine presenta dei problemi⁴. Contrariamente a ciò che molti importanti filosofi sostengono, risulta difficile definire l'identità “in sé” attribuendo un qualche interesse metafisico alla trivialità $a=a$ ⁵. Quine (1976a) ha cercato di esprimere questo concetto reintroducendo l'identità assoluta come una relazione del secondo ordine, così da potersi assicurare di poter quantificare su tutti i possibili predicati⁶.

⁴ Cfr. Frenche e Krause (2006, p. 254).

⁵ L'interesse metafisico di questa trivialità è sostenuta da coloro che hanno introdotto, nel dibattito filosofico circa l'identità degli oggetti, l'identità trascendentale basandosi sull'autoidentità $a=a$.

⁶ In questa tesi non si tratterà l'importante questione della identificazione, la questione secondo cui una cosa dopo un cambiamento fisico resta la stessa cosa perché ciò, come ha notato Lewis (1986a), si riferisce ad un problema differente dall'identità.

Il problema della definizione dell'identità si intreccia quindi inevitabilmente con quello della discernibilità: Si supponga che per un dominio di oggetti D vi siano buone ragioni scientifiche per credere che ci siano n oggetti a_1, \dots, a_n . Non si ha certezza che tra questi oggetti valga la relazione di diversità, ma solo che sono n oggetti, senza sapere che tipo di oggetti siano. Questo insieme quindi ha solo cardinalità. Nella teoria standard degli insiemi per un insieme finito l'ordinalità e la cardinalità coincidono. In particolare nella teoria standard degli insiemi si possono introdurre numeri cardinali solo dopo aver introdotto quelli ordinali. Le particelle della fisica classica possono essere trattate come elementi della teoria degli insiemi. Si prenda ad esempio un insieme di cinque sfere materiali di raggio variabile: la prima di raggio pari a 1 centimetro, la seconda di raggio 2 centimetri e così via. Queste sfere obbediscono alle leggi della meccanica newtoniana e costituiscono un insieme di cardinalità pari a 5 e si possono ordinare in virtù del loro raggio. Se le sfere fossero del tutto identiche l'una all'altra, allora si potrebbero ordinare posizionandole lungo un'ipotetica semiretta ideale e segnandole con un opportuno numero in base alla vicinanza all'origine della semiretta. Nello studio dei sistemi di particelle della meccanica quantistica, invece, spesso si ha a che fare con particelle che sono indistinguibili e per le quali è possibile definire una cardinalità ma non un'ordinalità. Il problema che si sta discutendo affonda le sue radici all'inizio del secolo scorso: David Hilbert, nel congresso dei matematici di Parigi del 1900, mostrò una lista di 23 problemi della matematica, il sesto di questi problemi concerneva la ricerca di un terreno assiomatico che unificasse quelle scienze fisiche nelle quali, come specifica lo stesso Hilbert, la matematica aveva un ruolo fondamentale. Come osserva Manin

(1976), la teoria degli insiemi è inadeguata per descrivere le particelle quantistiche che sono oggetti indistinguibili. Dal momento che non si ha una teoria standard degli insiemi con insiemi dotati di cardinalità ma senza ordinalità, la meccanica quantistica sembra non prestarsi ad essere trattata mediante la teoria standard degli insiemi. Tuttavia un tentativo di trattare le particelle quantistiche con la teoria standard degli insiemi è quello di Weyl (1950) che utilizza “l’operazione al quoziente” sugli elementi: si definisce una relazione di equivalenza tra due elementi a e b , di un dato dominio quantistico, se appartengono allo stesso stato fisico quantico. In questo modo l’insieme quoziente che ne risulta riesce a trattare le particelle indistinguibili (cioè le particelle quantistiche) con la teoria degli insiemi classica. Tutto ciò soddisfa una certa sensibilità fisico-matematica ma non quella filosofica che ben comprende un certo camuffamento del problema legato alla inadeguatezza della teoria degli insiemi classica utilizzata in meccanica quantistica⁷. Oltre al tentativo di Weyl, French e Krause (2006, pp. 264-265) sviluppano una teoria degli insiemi per gli oggetti indistinguibili in questo modo: due elementi a e b appartenenti ad un dominio D , si dicono Z -distinguibili per una struttura Z se esiste una sotto collezione di elementi X appartenente a D tale che X è invariante per automorfismi in Z e se a appartenente a X è condizione necessaria e sufficiente per b non appartenente a X . Se tale condizione non è soddisfatta allora a e b sono Z -indistinguibili. Z inoltre si dice struttura rigida se e solo se i soli automorfismi su Z sono la funzione identità. Per una struttura rigida si ha coincidenza tra l’insieme di tutti gli oggetti Z -indistinguibili e l’insieme di tutti gli oggetti identici, inoltre tutti gli elementi della struttura sono individuali nella

⁷ Cfr. French e Krause (2006, §6).

struttura e sono identici all'elemento a . Ciò mostra come con la teoria degli insiemi si riesca a trattare, in un certo senso, oggetti indistinguibili ma solo attraverso delle speciali strutture.

Per risolvere a pieno il problema von Neumann aveva intuito negli anni 30 del XX secolo, che fosse necessario appellarsi a diversi tipi di logiche non standard oppure ad algebre non Booleane per trattare adeguatamente il comportamento delle particelle in meccanica quantistica⁸. L'esempio più noto nella letteratura recente per la sua potenza e formalità nel trattare entità indistinguibili è quello dei *quasi-set* introdotti da Krause (1992), Da Costa e Krause (1994), Dalla Chiara e Toraldo di Francia (1993, 1995). Solo la cardinalità degli elementi del *quasi-set* è data, non quali siano i singoli oggetti che lo compongono. Secondo French e Krause (2006, p. 245) la teoria dei *quasi-set*, anche se non riesce a creare un quadro fondativo completo della meccanica quantistica, si avvicina a quel tipo di matematica necessaria per descrivere gli oggetti indistinguibili. I *quasi-set* sono solo un *Hirnsptzfindigkeit* (secondo il celebre sofismo di Kant), ma sono utili nella trattazione dell'ontologia della meccanica quantistica non relativistica. Se da un lato si riesce a gestire il “problema” della mancanza di ordinalità per le particelle quantistiche, dall'altro appaiono evidenti problemi ben più profondi che sembrano ben lungi da una chiara soluzione: sono quelli inerenti la discernibilità tra particelle quantistiche. Si prenda ad esempio un atomo di elio: è noto che in questo atomo ci sono due elettroni, ma anche in questo caso “quantistico” non si conosce quali dei due sia il primo e il secondo elettrone, cioè solo la cardinalità è data. La domanda che sorge spontanea è la seguente: quando si dice che in un

⁸ In questo senso si veda il reticolo ortomodulare completo di Takeuti o il tentativo di Bell di sviluppare una teoria degli insiemi quantistica che contemplasse la sovrapposizione. Cfr. French e Krause (2006, §6).

atomo di elio ci sono due elettroni, anche se non si conosce quale sia il primo e quale sia il secondo, il principio di identità degli indiscernibili (PII) è violato? A dire il vero non si è interessati realmente a PII ma a quella che possiamo chiamare versione *metodologica* del principio di identità degli indiscernibili di Leibniz (PIIM) che si basa sulle nostre miglior conoscenze scientifiche. Questo perché, contrariamente a PII, è possibile formulare PIIM con il calcolo dei predicati del primo ordine. Infatti tutti i linguaggi di interesse scientifico hanno un numero finito di predicati P_1, \dots, P_m . Quindi PIIM si può esplicitare in questo modo:

$$\bigwedge_i (P_i(x) \leftrightarrow P_i(y)) \rightarrow x = y.$$

Tuttavia, in meccanica quantistica anche la funzione d'onda nello spazio delle posizioni di due elettroni è la stessa, ma gli elettroni sono due. Quindi se x e y non si riferiscono allo stesso oggetto (anche se non è chiaro a quale oggetto si riferiscano) la forma appena mostrata del principio di Leibniz è certamente violata. Di più, French e Redhead (1988) hanno mostrato che per un insieme di n bosoni tutti nello stesso stato, con la medesima massa e carica, vale un *Principio di Indiscernibilità per Permutazione* (PIP): qualsiasi permutazione tra gli n bosoni non cambierà la distribuzione di probabilità di alcuna osservabile. Questo principio, come si vedrà meglio nel corpo di questa tesi, mette a dura prova la validità di PII e di PIIM nella meccanica quantistica non relativistica.

Analizzando ancor più approfonditamente la validità di PIIM e in accordo con Quine (1976), è possibile formulare una forma più debole di PIIM. In particolare, nel caso di due elettroni, dal momento che tutte le relazioni tra di essi sono simmetriche, è possibile considerare solo le relazioni binarie e simmetriche, esprimibili mediante un linguaggio scientifico.

Siano esse R_1, \dots, R_m . Si denoti la forma più debole di PIIM con la notazione PIIM_R e la si definisca nel modo seguente: $\bigwedge_i (z)(R_i(x, z) \leftrightarrow R_i(y, z)) \rightarrow x = y$.

Come hanno mostrato Saunders (2003, 2006), Muller e Saunders (2008) e Muller e Seevinck (2009) (MSS), ed altri tra cui Huggett e Norton (2014), è possibile trovare relazioni simmetriche e irriflessive, che siano valide solo tra i due elettroni. È possibile cioè ritenere due elettroni *debolmente* discernibili. Questo risultato può essere generalizzato a un sistema più ampio di fermioni e anche a molti bosoni. Tuttavia Bigaj (2015) ha criticato le argomentazioni MSS in quanto a suo avviso sarebbero circolari. A tali critiche si può ribattere che se vi sono argomentazioni fisiche buone per ritenere che vi sono due elettroni non individuati, essi possono essere distinti dal resto del mondo sulla base di relazioni simmetriche e irriflessive che sono valide solo tra di loro. Tuttavia le critiche di Bigaj (2015) si basano anche sulle caratteristiche degli operatori utilizzati in queste relazioni. Su tale questione, il contributo di questa tesi è quello di determinare una nuova discernibilità debole in ambito quantistico che accolga le critiche di Bigaj e che rientri tra le forme di PIIM_R .

Generalmente l'intera trattazione delle particelle in meccanica quantistica è basata sul realismo quantistico (QR), cioè la tesi secondo cui la meccanica quantistica non relativistica è almeno parzialmente vera anche nella sua parte teorica. Ciò deriva dall'alto potere predittivo della teoria che coglie alcuni importanti caratteristiche del mondo reale, anche se in fondo non è chiaro come riesca a predire molti dei risultati sperimentali. Ma è abbastanza probabile che la meccanica quantistica sia una teoria incompleta dal momento che non vi sono buone spiegazioni riguardo al problema della misurazione. Inoltre il realismo

quantistico è una tesi opinabile come afferma David Lewis (1986b, pp. xi): “*I am not ready to take lessons in ontology from quantum physics as it now is*”.

Se non si assume QR, allora, nulla di ontologico si potrebbe dire.

Per contro, se le particelle sono debolmente distinguibili, esse potrebbero essere “relazionali” e non sostanziali. Muller (2011) avvalorava questa ipotesi. Cioè le particelle quantistiche sono relazioni senza relata. Probabilmente prima di Russell nessuno credeva che le relazioni non riducibili alle proprietà dei relata potessero essere possibili. Verso un mondo di relazioni senza relata si sta muovendo il radicale realismo strutturale ontico (ROSR). Componente fondamentale di questo strutturalismo è il principio di Relatività di Weyl (1949) secondo cui le relazioni e le leggi della fisica hanno un senso e un significato fisico se sono invarianti alle permutazioni di particelle⁹. Lam e Wütrich (2014) hanno mostrato tuttavia che non si ha una buona rappresentazione matematica della relazione senza relata.

Da un punto di vista teorico una relazione binaria è un insieme di coppie ordinate. In un certo senso in una prospettiva estensionale le relazioni sono insiemi di elementi. Nel calcolo dei predicati le relazioni sono predicati binari. Muller (2011) spera in una assiomatizzazione di questi elementi relazionali: tuttavia il realismo delle proprietà quantistiche non suggerisce relazioni senza relata, ma relazioni con relata. Due fermioni anche se sono debolmente discernibili sono sempre due. Ladyman (2007) ha proposto che le relazioni siano più fondamentali dei relata. Anche Ladyman in questo senso è uno strutturalista. Bisogna anche vagliare la possibilità che né le relazioni né i relata siano una più fondamentale dell'altra.

⁹ Cfr. French e Krause (2006, §6).

Anzi sembra che le relazioni e i relata siano inscindibili e sullo stesso piano, come ha notato Esfeld (2004).

Forse il primo che ha introdotto le relazioni come strutture di *placeholder* è stato von Ehrenfels (1891): cioè una qualità figurale come ad esempio una melodia rispetto alle note che la compongono e che appartengono a differenti ottave.

Husserl (1900) nella sua *Terza ricerca logica* (§16) parla esplicitamente di dipendenza bilaterale tra gli oggetti. Simons (1982) definisce formalmente questa nozione: Si consideri una relazione n -aria $R(\circ_1 \dots \circ_n)$ dove \circ_i con $i=1, \dots, n$ siano dei *placeholders*. Inoltre sia N un insieme di oggetti non completamente individuati $\{\bullet_1 \dots \bullet_n\}$, cioè è noto che vi sono N oggetti aventi lo stesso insieme di proprietà P . Entrambi sono tropi (nella terminologia husserliana “momenti”), non universali. Definendo opportunamente la dipendenza bilaterale di $R(\circ_1 \dots \circ_n)$ da $\{\bullet_1 \dots \bullet_n\}$, si può mostrare che sia la relazione sia i relata non sono necessariamente indipendenti, dove il termine necessario va inteso in senso nomologico¹⁰. Quindi, anche se le relazioni e gli oggetti fossero tropi, essi potrebbero essere sussunti sotto i termini generali per i quali vigono le leggi scientifiche.

Riassumendo gli elementi visti in questa introduzione, French e Redhead sostengono la non discernibilità quantistica dal momento che PII e PIIM nella sua forma generale sono violati. Dalla Chiara, Da Costa, Krause, Toraldo di Francia rafforzano la questione della non distinguibilità quantistica attraverso la teoria dei *quaset* e dei *quasi-set*, anche se come si potrà notare da questa tesi, una teoria che abbia un linguaggio ricco e potente per parlare delle particelle quantistiche è

¹⁰ Cioè in relazione alle nostre migliori teorie scientifiche.

quella individuata dalla teoria quantistica dei campi. Morganti, prudentemente, osserva che vi sono differenti gradi di individualità e sostiene l'identità quantistica sulla base della contabilità primitiva¹¹ che si trova ad un livello più basso della *weak discernibility* (discernibilità debole). Secondo l'autore di questa tesi, il messaggio ontologico che deriva dalla meccanica quantistica potrebbe invece essere descritto proprio da una forma di *weak discernibility*, come quella proposta da MSS.

Il presente elaborato è strutturato in 10 Capitoli nel modo seguente:

Il Capitolo 1 è questa introduzione. Nel Capitolo 2 si mostra il problema della definizione di oggetto fisico e si introduce la ricerca di un principio di individualità per gli oggetti fisici. Nel Capitolo 3 si illustrano i fondamenti fisico-matematici della meccanica quantistica e si illustrano i principali problemi filosofici legati ad essa. Nel Capitolo 4 si introducono le basi delle statistiche quantistiche. Nel Capitolo 5 si pone "a processo" lo studio della individualità e discernibilità in meccanica quantistica, a conclusione di tale processo si illustra il principio di identità degli indiscernibili (PII) e le sue varie formulazioni, da quelle forti a quelle deboli. Nel Capitolo 6 si introduce uno degli elementi di novità di questa tesi che è il principio di identità degli indiscernibili metodologico (PIIM). Il Capitolo 7 rappresenta la parte centrale di questa tesi: dopo aver riassunto le principali posizioni sulla questione della discernibilità in meccanica quantistica, si utilizzano gli strumenti matematici della seconda quantizzazione per determinare una nuova *weak discernibility*. Nel Capitolo 8 si discute sull'accettazione dei risultati matematico-filosofici ottenuti, basandosi sull'inferenza alla miglior

¹¹ Cfr. Morganti (2013) e Rossanese (2015).

spiegazione. I Capitoli 9 e 10 sono rispettivamente le conclusioni di questa tesi e la letteratura di riferimento.

II. CHE COS'E' UN OGGETTO?

Ad ogni essere umano, fin dall'infanzia, succede di confrontarsi e di entrare in contatto con il mondo che lo circonda. Il bambino non fa altro che fare esperienza di tutto ciò che osserva, che tocca, a cominciare da quegli oggetti che inizialmente chiama cose, che scopre essere formati di materia e che restano per lo più immutati nell'avvicinarsi dei giorni, delle stagioni, degli anni. Noi sappiamo che il mondo o meglio la natura è composta da oggetti fisici considerati come corpi materiali che occupano un certo spazio e soggetti all'azione del tempo. Il bambino dal canto suo, sa distinguere tra oggetti materiali inanimati con cui entra in contatto, ad esempio attraverso il gioco, da quelli animati come un gatto che accarezza in giardino o semplicemente come la mamma o il babbo. Il modo in cui il bambino classifica gli oggetti, ottenuto mediante l'attribuzione di nomi, entra in crisi nel corso della sua crescita e del suo sviluppo quando per esempio si accorge che esistono oggetti che lentamente mutano, si modificano senza passare attraverso stati intermedi discreti, ma in maniera continua. Si pensi ad esempio ad un cubetto di ghiaccio posto su una superficie esposta al sole. Il cubetto lentamente si scioglie trasformandosi completamente in acqua e questo processo avviene con continuità senza "salti" di alcun tipo. Ciò che prima era stato chiamato ghiaccio e classificato sulla base di alcune proprietà *intrinseche*¹² ora è chiamato acqua, ma l'oggetto è sempre lo stesso o è qualcosa di diverso? È corretto fare distinzione tra acqua e ghiaccio? Nel corso della storia del pensiero filosofico, questo processo di conoscenza che interessa il bambino ha radici ben

¹² Per proprietà intrinseche si intendono proprietà monadiche dell'oggetto, con estrinseche invece le proprietà che comprendono le relazioni dell'oggetto con altri oggetti.

profonde: la concezione di un mondo composto da una collezione di oggetti distinti e individuali si trova ad esempio in filosofi come Lucrezio¹³ e il non dover necessariamente suddividere il mondo in singoli oggetti individuali richiama alla nozione di continuità di Zenone¹⁴. Nelle critiche di Zenone a quell'idea pitagorica che mette alla base della *physis* il “numero”, vi è una forte tensione tra la finitezza del mondo, con le cose che lo compongono, e l'infinita divisibilità spaziale di natura matematica¹⁵. L'infinita divisibilità dello spazio contrasta a sua volta con la visione del mondo degli atomisti, tra cui Democrito e Leucippo, per i quali gli atomi sono i mattoni costituenti del mondo. Questi oggetti di dimensioni estremamente piccole, che sono posti in posizioni di estrema vicinanza, inducono lo scienziato a percepire una sorta di continuità, ma in realtà il mondo soggiacente sarebbe composto di oggetti individuali, discreti, separati e tra loro distinti.

Riprendendo il parallelo tra lo sviluppo del pensiero filosofico e quello umano riguardo la conoscenza del mondo e delle cose che vi sono in esso, oltre agli oggetti materiali con cui un bambino entra in contatto attraverso i sensi fin da subito, vi sono anche altri oggetti più astratti quali ad esempio “la canzone del proprio cantante preferito” o “il beniamino dei cartoni animati”. Nel corso degli anni matura il sogno di poter ricoprire e svolgere un lavoro ad esempio il medico o l'astronauta, crescendo ulteriormente ci si ritrova a maneggiare “cose” come “il proprio conto corrente in banca”, “il codice fiscale” ed altro ancora. Insomma nel corso dello sviluppo da bambino a uomo adulto, l'essere umano si rende conto che esistono varie cose di diverso tipo.

¹³ Cfr. Toraldo di Francia (1998, p. 21).

¹⁴ Cfr. Toraldo di Francia (1998, p. 21).

¹⁵ Cfr. Trombino (1998a, p. 242).

Vi sono quindi oggetti fisici che hanno una chiara definizione (casa, gatto, ecc.), oggetti non fisici ma definibili in termini chiari (conto correnti, codice fiscale, ecc.) e vi sono oggetti non fisici la cui definizione è astratta ma che ha delle ricadute molto importanti in ambito fisico: Si pensi al concetto di spazio e tempo. Fin dalla tenera età, l'uomo pensa allo spazio e al tempo, identificando in genere il primo come un piano o una superficie o una stanza o una sede che è riempita da corpi e da cose, il secondo come un susseguirsi di movimenti di una lancetta che segue il percorso circolare di un orologio (o di numeri che ciclicamente si ripetono su un supporto digitale).

Già in Platone vi è la concezione dello spazio, inteso come oggetto che è la sede della materia, ontologicamente soggetta al divenire ed imperfetta in cui nascono tutte le cose, un oggetto sempre esistente perché affine al mondo delle idee¹⁶. Di parere opposto Aristotele, secondo cui lo spazio, o meglio il luogo, è rappresentato dalle relazioni spaziali e quindi non è più qualcosa di assoluto.

Un uomo nell'arco del suo sviluppo fisico e mentale può certamente affermare che un oggetto, sia esso fisico o meno, è una costruzione fatta dalla propria mente sulla natura che lo circonda e di cui ha fatto esperienza¹⁷: in particolar modo per quegli oggetti che sono stati esperiti come dotati di una certa consistenza (cioè aventi una certa massa) collocati nello spazio e nel tempo (quindi localizzabili spazio-temporalmente) e persistenti al passare degli anni. Come afferma Willard Van Orman Quine (1976b) si può sostenere che l'esistenza di un oggetto fisico serve all'essere umano per organizzare la propria esperienza, qualcosa di utile alla

¹⁶ Cfr. Trombino (1998a, p. 324).

¹⁷ Si veda Quine (1976b) e Toraldo di Francia (1998, p. 23). Si veda anche Toraldo di Francia (1986).

mente per decifrare e utilizzare gli elementi percepiti mediante i sensi¹⁸. Già in questa definizione si afferma qualcosa di importante: si pone infatti l'accento sull'esistenza degli oggetti. Non si può essere sicuri che quello che ci circonda abbia un contenuto reale, cioè esista. Tuttavia se si basassero le nostre considerazioni su di un livello empirico si potrebbe sposare la tesi di Jean le Rond D'Alembert secondo il quale in primis i sensi ci inducono a considerare come vera la nostra esistenza, successivamente che esistono altri oggetti all'infuori di noi e infine che l'insieme di tutti gli oggetti esistenti, la Natura, sia composta da individuali¹⁹. Questa concezione materiale della Natura si trova anche in Telesio, in Spinoza laddove l'uomo stesso partecipa come tassello individuale di quel "Tutto" che è il "*Deus, sive Natura*" e in Immanuel Kant che tuttavia distingue due piani concettuali quello "fenomenico", costituito dalla collezione degli oggetti esperiti, e quello "noumenico", o della *cosa in sé* proposta come limite concettuale²⁰.

La domanda che sorge spontanea a questo punto è la seguente: si dispone di una buona definizione di oggetto fisico o che abbia influenza in ambito fisico? È possibile determinare e identificare un oggetto fisico solo sulla base delle sue proprietà intrinseche, quali ad esempio la massa, la carica, e delle sue proprietà spazio-temporali? Alla luce delle nostre miglior teorie scientifiche e conoscenze

¹⁸ Cfr. Quine (1976b).

¹⁹ Cfr. Toraldo di Francia (1998, p. 23).

²⁰ Usando le parole di Otfried Höffe, filosofo tedesco tra i maggiori interpreti di Kant: "L'esperienza ci mostra necessariamente sempre solo parti e frammenti di realtà; la ragione cerca di mettere insieme questi frammenti in un tutto, la qual cosa è giustificabile. Solo che il tutto non ci è mai dato, bensì proposto costantemente come compito [...]. Poiché tutta l'esperienza ha carattere di frammento, ed ogni nuova esperienza compone i frammenti in frammenti più grandi, ma mai in un tutto completo, l'esperienza intrapresa secondo un metodo, la scienza, è un processo mai concluso di ricerca di conoscenza. Il tutto è come un orizzonte, del quale soltanto i bambini credono che se ne possa raggiungere il limite." La citazione di Höffe è tratta da Trombino (1998b, p.215). Si veda anche Höffe (1992, trad. it. §5.1).

in ambito della fisica, questa domanda, che ha acceso il dibattito filosofico sulla natura degli oggetti fisici, è ben lontana dal poter ricevere una risposta definitiva.

Formalmente si potrebbe argomentare ritenendo un oggetto come ciò che viene descritto da una teoria fisica o come un'assunzione su cui opera la teoria stessa.

Spesso una teoria nasce proprio per spiegare le caratteristiche ed il comportamento di un oggetto che viene osservato direttamente o indirettamente mediante le sue conseguenze su un certo tipo di esperimento.

Ad esempio un elettrone è un oggetto che può essere indagato non in maniera diretta ma mediante le conseguenze del suo comportamento all'interno di un dato esperimento. Le particelle elementari, gli oggetti descritti dalla fisica contemporanea, inoltre non sono tutte dotate di massa (si pensi ai neutrini o ai fotoni). Di più, secondo un ben noto principio della meccanica quantistica non è possibile determinare con esattezza posizione e velocità di una particella in un dato istante di tempo. Non si è in grado di seguirla con continuità nel corso del tempo. Per questi oggetti la persistenza attraverso il tempo sembra un concetto vuoto. Queste caratteristiche inducono in prima istanza a ritenere tali particelle oggetti non materiali o comunque bisognosi di ulteriori riflessioni filosofiche.

Uno scienziato, tuttavia, non può considerare questi oggetti estranei alla fisica in quanto sono davvero utili per poter produrre conoscenza e la loro assunzione consente di spiegare molti fenomeni. Un filosofo, dal canto suo, può però assumere una differente posizione affermando piuttosto che queste particelle sono finzioni concettuali, una sorta di caso limite di quegli oggetti fisici che

appartengono alla realtà di tutti i giorni (cioè quegli oggetti materiali intesi nel senso precedente)²¹.

La riflessione sulle particelle elementari potrebbe essere considerata come un'attività vuota che esula dalle ricerche e dagli argomenti propri al dibattito filosofico. Le particelle elementari (o oggetti microscopici) tuttavia non sono poi così estranee alla vita quotidiana, infatti gli oggetti macroscopici ne sono una composizione secondo i risultati delle nostre migliori teorie scientifiche, in particolare della meccanica statistica. Affermare che la speculazione filosofica su queste tematiche sia un'attività vacua è quindi molto ardito e grossolano.

Sembra dunque opportuno cercare una definizione generale più ampia di oggetto, che comprenda in particolar modo questi oggetti microscopici. Come nota giustamente Quine (1976b), per ottenere un concetto di oggetto materiale più ampio sarebbe necessario includere nella definizione anche i processi fisici, gli eventi e le particelle elementari²². La posizione di Quine infatti è quella di sviluppare una “evaporazione”²³ progressiva dall'oggetto fisico inteso come composto di materia collocata nello spazio-tempo a puro ente matematico dotato di specifiche coordinate numeriche. La matematica sembra allora il miglior strumento per poter definire un oggetto fisico: Si potrebbe infatti definire un oggetto come qualcosa di invariante rispetto a specifiche trasformazioni matematiche. In breve, gli oggetti sono quelle “cose” che verificano l'invarianza determinata da una data legge fisico-matematica.

²¹ Cfr. Castellani (1998a, pp. 4-5).

²² Cfr. Castellani (1998a, p. 4). Interessante la posizione di Morganti (2013) secondo cui il naturalismo tradizionale che elenca “le cose che esistono”, è destinato ad avere un esito fallimentare. Il naturalismo dovrebbe quindi essere di tipo liberale: nonostante non vi sia una certa continuità metodologica tra scienza e metafisica, quest'ultima dovrebbe però adottare il metodo empirico su cui si basano le scienze. In questo modo si va verso una naturalizzazione della metafisica di tipo aristotelico e non quineano.

²³ Cfr. Quine (1976b, pp. 502-504).

Come precedentemente affermato, l'estensione della nozione di oggetto fisico deve poter comprendere i risultati e le conquiste delle nostre migliori teorie scientifiche recenti, come quelle della teoria della relatività, della meccanica quantistica, della teoria dei campi e considerare il dualismo onda-particella che sarà trattato in seguito.

1. La questione della individualità

Supposto di possedere una buona definizione di oggetto, la questione dell'individualità diventa un tema centrale e fondamentale per poter maneggiare gli oggetti. La concezione più diffusa di individualità è centrata sulle proprietà spazio-temporali di un oggetto fisico, insieme alla proprietà di impenetrabilità e di persistenza lungo percorsi spazio-temporali²⁴. Ma alla luce di quanto affermato precedentemente, non si possono basare le nostre definizioni e concezioni solo su argomentazioni spazio-temporali. Come si può allora stabilire l'individualità di un oggetto fisico e distinguerlo dagli altri oggetti? Per rispondere a questa domanda, come nota Castellani (1998a, pp. 5-6) si hanno a disposizione due *strumenti* principali: La Mereologia e la ricerca di un principio di individualità.

La Mereologia è una disciplina filosofica che studia la relazione fra l'intero e le sue parti, incentrando le sue problematiche sulla composizione: Un oggetto (intero) può essere determinato completamente dalla somma degli elementi che lo costituiscono? O l'intero è più della somma delle sue parti? Il problema cruciale è:

²⁴ Cfr. French e Krause (2006, §1).

che cosa si intende per parti di un intero? Secondo David Lewis (1998) ci sono vari tipi di parti e non solo parti materiali: ci possono essere anche parti temporali, parti modali, parti controfattuali, ed altro ancora²⁵. È logico che questo tipo di riflessione si applica sia agli oggetti classici ordinari sia a quelli quantistici. Come si vedrà in seguito, proprio in meccanica quantistica vi è un significativo problema dovuto all'*entanglement* tra le particelle di un sistema che rende difficile poter distinguere le parti che compongono il sistema senza dover introdurre un elemento antiriduzionista. Quando vi è l'*entanglement* quantistico, infatti, due particelle che interagiscono fra loro formano un intero inseparabile, anche quando sono poste ad enorme distanza l'una dall'altra. Dal Big Bang fino ai nostri giorni, ogni particella ha certamente interagito con altre particelle, ragion per cui sembrerebbe logico ritenere l'intero mondo come un intero non separabile in parti (oggetti) fra loro indipendenti. Questa è una posizione fortemente olistica e di questo avviso è Tim Maudlin (1998) che sposa una tesi antiriduzionista secondo la quale la meccanica quantistica contiene un "ineliminabile olismo", per cui l'intero è più della somma delle parti che la compongono²⁶. L'intero manifesta quindi delle proprietà emergenti. Cioè vi sono proprietà di un oggetto inteso nel suo intero che non possono essere fissate dagli stati e dalle relazioni disposizionali delle parti che lo costituiscono. Tutto ciò è conflittuale con la dottrina metafisica del riduzionismo, che è notoriamente la posizione implicita nella pratica scientifica. Come si è già affermato, la posizione olistica afferma che l'intero mondo non può essere considerato solamente come una collezione di oggetti separati sulla base delle determinazioni spazio-temporali. La non separabilità

²⁵ Cfr. Lewis (1998, pp. 32 e ss.).

²⁶ Cfr. Maudlin (1998, pp. 46-60).

quantistica comporta una profonda discrepanza rispetto alla nozione classica (e anche relativistica) di spazio²⁷.

La seconda strada che è possibile percorrere per comprendere l'individualità di un oggetto è quella della ricerca di un efficace principio di individualità e identità che sia resiliente rispetto alle continue rivoluzioni che si avvicendano nell'ambito della scienza e che sarà sviluppata nella parte centrale di questa tesi²⁸.

Sembra quindi necessario conoscere più a fondo le recenti teorie scientifiche della fisica in particolar modo la meccanica quantistica. Si sospenda quindi al momento la ricerca di un principio di individualità e identità valido in ogni contesto fisico e ci si addentri in un lungo *excursus* sulla meccanica quantistica non relativistica e nella statistica quantistica. Alla fine di ciò si disporrà di sufficienti elementi che saranno utili a illustrare i contenuti di originalità di questa tesi.

²⁷ Cfr. D'Espagnat e Klein (1993, p. 174) citato in Toraldo di Francia (1998, p. 28).

²⁸ Si sono considerate sia la Mereologia sia la ricerca di un principio di individualità come due strade principali per stabilire l'individualità di un oggetto fisico, tuttavia non sono alternative si pensi ad esempio a questioni di individualità di entità mereologicamente semplici. La Mereologia e la ricerca di un principio di individualità sono piuttosto due questioni distinte.

III. INTRODUZIONE AI FONDAMENTI DELLA MECCANICA QUANTISTICA: ASPETTI MATEMATICI, FISICI E FILOSOFICI

1. I principi della meccanica quantistica

La meccanica quantistica si basa sui seguenti principi formalizzati in termini matematici, che vengono enunciati rimandando per un ulteriore approfondimento a Akhiezer e Glazman (1981, vol I, vol II), Birman e Solomjak (1987), Galindo e Pascual (1989), Graffi (1993, 2003), Kato (1976), Merzbacher (1961), Naimark (1968a, 1968b), Reed e Simon (1978) e alle opere magistrali di Auletta, Fortunato, Parisi (2009) e Auletta e Wang (2014):

1) Sia $Q \subseteq R^n$ lo spazio delle configurazioni della fisica classica. Lo spazio degli stati del sistema in meccanica quantistica è lo spazio di Hilbert $L^2(Q)$ ²⁹, spazio delle funzioni a quadrato sommabile. Ad ogni istante di tempo t , un generico stato del sistema sarà un vettore (funzione) $\psi(q,t) \in L^2(Q)$ con $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$. Questa prima ipotesi è fondamentale e prende il nome di *Principio di sovrapposizione*: il termine sovrapposizione esprime il fatto che se ψ_1 e ψ_2 ($|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ se si preferisce la notazione con le parentesi di Dirac) sono due stati del

²⁹ Uno spazio di Hilbert è una coppia (H, \langle, \rangle) con H spazio vettoriale reale o complesso, \langle, \rangle prodotto scalare su H tale che detta d la distanza da esso indotta su H , lo spazio metrico (H, d) sia completo.

sistema, allora una qualunque combinazione lineare complessa $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ sarà ancora uno stato del sistema $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, per le proprietà dello spazio $L^2(Q)$ che è uno spazio vettoriale. Questa proprietà di $L^2(Q)$ segna una profonda differenza dalla meccanica classica: se si prendono due soluzioni dell'equazione di Hamilton o di Lagrange e se ne fa una combinazione lineare non è sempre vero che questa sia ancora una soluzione del sistema.

2) Non si può affermare che il valore che una grandezza fisica può assumere in un dato istante sia determinato. Si può solo fornire una distribuzione di probabilità. Sia $\Omega \subseteq Q$ un sottoinsieme delle possibili configurazioni Q , allora la probabilità che la configurazione q del sistema sia in Ω all'istante t è data da:

$$\frac{\int_{\Omega} |\psi(q,t)|^2 dq}{\int_Q |\psi(q,t)|^2 dq} \in [0,1].$$

Se questo rapporto è uguale a 1 si ha la certezza che $q \in \Omega$.

3) *Principio di corrispondenza*: Ad ogni $a(p,q)$ osservabile fisica associata al sistema corrisponde uno ed un solo operatore autoaggiunto A in $L^2(Q)$. Sia X uno spazio di Hilbert e siano S e T due operatori in X . Essi si dicono aggiunto formale l'uno dell'altro se $\langle v, Tu \rangle = \langle Sv, u \rangle \quad \forall u \in D(T), \quad \forall v \in D(S)$. Dalla densità di $D(T)$ in X , si può dimostrare che esiste un unico operatore massimale T^* , che ha la proprietà di estendere tutti gli operatori aggiunti formali di T . Ciò significa che se S è un aggiunto formale di T , allora $S \subset T^*$. T^* si definisce anche come l'operatore aggiunto di T .

L'operatore T ha la proprietà di essere simmetrico se $T \subset T^*$, autoaggiunto se $T = T^*$. Si può inoltre dimostrare che se un operatore simmetrico e limitato allora esso è autoaggiunto.

Una rappresentazione delle regole di commutazione canonica è una costruzione di questa associazione fra osservabili e operatori autoaggiunti che rispetta alcuni risultati della meccanica classica, in particolar modo le regole di commutazione canonica:

Siano $u(p, q)$ e $v(p, q)$ due osservabili classiche la funzione

$$\{u, v\} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial v}{\partial q_k} \frac{\partial u}{\partial p_k} \right),$$

si chiama parentesi di Poisson ad esse associate. Si può verificare facilmente la seguente regola di commutazione:

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Affinché ogni rappresentazione delle regole di commutazione canoniche rispetti questa equazione, dovrà soddisfare la seguente condizione:

$$[U_i, P_j] = i\hbar \delta_{ij} I, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n,$$

dove U e P sono gli operatori autoaggiunti associati rispettivamente a q e p e le parentesi $[,]$ rappresentano l'operatore commutatore che agisce su U e P in questo modo $[U_i, P_j] \equiv U_i P_j - P_j U_i$. Infine I è l'operatore identità e \hbar è la costante di Planck.

Dal teorema di unicità di Weyl-von Neumann è noto che, a meno di equivalenze unitarie, gli operatori P e U sono unici e definiti in questo modo:

$$P_j = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_j}, \quad U_i = \text{operatore massimo di moltiplicazione per } q_i.$$

Per costruire l'operatore autoaggiunto A associato ad una generica osservabile $a(p, q)$, basterà formalmente sostituire a p_j l'operatore P_j e a q_i l'operatore U_i in questo modo:

$$A \equiv a(P_1, \dots, P_n, U_1, \dots, U_n).$$

Inoltre si dovrà poi determinare un opportuno dominio in $L^2(Q)$ in cui l'espressione differenziale A realizza l'autoaggiunzione.

Il ruolo dell'operatore commutatore è estremamente importante in quanto secondo la meccanica quantistica affermare che due osservabili possono essere misurate contemporaneamente equivale a dire che i corrispondenti operatori autoaggiunti commutano cioè $[A, B] = 0$.

Da questa proprietà del commutatore si può enunciare il principio di indeterminazione di Heisenberg in questa forma: $[P, Q] = -i\hbar$. Non è quindi possibile misurare simultaneamente posizione q e velocità p di una singola particella.

4) Sia X uno spazio di Hilbert e sia T un operatore chiuso in X . Lo spettro dell'operatore T coincide con l'insieme degli autovalori di T se $\dim X$ è finita, altrimenti è il complementare sul campo complesso C dell'insieme risolvente cioè l'insieme degli $z \in C$ tali che $[T - zI]^{-1}$ è un operatore lineare continuo su X . I valori possibili che può assumere una grandezza fisica in seguito ad un processo di misurazione sono tutti e soli i punti dello spettro $\sigma(A)$ del rispettivo operatore autoaggiunto.

5) Ogni vettore dello spazio di Hilbert è un autostato di un opportuno operatore, quest'ultimo non necessariamente rappresenta un'osservabile fisica. In questo

senso abbiamo un surplus di struttura matematica dovuto alla formalizzazione e alla costruzione della teoria stessa.

6) L'attore protagonista che recita il ruolo principale nello studio del moto del sistema è rappresentato dall'operatore di Schrödinger che è l'operatore associato all'energia totale $H(p,q)=T(p)+V(q)$ del sistema. Tale operatore ha la forma $H \equiv -\text{cost} \cdot \Delta + V$ dove Δ è il laplaciano³⁰ in $L^2(Q)$ e V è l'operatore massimo di moltiplicazione per la funzione energia potenziale. Dopo aver determinato il dominio dell'operatore di Schrödinger in cui esso realizza l'autoaggiunzione e successivamente il suo spettro, sarà possibile ottenere i valori che la grandezza fisica energia totale del sistema potrà assumere. L'operatore di Schrödinger è importante anche per altri aspetti: se $\psi_0(q) \in L^2(Q)$ rappresenta lo stato del sistema all'istante iniziale allora gli stati $\psi(q,t) \in L^2(Q)$ del sistema a generici istanti t , cioè l'evoluzione temporale del sistema, sarà dato dalla soluzione dell'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo:

$$H\psi(q,t) = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(q,t)$$

con la condizione iniziale $\psi(q,0) = \psi_0(q)$.

Si può concludere che la teoria matematica su cui basano i fondamenti della meccanica quantistica, è la teoria degli operatori lineari negli spazi di Hilbert, in particolare modo le colonne portanti sono la teoria degli operatori lineari autoaggiunti e la loro analisi spettrale.

³⁰ L'operatore laplaciano o semplicemente laplaciano, è definito come la divergenza del gradiente di una funzione. Ciò significa che è la somma delle derivate parziali seconde non miste.

2. Breve cenno sulla struttura della scienza nell'ambito della fisica pre-quantistica³¹

La teoria della meccanica quantistica si è affermata soprattutto per i suoi ampi successi predittivi e per la vastità delle applicazioni che ha portato. Molti sono gli scienziati che nel corso del secolo scorso hanno contribuito alla nascita e allo sviluppo di tale teoria. In questa sezione si propone brevemente un inquadramento storico della teoria, della sua genesi e dei suoi sviluppi.

La società moderna nasce dall'applicazione delle teorie dell'elettromagnetismo del XIX secolo che rapidamente hanno portato ad un progresso civile sensibile. Tali teorie segnano un passo positivo nello sviluppo delle condizioni di vita dell'umanità. D'altra parte la meccanica quantistica agli inizi del XX secolo non nasce sotto una buona stella: si pensi ad esempio allo sviluppo della bomba atomica e della controversa energia nucleare e delle centrali da cui tale energia viene ricavata per scopi civili. Ma al di là degli scopi pratici di tale teoria, la meccanica quantistica viene alla luce con dei fondamenti filosofici ricchi di profonde contraddizioni. Come notava il fisico Richard Feynman, a proposito dell'esperimento sull'attraversamento della "doppia fenditura" da parte di fotoni, "è tutto assolutamente misterioso e più ci riflettiamo più ci appare misterioso"³².

Secondo la meccanica classica, che è anche la meccanica dei macro-oggetti, la

³¹ Ringrazio per questo excursus sui fondamenti della meccanica quantistica i professori Gino Tarozzi e Vincenzo Fano, per i loro seminari formativi al riguardo e per le lunghe discussioni sui temi che sono esposti.

³² Citato in Tassani (2013, p. 7). La posizione di Feynman è solo parzialmente vera perché i problemi più misteriosi e drammatici si incontreranno nel paradosso di Einstein, Podolski e Rosen (EPR).

natura è composta da radiazioni e da particelle materiali. A livello microscopico, cioè a livello elementare, la natura sembra comportarsi in modo ambiguo: Un esempio è dato dall'esperimento precedentemente citato. Vi è una sorta di inaccessibilità della natura e non si riesce a trovare una teoria che abbia un potere esplicativo maggiore della meccanica quantistica. Inoltre la meccanica quantistica viola apparentemente il principio di causalità, quel principio su cui poggia la fisica classica e il pensiero razionale in generale, comprese la teoria della relatività ristretta e generale.

A proposito di questa ambiguità del comportamento delle particelle elementari, i padri fondatori della meccanica quantistica affermavano che fosse necessario rassegnarsi alla contrapposizione onda-particella, cioè che bisognasse tenersela³³. Quindi i grandi misteri della fisica nascevano nel XIX secolo dall'esperimento della doppia fenditura che mostrava il problema sulla natura dei differenti comportamenti della luce. Questo esperimento segna una profonda rottura con la tradizione della fisica classica.

Nella cosmologia aristotelico-tolemaica, la quale fece da base alla fisica tardo-antica e medioevale, ad una differenza di natura, ad esempio quella tra oggetti celesti e terrestri, corrispondeva un differente comportamento fisico. Grazie a Galileo si riuscì a comprendere che gli oggetti astronomici si comportavano esattamente come gli oggetti terrestri e con Newton si completò il quadro attraverso le sue leggi: leggi che permettevano l'attrazione gravitazionale (azioni a distanza) tra le masse e che prevedevano velocità infinite per oggetti sottoposti all'azione di una forza costante. Nella relatività galileiana inoltre non vi è un

³³ Cfr. Tassani (2013, §1) e Tarozzi (1992, §1).

sistema fisico privilegiato (si pensi all'esperimento ideale in sottocoperta di un naviglio) mentre in Newton il principio di relatività vale solo empiricamente perché vi è un sistema fisico privilegiato: lo spazio assoluto³⁴.

Galileo ha una concezione che sostiene l'esistenza di leggi di natura che possono essere scoperte attraverso i nostri strumenti teorici, nella fattispecie la matematica: queste leggi esistono ed il sommo creatore le conosce tutte, quasi fosse un demone di Laplace antesignano. Vi è in questa concezione galileiana una congiunzione tra l'elemento empirico, la sensata esperienza, e l'elemento razionale, la matematica, e questa congiunzione è rappresentata dalla misurazione che amplia, estende l'ambito conoscitivo dell'uomo che fa scienza. La matematizzazione dei fenomeni attribuisce ad una data qualità un determinato numero e da questa associazione si osserva una buona corrispondenza tra l'evoluzione del fenomeno fisico, che si sta analizzando, e i risultati numerici ottenibili dalla matematica che descrive il fenomeno. Così, con le procedure di misurazione, si è sviluppata la fisica dei corpi terrestri (ad esempio la balistica) con le sue approssimazioni dovute alla strumentazione utilizzata. Contrapposta a questa scienza di tipo sperimentale si colloca quella di tipo osservativo, come l'astronomia; in tale disciplina non si interagisce con gli oggetti che vengono misurati e i fenomeni possono essere osservati ponendosi dentro il sistema costruendo una scienza di tipo osservativo piuttosto che sperimentale.

Con Galileo la scienza si appropria delle "sensate esperienze" cioè di quell'atteggiamento dello scienziato che non è solo di tipo osservativo ma anche interrogativo. Una posizione simile la assume Kant e tutta la fisica matematica

³⁴ Ci volle l'apporto della relatività generale per superare le limitazioni che mostrava la meccanica classica che si esprimevano in mancanza di spiegazione ad alcuni fenomeni osservati.

successiva: le leggi matematiche sono certe e necessarie cioè stabilite una volta per tutte. Si potrebbe definire questo atteggiamento della scienza come un atteggiamento residuale di una certa metafisica, perché ricerca una certezza assoluta. Per Galileo è necessario descrivere i fenomeni (cioè le quantità), rinunciando a capire le ragioni ultime dei fenomeni (citando la frase “non tentar l’essenza”), ottenendo delle conoscenze certe attraverso leggi matematiche. Newton, dal canto suo, ha l’idea di una natura contingente: la scienza ha un fondamento empirico basato su osservazioni, nulla vieta che possa essere contraddetta, ed il tempo ha carattere necessario. Grazie agli studi di Newton si sono sviluppati altri importanti settori della fisica: uno di questi è l’ottica. Newton aveva mostrato che la luce bianca era formata dai sette colori dell’iride su base sperimentale: la famosa ingiunzione *hypotesis non fingo*, cioè “non faccio ipotesi” riferito alla natura della gravità è l’esempio di come le ricerche sperimentali ricevano una grande importanza nello sviluppo della fisica.

Un altro settore sviluppato dalle speculazioni newtoniane è stato quello che ha dato origine alla fisica matematica, alla matematizzazione della natura dei “*Principia*”, ampiamente sviluppata successivamente dai fisici matematici come Lagrange, Hamilton, Laplace ed altri.

2.1. La struttura della scienza nell’ambito della fisica quantistica

Si ritorni ora all’esperimento della doppia fenditura e alla sua importanza sperimentale. Nell’esperimento della doppia fenditura si nota come a livello

elementare la distinzione tra materia e radiazione sembra cadere. Infatti la natura ondulatoria della luce spiega l'interferenza che si registra sulla lastra fotografica quando le due fenditure non sono coperte, mentre la natura corpuscolare spiega le distribuzioni che si registrano sulla lastra quando, alternativamente, una delle due fenditure viene coperta. La particella quando viene registrata è un ente localizzato mentre l'onda è un ente diffuso. Questo dilemma onda-particella è centrale in Niels Bohr. Louis Victor Pierre Raymond de Broglie aveva ipotizzato che ci fosse una compresenza tra queste due nature, un'onda esterna che pilotasse il corpuscolo: è l'ipotesi dell'onda pilota, il corpuscolo verrebbe trascinato dall'onda. Ma la presenza di un rivelatore sulla lastra permette di distinguere il percorso seguito dalla particella, e questo di volta in volta viene univocamente determinato, per cui sembrerebbe più lecito parlare di onde virtuali o addirittura di onde fantasma. La cosa da sottolineare è che la misurazione del comportamento della particella modifica il fenomeno di interferenza: questo aspetto non si era mai registrato nella fisica classica. Con la teoria della matematizzazione della radiazione, cioè la radiazione di Maxwell, si scoprì che la luce era una banda dello spettro elettromagnetico. L'elettromagnetismo sembrava ormai una teoria che avrebbe completato la spiegazione dei fenomeni e che aveva portato, come si diceva all'inizio di questa trattazione, progresso civile. Eppure l'elettromagnetismo entrò in crisi e ciò fu dovuto fra l'altro all'incapacità della teoria di spiegare l'effetto fotoelettrico: non era l'intensità numerica dei fotoni la causa che produceva l'espulsione degli elettroni da una superficie metallica. Max Planck notò che certi fenomeni non potevano essere spiegati con la teoria dell'elettromagnetismo, da qui la nascita della definizione del postulato

quantistico fondamentale che violava quel “dogma” (motto) su cui poggiava la tradizione della scienza *Natura non facit saltus*, cioè una continuità nei fenomeni naturali. L’energia si trasferisce in modo discontinuo. Come è noto l’energia di un quanto è pari a $E = h\nu$, con $h = 6,626 \cdot 10^{-34} J \cdot s$ costante di Planck (o quanto di azione) e ν la frequenza del quanto. Successivamente Albert Einstein formulò l’ipotesi dei quanti di luce, secondo la quale la radiazione è composta da corpuscoli.

Mentre la meccanica quantistica muoveva i primi passi, la scienza torna a basarsi sempre più su una concezione interazionistica della scoperta: ogni fenomeno fisico implica un’interazione, ovvero uno scambio di azione tra ciò che viene osservato e l’osservatore (lo sperimentatore). Questi scambi interazionistici della realtà nella realtà portano però a qualcosa di poco controllabile: si pensi ad una interazione con un oggetto di dimensioni molto piccole, una piccola modifica interazionistica perturba lo stato fisico dell’oggetto, sia esso rappresentato mediante posizione e impulso, o velocità ed energia. Si possono quindi avere interazioni non controllabili, per cui la natura nella sua interezza non può essere osservata del tutto. Come si è visto, Planck ipotizzò che la struttura è descritta dall’indivisibile quanto di azione, minando la teoria classica della radiazione con una meccanica corpuscolare che mostra il carattere discontinuo della radiazione.

Ma se la radiazione a livello elementare ha carattere duplice, si potrebbe pensare che anche per la materia vi debba essere una meccanica ondulatoria che associ ad una data materia una certa lunghezza d’onda. Da qui l’idea di De Broglie di una teoria ondulatoria della materia che mostrasse a livello elementare anche il comportamento ondulatorio della materia, unificando i fenomeni. Il vero sviluppo

di una meccanica ondulatoria però si deve a Erwin Schrödinger (1926a, 1926b, 1926c): Se si prende ad esempio l'esperimento della doppia fenditura e si assegnano due oggetti matematici $|\psi_A\rangle$ e $|\psi_B\rangle$ ³⁵ rispettivamente alla particella che attraversa le fenditure A e B, è noto che $|\psi_A + \psi_B|^2$ è la probabilità di arrivo del fotone sullo schermo in base al principio di sovrapposizione³⁶. Tuttavia la probabilità di arrivo sullo schermo potrebbe anche potersi scrivere come la somma della probabilità che la particella passi per A o che la particella passi per B, cioè $|\psi_A|^2 + |\psi_B|^2$. Da semplici calcoli algebrici però si ricava che $|\psi_A + \psi_B|^2 \neq |\psi_A|^2 + |\psi_B|^2$. La matematica giustifica il motivo per cui si è scelto di descrivere in un certo modo il fenomeno ma non lo spiega.

Vi è inoltre una incapacità di misurare due grandezze per definire lo stato completo del sistema. La misurazione assume in meccanica quantistica un ruolo decisivo: la misurazione in meccanica quantistica è un'interazione.

In meccanica quantistica vi è un carattere reciprocamente esclusivo tra grandezze coniugate (si pensi a posizione e quantità di moto) che sono quelle che definiscono il sistema in maniera completa³⁷. In questo caso una coppia di grandezze coniugate diventa priva di significato ma non singolarmente. A questo proposito, vi sono due diverse concezioni di questa reciprocità esclusiva:

³⁵ Questo formalismo verrà spiegato nelle successive sezioni.

³⁶ Si illustrerà e si discuterà questo principio nell'apposita sezione di questa tesi dedicata ai principi e ai postulati della meccanica quantistica.

³⁷ Il principio di complementarità di Bohr è riconducibile a quello di indeterminazione. Einstein aveva esteso la relatività galileiana anche all'elettromagnetismo, estendendo anche l'invarianza e facendo cadere la concezione di spazio e tempo assoluto di Newton e anche della simultaneità assoluta. Il concetto di simultaneità cambia per sistemi che si muovono rispetto ad un sistema fermo solidale con un certo osservatore.

- 1) La concezione neopositivista, secondo la quale non ci sono piani ontologici, vi è assenza di conoscenza. Questa concezione prende posizione contro il piano conoscitivo. In un certo senso questa è la posizione di Werner Karl Heisenberg (si pensi al principio di indeterminazione). Nel caso in cui le grandezze coniugate siano posizione e quantità di moto, secondo tale concezione, la traiettoria del sistema è inconoscibile.
- 2) La concezione ontologica che afferma che l'oggetto non ha per natura una posizione ben definita. Questo principio è liberale rispetto alla fisica classica: un oggetto è in tutti gli stati in cui può essere trovato, non è localizzato e si sovrappone, non è oggettivizzabile però evolve deterministicamente e si localizza quando osservato, in questo caso si ha la riduzione della funzione d'onda³⁸, in maniera istantanea (in parziale contrasto con la teoria della relatività) e acausale. Tuttavia il collasso della funzione d'onda sembra un postulato *ad hoc*, in von Neumann (1932) si distinguono due evoluzioni: una automatica regolata dall'equazione d'onda di Schrödinger e una indistinta e acausale regolata dalle transizioni discontinue che avvengono ogni qual volta si compie una misurazione sul sistema. Nel caso in cui le grandezze coniugate sono posizione e quantità di moto, secondo tale concezione, la traiettoria del sistema non esiste.

Paul Dirac in “*The Principles of Quantum Mechanics*” (1929) afferma che il principio di indeterminazione è un elemento negativo della teoria quantistica,

³⁸ Per un approfondimento sulle spiegazioni della riduzione della funzione d'onda si veda Appendice di questa tesi.

mentre il principio di sovrapposizione è un elemento positivo. Il problema di questa transizione da un valore indeterminato al valore misurato da cosa è quindi descritta? Sembra sensato includere nella catena che porta alla misura anche l'apparato misuratore. In von Neumann³⁹ c'è l'idea secondo la quale o vi è qualcosa di extra-fisico che rompe la sovrapposizione quantistica e determina un valore misurato finito, come la coscienza dello sperimentatore che fa emergere l'acausalità della teoria, oppure è necessario riformulare completamente la teoria per eliminare l'acausalità. Il postulato quantistico sul quanto d'azione e il principio di indeterminazione portano alla conclusione che non sia possibile stabilire le condizioni iniziali di una coppia di osservabili coniugate: in questo terreno il determinismo di Laplace (1814) cade, si dimostra l'inapplicabilità del concetto deterministico (e di quello di causalità) dentro i contenuti teorici della meccanica quantistica. Tuttavia il determinismo non viene confutato, perché per la legge della logica se le premesse di un enunciato sono false allora l'enunciato è sempre banalmente vero: la conoscenza delle condizioni iniziali è un'ipotesi falsa. Il principio di complementarietà di Bohr del 1927 mette in evidenza che non è possibile avere una rappresentazione corpuscolare e ondulatoria di un sistema di micro-oggetti⁴⁰. C'è una forte complementarietà che si estende a concetti che sono reciprocamente esclusivi. Se si vuole definire lo stato di un sistema lo si deve poter osservare, ma questo però implica l'interazione con un apparato di misurazione a causa del principio di Planck e quindi lo stato non è più quello che si voleva osservare.

³⁹ Cfr. Tarozzi (1992, §2).

⁴⁰ In un recente esperimento si mostra il contrario. Piazza *et al.* (2015) hanno mostrato una prova incontrovertibile della doppia natura della luce.

Supponiamo di voler definire lo stato con una rappresentazione spazio-temporale: Si può determinare una descrizione realistica di un sistema ma al costo di perdere quella causale. La misurazione della posizione è perturbativa rispetto all'energia, quella dell'energia è perturbativa rispetto alla posizione. Si ha la violazione del principio di causalità cioè la causalità è incompatibile con la struttura di coordinate spazio temporali. Secondo Bohr⁴¹ non si può combinare insieme il realismo della meccanica quantistica con la causalità.

La meccanica quantistica viola il principio di causalità anche in altri sensi: In particolare, il principio di uniformità della natura di Hume⁴² afferma che a parità di cause si ottengono gli stessi effetti: i fenomeni radioattivi sono fenomeni naturali in cui si osservano atomi di una certa sostanza decadere (cioè cambiare massa atomica) e le particelle della sostanza che decade sono tutte descritte dalla stessa funzione d'onda ψ , ma quale meccanismo permette ad una particella di decadere oppure no?⁴³

La meccanica quantistica sostiene che prima che una particella si localizzi acasualmente, essa sia in un certo senso presente ovunque. Nel momento della localizzazione sparisce da tutto il resto. Quindi se si assume che il decadimento sia spontaneo e acasuale (come afferma l'interpretazione ortodossa), si viola il principio di causalità della natura. Si potrebbe anche argomentare che le cause del decadimento siano nascoste (come afferma l'interpretazione delle variabili

⁴¹ Cfr. Tarozzi (1992, §1.3).

⁴² Questo principio che vedeva una certa regolarità nella natura, fu indebolito da John Stuart Mill che, su base induttiva, voleva spiegare le leggi della fisica.

⁴³ La meccanica quantistica descrive i processi di decadimento radioattivi ma non si pone come una teoria statistica bensì come una teoria probabilistica. Esiste tuttavia una interpretazione statistica della teoria che informa l'osservatore sulla probabilità che una particella si possa trovare in seguito ad una misurazione in una regione dello spazio.

nascoste) e che siano legate a delle variabili ignote. Se ciò fosse vero allora la meccanica quantistica sarebbe una teoria non completa.

La meccanica quantistica viola anche il principio di causa-effetto. La causa e l'effetto sono solo parole per rappresentare oggetti contigui, la causa precede l'effetto e non avviene a distanza. In meccanica quantistica ci sono degli esperimenti come quello della scelta ritardata di John Archibald Wheeler (proposti nel 1978 e nel 1984), che sovvertono questo principio e le cui spiegazioni tirano in ballo fenomeni di retrocausazione⁴⁴.

Gli esperimenti “*Both routes*” e “*Which route?*”⁴⁵, oltre a sottolineare la complementarità tra comportamento ondulatorio e corpuscolare delle particelle, mostrano che se l'osservatore interagisce con il sistema può con una scelta nel futuro cambiare il passato del sistema⁴⁶: la scelta dello sperimentatore comporta una modificazione dell'universo stesso. L'universo non esiste se non in presenza dello sperimentatore che in un certo senso lo crea. Vi è quindi apparentemente una violazione quantistica del realismo empirico di Carnap secondo il quale “se tutte le menti (o gli esseri viventi) scomparissero dall'universo le stelle proseguirebbero nel loro cammino”⁴⁷.

⁴⁴ Gli esperimenti proposti da Wheeler sono stati realizzati fisicamente. Un riassunto di tutti i risultati sperimentali ottenuti può essere letto nell'esperimento di Ma *et al.* (2013). Le conclusioni di questo esperimento mostrano come la disgiunzione esclusiva tra comportamento ondulatorio e corpuscolare di un quanto sia da abbandonare, poiché per spiegare i risultati ottenuti degli esperimenti fisici sarebbero necessarie comunicazioni superiori alla velocità della luce, in forte contrasto con la teoria della relatività speciale.

⁴⁵ Cfr. Tarozzi (1992, pp. 42-43).

⁴⁶ La retrocausazione mostrate dagli esperimenti a scelta ritardata è certamente una possibilità interpretativa. Certamente tali esperimenti sottolineano l'impossibilità di interpretare l'evidenza empirica su basi concettuali legati al senso comune.

⁴⁷ “*If all minds (or: living beings) should disappear from the universe, the stars would still go in their courses*” (Carnap 1937, pp. 37).

3. Le due scuole “quantistiche”

Come precedentemente affermato la meccanica quantistica è una teoria che deve il suo sviluppo a diversi scienziati⁴⁸. In meccanica quantistica ci sono due trattati diversi che espongono la teoria e che non sono nemmeno dovuti agli stessi padri fondatori. Inoltre vi è una contrapposizione fra due diverse scuole: una legata alla interpretazione non standard dovuta alla scuola di Berlino usando una definizione di Franco Selleri⁴⁹, e l'altra legata alla interpretazione standard dovuta alla scuola di Copenhagen-Göttinga, cui facevano parte Niels Bohr, Arnold Sommerfeld, Max Born. Quest'ultimo è celebre per l'interpretazione probabilistica della funzione d'onda. Per Max Born la funzione d'onda non descriveva sé stessa, non era un'onda vera e propria come la considerava Erwin Schrödinger, ma dava una descrizione corpuscolare intrappolata dalla probabilità.

Come si argomentava precedentemente, la meccanica quantistica mostra un carattere discontinuo. L'idea della continuità nei fenomeni naturali viene descritta matematicamente da Newton e ripresa dai fisici matematici successivi, tra i quali Jacobi, e basata sul calcolo differenziale che poggia sulla nozione di continuità matematica. Anche l'equazione di Schrödinger è un'equazione differenziale e quindi vi è un elemento di continuità nel mare della discontinuità quantistica. Tale equazione fu accettata a fatica dalla interpretazione ortodossa, perché aveva una descrizione matematica continua diversa da quella elaborata dalla scuola di

⁴⁸ A differenza della meccanica classica il cui padre fondatore è Newton con i suoi “*Principia*” o dell'elettromagnetismo il cui fondatore è Maxwell con le sue equazioni.

⁴⁹ La definizione si origina dal fatto che la cattedra di fisica teorica nasce per la prima volta a Berlino con Planck, si avvicenderanno su questa cattedra Einstein e poi Schrödinger sostenitori della interpretazione non standard della teoria e che non accettavano, per ragioni filosofiche culturali, l'interpretazione ortodossa di Copenhagen-Göttinga. Cfr. Tassani (2013).

Gottinga. I fisici di Gottinga erano meno favorevoli alla vecchia tradizione della fisica classica che richiedeva una rappresentazione spazio temporale regolata dal principio causale. La meccanica quantistica ortodossa rinuncia in alcuni casi o alla rappresentazione spazio temporale o al principio causale o a tutti e due. Il principio di complementarità di Bohr afferma che se si vuole una rappresentazione basata sulle leggi di conservazione è necessario rinunciare alla rappresentazione spazio temporale, se si vuole mantenere una rappresentazione spazio temporale invece è necessario rinunciare al nesso causale. Cioè realismo e causalità sono due principi non contemporaneamente sostenibili. Ancor più radicale l'interpretazione di Heisenberg che rinuncia ad entrambi i principi.

Planck, Einstein e Schrödinger, non erano affatto in sintonia con queste concezioni della scuola di Copenaghen-Gottinga: la scuola di Berlino manteneva invece una "fedeltà" al realismo, con qualche varietà: ad esempio per Planck, influenzato dalla filosofia kantiana, era irrinunciabile il principio causale, ammesso ma non concesso che se si fosse dovuto rinunciare a qualcosa allora si sarebbe potuto rinunciare al realismo ma non al principio causale. Per Einstein la meccanica quantistica non era per così dire "l'ultima parola" e da un certo momento in avanti della sua carriera (dal 1915 in poi) aveva maturato l'idea che fosse necessaria una nuova teoria quantistica.

4. Il problema della separabilità

Le maggiori preoccupazioni di Einstein rispetto alla meccanica quantistica sono legate al problema della non separabilità⁵⁰, problema che getta un'ombra non solo sulle teorie di campo come quella della relatività di Einstein ma anche su ogni teoria fisica, in quanto la separabilità, secondo Einstein, è una condizione necessaria dal punto di vista teorico. La posizione di Einstein sulla teoria quantistica è opposta a quella di Bohr. Secondo Don Howard (2015) Einstein in aperto contrasto con la posizione di Bohr, attraverso l'uso di esperimenti mentali (ad esempio il famoso fotone nella scatola), cercava di mostrare un contro-esempio al principio di indeterminazione di Heisenberg. Bohr dal canto suo ha smontato questa pretesa da parte di Einstein. Da questa considerazione pare che Einstein abbia maturato l'idea che la meccanica quantistica fosse una teoria non completa. Howard invece afferma proprio il contrario, cioè che Einstein non incominciò a sviluppare l'ipotesi della incompletezza della meccanica quantistica solo dopo i fallimenti dei suoi contro-esempi. Einstein si era accorto della dipendenza tra i costituenti un sistema quantistico nella statistica che aveva formulato con Bose nel 1924-1925⁵¹, dove appare chiara la crisi dell'indipendenza classica applicata ai sistemi quantistici interagenti. Come si mostrerà nelle critiche di Einstein a Planck, Einstein aveva accettato che la formula di Planck sulla radiazione del corpo nero non potesse essere ricavata supponendo che i quanti si

⁵⁰ La non separabilità in meccanica quantistica si può definire come la proprietà secondo cui gli stati quantistici di due sistemi fisici sono reciprocamente dipendenti, modificazioni dello stato del primo sistema fisico comportano alterazioni istantanee nel secondo sistema a prescindere dalla loro collocazione spaziale.

⁵¹ La statistica di Bose-Einstein sarà trattata nel capitolo successivo.

comportino come semplici molecole indipendenti il cui moto fosse descritto dalla meccanica statistica classica: Tutto ciò nasceva dall'ipotesi che le particelle microscopiche fossero degli enti ben definiti e indipendenti fra di loro, oggetti della fisica e che quindi dovessero soddisfare la separabilità (*Trennungsprinzip*, principio di separazione). Altre problematiche nascevano poi dall'intrinseca indeterminatezza della teoria quantistica e dal problema della misura. A tal proposito Howard (2015) mette in risalto che lo scopo di Einstein fin dall'inizio fosse quello di mostrare come la non separabilità della meccanica quantistica se applicata a sistemi supposti separabili, mostrasse chiaramente la sua caratteristica di essere una teoria incompleta.

5. Il ritorno del problema: che cos'è un oggetto?

Tornando di nuovo all'esperimento della doppia fenditura, in un primo tempo la dualità onda-corpuscolo, limitata alla discontinuità della radiazione, sembrava condurre verso una fisica di tipo corpuscolare: nel 1926 ad esempio Born cerca di sviluppare una fisica delle particelle. Di parere più radicale Werner Karl Heisenberg e Pascual Jordan, nella convinzione che la realtà microscopica fosse inaccessibile, sostenevano che una concettualizzazione in termini di visualizzazione classica, cioè in qualcosa che rispecchiasse le forme della fisica newtoniana, non avesse alcun senso. Gli oggetti microscopici non sono gli stessi della fisica classica, né onde né corpuscoli, sono oggetti del tutto nuovi: Quali? La risposta non è così chiara, si potrebbe argomentare che sono oggetti matematici,

come ad esempio la funzione d'onda che descrive lo stato di un sistema fisico, una funzione che esplicita dal punto di vista matematico delle correlazioni tra i risultati delle nostre osservazioni.

Eugene Paul Wigner riformula la meccanica quantistica come una teoria delle osservazioni: Non c'è più una funzione d'onda ψ , ci sono solo delle correlazioni tra i risultati delle osservazioni. In questo modo però la teoria fisica diventa teoria cognitiva e profondamente soggettivista quasi del tutto separata dal mondo fisico.

La soluzione più accettabile è quella che emerge dal principio di complementarità di Bohr: per comprendere la fisica dei micro-oggetti, e per la rappresentazione del fenomeno, si ha bisogno di immagini legate alla fisica classica tuttavia questa immagine è contraddittoria (si pensi ancora alla dualità onda-particella). Si potrebbe allora considerare una via intermedia tra onda e particella e che le descrizioni non possano coesistere pienamente all'interno della stessa situazione fisica. Altre interpretazioni della complementarità dovute a Heisenberg, Jordan, Pauli sostenevano invece o l'una o l'altra rappresentazione dell'oggetto microscopico, una descrizione esclude in maniera rigorosa l'altra e viceversa. Ma nella doppia fenditura le due nature o meglio i due aspetti coesistono, o meglio coesistono non pienamente⁵². Quando si cerca di stabilire il percorso non si ha più la probabilità data da $|\psi_A + \psi_B|^2$, si perde l'interferenza e il micro-oggetto si comporta come una particella, viceversa si comporta come un'onda. In questo modo si mostrano quelli che sono gli aspetti soggettivistici della teoria, perché nel tentativo di stabilire il percorso della particella si introduce un apparato che disturba il comportamento della particella: è sufficiente sapere

⁵² Cfr. Tarozzi (1992, §1.6).

dove passa l'elettrone per distruggere l'interferenza (sovrapposizione), mediante quello che viene chiamato "collasso della funzione d'onda". Sembra che l'ignoranza dell'osservatore venga espressa dal termine di interferenza (sovrapposizione), perché a priori lo sperimentatore non sa attraverso quale fenditura passi la particella, dopo l'introduzione di un apparato di misurazione si ha invece uno stato ben definito.

6. Il problema mente-corpo

La meccanica quantistica resuscita dal passato un vecchio problema della tradizione metafisica, il problema mente-corpo legato alla filosofia della mente. Si distinguono tre livelli legati alla concettualizzazione matematica della situazione fisica: il primo livello è quello rappresentato dallo stato di sovrapposizione, che corrisponde ad uno stato mentale M_1 : "stato di ignoranza", il secondo (ψ_A) corrisponde allo stato mentale M_2 : "la particella passa per A", il terzo (ψ_B) corrisponde allo stato mentale M_3 : "la particella passa per B". Per collegare questi stati psicologici con gli stati fisici S è necessario far corrispondere M_1 allo stato fisico S_1 , M_2 allo stato fisico S_2 , M_3 allo stato fisico S_3 . Il passaggio da una situazione di sovrapposizione ad una non, è legato ad un cambiamento di conoscenza dello sperimentatore. Quindi la teoria matematica associa ad ogni conoscenza dello sperimentatore una descrizione matematica. È possibile avere una teoria matematica più ricca di quelle che sono le conoscenze dello

sperimentatore riguardo una certa situazione, ma nessuna descrizione matematica può cogliere la totalità della realtà fisica, la realtà fisica è immensamente più ricca della rappresentazione matematica. Ogni oggetto matematico deve avere una controparte nella teoria fisica ma non viceversa. Riassumendo la realtà fisica è più ricca della rappresentazione matematica, la rappresentazione matematica è più ricca delle informazioni dello sperimentatore. Se un cambiamento di conoscenza comportasse un cambiamento nella descrizione matematica, questo cambiamento a sua volta comporterebbe un cambiamento nella realtà fisica, ad esempio dalla sparizione della sovrapposizione matematica alla sparizione dell'interferenza fisica. Da un cambiamento della realtà fisica si deduce anche un cambiamento delle conoscenze dello sperimentatore e così via in un ciclo che potrebbe non aver fine. Se questa descrizione quantistica della realtà fosse completa si avrebbero due scelte: o si accetta una descrizione parapsicologica che gli stati mentali producono delle modifiche nella realtà fisica senza avere un supporto materiale⁵³ oppure la meccanica quantistica descrive solo le conoscenze dell'osservatore sulla realtà e non più la realtà (come sosteneva Eugene Wigner⁵⁴), questa è una soluzione psicologica che non ha più rapporti con la realtà e quindi è antirealista.

⁵³ Si veda "Il Tao della fisica" di Fritjof Capra (1989)

⁵⁴ Cfr. Tarozzi (1992, §2.7).

7. Le logiche quantistiche

L'impatto della teoria dei fondamenti della meccanica quantistica ha condotto alcuni scienziati e filosofi a sostenere una spiegazione dell'esperimento della doppia fenditura e più in generale della meccanica quantistica attraverso una necessaria trasformazione delle leggi fondamentali della logica: Per spiegare questa necessità si pensi al rapporto tra la geometria e la teoria della relatività generale. Con gli esperimenti di Sir Arthur Stanley Eddington si sarebbe potuto formulare l'ipotesi che la metrica dello spazio tempo non fosse euclidea oppure mantenendo la struttura euclidea dello spazio, come un apriori kantiano, che si dovessero modificare le leggi fisiche, ad esempio che i raggi luminosi si incurvassero cioè violando il principio di Fermat dell'ottica. Di per sé un esperimento non confuta delle singole ipotesi, in genere si può mantenere un'ipotesi o l'altra, come sostiene il punto di vista empiristico secondo cui vi è una valenza dell'esperimento, anche se non sarà sempre cruciale. Il punto di vista empiristico non è né in senso baconiano, della serie si deve fare quella scelta obbligata fra le ipotesi, né riconosce all'esperimento un aspetto cruciale. Nell'esperimento di Eddington restano aperte due possibilità su quattro: le leggi dell'ottica sono valide o meno cioè il principio di Fermat è o meno valido, o la struttura dello spazio è o non è euclidea. Si escludono le opzioni di mantenere sia la struttura euclidea dello spazio sia il principio di Fermat ma anche quella di violare il principio di Fermat e la struttura euclidea dello spazio. Gli esperimenti hanno una valenza di per sé importante perché rispetto a tutte le ipotesi lecite che spiegano l'esperimento, possono escludere quei gruppi di ipotesi che non si

possono mantenere tutte allo stesso tempo. Si ricordi la tesi di Duhem (1978) secondo cui qualunque ipotesi può essere mantenuta a dispetto dell'evidenza più confutante, questo perché con gli esperimenti si controllano un gruppo di ipotesi (le teorie sono gruppi di ipotesi) e non la singola ipotesi.

Hume aveva sottolineato due generi di proposizioni sensate: Le prime sono le proposizioni analitiche (relazioni tra idee), le tautologie e le contraddizioni, la cui verità deriva dalla struttura logica e non dal rapporto con l'esperimento. Le proposizioni analitiche sono indipendenti dallo stato delle cose esperite e quindi sono vere o false a priori. Afferzioni del tipo "ad Urbino sta piovendo o non sta piovendo". Le seconde sono le proposizioni sintetiche o empiriche (i dati di fatto) le cui verità, dipendendo dal particolare stato di cose esperito, sono stabilite a posteriori. Nel caso della geometria l'errore della tradizione kantiana era che l'apriori pretendesse di essere sintetico. Si riteneva che non tutte le proposizioni sintetiche fossero vere o false a posteriori, ed in particolare, come sosteneva Kant, che ci fosse una sorta di sovrapposizione tra il sintetico e l'apriori. Tutte le analitiche sono a priori, quasi tutte le sintetiche sono a posteriori, ci sono delle proposizioni sintetiche particolari che non derivando dall'esperienza ed essendo vere a priori si applicano al mondo dell'esperienza, ad esempio il quinto postulato di Euclide. La ragione stabilisce il motivo per cui non si possa rappresentare la realtà diversamente quindi è un apriori, ed è sintetica perché da questa derivano delle conseguenze empiriche che possono essere inaspettate (ad esempio che la somma degli angoli interni di un triangolo sia pari ad un angolo piatto).

Quando una teoria matematica coerente, non contraddittoria, dimostrata in termini matematici rigorosi (quindi vera a priori se non applicata al mondo) si trasforma

in un sistema ipotetico deduttivo e la si applica alla realtà, quest'ultima, posta un'istanza realista, informa se la teoria sia vera o falsa e se possa essere messa in discussione. La geometria matematica diventa una geometria fisica. Quindi la geometria fisica si può mettere in discussione costruendone una nuova e diversa da quella euclidea.

Nel caso della meccanica quantistica si era affacciata l'idea che le stesse leggi della logica ritenute vere apriori e analitiche potessero essere messe in discussione da particolari fenomeni fisici in determinate situazioni sperimentali. L'esperimento della doppia fenditura è stato interpretato da alcuni logici quantistici come Hilary Putnam, Dalla Chiara, Toraldo di Francia⁵⁵, come esempio di situazione fisica che porta ad abbandonare le leggi della logica classica.

Alla luce di queste considerazioni si analizzi di nuovo l'esperimento della doppia fenditura. Siano A_e , B_e , X_e gli eventi, A_e = "l'elettrone è passato per A", B_e = "l'elettrone è passato per B", X_e = "l'elettrone è arrivato sullo schermo". Si fanno delle assunzioni: $A_e \vee B_e$ cioè l'evento "l'elettrone è passato per A o per B" e $\neg(A_e \wedge B_e)$ cioè l'evento "l'elettrone non passa per A e per B contemporaneamente", il terzo escluso della logica classica $A_e \vee \bar{A}_e$, principio di non contraddizione $\neg(A_e \wedge \bar{A}_e)$, sono veri. Da queste e per la proprietà distributiva della congiunzione rispetto alla disgiunzione inclusiva della logica classica, si ottiene $X_e = X_e \wedge (A_e \vee B_e) = (X_e \wedge A_e) \vee (X_e \wedge B_e)$ che è un'affermazione tautologica che sembra non aggiungere nuove conoscenze. Da qui applicando

⁵⁵ Cfr. Dalla Chiara, Giuntini, Krause (1998, pp. 142-152).

considerazioni probabilistiche, la probabilità che l'elettrone arrivi nello schermo, con $(X_e \wedge A_e)$ e $(X_e \wedge B_e)$ eventi disgiunti si calcola ottenendo

$$P(X_e) = P[(X_e \wedge A_e) \vee (X_e \wedge B_e)] = P(X_e \wedge A_e) + P(X_e \wedge B_e) = |\psi_A|^2 + |\psi_B|^2,$$

che è in contrasto con l'evidenza sperimentale che conta anche l'interferenza,

$$P(X_e) = |\psi_A + \psi_B|^2 \quad ^{56}.$$

Alcuni scienziati autorevoli come Birkhoff e von Neumann⁵⁷, da dipendenza empirica della logica, sviluppano nel 1936 una logica non classica adatta a descrivere i fenomeni fisici legati alla meccanica quantistica.

In questo ambito, alcuni illustri filosofi della scienza, ad esempio Putnam⁵⁸ e

Dalla Chiara⁵⁹, hanno affermato la non validità della proprietà distributiva. La

struttura matematica della meccanica quantistica infatti è un'algebra non booleana, in cui non vale la logica classica⁶⁰. Allora cambiando la logica e non

accettando la proprietà distributiva non si hanno problemi né contraddizioni. È

un'ipotesi che sembra molto ad hoc. È una soluzione formale di un problema

fisico che non aiuta a comprendere la situazione⁶¹. I sistemi inosservati seguono

una logica quantistica, non appena si compie una misura si segue la logica classica

perché si distrugge l'interferenza. L'argomento attraverso il quale la logica

⁵⁶ Cfr. Graziani (2014, pp. 124-125).

⁵⁷ Cfr. Birkhoff, von Neumann (1936).

⁵⁸ Cfr. Putnam (1969).

⁵⁹ Cfr. Dalla Chiara, Toraldo di Francia (1973).

⁶⁰ Questa affermazione è tutt'altro che certa. È parere dell'autore di questa tesi che la meccanica quantistica possa in realtà accogliere al suo interno la logica booleana. Nel corso di un recente seminario sul tema dell'interpretazione a molti mondi in meccanica quantistica, della XIX Scuola Estiva Internazionale in Filosofia della Fisica tenutasi ad Urbino, il prof. Gennaro Auletta ha brillantemente mostrato come sia possibile descrivere correttamente l'esperimento della doppia fenditura o un esperimento come quello della scelta ritardata di Wheeler, mantenendo l'algebra booleana e non violando così la proprietà distributiva.

⁶¹ Anche se non spiega il problema della misura tuttavia spiega la natura della sovrapposizione.

quantistica deve sostituire la logica classica si basa su situazioni inosservabili. A seconda di quello che si conosce gli oggetti seguono una logica piuttosto che un'altra. Si torna ad un carattere fortemente soggettivista della teoria quantistica. Oppure si potrebbe considerare non lecita l'additività delle probabilità in meccanica quantistica come afferma la *quantum probability*⁶². Feynman non metteva in discussione l'additività ma il fatto che gli eventi fossero disgiunti⁶³. Sembra molto ragionevole questa posizione, gli eventi $(X_e \wedge A_e)$ e $(X_e \wedge B_e)$ non sono disgiunti, l'elettrone non è una pura particella ha invece una struttura complessa perché ha anche un comportamento ondulatorio, di conseguenza non si può applicare l'additività delle probabilità. Un altro aspetto problematico legato alle leggi della probabilità è quella della violazione della località⁶⁴.

Come sarà mostrato nei paragrafi seguenti, in meccanica quantistica la località è seriamente messa in discussione⁶⁵. Sembra, anzi, che la meccanica quantistica permetta causazioni superluminali⁶⁶.

Il modo migliore di mostrare la non località è quella di ricondursi alla fattorizzabilità: si considerino due misurazioni dello spin m, n di due particelle separate spazialmente. Lo spin m è misurato nella direzione x mentre n è misurato nella direzione y . Si chiamino i corrispettivi risultati r_m e r_n , P una misura di probabilità. Si può esprimere la fattorizzabilità come segue:

⁶² Cfr. Tarozzi (1992, §1.8) e Accardi (1984).

⁶³ Cfr. Tarozzi (1992, §1.8).

⁶⁴ Cfr. Fano et al. (2016)

⁶⁵ Sul problema della località e sulla sua apparente violazione in meccanica quantistica si veda Fano et al. (2016).

⁶⁶ È interessante notare che la località, nonostante sia un problema primario e dibattuto in meccanica quantistica, rappresenti invece un problema secondario nella teoria della computazione quantistica: in quest'ultima teoria il problema principale è rappresentato dalla sovrapposizione, come ha ben mostrato Deutsch (1985).

$$P(r_m, r_n/x, y) = P(r_m/x)P(r_n/y) . (3.1)$$

Ciò esprime una condizione sufficiente per l'indipendenza causale delle due misurazioni, la negazione di questo implica una violazione della località. È noto che la disuguaglianza di Bell che consegue da queste equazioni è spontaneamente violata nel caso dello stato di singoletto.

Ci si può chiedere se ciò implichi che la località sia violata. Con un semplice ragionamento matematico probabilistico si ottiene:

$$P(r_m/x) = P(r_m/x, y, r_n), (3.2)$$

$$P(r_n/y) = P(r_n/y, x, r_m). (3.3)$$

Come mostrato da Jarrett (1984), (3.2) e (3.3) sono equivalenti a (3.4), (3.5), (3.6), (3.7), espresse da:

$$P(r_m, x) = P(r_m, x/y), (3.4)$$

$$P(r_n, y) = P(r_n, y/x), (3.5)$$

(3.4-3.5) è chiamato indipendenza del parametro,

$$P(r_m, x/y) = P(r_m, x/y, r_n), (3.6)$$

$$P(r_n, y/x) = P(r_n, y/x, r_m), (3.7)$$

(3.6-3.7) è chiamato indipendenza del risultato.

La negazione di (3.1) implica o la violazione dell'indipendenza del parametro o la violazione dell'indipendenza del risultato: solo la violazione dell'indipendenza del parametro è in contrasto con la teoria relativistica in quanto permetterebbe la propagazione di segnali superluminali. Come ha notato Maudlin (1994), non è possibile sapere se la non località quantistica implichi la violazione dell'indipendenza del risultato o dell'indipendenza del parametro, quindi la meccanica quantistica potrebbe violare la località⁶⁷.

Un approccio originale e differente da quelli visti fin ora, è quello di abbandonare direttamente il principio del terzo escluso come fece in un primo tempo il filosofo Hans Reichenbach (1944), affermando logiche a tre valori di verità: affermazioni come “l'elettrone ha posizione lungo l'asse x e velocità pari ad un certo valore” è in contrasto con il principio di indeterminazione, è un'affermazione che non ha senso, non falsa. Un modo per riconoscere un senso a questo enunciato è quello di dare un valore di verità indeterminato, cioè un mezzo.

Il problema della bivalenza fu sollevato da Aristotele a proposito del problema dei futuri contingenti: L'affermazione “ci sarà o meno una battaglia navale domani”, se si assume che sia vera o falsa fin da ora, ipotizza il futuro, si ha una forma di super determinismo corrispondente a un valore di verità né vero né falso. Il logico polacco Jan Lukasiewicz negli anni 1920-30 riprese questa idea introducendo un valore di verità indeterminato⁶⁸. La meccanica quantistica fa spesso affermazioni di tipo probabilistico, ragione che ha spinto alcuni autori a sviluppare logiche a valori infiniti di verità, il vero corrisponde a 1, il falso a 0, tra 0 e 1 si hanno tutti i valori intermedi. Al valore 0,5 corrisponde lo stato di totale ignoranza. Questo

⁶⁷ Si veda il capitolo VII,6 di questa tesi su come è possibile che la località non sia violata in meccanica quantistica.

⁶⁸ Cfr. Kreiser *et al.* (1990), Lukasiewicz (1970).

argomento veniva visto come un argomento empirico proposto anni dopo il tentativo di Reichenbach del 1944 in “*Philosophic Foundations of Quantum Mechanics*” dove si espone il valore di verità indeterminato già introdotto da Lukasiewicz. Ma le leggi della logica sono analitiche non dicono nulla sul mondo, perché dovrebbero essere messe in discussione da un esperimento? Se logiche alternative descrivono una situazione fisica, non è detto che siano adattabili anche in altre situazioni o in contesti più generali. Il piano descrittivo non sempre coincide con quello normativo. Gli ambienti quantistici infatti sono poco confortevoli per la logica classica, e anche se è possibile modificare le leggi della logica⁶⁹ non è affatto vero che queste colgono aspetti legati alle leggi che governano la natura degli oggetti quantistici. Le teorie dei *quasi-set* di Costa, French e Krause, o di Dalla Chiara e Toraldo di Francia, estremamente affascinanti per il rigore logico matematico nascono per accomodare dal punto di vista logico la visione di un mondo quantistico popolato da particelle indiscernibili e in cui il concetto classico di insieme (oltre al principio di identità degli indiscernibili) è messo a dura prova. Tuttavia per modificare una cosa profonda come il concetto di insieme, secondo l’autore di questa tesi, vi devono essere delle ragioni ancora più profonde di quelle di accomodare un modello logico matematico ad un esperimento fisico. Alla luce di queste considerazioni, la strada delle logiche non classiche, delle logiche quantistiche e delle logiche di Schrödinger non verrà approfondita più di tanto.

⁶⁹ Si pensi ad esempio alle soluzioni non archimedee del paradosso di Zenone. Si veda Fano (2012).

8. Il problema della località

Come è noto gli esperimenti mentali di Einstein andavano nella direzione di mostrare l'incompletezza della meccanica quantistica cercando una violazione delle relazioni di indeterminazione di Heisenberg.

Negli anni Venti nel tentativo di mettere assieme la conservazione dell'energia e dell'impulso con l'interpretazione probabilistica, Einstein introdusse i campi fantasma che soddisfacevano la "casualità quantistica" e fornivano un supporto alla spiegazione dei fenomeni ondulatori di interferenza. Eppure se si considerano due sistemi che hanno interagito precedentemente e che sono guidati da questo campo fantasma, si deve ammettere che sono guidati in maniera del tutto indipendente, e quindi ciò non garantirebbe più la conservazione dell'energia e dell'impulso. Schrödinger risolse il problema trasladando lo spazio di applicabilità delle funzioni d'onda, da quello fisico a quello matematico delle configurazioni, a costo della non separabilità.⁷⁰

Secondo Einstein un sistema di elettroni si sarebbe dovuto poter descrivere e rappresentare come dei quanti, cioè corpuscoli localizzati. La localizzazione dei quanti in qualche modo mette al riparo dal fatto che eventuali azioni a distanza avrebbero violato la relatività, nell'ipotesi in cui la funzione d'onda avesse contenuto reale.

L'ontologia richiesta da Einstein è un'ontologia di stati separabili, in cui ogni punto dello spazio è individuato da un tensore metrico⁷¹, composta da sistemi ben

⁷⁰ Cfr. Howard (2015, p. 151).

⁷¹ Cfr. Howard (2015, p. 205).

determinati, localizzati, controllabili indipendentemente l'uno dall'altro e che conservassero energia e impulso, come richiede una teoria di campo. Cosa che in meccanica quantistica non vale come nota lo stesso Bohr: o si ha la conservazione dell'energia e dell'impulso o si ha la localizzazione del sistema.

Già nel convegno Solvay del 1927 Einstein sollevò delle obiezioni alla interpretazione probabilistica di Bohr della funzione d'onda, criticando la completezza della teoria quantistica: se si accetta la completezza della teoria, si entra in conflitto con la teoria della relatività perché il postulato di riduzione e di localizzazione è un processo che avviene istantaneamente e quindi incompatibile con la teoria della relatività. Si ha una diversa descrizione di un singolo oggetto che la meccanica quantistica ci rappresenta: in un primo tempo come non localizzato poi, con la localizzazione, in uno stato relativamente molto piccolo e in modo istantaneo. Einstein va all'attacco dell'interpretazione ortodossa della meccanica quantistica. Lo stesso farà negli anni Trenta con il paradosso del "fotone nella scatola" che si basa sull'idea che se si accetta il principio di equivalenza tra massa ed energia, pilastro della relatività, si viola la relazione di indeterminazione tra energia e tempo, legandola al fatto che non si possono avere rappresentazioni causali e spazio-temporali al tempo stesso (come diceva Bohr). Einstein credeva di essere riuscito nell'impresa. Bohr rispose appellandosi alla relatività generale e al principio di equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale e con un ragionamento complesso (non molto cogente) confuta la tesi paradossale dell'esperimento mentale di Einstein e mantiene la consistenza della meccanica quantistica. Einstein abbandona lo scontro diretto con la meccanica quantistica basata sull'ipotesi che fosse una teoria sbagliata.

Se si abbandona conseguentemente la località allora si ha una violazione della teoria della relatività generale e la risposta che diede Bohr è salva. Si ha un corto circuito contraddittorio che è il seguente: Se si ammette la sovrapposizione allora si accetta l'*entanglement* che a sua volta viola la località e quindi viola la relatività generale, da cui segue che non si può far appello alla relatività generale per preservare le relazioni di indeterminazione tra energia e tempo e quindi si ha una violazione della relazione di indeterminazione. Quindi l'assunzione del principio di sovrapposizione porta ad una violazione del principio di indeterminazione. La meccanica quantistica è dunque contraddittoria o meglio la contraddizione è nel formalismo quantistico⁷². Infatti il principio di indeterminazione viola ciò che classicamente era considerato banale, attribuire una posizione e una velocità a una traiettoria della particella, quindi è in contrasto con la relatività classica (non si possono nemmeno conoscere le geodetiche) limitando fortemente l'uso delle categorie classiche. Invece il principio di sovrapposizione è molto liberale, lo stato di un oggetto è a caso, ha uno stato non ben definito, si ha sovrapposizione di infiniti stati tanti quanti sono i possibili risultati delle misurazioni. Questi due principi sono chiaramente in forte conflitto.

⁷² Anche Enrico Fermi non era pienamente soddisfatto del formalismo della meccanica quantistica, cfr. Tarozzi (1992).

8.1. L'analisi della località e della separabilità secondo Don Howard⁷³

La località e la separabilità sono principi fondamentali che si basano sull'ontologia delle teorie di campo: il realismo delle regioni dello spazio tempo è rappresentato dal tensore metrico e le interazioni sono sufficientemente descritte dai cambiamenti di stati reali e distinti. L'ontologia è quindi quella di una varietà spazio-temporale con i suoi tensori metrici e con le strutture legate all'energia e all'impulso.

Usando le parole di Howard (2015, p. 155)

Einstein aveva argomenti d'ordine metodologico, epistemologico e metafisico decisamente non trascurabili [...] per mantenere sia la località che la separabilità, il che contribuisce a spiegare il suo tenace impegno per il programma della teoria di campo come alternativa alla meccanica quantistica.

La teoria dei campi virtuali di Bohr, Kramer e Slater (BKS) riportò in luce le questioni sui rapporti di probabilità che Einstein attribuiva a sistemi fisici che avevano interagito nel passato. Secondo questa teoria, i campi virtuali, oltre ad essere il modo con cui un atomo comunica con quelli a lui vicini, attribuiscono un campo d'onda virtuale separato a sistemi separati dal punto di vista spaziale rendendoli statisticamente indipendenti. Tuttavia l'incapacità di BKS di conservare la probabilità di un'emissione o di un assorbimento atomico e

⁷³ Per l'analisi in questione ci si è ispirati al testo di Howard (2015, § 3). Si veda anche Laudisa (2015).

l'energia e la quantità di moto per singoli "eventi quantistici" lontani fra loro, ma solo per valor medi di numerosi "eventi quantistici", fu osteggiata da un primo Einstein che era fortemente convinto che una teoria fisica quantistica avrebbe dovuto assumere una qualche sorta di correlazione, di dipendenza statistica di base dei sistemi tra loro separati per permettere la conservazione di energia e impulso⁷⁴. Queste correlazioni furono spiegate grazie alla meccanica ondulatoria di Schrödinger che trasportò i campi d'onda dal piano fisico a quello delle fasi, che ha anche fornito substrato alle correlazioni della statistica di Bose-Einstein di cui si parlerà in seguito. Ma le innovazioni di Schrödinger però avevano introdotto nella meccanica quantistica la non separabilità. Gli esperimenti di Compton-Simon, di Bothe-Geiger dimostrarono che le grandezze energia e quantità di moto erano conservate, e le correlazioni, ad esempio tra radiazione deflessa ed elettrone emesso nell'effetto Compton, sembravano fornire terreno alla visione di Einstein sulla teoria quantistica. Ma tali correlazioni potevano essere spiegate in termini di cause comuni e quindi non era ancora detta la parola fine sulla non località o sulla non separabilità.

Con l'enunciazione del principio di Pauli e gli esperimenti di Boethe-Geiger, nel 1925 era stata accettata l'ipotesi corpuscolare di Einstein dei quanti di luce, mettendo una seria sconfitta alla teoria BKS⁷⁵. Tuttavia erano noti anche gli esperimenti legati alla interferenza e a fenomeni ondulatori (come l'effetto Ramsauer di Walter Elsasser) che nel 1924 indussero De Broglie a sostenere la non indipendenza e la non distinguibilità per le particelle quantistiche. Successivamente Schrödinger nel 1926 formulò delle interpretazioni ondulatorie,

⁷⁴ Si veda Howard (2015, p. 163).

⁷⁵ Un ulteriore colpo assestato a questa teoria derivò anche dall'esperimento di Boethe del 1926.

sviluppando enormemente quella che è stata chiamata meccanica ondulatoria, che sposavano le previsioni delle nuove statistiche quantistiche. Tutto ciò era finalizzato a spiegare e a comprendere la statistica di Bose-Einstein e il problema legato alla non fattorizzabilità delle probabilità. Come affermava Einstein in antitesi alla interpretazione probabilistica di Born della funzione d'onda di Schrödinger:

La meccanica quantistica esige molta attenzione. Ma una voce interiore suggerisce che non è ancora la cosa reale. La teoria offre molto, ma difficilmente si avvicina al segreto del Vecchio. In ogni caso, io sono convinto che *Lui* non giochi a dadi. (Einstein 1973, pp. 129-130)

A tal proposito l'esperimento della scatola di luce (uno dei famosi *Gedankenexperimente*) era stato pensato da Einstein con l'intento di mostrare l'inesattezza del principio di indeterminazione e quindi che la meccanica quantistica fosse una teoria che dovesse essere riformulata in modo differente dal modo con cui era stata fondata. Ma il problema che assaliva Einstein era un altro: date due soluzioni ϕ_1 e ϕ_2 dell'equazione di Schrödinger rispettivamente per due sottosistemi costituenti uno unico generale, non è sempre vero che il prodotto $\phi_1 \cdot \phi_2$ è soluzione dell'equazione del sistema unico generale. Dopo aver tentato invano di coniugare la gravitazione e la teoria quantistica con delle equazioni di campo, Einstein cercò di combinare la relatività generale e la teoria quantistica che si era affermata, per poter dedurre le equazioni del moto delle particelle. In questo modo si sarebbe eliminata la rappresentazione statistica della particella. Il concetto di traiettoria, infatti, è legato a qualche cosa di deterministico o per lo meno è avulso da tutto ciò che è statistico. Tuttavia nella teoria quantistica

concetti come ad esempio quello di geodetica che sono termini legati al moto di un singolo o di più oggetti, non sono presenti. Schrödinger affermava:

Einstein ha un modello di ciò che è reale costituito da una mappa con delle bandierine. Per ogni cosa reale deve esserci una bandierina sulla mappa, e viceversa (Pauli 1985, p.406).

A sferzare un duro colpo a questa aspirazione di Einstein ci pensò l'esperimento della diffrazione della doppia fenditura di Bethe del 1927, che era la *smoking gun* del ruolo esplicativo e cruciale della interferenza in meccanica quantistica. Tale risultato è totalmente non compatibile con l'ipotesi corpuscolare, in quanto la natura classica delle particelle quantistiche (indipendenti e localizzabili sempre) non ha potere esplicativo circa la struttura di interferenza che si ottiene nell'esperimento. Come affermava Einstein (Einstein 1927a, p. 546):

Ciò che la natura ci chiede non è una teoria dei quanti o una teoria delle onde, piuttosto la natura esige da noi una sintesi di entrambe le concezioni, sintesi che fino a ora – possiamo esserne certi – ha sempre superato ciò che il pensiero dei fisici può elaborare.

Sintetizzando il quadro che si sta delineando, si può affermare che: La meccanica ondulatoria di Schrödinger aveva portato un elemento di novità all'interno della teoria quantistica: il concetto di non separabilità.

Questo concetto, sia dal punto di vista fisico che epistemologico, non è accettabile secondo Einstein, in quanto per avere determinismo o meglio per avere le equazioni dei moti di particelle elementari è condizione necessaria la separabilità. Come affermava Bohr (1927, p. 581):

le particelle materiali isolate sono astrazione, essendo le loro proprietà definibili e osservabili nella teoria quantistica solo attraverso la loro interazione con altri sistemi.

La posizione di Bohr è in sintonia con quella di Einstein, che vorrebbe ricavare l'equazione di moto della particella a partire dai parametri della teoria di campo e conseguentemente dall'equazione del moto si avrebbe la separabilità tra le particelle. Inoltre come nota Howard (2015, p. 206)

la non separabilità è il fenomeno fondamentale [...] l'incertezza ne è solo un sintomo. L'incertezza si intromette soltanto quando si pretende di descrivere le proprietà di un sistema indipendente, non essendoci alcun sistema veramente tale. [...] in un universo separabile non ci devono essere incertezze.

Il pensiero di Einstein è a questo punto molto chiaro: per avere una corretta teoria scientifica completa è necessario che essa sia una teoria di campo, se si ha una teoria di campo allora certamente per essa valgono sia la località che la separabilità. Queste ultime proprietà sembrano apparentemente violate dalla meccanica quantistica, infatti essa considera due sistemi fisici (A e B) che hanno precedentemente interagito come non separabili. Quindi tale teoria è incompleta. Secondo Einstein un esempio che mostra questa incompletezza è l'esperimento di Einstein, Podolski e Rosen del 1935 (che sarà mostrato nei seguenti paragrafi).

9. Sulla completezza della meccanica quantistica

Negli anni Trenta Einstein torna a mettere in discussione la completezza della meccanica quantistica (come già aveva fatto nel 1927): se la teoria è completa allora le relazioni d'indeterminazione non funzionano. L'argomento del paradosso di EPR del 1935, che si vedrà fra poco, parte da varie assunzioni che mescolano questioni fisiche, con istanze filosofiche e metafisiche, principi filosofici formulati in modo non ambiguo con portata di tipo empirico con principi di tipo fisico. La grande trovata di Einstein dal punto di vista fisico è stata quella di scovare un modo per aggirare la natura interazionistica dello stato quantistico sollevato dall'ipotesi del postulato quantistico di Planck. Nella meccanica quantistica ogni qual volta si compie una misurazione si ha una perturbazione, è difficile attribuire all'oggetto delle proprietà indipendenti dallo sperimentatore, cioè è difficile poter separare l'oggetto da investigare dall'apparato di misurazione e dall'osservatore, caratteristica invece ammessa e fondamentale nella prima rivoluzione scientifica. Era nota l'idea della complementarietà di Bohr che sostiene che non ci sia un mondo separato dagli strumenti che lo osservano, ma una realtà strettamente dipendente. Le risposte ottenute da un esperimento non sono risposte indipendenti dallo sperimentatore, non si riferiscono quindi ad una struttura di una realtà indipendente, ma derivano da un concorso tra l'osservatore e ciò che viene osservato. Il grande fisico Wheeler ha fatto un esempio per chiarire questa realtà quantistica, "il gioco della parola"⁷⁶: All'interno di una stanza delle persone, che chiameremo pubblico, si accordano su una parola. Un

⁷⁶ Cfr. Tarozzi (1992, §1.4). Si veda anche Wheeler (1992, pp. 143-166).

concorrente, denominato l'interrogante, esterno alla stanza viene invitato ad entrare e a sottoporsi al gioco di indovinare questa parola attraverso un numero finito di tentativi. Più sarà abile minore saranno i tentativi che gli occorreranno per indovinare la parola. In questi termini il gioco viene definito classico. C'è quindi a priori una parola concordata da tutte le persone che compongono il pubblico e che è conosciuta, l'abilità dell'interrogante sta solo nello scoprire questa parola. Nella versione quantistica invece il pubblico concorda solo sul dare risposte coerenti fra loro al susseguirsi delle domande dell'interrogante. Nessuna parola viene concordata tra il pubblico prima che il gioco inizi. Al di là della metafora ludica, la natura è rappresentata dal pubblico, l'interrogante che deve interrogare il pubblico è lo sperimentatore, la risposta è il risultato di un esperimento. Nella versione quantistica lo sperimentatore è un attore che non rimane indipendente ma concorre alla determinazione della risposta, l'interrogante infatti in questo quadro concorre lui stesso alla risposta. Vi è solo la non contraddittorietà a caratterizzare le risposte ma nient'altro. Per cui si può stabilire a posteriori un termine a piacere purché sia coerente con le precedenti risposte date alle varie domande dell'interrogante. La realtà quantistica secondo la versione ortodossa è qualcosa in cui l'osservatore ha un ruolo rilevante nella creazione della risposta. Non vi è nulla di indipendente.

L'idea di Einstein è quella di compiere una misura indiretta in meccanica quantistica, si misura un oggetto e da questa misurazione si ricavano delle informazioni su un altro oggetto: ciò è consentito da un particolare stato di sovrapposizione, lo stato di *entanglement*. Lo stato *entanglement* descrive stati di coppie di particelle (bosoni o fermioni) separate derivanti da un decadimento di

un'unica particella, che però mantengono proprietà comuni. La meccanica quantistica descrive questi due stati come un unico oggetto, come fossero un unico sistema e le due particelle sono due sottosistemi dell'unico sistema. In base alla struttura matematica della teoria quantistica, una certa proprietà fisica misurata sulla prima particella fornisce una perfetta correlazione (o anti correlazione) sulla seconda particella. Ad esempio l'osservabile *spin* della prima particella (sinistrorso + o destrorso -) misurato lungo una certa direzione sarà opposto a quello della seconda particella. Se però si misura la prima particella, se ne perturba la sua proprietà, lo spin. Questa proprietà misurata non è quindi una proprietà indipendente dell'oggetto, si potrebbe dire che l'osservatore ci ha messo del suo, è una proprietà dipendente in virtù dei principi della meccanica quantistica, cioè in base alla concezione interazionistica dello stato quantico, al postulato quantistico fondamentale di Planck ed al principio di indeterminazione di Heisenberg. Tuttavia nella misurazione indiretta, in questo caso la misurazione dello spin sulla seconda particella, posto che valga il postulato fondamentale della relatività e cioè la costanza della velocità della luce, non può essersi creata l'istanza dello spin opposto. Quindi lo spin della seconda particella dovrebbe essere una proprietà indipendente o meglio un dato oggettivo indipendentemente dalla misura sulla prima, perché le due particelle sono separate. Per ogni misurazione o perturbazione effettuata sulla prima particella nessun cambiamento reale può avvenire istantaneamente sulla seconda, altrimenti vi sarebbe una violazione della teoria della relatività. Lo stato misurato della prima particella non perturba lo stato della seconda particella, per cui si ha una misurazione indiretta.

10. Il paradosso di Einstein, Podolski e Rosen (EPR)⁷⁷

Si consideri un sistema fisico S costituito da una coppia di particelle (sottosistemi) A e B nello stato *entangled* di *singoleto* e si misuri la grandezza dello spin. La funzione d'onda che rappresenta lo stato è:

$$\psi_s = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+, -\rangle - |-, +\rangle),$$

dove i segni + e – indicano i due possibili risultati degli spin delle particelle.

Si assumano inoltre le seguenti condizioni:

1) Principio di Realtà:

Einstein, Podolski e Rosen formularono una condizione sufficiente di realtà fisica secondo la quale

se, senza disturbare in alcun modo un sistema, possiamo predire con certezza (cioè con probabilità pari all'unità) il valore di una grandezza fisica, allora esiste un elemento della realtà fisica corrispondente a questa grandezza fisica (Einstein *et al.* (EPR) 1935, p. 777).

Cioè quando è possibile prevedere con certezza e senza perturbazioni la proprietà di un sistema fisico, allora esiste un elemento di realtà fisico associato a tale proprietà⁷⁸. Si può quindi attribuire una proprietà reale al sistema senza che si

⁷⁷ Si presenterà la versione moderna del paradosso dovuta a Bohm nel 1951. Cfr. Laudisa (2015, pp. 100-112).

⁷⁸ Einstein ritiene sufficiente il principio di realtà, mentre una condizione di completezza che considera necessaria è questa: “ogni elemento della realtà fisica deve avere una controparte nella teoria fisica” (Howard 2015, p. 153).

debba compiere una misurazione, cioè senza perturbarlo. Tale proprietà è definita *oggettiva*.

2) Località:

Sia S_1 un sistema fisico isolato da S . Nessuna operazione condotta su S_1 può modificare le proprietà oggettive di S .

3) Completezza:

La teoria fisica che descrive S coglie tutte le proprietà oggettive di S senza eccezioni.

4) Anti-correlazione:

Le misure dello spin nei due sottosistemi costituenti S sono sempre opposte.

Poste queste condizioni, si compie una misura al tempo t_1 su A e si supponga di trovare lo spin $+$ lungo una direzione d stabilita. Per la condizione di anti-correlazione la misura dello spin su B , in un tempo t_2 successivo a t_1 , darà il risultato $-$. Se si assume il principio di realtà il valore dello spin su B è una proprietà oggettiva: Si può prevedere con certezza che B ha spin $-$ e, se si assume la condizione di località, tale proprietà lo caratterizza anche prima della misura su A . Ma d'altra parte esiste la perfetta anti-correlazione e quindi anche prima della misura, A avrebbe lo spin $+$ e quindi si può concludere che la misura non ha

creato nulla. Secondo il postulato di riduzione della funzione d'onda il sistema si porta nello stato $|+, -\rangle$ ⁷⁹.

Se si assume la condizione di completezza, allora, l'unico stato che descrive il sistema in cui A ha lo spin + e B ha lo spin - è lo stato $|+, -\rangle$, che è ben diverso dallo stato di singoletto. La meccanica quantistica, in questo caso, non riesce a rappresentare correttamente le proprietà oggettive degli spin del sistema. Si conclude che la meccanica quantistica è una teoria incompleta.

Analogamente si potrebbe avere la situazione opposta per gli spin in A e B. Allora la descrizione cambia e anche prima della misura si avrebbe una miscela statistica

$\frac{1}{2}|+, -\rangle$ e $\frac{1}{2}|-, +\rangle$ che è osservabilmente diversa dallo stato di singoletto, come lo

è la sovrapposizione nell'esperimento della doppia fenditura dagli stati puri ψ_A e ψ_B . In particolare questi stati soddisfano la disuguaglianza di Bell (1964)⁸⁰, che

⁷⁹ Secondo Howard (2015), Einstein riteneva che la meccanica quantistica fosse incompleta per ragioni diverse da quelle espresse nel paradosso EPR.

Non invocando mai le condizioni di completezza, di realtà e le relazioni di indeterminazione, in una lettera che Einstein scrive a Schrödinger nel 1935 afferma che “una teoria completa assegna uno e un solo stato teorico a ciascuno stato reale del sistema fisico” (Howard 2015, p. 154). Se si prendessero due sistemi chiamandoli sistema “destro” e sistema “sinistro”, la meccanica quantistica attribuisce ad uno stato reale “destro” diverse funzioni d'onda (stati teorici), in base alla misurazione che è stata effettuata in quello “sinistro”, ma ciascuno dei due sistemi ha una realtà individuale. Quindi la meccanica quantistica è incompleta perché ad uno stato reale non attribuisce un solo stato teorico. Inoltre, come nota Einstein, la non completezza discende dai principi di località e di separabilità. I due sistemi hanno interagito in passato e quindi anche dal punto di vista classico non sono del tutto indipendenti fra loro, ma dovrebbero essere separabili e quindi indipendenti perché le correlazioni tra di essi possono e devono poter essere solamente spiegate in virtù dei loro stati separati. Per dirla brevemente la probabilità congiunta dei due sistemi dovrebbe fattorizzarsi nel prodotto delle probabilità dei singoli stati separati cioè indipendenti: La non separabilità in meccanica quantistica si esplicita in questa non fattorizzabilità.

⁸⁰ Si considerino due sistemi A e B, ciascuno dei quali possiede due variabili discrete che possono assumere solo i valori +1 o -1, rispettivamente a e a' per A, b e b' per B. Supponendo che i due sistemi siano fra loro molto distanti per impedire qualsiasi sorta di azione causale fra di essi, si definisce la funzione $E(x, y) = P(x, y, 1, 1) - P(x, y, 1, 0) - P(x, y, 0, 1) + P(x, y, 0, 0)$, dove

$P(a, b, 1, 1)$ indica la probabilità che le misure effettuate sulla variabile a di A e sulla variabile b di B diano risultato 1. Bell ha dimostrato che se la disuguaglianza

$$|E(a, b) - E(a, b') + E(a', b) + E(a', b')| \leq 2$$

mostra come la descrizione delle variabili nascoste locali, in cui non valgono azioni a distanza, sia realistica cioè attribuisca le proprietà ancor prima della misura. Secondo la meccanica quantistica prima vale lo stato di singoletto poi vi è la riduzione. L'osservabile di Bell calcolata sugli stati della miscela fornisce un valore minore uguale a 2, invece calcolata sullo stato di singoletto è pari a $2\sqrt{2}$. C'è una differenza numerica confermata dagli esperimenti fisici fino all'ottava cifra decimale. Sembra quindi che l'*entanglement* sia una proprietà della natura: Lo stato di singoletto è la giusta descrizione dello stato prima della misurazione. Si ignora però il motivo. In questo argomento di EPR però vi è una via d'uscita che non mette in discussione nessuna delle quattro assunzioni supposte. Si può riprendere un altro principio filosofico importante che è quello di mettere in discussione la freccia del tempo, cioè riprendere il meccanismo di Wheeler di retroazione del futuro sul passato, come fece Olivier Costa de Beauregard⁸¹, allievo di De Broglie. C'è una reversibilità nomologica di tutte le leggi fondamentali della fisica e l'irreversibilità emerge come proprietà a livello dei fenomeni macroscopici termodinamici. A livello profondo tutte le leggi della fisica sono perfettamente reversibili (si vedrà l'importanza della *PT*-simmetria nel capitolo VIII di questa tesi). Ad esempio nelle equazioni di Newton o nelle leggi della meccanica quantistica, il tempo non compare mai come t ma compare sempre t^2 , sostituendo con $-t$ non cambia nulla. La retroazione nella meccanica di Laplace è ammessa. Anche la meccanica statistica ammette la reversibilità. I

non è verificata sulle variabili di A e B, allora esiste necessariamente una connessione tra i due sistemi. Questo è ciò che accade in meccanica quantistica per lo spin di coppie di fotoni o per la misurazione della polarizzazione su coppie di fotoni. Cfr. Fano (2004) e Selleri (1999), quest'ultimo sostiene che la violazione della disuguaglianza di Bell non sia stata del tutto archiviata da un punto di vista empirico.

⁸¹ Cfr. Tarozzi (1992, §1.4).

fenomeni invece legati ad evidenze macroscopiche sono irreversibili. Anche l'atto di misurazione e registrazione della meccanica quantistica è irreversibile. Invece la meccanica quantistica è in sé reversibile. Secondo de Beauregard la fisica che conta è la fisica matematica, se le leggi fondamentali della fisica matematica non forniscono una direzione privilegiata del tempo, allora si possono spiegare certi fenomeni facendo cadere il verso della freccia del tempo. Egli distingue tra *macro special relativity* e *micro special relativity*. Nella *micro special relativity* non vi è la freccia del tempo ed è possibile “telegrafare nel passato”, azione che è vietata solo dalla fisica macroscopica non da quella microscopica. L'idea di de Beauregard è la seguente: si supponga che al tempo t_1 si trovi in A lo spin +, quindi che avvenga una riduzione della funzione d'onda. Un segnale viaggia nel passato e modifica lo stato di singoletto nella miscela statistica, il segnale ritorna al futuro e la particella B emerge nel futuro all'istante t con lo spin -, spin che si è generato nel passato. La riduzione avviene solo dopo la misura, ciò avviene istantaneamente e non viola la relatività perché viaggia dentro il cono luce nel passato cambiandolo. Tutto sembra chiaro. Quindi per spiegare il paradosso si fa una ipotesi ulteriore: la retrocausazione. Ciò però metterebbe in discussione la contiguità spazio-temporale e la causalità: viene violata l'antecedenza temporale, la causa si scambia con l'effetto. Si noti come si stia spostando il bandolo della matassa dal paradosso di EPR ad uno altrettanto profondo: il problema della misurazione⁸².

⁸² Recentemente Huw Price ha sostenuto qualcosa di simile: è possibile costruire modelli a variabili nascoste che, rinunciando alla contiguità spazio-temporale, permetterebbero di avvicinare la teoria quantistica con la realtà speciale. Si veda Price (2001).

11. Il problema della misurazione

Una soluzione al problema della misurazione che però si scontra con l'*entanglement* (è quindi ha un limite di coerenza rispetto a questa particolare forma di sovrapposizione) è quella data da Hugh Everett, allievo di Wheeler. L'idea di Everett si sviluppò nel modo seguente: In base all'equazione di Schrödinger un sistema fisico può trovarsi in uno stato di sovrapposizione. In questo stato la teoria non fornisce una risposta sul motivo per cui un risultato venga registrato piuttosto che un altro, cioè sul perché un certo risultato escluda gli altri. L'idea di Everett è quella di una molteplice evoluzione: non solo gli stati osservati evolvono in modo deterministico ma non oggettivistico ed il sistema assume un dato stato in seguito a una misurazione, bensì il sistema assume tutti gli stati possibili in altri universi perfettamente identici ma non comunicanti con quello dell'osservatore (la teoria del "*Branch Universe*"). Questa è una visione forse audace ma dal punto di vista del formalismo matematico è ammissibile, come lo è la fisica senza freccia del tempo. L'universo ramificato di Everett fu poi sviluppato da Bryce De Witt e Wheeler. Questa idea è decisamente contraria alla filosofia fortemente riduzionista del rasoio di Occam perché moltiplica gli enti in gioco, come lo è anche il meccanismo della retrocausazione che ha anche dei limiti: posto che l'universo non si ramifichi, non ammetterebbe quei meccanismi di retrocausazione non consistenti, cioè quei meccanismi che creano un paradosso temporale (si pensi al paradosso dell'individuo che viaggia nel passato e uccide il proprio nonno ancora in fasce) che mettono in dubbio l'esistenza di uno stesso ipotetico individuo che viaggia nel tempo. Vi è quindi una forma di super

determinismo: non si possono compiere certe scelte, alcune sono vietate⁸³. Inoltre se l'universo cambia e non si ramifica, a causa di un cambiamento nel passato, come è possibile spiegare il ramo del mondo da cui è partito l'ipotetico individuo che viaggia nel passato? Affiancare alla retrocausazione, il meccanismo everettiano della ramificazione dei mondi è un modo per superare molti paradossi. O si rifiuta la retrocausazione o se la si accetta si deve prendere in considerazione che anche gli enunciati di Everett siano veri. Con queste ipotesi si salvano tutte le teorie consistenti enunciate fin ora. Tutto ciò è molto difficile da accettare e fantasioso. A volte sembra più facile mettere una toppa alla teoria, ad esempio cercare dei segnali a distanza che spieghino EPR e che connettono due particelle separate e poste a distanze arbitrarie, o meglio cercare una spiegazione fisica, magari modificando la matematica che descrive il fenomeno.

Si può avere un'idea di un modello non pienamente formale che stia a cavallo tra fisica classica e fisica relativistica e che mostri l'esistenza di stati non separabili e che non violino la località, senza ricorrere a retrocausazioni. Il modello che si esporrà più avanti (nel capitolo VII di questa tesi) mostrerà come sia possibile che un segnale viaggi da una posizione x_1 a una posizione x_2 arbitrariamente lontana senza violare il principio di località. Si ipotizzerà che l'elettrone altro non sia che un'entità dotata di massa e di un certo raggio. L'elettrone verrà visto come un pianeta la cui densità di massa supera il proprio valore critico di collasso a un buco nero. Calcolato il raggio per cui si ottiene un buco nero e facendo leva su quella che si potrebbe chiamare parte non osservativa di una teoria fisica, per valori inferiori a tale raggio si osserverà un collasso dell'orizzonte degli eventi, in

⁸³Cfr. Pegg (2014), Greenberger e Svozil (2005).

quanto la velocità di fuga invece che aumentare diminuisce: ciò implicherebbe una sorta di evaporazione dello spazio-tempo. Per un valore specifico del raggio, l'orizzonte degli eventi sarà talmente collassato da rendere nullo il valore della velocità di fuga, per cui qualsiasi segnale potrà viaggiare e raggiungere qualsiasi luogo nell'universo. Però l'esempio che sarà proposto non spiegherà la natura di questo segnale. Sarà presentato solo come modello dimostrativo.

Gli esperimenti dicono che la corretta descrizione sia l'*entanglement* e non le miscele statistiche che vengono ipotizzate dall'EPR. Lo stesso Bohm negli anni '50 dopo aver iniziato lavori critici sui fondamenti della meccanica quantistica, verso la fine della sua vita prese una deriva verso filosofie spiritualistiche e parapsicologiche, verso la fisica della coscienza. Anche se si evita di ammettere la retrocausazione o altre ipotesi fantasiose, è evidente che il mondo sia non separato e interconnesso. Sistemi interagenti nel passato resteranno sempre interconnessi. Il tutto interagisce con il tutto. Le istanze metafisiche sono antirealistiche e anticausali, la visione è olistica. Il tutto non è solo la somma delle parti.

Importanti questioni che la tradizione filosofica del XX secolo di stampo neoempiristico aveva ritenuto come prive di significato, come il problema mente corpo, il problema del realismo, il problema della causalità, il problema dell'olismo, il problema dell'essere e il nulla, diventano tematiche cruciali e centrali di estremo interesse fisico. Addirittura si può parlare seriamente del nulla. Secondo Martin Heidegger (1929) la scienza sarebbe incapace di rappresentare il nulla. In meccanica quantistica vi sono situazioni in cui emergono le proprietà fisiche del nulla. Vi è un paradosso discusso da Renniger (1960) in cui la mancata misurazione provoca cambiamenti dello stato fisico. Il famoso esperimento di

risultato negativo. L'esperimento è il seguente: si ha una sorgente di fotoni ad una distanza breve si supponga di avere una calotta semisferica che può assorbire un fotone ma ha delle lacune, dopo di essa vi è una seconda calotta più grande, la quale è totalmente assorbente per fotoni (Figura 1). Possono succedere due cose: il fotone viene rilevato su S_1 oppure il fotone non viene rilevato su S_1 , quindi fa una strada maggiore e viene rilevato su S_2 .

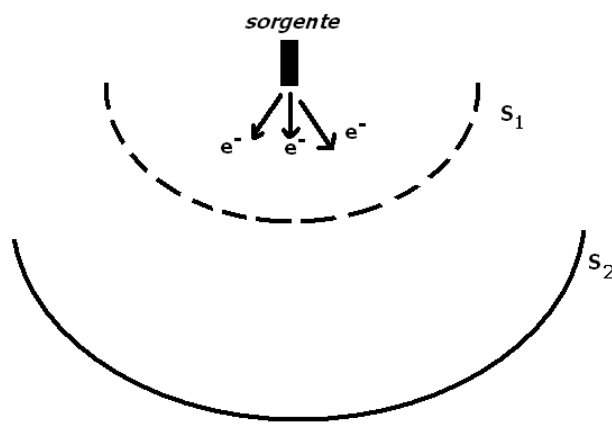


Figura 1: Illustrazione dell'esperimento di risultato negativo.

Lo stato iniziale è descritto dalla sovrapposizione tra lo stato $|\psi_1\rangle$ assorbimento dal rivelatore in S_1 e $|\psi_2\rangle$ assorbimento dal rivelatore in S_2 e appositamente normalizzato con un opportuno coefficiente. Si conoscono anche i tempi di arrivo dei fotoni nei rivelatori. Al tempo t_1 possono avvenire due cose o l'assorbimento e la funzione d'onda collassa in $|\psi_1\rangle$ oppure si ha il non assorbimento. In quest'ultimo caso si ha quella che viene chiamata misura di risultato negativo. Cioè una misurazione che non ha un risultato, la meccanica quantistica però dice che si ha la riduzione in $|\psi_2\rangle$. Al tempo t_1 quindi c'è già la riduzione. Se si

assume una interpretazione di tipo macrorealistico⁸⁴ al tempo t_1 non si può avere la riduzione, si deve aspettare il tempo t_2 . Queste interpretazioni che riconoscono la realtà solo a livello macroscopico dovrebbero assumere che la visione del mondo (quella comune) sia quindi molto più incerta di quella della meccanica quantistica ortodossa. Si dovrebbe cioè mantenere la descrizione di sovrapposizione fino a t_2 . E quindi si ha una soluzione inconsistente. Un'altra via è quella di riconoscere una realtà fisica al nulla, cioè quel che si rivela è il nulla⁸⁵. A meno di non dirigersi verso spiegazioni di tipo interazionistico-mentalistiche rispetto al problema mente corpo, o altre metafisiche simili poco plausibili.

Si può quindi fare *entanglement* anche con il nulla. Il nulla è anche collegato con un famoso esperimento sulla non località della meccanica quantistica: Il paradosso di De Broglie. Si ha un elettrone in una scatola, che si può suddividere in due parti. La meccanica quantistica ha un formalismo che descrive l'elettrone ovunque e da nessuna parte. Le due parti si separano e si cedono a due diversi osservatori. Un osservatore apre la scatola e trova l'elettrone, che si localizza, si ha la riduzione d'onda che fa sparire l'elettrone dalla scatola chiusa dell'altro osservatore. Viceversa se non lo si trova, l'elettrone si localizza nella scatola chiusa dell'altro osservatore. Nel caso in cui la misura non ha rilevato nulla, si ha la situazione di assenza della particella che è comunque un fenomeno fisico che cambia lo stato.

⁸⁴ Vi sono stati vari tentativi per spiegare la riduzione della funzione d'onda: Secondo l'interpretazione di von Neumann è la coscienza dell'osservatore che compie la riduzione, quella di Bohr è basata sul semplice apparato di misura. L'apparato di misurazione è il responsabile del collasso della funzione d'onda. Un'altra spiegazione di alcuni fisici come Daneri, Loinger e Prosperi o Ghirardi, Rimini e Weber è che la riduzione della funzione d'onda avviene spontaneamente ed è un'evoluzione verso l'equilibrio. Vi sono anche le spiegazioni interazionistiche o mentalistiche. Cfr. Tarozzi (1985, 1992).

⁸⁵ Si potrebbe obiettare che quel che è rilevante, in questo caso, non sia la rivelazione del nulla, bensì l'assunzione che l'elettrone sia localizzato ancor prima della misura.

12. Il realismo empirico in meccanica quantistica

Sul problema dell'essere o il nulla la meccanica quantistica riapre su tematiche ritenute prive di senso (famosa la critica che formula Carnap (1932) ne *“L'eliminazione della metafisica tramite l'analisi logica del linguaggio”*, l'errore della metafisica nasce dal fatto che il linguaggio ordinario è poco rigoroso). Si è compreso che il nulla può acquisire proprietà fisiche, non semplicemente metafisiche. Non è la totale assenza della determinazione dell'essere, è l'assenza della particella, di quella particolare determinazione dell'essere.

Dare senso al nulla è una possibile soluzione rispetto alle altre che minano i tradizionali punti di vista sul problema mente corpo che sono o l'ontologia materialista che vieta di portare avanti la filosofia della mente dualistica, la tesi del panismo psico-fisico secondo cui gli eventi fisici si influenzano tra di loro, o l'epifenomenismo (più ragionevole) secondo cui gli eventi sono dipendenti e ci possono essere influenze fisiche e psichiche che agiscono sugli stati mentali.

La critica neopositivista che mette in discussione il senso del realismo metafisico e della causalità metafisica è una critica sbagliata o corretta? Secondo Tarozzi (1992) il principio di verificabilità in forma debole (cioè in forma logica) è un criterio di senso che va accettato, ma resta la possibilità di riformulare tutte queste grandi dispute metafisiche sotto forma di principi che abbiano effettivamente significato. La validità della premessa di un enunciato condizionale è un'ipotesi empirica, ad esempio nel caso del determinismo laplaciano se si violano le condizioni iniziali l'enunciato è falsificato ed appare banalmente vero. Questo

accade nel caso del realismo: se si viola la località non si può più prevedere senza perturbazioni le proprietà del secondo sottosistema. La misura sul primo sottosistema influenza la misurazione sul secondo. Ciò che è messo in discussione quindi è la premessa. In questo caso le premesse delle definizioni della realtà o della causalità deterministica sono degli enunciati condizionali che entrano in conflitto con una particolare descrizione del mondo fisico. Non è l'esperienza che viene rigettata ma è la miglior rappresentazione del mondo dell'esperienza che mette in discussione questi principi, i quali non si possono più applicare in contesti teorici. Di conseguenza il realismo metafisico è messo a dura prova⁸⁶. L'idea di pensatori come Hume, Kant e dei neopositivisti è che la realtà fosse un attributo che potesse essere predicato sull'oggetto accanto ai suoi requisiti empirici. Molto celebre è la confutazione del realismo metafisico di Carnap (1932): Ci sono due geografi, uno realista e l'altro idealista, che partono per una spedizione in Africa per misurare le caratteristiche di una montagna. Iniziate le operazioni di misurazione, sono inizialmente d'accordo sulle proprietà fisiche della montagna e dopo poco filosofeggiano su di essa e non si trovano in accordo su alcune proprietà della montagna. Secondo il realista esiste una procedura, un metodo per dirimere le prove controverse, cioè qualcuno tra i due geografi avrà ragione oppure nessuno dei due, questo è ciò che caratterizza la scienza rispetto alla filosofia secondo i neopositivisti. Questa metafora è ripresa da Ayer nel 1934 in *"Demonstration of the impossibility of the metaphysics"*, prendendo in esempio la storia dell'arte: c'è uno storico dell'arte che trova un quadro che attribuisce a Goya, alcuni dicono che è di Goya altri dicono di no. Gli idealisti dicono che

⁸⁶ Cfr. Putnam (1981).

questo quadro è una composizione di idee, i realisti sostengono che i colori sono reali, il quadro è vecchio. Mentre esistono dei metodi per confermare in qualche misura l'autenticità del quadro, ad esempio se si trovano dei documenti che attestano l'autenticità dell'attribuzione del quadro a Goya, sulla questione della realtà del quadro non si potrà mai fornire una risposta perché va oltre l'esperienza, non ha alcun contributo conoscitivo. Si ricordi l'idea kantiana che del X individuale non vi è scienza. L'idea nata da un argomento ontologico è che la realtà è una proprietà ulteriore che si aggiunge alle proprietà fisiche dell'oggetto. Idea che Kant rifiuta.

Con il criterio di realtà Einstein, Podolski e Rosen, oltre a fornire una condizione sufficiente, spostano la nozione di realtà dall'oggetto alle sue proprietà prevedibili. Mentre nel realismo metafisico la realtà trascende la stessa scienza, è qualcosa di aggiuntivo, nella concezione di Einstein, Podolski e Rosen si sposta sulle proprietà prevedibili attraverso le teorie scientifiche. Non sono reali gli oggetti di per sé (sarebbe inutile affermarlo) ma rispetto ad una certa teoria, la scienza o meglio le teorie scientifiche forniscono argomenti per il realismo. Si ha un capovolgimento, non è la scienza a basarsi sul realismo ma il realismo a basarsi sulla scienza. Non si ha più a che fare con il realismo metafisico ma bensì con un *realismo empirico*. Dal punto di vista scientifico è necessario avere una posizione realista ed empirista secondo il principio del realismo empirico che si definisce come segue⁸⁷:

⁸⁷ Si veda Fano (2007).

Vi sono buone ragioni per credere nella realtà di quelle entità non osservabili per le quali si ha una ragionevole spiegazione scientifica del fatto che non si riescano a percepirle.

Il realismo empirico afferma che le proprietà prevedibili possono essere fornite all'oggetto indipendentemente dalle misurazioni effettuate su di esso. In questo modo si salva l'idea di indipendenza e la si sposta sulle proprietà e non sull'oggetto. L'argomento di Hume secondo cui la realtà è quella cosa che esisterebbe anche se nessuna mente fosse presente, è totalmente capovolta. Secondo una posizione neoempiristica si potrebbe assumere questo principio realistico: "anche se tutte le menti scomparissero dall'universo le stelle proseguirebbero il loro corso". Quindi è la prevedibilità che fonda l'idea di realtà, la quale si basa sulle proprietà oggettive indipendenti prevedibili attraverso le teorie. Le stelle dell'esempio humeano esisterebbero perché avrebbero quelle determinate proprietà prevedibili attraverso le leggi della meccanica classica o relativistica. La versione humeana sarebbe stata: "se tutte le menti scomparissero dall'universo le stelle esisterebbero". Questo argomento è di per sé sbagliato perché vuoto. La scienza invece è il miglior ambito in cui fondare la concezione realista però, anche in questo caso, la meccanica quantistica mette in crisi questa posizione, assieme ad altri presupposti filosofici tra cui quello di identità degli indiscernibili. Un modo di affrontare la questione è quella di comprendere quali presupposti filosofici, quali assunzioni, vadano riformulati o eliminati. Per questo obiettivo sarà necessario rivolgere prima un attento sguardo alle basi fisico-matematiche della meccanica quantistica non relativistica.

Dopo aver discusso gli aspetti fisici, filosofici e matematici della meccanica quantistica, si analizzano ora le statistiche quantistiche. Il nostro obiettivo è quello di avere un quadro più ampio possibile su cui dibattere un principio di individualità in ambito quantistico.

IV. LA STATISTICA QUANTISTICA⁸⁸

La meccanica statistica nasce come disciplina scientifica che vuole dedurre leggi macroscopiche a partire da leggi microscopiche. Secondo Boltzmann e Gibbs, tra i fondatori di questo ramo della fisica matematica, i processi naturali che regolano l'aumento di grandezze fisiche come l'entropia potevano essere spiegati in termini probabilistici (cioè nei termini delle microparticelle che costituiscono la materia). I modelli che vengono analizzati in meccanica statistica sono modelli probabilistici o meglio modelli che presuppongono una misura di probabilità.

Si forniranno ora alcuni elementi matematici di meccanica statistica utili a comprendere la statistica classica (quella di Maxwell-Boltzmann) e quelle quantistiche (di Bose-Einstein e Fermi-Dirac).

Si indichi con N il numero delle particelle di un sistema preso in esame. Sia $i \rightarrow \sigma(i)$ la variabile aleatoria che associa alla particella i la sua configurazione $\sigma(i)$ nel sistema. Una configurazione del sistema è un insieme di valori di $\sigma(i)$.

Si potrebbe utilizzare $\sigma(i)$ per rappresentare lo spin di una particella, rappresentando una dinamica a due stadi (spin sinistrorso, spin destrorso), ottenendo una certa distribuzione degli spin di un insieme di particelle. Se le configurazioni fossero equiprobabili e se le particelle non risentissero di alcuna interazione reciproca (e quindi in un modello di tipo non interagente), si avrebbe una distribuzione bernoulliana. In realtà le particelle in natura non sono

⁸⁸ Per questa breve introduzione alla meccanica statistica, i testi di riferimento sono Gallavotti (1995), Lieb e Lebowitz (1972), Lieb e Wu Fa Yueh (1972), Lieb e Yngvason (1999). Per la stesura di questo capitolo ringrazio l'importante contributo fornitomi dalle preziose lezioni di meccanica statistica del prof. Pierluigi Contucci presso l'Università di Bologna nell'anno accademico 2005/2006.

indipendenti, per questa ragione è necessario introdurre un elemento di interazione all'interno del modello probabilistico (come si vedrà a breve).

Si usa una funzione hamiltoniana che rappresenta la configurazione di velocità e impulso del sistema.

$$H(\sigma) \equiv H(\sigma_1, \dots, \sigma_N).$$

Il più semplice modello non interagente è quello di Ising che ha la seguente hamiltoniana:

$$H(\sigma) = \sum_{i=1}^N \sigma_i.$$

L'idea di Boltzman è stata quella di considerare la probabilità di una configurazione σ di un sistema proporzionale a $e^{-\beta H(\sigma)}$, con $\beta = \frac{1}{kT}$, k la costante di Boltzman, questa considerazione è legata al fatto che maggiore è l'allontanamento dall'energia macroscopica, minore è la probabilità di trovare la particella. Da queste considerazioni Boltzman ha ricavato le leggi della termodinamica e con l'introduzione della misura di Gibbs per un sistema di N particelle $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$, $\sigma_i = \pm 1$, l'hamiltoniana, che rappresenta l'energia potenziale delle configurazioni del sistema, associa ad ogni configurazione una probabilità. La probabilità di Boltzman-Gibbs è così definita:

$$P_{N,\beta}(\sigma) = \frac{e^{-\beta H_N(\sigma)}}{\sum_{\sigma} e^{-\beta H_N(\sigma)}},$$

la funzione $Z_N(\sigma) = \sum_{\sigma} e^{-\beta H_N(\sigma)}$ è chiamata funzione di partizione. Si definisce la pressione del sistema come

$$p_N(\beta) = \log[Z_N(\sigma)] = \log \left[\sum_{\sigma} e^{-\beta H_N(\sigma)} \right].$$

Si può dimostrare che $p_N(\beta)$ è la funzione generatrice dei momenti dell'hamiltoniana.

Infatti

$$\frac{dp_N(\beta)}{d\beta} = - \sum_{\sigma} p_{N,\beta}(\sigma) H_N(\sigma) = -\omega(H),$$

dove $-\omega(H)$ è il valor medio di H cioè l'energia interna. Inoltre

$$\frac{d^2 p_N(\beta)}{d\beta^2} = \omega(H_N^2) - \omega(H_N)^2 \geq 0$$

rappresenta la varianza nonché il calore specifico.

$p_N(\beta)$ è una funzione convessa nella variabile β . Questa proprietà è chiamata “stabilità termodinamica”.

Se la funzione limite per $N \rightarrow \infty$ (cioè al limite termodinamico), $\lim_{N \rightarrow \infty} p_N(\beta)$, ha

singolarità analitiche allora vi saranno transizioni di fase, altrimenti se è una funzione di classe C^∞ , cioè una funzione che ha tutte le sue derivate parziali e di qualsiasi ordine continue, non si hanno transizioni di fase. Per garantirsi un limite termodinamico è sufficiente mostrare che la pressione sia sub-additiva o super-

additiva, cioè rispettivamente $p_{N+M}(\beta) \leq p_N(\beta) + p_M(\beta)$ o

$p_{N+M}(\beta) \geq p_N(\beta) + p_M(\beta)$. Ciò significa che in meccanica statistica si deve

avere che $\inf_N \frac{P_N}{N} \neq -\infty$ o $\sup_N \frac{P_N}{N} \neq +\infty$.

Il modello di Ising interagente a una dimensione è invece il primo dei modelli in cui le particelle interagiscono tra loro. Il modello che esprime un insieme di

particelle le cui interazioni reciproche portano ad una sorta di allineamento ferromagnetico. L'hamiltoniana è:

$$H_N(\sigma) = -\sum_{i=1}^N \sigma_i \sigma_{i+1},$$

con la condizione al bordo $\sigma_{N+1} = \sigma_1$, ciò esprime una tendenza ad allinearsi. La

pressione è $p_N(\beta) = \log \left[\sum_{\sigma} e^{-\beta H_N(\sigma)} \right]$.

Un altro modello interagente, quello di Curie-Weiss, rappresenta un insieme di particelle interagenti sottoposte anche ad una interazione magnetica esterna ed ha la seguente hamiltoniana:

$$H_N(\sigma) = -\sum_{i,j}^N \sigma_i \sigma_j - h \sum_{i=1}^N \sigma_i = -Nm^2 - Nhm,$$

dove con m si introduce la magnetizzazione della configurazione $m(\sigma) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i$.

In genere l'hamiltoniana è proporzionale al volume: se il numero di particelle raddoppia, raddoppia il volume e aumenta di un fattore 2 il valore dell'hamiltoniana, rispecchiando il principio di additività dell'energia.

Dall'additività di H si può dimostrare l'additività della pressione.

Dato un modello probabilistico⁸⁹ si definisce l'entropia del modello nel modo seguente:

$$S = -\sum_i p_i \log p_i.$$

Nel caso specifico della meccanica statistica si definisce entropia del modello probabilistico di Boltzmann- Gibbs la quantità:

⁸⁹ Cioè uno spazio di probabilità determinato da una terna costituita da uno spazio degli esiti, uno spazio degli eventi e una probabilità.

$$S = -\sum_{\sigma} p(\sigma) \log p(\sigma).$$

Si utilizza un principio variazionale dal nome *principio variazionale entropico* per ottimizzare la disuguaglianza:

$$\log Z \geq \log \tilde{Z} - \beta \tilde{\omega}(H) - h \sum_i \tilde{\omega}(\sigma_i),$$

che si ottiene dalla combinazione della disuguaglianza di Jensen e dal confronto tra la funzione di partizione $Z(\sigma) = \sum_{\sigma} e^{-\beta H(\sigma)}$ con $\tilde{Z}(\sigma) = \sum_{\sigma} e^{-h \sum_i \sigma_i}$ e $\tilde{\omega}$ valore di aspettazione della funzione che compare tra parentesi. Il $\log Z$ non si può conoscere a priori in quanto spesso l'hamiltoniana H è una funzione complessa da calcolare.

Si definisce l'energia libera in questo modo:

$$F = -\frac{1}{\beta} \log Z.$$

Cioè l'energia libera è il rapporto tra l'opposto della pressione e il valore beta.

Quindi ricavando i valori dell'energia libera nella disuguaglianza precedente, si ha:

$$F \leq \tilde{F} + \tilde{\omega}(H) + \beta^{-1} h \sum_i \tilde{\omega}(\sigma_i),$$

dove $\tilde{F} = -\frac{1}{\beta} \log \tilde{Z}$. $\tilde{F}(h) = \tilde{F} + \tilde{\omega}(H) + \beta^{-1} h \sum_i \tilde{\omega}(\sigma_i)$ è il funzionale che dipende da una H arbitraria e tale disuguaglianza sarà ottimale nel momento in cui si calcoli il valore del $\sup_H \tilde{F}(h)$.

Si può riscrivere il funzionale in questo modo:

$$\tilde{F}(h) = \tilde{\omega}(H) + \beta^{-1} \left(h \sum_i \tilde{\omega}(\sigma_i) - \log \tilde{Z} \right).$$

Con un cambio di notazioni che riconosce con $U \equiv \tilde{\omega}(H)$ l'energia interna e con

$S \equiv -\beta^{-1} \left(h \sum_i \tilde{\omega}(\sigma_i) - \log \tilde{Z} \right)$ l'entropia del modello probabilistico, si ottiene:

$$\tilde{F}(h) = U + \beta^{-1} S.$$

Il teorema fondamentale dell'entropia afferma che definito un modello probabilistico di N elementi, si ha che l'entropia $S = -\sum_i p_i \log p_i$ è non decrescente e in particolar modo $0 \leq S \leq \log N$. L'entropia è nulla quando l'informazione, intesa come “quantità di incertezza” sul verificarsi di un certo evento, che si ottiene dal sistema è nulla cioè quando si ha la certezza del verificarsi di un certo evento. Negli stati puri di un simpleso l'entropia di un sistema vale zero ed è massima nel punto centrale di esso⁹⁰. Si dimostra che l'entropia è una funzione convessa nel simpleso degli stati, tale proprietà garantisce la stabilità termodinamica cioè due corpi messi a contatto tenderanno ad uniformare la loro temperatura.

Assegnato un valore di energia interna, per determinare per quali valori di p_i si raggiunge il massimo di entropia, è necessario risolvere un problema di massimo/minimo vincolato.

⁹⁰ Semplificando un po', si intende per simpleso una struttura geometrica rappresentata da un segmento nel piano cartesiano i cui vertici siano collocati nei punti (1,0) e (0,1). Una misura di probabilità è detta pura se non è combinazione lineare di altre due misure di probabilità. Nel caso specifico gli stati puri sono i punti (1,0) e (0,1). Un insieme di stati puri è esaustivo se ogni punto del simpleso è combinazione lineare degli stati puri.

Posto $S = -k \sum_i p_i \log p_i$, $U = \sum_i p_i E_i$ con E_i livello di energia associata alla probabilità p_i si ha che $F = U - TS$. Il minimo di F si può determinare con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, oppure semplicemente si cerca il valore di p_i in cui F è stazionario in quanto tale punto sarà anche di minimo per la convessità di F . Tale valore di p_i risulta:

$$\bar{p}_i = \frac{e^{-\frac{E_i}{kT}}}{\sum_{\sigma} e^{-\frac{E_i}{kT}}}.$$

Se si pone $kT = \frac{1}{\beta}$ si ottiene la formula di Boltzmann. La distribuzione di Boltzmann è quindi conforme al II principio della termodinamica che massimizza l'entropia.

Nel modello di Curie-Weiss si ha che:

$$H_N(\sigma) = -\frac{1}{N} \sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j - h \sum_{i=1}^N \sigma_i = -m^2 - hm, \quad p(\beta) = \log Z = \log \left[\sum_{\sigma} e^{-\beta H(\sigma)} \right],$$

$\frac{p_N(\beta)}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} p(\beta, h)$ da cui si ottiene $m = \tanh(\beta m + h)$. In questo caso

specifico e in altri modelli, dalla magnetizzazione $m = \omega \left(\frac{\sum \sigma_i}{N} \right)$ si possono

ricavare tutte le altre grandezze interessanti. Tutte le derivate esistono in quanto p

ha limite termodinamico. La variabile $h = \frac{H}{N}$ diventa da aleatoria a deterministica

al limite termodinamico. Questo perché la varianza di h tende a zero al tendere di N all'infinito. Questo fenomeno è detto automedia dell'energia per particella.

Un'altra proprietà interessante del modello di Curie-Weiss è che il modello è

invariante per permutazioni degli indici, cioè ad esempio $\omega(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4) = \omega(\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_4)$. Vi sono altri modelli molto interessanti nell'ambito della meccanica statistica tra cui quello di Edwards-Anderson (1975) detto modello dello spin glass o quello di Sherrington-Kirkpatrick (1975) che non verranno trattati per non appesantire troppo questa breve introduzione sulla meccanica statistica e per cui si rimanda alla bibliografia di questa tesi.

1. La statistica quantistica⁹¹

Si può far risalire l'inizio della statistica quantistica con le opere di Planck (1900a, 1900b), di Gibbs (1902) e di Einstein (1905). A differenza di Gibbs, Planck fornì delle "ipotesi" sulla meccanica quantistica, mentre Einstein pose le basi per quel moto "caotico" chiamato moto browniano. La statistica quantistica dal canto suo ha trovato successo e si è affermata grazie alle sue capacità esplicative e predittive dei fenomeni quantistici. Gibbs propose una nuova assiomatizzazione dei fondamenti della statistica, da applicare anche in ambito classico, rinunciando al postulato di Boltzman sull'ergodicità di sistemi di molecole, dal momento che il postulato ergodico aveva portato a dei paradossi in ambito termodinamico⁹². Il successo della statistica quantistica è legato ad una nuova formulazione dei fondamenti della statistica, che hanno reso possibile giustificare le evidenze sperimentali in ambito quantistico. Dal moto browniano, Einstein aveva mostrato come le molecole dovessero essere delle particelle di dimensioni limitate e ben

⁹¹ Per questo paragrafo si confronti Emch (2007).

⁹² Nelle successive sezioni si parlerà a proposito del paradosso di Gibbs.

definite (Einstein, 1906): in questo modo riuscì a giustificare il fatto che questo moto fosse causato da moti termici caotici delle molecole (Einstein 1906, Gouy 1888). Successivamente diverse formulazioni matematiche hanno introdotto dei modelli per descrivere nella maniera più accurata possibile questo moto: fecero così la comparsa quei processi probabilistici-statistici noti col nome di processi stocastici (Smolukowski, 1906,1916) e la teoria della probabilità di Kolmogorov (1933).

I primi successi della statistica quantistica si sono avuti nel calcolo della densità di energia per unità di volume dello spettro della radiazione elettromagnetica e nella comprensione della dualità onda-corpuscolo della luce⁹³.

La densità spettrale di energia della radiazione elettromagnetica all'equilibrio in un corpo nero alla temperatura T , gettava un certo sconcerto nella comunità dei fisici della fine del XIX secolo, inizio del XX secolo: era palese la poca adattabilità dei vecchi modelli teorici per descrivere i risultati empirici dello spettro per certe soglie di temperature. Planck mostrò come la sua formula⁹⁴

$$\rho(\nu, T) = A \frac{h\nu}{e^{kT} - 1}, \quad (4.1)$$

dove $A = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$, k costante di Boltzman, c velocità della luce nel vuoto, h costante

di Planck, R costante dei gas perfetti, trovasse un ottimo adattamento alla realtà osservata. La novità fondamentale di Planck fu l'introduzione della frequenza ν .

⁹³ Per una introduzione storica della teoria quantistica si vedano anche Jammer (1966, 1974).

⁹⁴ Il formalismo e le notazioni usate in questo paragrafo sono tratte da Emch (2007).

Analogamente a quanto proposto da quest'ultimo, Wien nel 1894, Stephan 1879 e Boltzman 1884, formularono delle leggi che trovarono un buon riscontro empirico. In particolar modo la legge di Wien (1896):

$$\rho(\nu, T) = \alpha \nu^3 e^{-\gamma \frac{\nu}{T}}, \quad (4.2)$$

con α e γ costanti, si applica bene quando il rapporto $\frac{\nu}{T} \gg \frac{k}{h}$. Invece per valori

$\frac{\nu}{T} \ll \frac{k}{h}$, Rayleigh (1900) e Jeans (1905) ricavarono questa formula:

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi \nu^2 kT}{c^3}. \quad (4.3)$$

La formula di Planck fornisce adeguati risultati empirici quando il rapporto $\frac{\nu}{T}$

non è né troppo piccolo $\left(\frac{\nu}{T} \ll \frac{k}{h}\right)$ né troppo grande $\left(\frac{\nu}{T} \gg \frac{k}{h}\right)$, cioè per valori

intermedi. Come è noto, Planck introdusse in via ipotetica il concetto di quanti, cioè “pacchetti” di energia che la radiazione scambia con l'ambiente fino al raggiungimento dell'equilibrio. Questo lo portò a rivedere la sua formula, che faceva invece leva principalmente sulla frequenza. Tuttavia egli non riusciva a ricavare la sua formula dal primo principio della termodinamica.

Per Einstein, invece, la quantizzazione non doveva essere qualcosa che regola lo scambio di energia, (ad esempio tra la luce e un corpo nero) fino al raggiungimento dell'equilibrio, piuttosto doveva essere una proprietà stessa della natura della radiazione⁹⁵. A tal proposito Einstein propose come formula della fluttuazione un'espressione in cui la natura della luce potesse essere considerata sia composta da particelle sia da onde, risolvendo così l'annosa questione che

⁹⁵ Si veda Emch (2007, p. 1079).

contrapponeva le due nature della luce, cioè la visione ondulatoria di Huygens a quella newtoniana corpuscolare. Per Einstein infatti la fluttuazione media di energia $\overline{(\Delta u)^2} = kT^2 \frac{\partial \overline{u(v,T)}}{\partial T}$, dove $\overline{u(v,T)}$ è l'energia media di un oscillatore

quantistico di frequenza ν di radiazione in equilibrio termico alla temperatura T ,

può così essere scomposta $\overline{(\Delta u)^2} = \overline{(\Delta u)_p^2} + \overline{(\Delta u)_w^2}$, dove $\overline{(\Delta u)_p^2}$ è la componente

corpuscolare (prima componente), $\overline{(\Delta u)_w^2}$ la componente ondulatoria (seconda

componente). Si ha $\overline{(\Delta u)_p^2} = \overline{u(v,T)} h\nu$ e $\overline{(\Delta u)_w^2} = \overline{u(v,T)}^2 \frac{c^3}{8\pi\nu^2}$ con

$\frac{\overline{(\Delta u)_p^2}}{\overline{(\Delta u)_w^2}} = e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1$. La prima componente domina se $\frac{h\nu}{kT} \gg 1$, viceversa domina la

seconda componente. Questo dualismo cessa di esistere come forma di contrapposizione e con De Broglie si estende a tutte le particelle subatomiche.

Oltre a questa soluzione, la formula di Einstein giustifica bene anche le osservazioni di Paul Ehrenfest (1911) riguardo l'emergere di comportamenti quantistici nella meccanica statistica, a basse temperature, e di quella classica ad

alte temperature⁹⁶. Questo perché nell'espressione compare il rapporto $\frac{h}{T}$, il

limite classico ($h \rightarrow 0$ e $T \rightarrow \infty$) si ottiene quando le energie sono estremamente grandi se paragonate al valore di h . I successi della statistica quantistica non sono solo dovuti alla soluzione del problema della densità di energia dello spettro della radiazione elettromagnetica. Un problema che lasciava perplessi circa la sua soluzione era la perdita del valore costante del calore specifico dei solidi a

⁹⁶ Si veda Emch (2007, p. 1080).

temperature molto basse. La statistica classica non riusciva a spiegare questo fenomeno.

Einstein (1907,1911) e Debye (1912) fornirono il seguente modello per il calore specifico volumico che estendeva la legge di Dulong-Petit:

$$c_v = \begin{cases} 3R & T \gg T_D \\ \frac{12}{5} \pi^4 R \left(\frac{T}{T_D} \right)^3 & T \ll T_D \end{cases}, (4.4)$$

dove T_D è la temperatura di Debye e dipende dal solido considerato, dalla velocità del suono nel solido e dalla sua densità. Per giungere a questo modello Einstein e Debye fecero una ipotesi circa le vibrazioni elementari del suono, i fononi, una sorta di quanti di suono.

Una volta accettata la rappresentazione mediante i quanti per il mondo microscopico, ci si chiese quale fosse la rappresentazione di un gas quantistico ideale. A tal proposito a Bose e Einstein (1924) si attribuisce la strutturazione di un gas ideale di tipo quantistico.

Sia $Z(\Lambda, T, \mu)$ la funzione di partizione di un insieme di particelle⁹⁷ fra loro identiche di massa m , in equilibrio alla temperatura T , dove Λ è il volume, μ è il potenziale chimico con condizioni periodiche al contorno. Le particelle non interagiscono fra loro, per cui l'energia totale è la somma delle energie cinetiche

individuali $E_c = \frac{\hbar^2 |k|^2}{2m}$ con $k \in Z^3$. Applicando la distribuzione di Planck della

densità di energia spettrale, si ottiene la funzione di partizione

⁹⁷ Per il momento si consideri una generica particella microscopica, senza indagarne la sua natura.

$Z(\Lambda, T, \mu) = \prod_{k \in \mathbb{Z}^3} (1 - e^{-\beta(E_k - \mu)})^{-1}$ con $\beta = \frac{1}{kT}$. Da questa formula e applicando le

formule della meccanica statistica classica si può ricavare il volume V e la pressione P , cosa che può essere fatta mediante l'uso di un calcolatore.

Si ottiene:

$$\frac{1}{V} = \frac{g\left(\frac{3}{2}, z\right)}{\lambda^3}, \quad P = \frac{g\left(\frac{5}{2}, z\right)}{\beta\lambda^3} \quad \text{con} \quad \lambda = \hbar \sqrt{\frac{2\pi}{mkT}}, \quad g(s, z) = \frac{z}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - z} dt \quad \text{analitica}$$

in $C \setminus [1, +\infty[$. In particolare se $z=1$ e $\text{Re}(s) > 1$, g converge alla funzione z di Riemann, alle alte temperature e basse densità il gas si comporta come un gas classico. Si può inoltre dimostrare che a basse temperature e alte densità si ha

$$\frac{1}{V} = \frac{g\left(\frac{3}{2}, 1\right)}{\lambda^3} + \frac{1}{\lim_{|\Lambda| \rightarrow +\infty} \frac{\langle n_0 \rangle}{\Lambda}}, \quad (4.5)$$

$$P = \frac{g\left(\frac{5}{2}, 1\right)}{\beta\lambda^3}, \quad (4.6)$$

dove $\langle n_0 \rangle$ è il numero medio di particelle che occupa lo stato di base, cioè quello per cui non si registrano vibrazioni foniche⁹⁸.

Il valore di $V_0 = \lim_{|\Lambda| \rightarrow +\infty} \frac{\langle n_0 \rangle}{\Lambda}$ non può essere calcolato dalla teoria perché dipende dalla temperatura. Lo stato del sistema descritto in questo caso è chiamato fase condensata di Bose-Einstein ed è previsto a basse temperature secondo la teoria dei quanti. Questo stato non ha analoghi nel mondo classico e non sarebbe nemmeno previsto alla luce della fisica classica. È prerogativa assoluta della

⁹⁸ Cfr. Emch (2007, p. 1082).

statistica quantistica⁹⁹. Ma la principale novità fu il tentativo di Bose di ricavare la legge di Planck non ricorrendo alla meccanica ondulatoria ma a nuovi metodi statistici applicati alla teoria cinetica dei gas, considerando un gas composto da quanti di luce: una nuova statistica consistente nella ridefinizione dei casi possibili e conseguentemente dell'equi-probabilità. A differenza di un gas di particelle microscopiche, la cui indipendenza tra particelle porta alla legge di Wien, come aveva osservato Einstein, il gas di fotoni rompe questa simmetria legata alla probabilità classica e introduce nuovi stati elementari su cui si può ridefinire l'equiprobabilità. Per i bosoni vi è infatti una tendenza a disporsi nello stesso stato.

Come aggiunge Einstein in un post scriptum nei suoi articoli del 1916 sulla probabilità di transizione¹⁰⁰ la differenza tra la statistica di Bose-Einstein e quella classica si può osservare nei gas densi “là si fa sentire l'interazione tra le molecole, quell'interazione che, per il momento, viene contabilizzata statisticamente, ma la cui natura fisica rimane velata”. Einstein sottolinea il fatto che la mancanza di indipendenza statistica tra le particelle sia da ricercarsi in una qualche interazione oscura di natura fisica. Il carattere ondulatorio stesso della luce dovrebbe essere interpretato alla luce di questa interazione tra fotoni, anzi le onde stesse dovrebbero essere la prova di questa interazione oscura tra quanti.¹⁰¹

Come già affermato Einstein riteneva che i quanti fossero indipendenti dal punto di vista spaziale cioè la probabilità congiunta che due di essi occupassero una data cella nello spazio delle fasi è il prodotto delle probabilità separate. In questo modo la fattorizzabilità degli stati rende l'entropia classica di Boltzmann $S = k \log(W)$

⁹⁹ Cfr. Emch (2007, pp. 1083-1084).

¹⁰⁰ Cfr. Howard (2015, p. 159).

¹⁰¹ Cfr. Howard (2015, pp. 160-161).

additiva, e viceversa. Tuttavia sperimentalmente una teoria quantistica completa non può mantenere l'indipendenza spaziale delle particelle microscopiche (quanti), è necessario ipotizzare una qualche misteriosa interferenza reciproca. Diversi scienziati avevano teorizzato una diversa indipendenza tra quanti, seguendo un diverso modo di contare gli stati di aggregazione: la regola di conteggio di Planck sembrava quella ottimale anche se i suoi fondamenti e le spiegazioni di tale regola restavano misteriose o quanto meno poco solide fisicamente al di là della loro eleganza formale. Tuttavia Einstein e Bose con la loro statistica hanno portato un contributo a favore di una certificazione solida di questa regola. Anche Mieczyslaw Wolfke, fisico e studioso polacco, si è occupato del problema dell'indipendenza, su cui aveva lavorato Einstein negli anni '10, mostrando come essa sia legata al fatto che i quanti di una frequenza ben determinata si aggregano spontaneamente come fossero atomi a formare molecole stabili.

Il primo *Gedankenexperimente* con cui Einstein rende palese il problema della indipendenza spaziale in meccanica quantistica si può datare nel 1927, precisamente al convegno Solvay, ed era una sorta di antenato di quello che sarebbe stato chiamato esperimento di diffrazione a singola fenditura. Einstein mostra come esistono due vie per interpretare i risultati di tale esperimento della meccanica quantistica¹⁰²: la prima interpretazione è quella che associa ad una singola funzione d'onda un insieme di sistemi analoghi o come afferma Einstein una "nuvola di elettroni", la seconda interpretazione invece è quella che difende la teoria in particolare la completezza della teoria e che associa una funzione d'onda

¹⁰² Cfr. Howard (2015, p. 198).

ad un singolo elettrone descrivendolo in maniera completa. Einstein era contrario alla seconda interpretazione, egli infatti afferma che (Einstein 1927b, p. 102-103):

due configurazioni di un sistema che differiscono solo per la permutazione di due particelle dello stesso tipo sono rappresentate da due punti diversi (dello spazio di configurazione), il che non si accorda con i nuovi risultati statistici. [...] la peculiarità delle forze che agiscono solo a piccole distanze spaziali trova un'espressione meno naturale nello spazio di configurazione che nello spazio ordinario a tre o quattro dimensioni.¹⁰³

Le nuove statistiche si sono affermate in seguito al fallimento della fattorizzazione. Tuttavia in quei tempi si poté verificare che solo l'elio era la sostanza che esibiva un comportamento previsto dalla fase condensata di Bose-Einstein. Inoltre a temperature della fase condensata, l'elio non si comporta più come un gas: infatti si trova allo stato liquido e le particelle dell'elio subiscono quindi l'interazione reciproca, contrariamente a quanto assunto nella formalizzazione del gas ideale quantistico.

Come nota Emch (2007, p.1085), un altro successo delle statistiche quantistiche è dovuto alla formulazione del modello di Thomas-Fermi. Tale modello affonda le sue radici storiche nella formulazione della meccanica ondulatoria di Schrödinger, in quanto grazie ad essa è stato possibile spiegare lo spettro dell'idrogeno risolvendo un problema agli autovalori mediante un'equazione differenziale. Le cose si complicarono quando dal modello di atomo di idrogeno, si passò ad un atomo con più elettroni, legati fra loro da interazioni elettromagnetiche. Una

¹⁰³ Citato in Howard (2015, p. 199). Secondo Howard (2015, p. 200) uno degli errori che commise Einstein nella comprensione degli stati della meccanica ondulatoria fu quello di confondere lo spazio di Hilbert della meccanica quantistica con lo spazio di configurazione.

risposta a questi interrogativi fu fornita dal modello semiclassico di Thomas (1927) e Fermi. Il modello presuppone che la densità di carica dell'elettrone sia

$$Z = 4\pi \int_0^{\infty} r^2 \rho(r) dr, \text{ e il potenziale elettrico medio } \overline{\Phi(r)} \text{ soddisfi l'equazione di}$$

Poisson dell'elettrostatica:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(r\Phi) = 4\pi e\rho, \lim_{r \rightarrow 0} \Phi(r) = eZ. \quad (4.7)$$

Questo modello inoltre tiene conto del principio di esclusione di Pauli grazie alla statistica di Fermi (1926) e Dirac (1926)¹⁰⁴:

$$n(r, p) = \begin{cases} \frac{2}{h^3} & \varepsilon < \varepsilon_0 \\ 0 & \varepsilon > \varepsilon_0 \end{cases} \text{ dove } \varepsilon = \frac{1}{2m} - e\Phi, \quad (4.8)$$

da cui

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{8\pi}{3h^3} (2me\Phi)^{\frac{3}{2}} & \Phi > 0 \\ 0 & \Phi < 0 \end{cases}, \quad (4.9)$$

dove $n(r, p)$ è il numero di particelle e $\rho(r)$ la densità di energia. Il modello predice correttamente che il raggio dell'atomo che contiene tutti gli elettroni cresce a partire da 2.2×10^{-10} m per $Z=25$ fino a 2.8×10^{-10} m per $Z=100$; ma il modello non dice che per certi valori di Z , poco superiori a 55, il raggio decresce leggermente. Inoltre il modello difetta nell'attribuzione di proprietà alla densità di elettroni sia quando sono molto vicini che quando sono molto lontani dal

¹⁰⁴ Cfr. Emch (2007, pp. 1085-1086).

nucleo¹⁰⁵, per non parlare dell'inadeguatezza nella spiegazione della stabilità di alcuni tipi di molecole stabili.

A differenza del gas di Bose, quello di Fermi si ottiene partendo dalla partizione

$Z(\Lambda, T, \mu) = \prod_{k \in Z^3} (1 + e^{-\beta(E_k - \mu)})$ che per $\Lambda \rightarrow Z^3$ fornisce le seguenti funzioni:

$$\frac{1}{V} = 4\pi \int_0^\infty \rho^2 \left(e^{\frac{\hbar^2 \rho^2}{2mkT} + z} \right)^{-1} z d\rho, \quad (4.10)$$

$$P = \frac{4\pi}{\beta} \int_0^\infty \rho^2 \ln \left(1 + ze^{-\frac{\hbar^2 \rho^2}{2mkT}} \right) d\rho. \quad (4.11)$$

Alle alte temperature e bassa densità, il gas si comporta come un gas classico; alle basse temperature e alte densità invece il gas è molto differente da quello di Bose: I bosoni infatti si aggregano, mentre i fermioni seguendo il principio di Pauli (principio di esclusione) non possono stare nello stesso stato. Come nota Emch (2007, p. 1086), questo principio è riscontrabile attraverso le espressioni (4.8)-(4.11), inoltre i fermioni occupano il livello di energia più basso possibile nello

stato base del sistema: il livello energetico di Fermi $\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2}{v} \right)^{\frac{2}{3}}$.

A differenza della statistica classica per $T \rightarrow 0$, P non tende a zero ma ad un valore positivo. I valori previsti dal gas di Thomas-Fermi sono stati applicati con successo per calcolare la massa di oggetti astronomici come le nane bianche¹⁰⁶.

¹⁰⁵ Cfr. Emch (2007, p.1086).

¹⁰⁶ Cfr. Emch (2007, pp. 1087-1088).

2. Assiomatizzazioni della statistica quantistica

Dopo aver argomentato i principali successi della statistica quantistica, vengono ora passati in rassegna i tentativi di assiomatizzazione della statistica quantistica. Si distinguono due principali componenti della statistica quantistica che vengono messi a confronto: la meccanica quantistica di von Neumann (1932) e la teoria della probabilità e dei processi stocastici di Kolmogorov (1933).

Gli assiomi di Kolmogorov riguardano la terna $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ dove \mathfrak{F} indica una σ -algebra¹⁰⁷ di sottoinsiemi di Ω , μ una funzione misurabile additiva, misura di probabilità su (Ω, \mathfrak{F}) :

$$\mu: A \in \mathfrak{F} \rightarrow \mu(A) > 0, \quad \mu(\Omega) = 1. \quad (4.12)$$

μ si può estendere a tutte le funzioni $f \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ cioè tutte le f limitate da Ω a C : $\mu(f) = \iint_{\Omega} f(\omega) d\mu(\omega) \in C$.

Gli assiomi di von Neumann riguardano la terna (H, \wp, ψ) dove H è lo spazio di Hilbert, \wp il reticolo orto-modulare¹⁰⁸ di tutti i sottospazi chiusi dello spazio di Hilbert, ψ una funzione additiva calcolabile¹⁰⁹:

¹⁰⁷ Una σ -algebra è una algebra che è chiusa rispetto all'unione numerabile di sottoinsiemi, nello specifico F è una σ -algebra se $\Omega \neq \emptyset$, $F \subseteq \wp(\Omega)$, $F \neq \emptyset$, $\forall a, b \in F, A \cup B \in F, A \cap B \in F$,

$\Omega \setminus A \in F$ che significa che F è un'algebra in più $A_n \in F \Rightarrow \bigcup_i^{\infty} A_i \in F$.

$$\psi : P \in \wp \rightarrow \psi(P) > 0, \psi(I) = 1,$$

$$\psi \left(\sum_n P_n \right) = \sum_n \psi(P_n) \quad \forall \{P_n\} \subset P \Rightarrow P_n \perp P_m, n \neq m, \quad (4.13)$$

ψ è lo stato quantistico. Secondo il teorema di Gleason (1957), $\forall \psi$ è possibile determinare un operatore densità¹¹⁰, cioè un operatore ρ a traccia unitaria, tale che per ogni operatore B lineare e limitato da H in sé stesso si ha:

$$\psi(B) = \text{Tr} \rho(B) \in R. \quad (4.14)$$

Posto ciò, si può quindi identificare ogni sottospazio chiuso dello spazio di Hilbert con il relativo proiettore P su questo sottospazio e considerare la restrizione di ψ su \wp come una misura quantistica. Lo stato ψ può inoltre essere letto come una matrice densità.

Il formalismo di Koopman della meccanica classica mostra analogie e differenze tra mondo classico e mondo quantistico. Nel formalismo di Koopman infatti si associa $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ a $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$. Ogni $f \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ è concepita come un elemento dello spazio di Banach $B(H)$ ¹¹¹ degli operatori lineari continui, identificando $f(\omega)$ con l'operatore moltiplicazione $F\psi \in H$ si ha

¹⁰⁸ Un reticolo orto-modulare è un insieme L in cui

1) $\forall a \in L, \exists a^\perp \in L : a \vee a^\perp = 1 \quad a \wedge a^\perp = 0 \quad (a^\perp)^\perp = a$, 2) se $a \leq b \Rightarrow a^\perp \geq b^\perp$, 3) se $a \leq b \Rightarrow b = a \vee (b \wedge a^\perp)$.

¹⁰⁹ Von Neuman (1932) interpreta l'equazione di Schrödinger come una rotazione nello spazio di Hilbert. Cfr. Emch (2007, p. 1089).

¹¹⁰ Cfr. Emch (2007, p. 1089).

¹¹¹ Uno spazio di Banach è uno spazio completo rispetto alla metrica indotta dalla norma, cioè è uno spazio vettoriale su cui è definita una norma tale che ogni successione di Cauchy è convergente.

$F\psi = (F\psi)(\omega) = f(\omega)\psi(\omega)$. Con questa identificazione ogni elemento di $B(H)$ è mappato da un operatore lineare continuo sullo spazio di Banach $T(H)$, che è lo spazio di tutti gli operatori traccia. $T(H)$ è il preduale di $B(H)$ come $L^1(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ è il preduale di $L^\infty(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$. Con uno slancio di intuizione matematica, è possibile leggere l'interpretazione di uno stato quantistico ψ attraverso le probabilità classiche: basta considerare l'espressione (4.13) per ogni famiglia $\{P_n\}$ di eventi quantistici tra loro compatibili¹¹². Il teorema di Gleason non sostiene altro che un'equivalenza tra (4.13) e (4.14). Ciò che si può notare e che ben nota Emch (2007, p. 1090) è che l'interpretazione probabilistica dello stato quantistico è di tipo soggettivista, cioè è considerata sulla base di un insieme di conoscenze che il soggetto, che formula la probabilità, ha del modo in cui è stato preparato un sistema o in cui esso si trova¹¹³.

La pietra angolare della statistica quantistica dell'equilibrio nel formalismo di von Neumann è basato su questo teorema¹¹⁴:

Sia H uno spazio di Hilbert, H un operatore autoaggiunto su H tale che $\forall \beta > 0$, $Z = \text{Tr} e^{-\beta H}$ sia finito. Sia $\forall \rho \in B(H)$,

$$S(\rho) = -k \text{Tr} \rho \log \rho \quad (4.15)$$

¹¹² Cfr. Emch (2007, p. 1090).

¹¹³ Si ricordi i problemi della semantica propria di von Mises (1928) e della soggettività di De Finetti (1937).

¹¹⁴ Cfr. Emch (2007, p. 1091).

con $k > 0$ fissato. Sia data la discretezza dello spettro di H e la limitatezza dei suoi autovalori dal basso, si denoti il suo più piccolo autovalore con ε_0 . Sia ε_M il suo più grande autovalore se H è limitato dall'alto, altrimenti sia $+\infty$ se illimitato.

Allora il massimo di $S(\rho)$ è ottenuto nello stato $\rho = \frac{e^{-\beta H}}{Z}$ dove $Z = \text{Tr} e^{-\beta H}$, β è

determinato dal vincolo $\text{Tr} \rho H = \varepsilon$, $\forall \varepsilon$ tale che $\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_M$.

La dimostrazione di questo teorema si basa sul principio variazionale, cioè mediante la ricerca di un massimo di funzione sottoposta a vincoli. Questo principio logico è presente e fondamentale nella statistica classica di Boltzmann e Gibbs (Uffink, 2007). Tuttavia non è chiaro se sia anche un principio di natura¹¹⁵.

Nel formalismo di von Neumann della statistica quantistica, S potrebbe essere interpretata come un'entropia. Si potrebbe infatti interpretare tale massimo ricercato nel teorema come il valore dell'entropia termodinamica. Inoltre si può dimostrare che S è una misura dell'informazione contenuta in ρ , $I(\rho) = -S(\rho)$, e che questa S è unica. Khinchin (1957) ha fornito questa interpretazione per le probabilità classiche, Thirring (1983) lo ha esteso a quelle quantistiche secondo il seguente teorema:

Le tre seguenti proposizioni sono vere:

1) $S(\rho) = -k \text{Tr} \rho \log \rho$ è l'unico funzionale continuo in ρ , cioè l'unico funzionale per cui piccole variazioni dello stato forniscono piccole variazioni sulle informazioni;

¹¹⁵ Cfr. Emch (2007, p. 1093).

2) Sia $\rho = P_1\rho_1 + P_2\rho_2 + \dots + P_n\rho_n$ lo stato definito su $H = H_1 + H_2 + \dots + H_n$ per ogni distribuzione finita di probabilità P e ogni collezione finita di stati ρ_n di un insieme finito di spazi di Hilbert H_n . Si ha che

$$S(\rho) = S(P) + \sum_{n=1}^N P_n S(\rho_n) \quad (4.16)$$

dove $S(P)$ è il valore del funzionale di Khinchin per P ;

$$3) S \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) = k \log 2.$$

Sulla base di ciò l'informazione quantistica data da $-S$ definisce l'entropia quantistica S .

Come notano Uffink (1995) e soprattutto Emch (2007), il principio variazionale si applica naturalmente quando si interpretano gli stati (sia classici sia quantistici) secondo la definizione soggettivista di probabilità: Infatti grazie a questo principio si selezionano per ρ solo gli stati soggetti al vincolo. Quando H rappresenta l'energia del sistema, $\rho = \frac{e^{-\beta H}}{Z}$ è chiamato l'equilibrio quantistico canonico, con

$\beta = \frac{1}{kT}$. Vi è quindi una forte analogia con l'equilibrio canonico di Gibbs nella

statistica classica. Inoltre $\forall t \rho(t) = U(t)\rho U(-t)$, con $U = e^{\frac{iHt}{\hbar}}$, non modifica lo stato di equilibrio canonico¹¹⁶.

Sia ora $\ell = \{X \in B(H), TrX \cdot X < \infty\}$ l'insieme degli operatori lineari chiamato spazio di Hilbert-Schmidt su H con il prodotto scalare $(X, Y) = TrX \cdot Y$. Questo spazio contiene lo spazio delle matrici di densità ed è chiamato anche spazio di

¹¹⁶ Cfr. Emch (2007, p. 1092).

Liouville su H . Si ha $V(t)(X) = U(t)XU(-t) \in \ell$. L'operatore (generatore) autoaggiunto del gruppo unitario continuo $V(t)$ è chiamato Liouvilliano di questo sistema.

Sulla base di questa definizione si può formulare la versione quantistica dei teoremi ergodici classici di Birkhoff (1931) o di von Neumann (1932).

Teorema ergodico quantistico (Birkhoff-Neumann): Sia H un operatore continuo con spettro discreto, cioè H ammette un'espressione attraverso i suoi autovalori ε_n e i rispettivi proiettori P_n che è $H = \sum_n \varepsilon_n P_n$, allora

$$\exists \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T V(t)(X) dt = E_{erg}(X) = \sum_n P_n X P_n,$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad V(t)(E_{erg}(X)) = E_{erg}(X). \quad (4.17)$$

Inoltre la media ergodica di una matrice densità ρ , $E_{erg}(\rho)$, è tempo-invariante ed è una matrice densità. L'analogia tra caso classico e caso quantistico è la seguente:

Nel caso classico	Nel caso quantistico
$A \in L^\infty(\Omega, \mu)$	$A \in B(H)$
$f \in L^1(\Omega, \mu), f > 0$	ρ matrice densità
$\int_\Omega f A d\mu \in C$ con $\int_\Omega f d\mu = 1$	$Tr \rho A \in C$ con $Tr \rho = 1$

Se H è non degenere, cioè $\forall n \dim P_n = 1$, allora:

$$E_{erg}(\rho) = \sum_n Tr(\rho P_n) P_n = \sum_n (\rho \psi_n, \psi_n) P_n$$

dove $\sum_n Tr(\rho P_n) P_n = Q_0(\rho)$ è la matrice di densità del processo di misura di von

Neumann con $P_n \psi_n = \psi_n$ e $(\psi_n, \psi_m) = \delta_{n,m}$ ¹¹⁷. Se ρ è uno stato puro, cioè deriva

dall'azione di un proiettore su un vettore della forma $\psi = \sum_n c_n \psi_n$ allora

$Q_n(\rho) = \sum_n |c_n|^2 P_n$ perde le informazioni associate ai vettori ψ_n . Inoltre

$S(Q_0(\rho)) \geq S(\rho)$ cioè S non decresce¹¹⁸, questo risultato specifica l'irreversibilità

del processo di misurazione quantistica. Tuttavia è possibile costruire modelli apparentemente irreversibili che hanno, secondo il formalismo di von Neumann,

proprietà periodiche nel lungo periodo per cui questa irreversibilità è abbastanza

debole nella statistica quantistica¹¹⁹. Questa non completa irreversibilità è

probabilmente sintomatica. Ad una prima riflessione, un ruolo fondamentale che

mostra la differenza tra le statistiche quantistiche e la meccanica quantistica è

giocato dal processo di misurazione. La misura, infatti, rende il fenomeno fisico

irreversibile ed è parte integrante della meccanica quantistica ma non appartiene

del tutto alla statistica quantistica. Il formalismo della statistica quantistica di von

Neumann ha quindi dei "buchi", che comportano comunque delle restrizioni nella

sua applicabilità ai fenomeni quantistici.

Inoltre, come nota Emch (2007, p. 1098), la discretezza dello spettro

dell'operatore hamiltoniano ha conseguenze disastrose se applicato nelle

situazioni di non equilibrio. Si può dimostrare infatti, attraverso il formalismo di

¹¹⁷ Cfr. Emch (2007, p. 1093).

¹¹⁸ Cfr. von Neumann (1932).

¹¹⁹ Cfr. Uffink (2007), Emch (2007, p. 1094).

von Neumann, che la statistica quantistica del non equilibrio ha evoluzioni quasi periodiche oppure un insieme non numerabile di stati ergodici.

A differenza di quello di von Neumann, altri formalismi algebrici riescono a risolvere diversi problemi che si erano affacciati nei tentativi di formalizzazione della statistica quantistica (Emch 2007, §4-5). Tuttavia nessuno di essi è esente da critiche. Come nota giustamente Emch (2007) le tematiche cruciali su cui si concentrano tali critiche sono quattro: il concetto di limite e la sua interpretazione fisica, la nozione di osservabile macroscopica, il problema della misura, il confronto tra fisica matematica e fisica teorica. A questa situazione si può replicare parzialmente mediante esempi che chiariscano il senso di queste critiche: se si considera ad esempio il limite classico $h \rightarrow 0$, applicato ad un fenomeno quantistico come l'effetto tunnel (Gamow (1928), Gurney e Condon (1928, 1929)), si può mostrare come esso porti ad una situazione "controllata" sia sul piano fisico, cioè empiricamente praticabile, sia su quello matematico, cioè prevedibile attraverso calcoli fisico-matematici¹²⁰.

¹²⁰ Cfr. Emch (2007, p. 1157).

V. PROCESSO ALLA NATURA DELLE PARTICELLE IN MECCANICA QUANTISTICA: LA RICERCA DI UN PRINCIPIO DI INDIVIDUALITÀ E IDENTITÀ

Dopo aver discusso ampiamente i fondamenti della meccanica quantistica e delle statistiche quantistiche, si intraprende, con maggiori conoscenze, la ricerca di un principio di individualità e identità in ambito quantistico.

La problematica di base da affrontare è duplice: da un lato è necessario capire la natura delle particelle quantistiche (se sono individuali o meno), una questione ontologica, dall'altro capire come poterle distinguere nel caso fossero individuali, una questione epistemologica¹²¹.

Si immagini allora di portare “a processo” la questione della individualità e discernibilità delle particelle in meccanica quantistica.

Ai fini della nostra metafora, per rendere l'esposizione più fluida e chiara, si analizzeranno le quattro possibili “deposizioni” che sono:

DEPOSIZIONE A) Le particelle quantistiche sono *non individuali e non discernibili*;

DEPOSIZIONE B) Le particelle quantistiche sono *non individuali* ma sono *discernibili*;

DEPOSIZIONE C) Le particelle quantistiche sono *individuali* ma *non discernibili*;

DEPOSIZIONE D) Le particelle quantistiche sono *individuali e discernibili*.

¹²¹ Cfr. French (2011).

Si immagini che ciascuna deposizione sia esposta da un testimone (*supporter*), il quale è chiamato a deporre da un avvocato difensore. Il testimone cerca di supportare la propria deposizione con i propri argomenti a favore. Le deposizioni dei quattro testimoni saranno sottoposte puntualmente a obiezioni da parte di un avvocato accusatore, che cercherà di smontare via via le basi di queste asserzioni. La penultima parola spetterà ad una giuria che formulerà il proprio parere sulla metafisica emergente dalle deposizioni poste nel processo. Ascoltati i testimoni e la giuria, l'ultima parola sarà del giudice che, oggettivo ed imparziale, esprimerà un giudizio sulla questione della individualità e discernibilità.

Si inizi ora il processo seguendo l'ordine delle deposizioni mostrate. L'avvocato difensore chiama a deporre il **TESTIMONE A**, che suffraga la **DEPOSIZIONE A**. Seguiranno a ruota e nell'ordine gli altri testimoni

TESI DEL TESTIMONE A) *Le particelle sono non individuali e non discernibili.*

“Come è noto, il concetto di individualità in meccanica quantistica è messo a dura prova, in particolar modo, dallo stato di sovrapposizione dell'*entanglement*, in cui lo stato di due particelle è irriducibile ai rispettivi stati intrinseci individuali. Di più, il peso ontologico dell'*entanglement* si rivela essere una prova del fatto che

l'intero universo può essere considerato come un unico ente, ragione che assolutizza l'indiscernibilità delle particelle.¹²²

La mancanza di identità delle particelle in meccanica quantistica è un concetto non nuovo, anzi su di esso si è a lungo soffermato il dibattito filosofico: La non individualità delle particelle quantistiche affonda radici nelle riflessioni di Born ed Heisenberg¹²³.

Born (1943), in particolare, affermava la non individualità dei fotoni, ritenendo che la meccanica quantistica non si basa su un'ontologia di oggetti individuali ma sulle strutture invarianti¹²⁴ (French e Krause 2006, p. 118).

Anche per Weyl (1950) le particelle quantistiche hanno perso individualità attribuendola agli stati (French e Krause 2006, p. 105): In *The Philosophy of Mathematics and Natural Science* (1949), Weyl analizza gli aggregati di particelle definibili come un insieme con cardinalità su cui è definita una relazione di equivalenza con classi di equivalenza di elementi dello stesso tipo e nello stesso stato. In questo modo i bosoni sono degli aggregati ma non gli elettroni (French e Krause 2006, p.129). Dello stesso parere Schrödinger (1952), che parla di una perdita dell'individualità delle particelle quantistiche, o meglio “una particella è un'entità individuale che mantiene la sua *sameness* per sempre [...] i costituenti ultimi della materia non hanno affatto questa *sameness*”¹²⁵.

In tempi più recenti, Dalla Chiara e Toraldo di Francia riassumono lo stato della fisica quantistica con l'espressione “la terra dell'anonimato” (1993). Tuttavia

¹²² Questo aspetto è cruciale perché accende la miccia che innesca nella meccanica quantistica l'esplosione della non località e dell'olismo.

¹²³ Cfr. French (2011).

¹²⁴ Bohr (1985) invece supporta l'individualità in meccanica quantistica in quanto è la “discontinuità essenziale” del quanto di azione di Planck che dà l'individualità.

¹²⁵ Cfr. Schrödinger (1996, p. 121). Hesse (1963) sostiene la non individualità mediante la negazione dell'auto-identità.

determinano un modo per “costruire” matematicamente le particelle che sono descritte da questa teoria: l’elettrone, ad esempio, è rappresentato dalla collezione dei *quaset*, elementi indistinguibili che soddisfano una serie di assiomi non comprendenti l’autoidentità¹²⁶. Seguendo lo slogan di Quine (1969) “*no entity without identity*”, un altro modo per cercare di trattare questi oggetti che non hanno né individualità né discernibilità, è rappresentato dallo sviluppo della logica non booleana, come quella di Schrödinger (da Costa e Krause, 1994).

Neppure la teoria degli insiemi, essenziale per trattare gli oggetti individuali e distinguibili, può essere maneggiata in ambito quantistico. Gli oggetti quantistici possiedono cardinalità ma non ordinalità (French e Krause, 2006; Domenich e Holik, 2007): Sono vaghi (French e Krause, 2003) ma non vaghi nel vero senso della parola (Darby, 2010) vaghi nel senso della teoria dei *quasi-set* (Smith, 2008)¹²⁷.

La visione più diffusa e accettata, la *Received View*, sull’individualità e discernibilità delle particelle in meccanica quantistica afferma che l’individualità delle particelle sia come “evaporata”, e questa evaporazione dell’individualità quantistica sarebbe rafforzata dalla capacità di risolvere la situazione fisico-teorica proposta nel paradosso di Gibbs, perché unificherebbe le previsioni della meccanica statistica e della termodinamica. Entro ora più nel dettaglio.

¹²⁶ Lavine (1991) sostiene qualcosa di analogo: le particelle sarebbero formate da “stuff” e gli stati a molte particelle non conterebbero parti proprie. Si veda French (2011).

¹²⁷ Tuttavia vi è un modo di trattare dal punto di vista logico e ontologico gli oggetti quantistici, ed il miglior formalismo di cui disponiamo è il formalismo della teoria dei campi quantistici. Da Costa e Krause (1994), French e Krause (1999, 2006, 2010), Dalla Chiara, Giuntini e Krause (1998) ritengono che le particelle quantistiche siano descrivibili da questa teoria.

A.1. L' "evaporazione" dell'individualità quantistica: il paradosso di Gibbs.

Vi sono dei metodi interessanti per considerare meno oscura l' "evaporazione" dell'individualità in meccanica quantistica. Uno di questi si basa su una tendenza che vede anche le particelle classiche come non individuali. L'argomento si basa sul cosiddetto "paradosso di Gibbs". Nella sua prima formulazione (1876)¹²⁸, il paradosso considera un sistema fisico isolato contenente due gas, nell'esempio pratico una scatola costituita da un separatore che la divide in due camere perfettamente identiche. Nella camera di sinistra, la camera A, vi sono contenute N molecole di un certo tipo di gas e in quella di destra, camera B, N molecole di un altro tipo di gas (Figura 2).

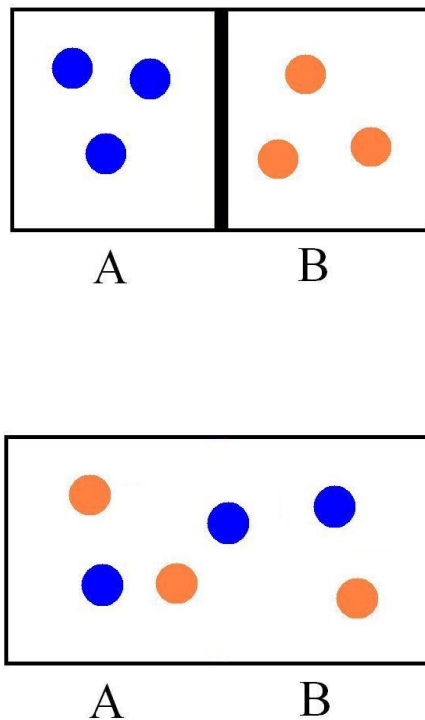


Figura 2: Illustrazione del paradosso di Gibbs con gas differenti.

¹²⁸ Gibbs (1876) "On the Equilibrium of the Heterogeneous Substances".

Calcolando la differenza di entropia tra la situazione iniziale dei due gas e quella in cui il separatore è rimosso con mescolamento dei due gas, si ottiene quella che viene chiamata entropia termodinamica di mixing¹²⁹: se i gas sono differenti il valore ottenuto è $2kN\log 2$, mentre è 0 se sono dello stesso tipo (Figura 3). Il paradosso sta in questa discontinuità.

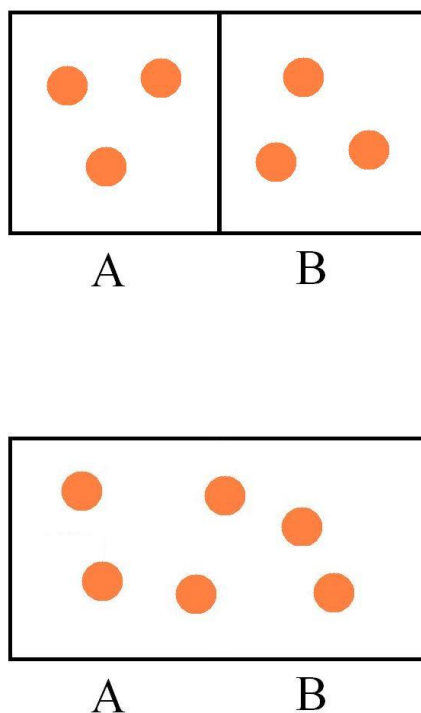


Figura 3: Illustrazione del paradosso di Gibbs con il medesimo gas.

Una seconda formulazione del paradosso, invece, deriva dal differente valore di entropia di mixing calcolato in termodinamica e in meccanica statistica nel caso di gas dello stesso tipo: Si è osservato che secondo la termodinamica tale valore è 0,

¹²⁹ Per un interessante sintesi del ruolo dell'entropia nel paradosso di Gibbs si veda Müller (2004), Jaynes (1992) e Albarelli (2012).

mentre secondo la meccanica statistica di Boltzmann (1897), che definisce l'entropia come $S=k\log W$ con W il numero di microstati compatibili con un macrostato, è $2kM\log 2$. Questo risultato della meccanica statistica è in conflitto con quello ottenuto in termodinamica. Le particelle di un gas, cioè particelle classiche che sono apparentemente sempre distinguibili, determinano il numero di microstati costituenti W in cui un macrostato può essere realizzato e la relazione $S=k\log W$ porta ad una espressione non additiva¹³⁰ per l'entropia. Poiché l'indistinguibilità delle particelle sembrerebbe risolvere questa inconsistenza, spesso si è concluso che le particelle classiche devono essere indistinguibili. Per ottenere ciò si prende in considerazione il postulato della identità degli stati simmetrici (ISS) che afferma: Se tutti gli stati individuali che costituiscono il prodotto tensoriale $H_1 \otimes H_2 \otimes H_3 \otimes \dots \otimes H_n$ sono uguali allora ogni indice può essere utilizzato per rappresentare la medesima particella.

ISS “sopravvivrebbe” al limite classico (supposto che esista un limite che faccia emergere le particelle classiche dal mondo quantistico). La conclusione è quella di poter considerare anche particelle classiche dello stesso tipo nello stesso stato, in palese conflitto con quel che è noto dalla meccanica classica, e inoltre ritenerle indistinguibili.

Si è quindi a lungo argomentato che la soluzione del paradosso di Gibbs possa essere usata per mostrare l'inconsistenza del concetto classico di particella. Possiamo così riassumere con il seguente schema:

¹³⁰ Cioè un'espressione attraverso la quale non è più possibile ricavare l'entropia di un sistema attraverso la somma dell'entropia delle parti che lo compongono.

a) meccanica classica & indistinguibilità → No Gibbs Paradox

b) meccanica quantistica & indistinguibilità → No Gibbs Paradox

Questi gli argomenti a sostegno della non individualità e non discernibilità delle particelle quantistiche. A conclusione di ciò, vorrei aggiungere che se le particelle quantistiche non sono né individuali né discernibili, non ha molto senso chiedersi se sia vero o falso il celebre principio di identità degli indiscernibili di Leibniz in meccanica quantistica: esso è banalmente non applicabile.”

OBIEZIONE AL TESTIMONE A)

“Certamente le logiche quantistiche, i *quasi-set* e i *quaset* sono estremamente interessanti e dei preziosi strumenti teorici, tuttavia sono privi di un forte significato empirico, poiché non riescono a cogliere a pieno tutta quella varietà che vi è di fondamentale a livello fisico. È vero che la teoria dei *quasi-set*, anche se non riesce a creare un vero e proprio quadro fondativo completo della meccanica quantistica, si avvicina al formalismo matematico utile per trattare gli oggetti quantistici. Ma lo strumento formale più potente, però, è quello introdotto dalla teoria quantistica dei campi. Non baserei la non individualità e la non discernibilità sulla base dei successi della teoria dei *quaset*, dei *quasi-set* e delle logiche non standard.

Circa le conclusioni riassunte sul paradosso di Gibbs (a) e b))

Denis Dieks, in collaborazione con illustri filosofi e scienziati, in alcuni recenti lavori (Dieks e Vermaas, 1998; Dieks, 2010; Dieks e Versteegh, 2008; Dieks e

Lubberdink, 2011; Versteegh e Dieks, 2011), si adopera per ribaltare queste considerazioni: Per confutare a) mostra che l'entropia in termodinamica ha una forte dipendenza dalle variabili termodinamiche che vengono utilizzate nella descrizione del fenomeno stesso: ha quindi una stretta dipendenza dagli aspetti macroscopici del fenomeno. Differentemente, in meccanica statistica l'entropia ha una forte dipendenza dalla descrizione delle strutture microscopiche che concorrono alla formazione di quelle macroscopiche. È chiaro, quindi, che dal punto di vista della termodinamica, l'aumento di entropia rappresenta un problema ragionevole in quanto le situazioni con la separazione tra i gas o senza sono uguali a livello macroscopico. Se N è il numero di particelle nella camera di destra e X i microstati per particella, se il gas si espande e raddoppia il suo volume si ha:

$$X^N \rightarrow (2X)^N \quad \Delta S = S_f - S_i = k \log(2X)^N - k \log X^N = kN \log 2.$$

Secondo la meccanica statistica se si prendono due gas differenti o uguali si avrà sempre $2kN \log 2$ come entropia di mixing, quindi la meccanica statistica è chiaramente indifferente alla questione sollevata dalla termodinamica. La soluzione a questo paradosso semplicemente dipende dal fatto che si sta guardando allo stesso fenomeno in due modi differenti: le misurazioni dipendono dai predicati assunti e l'accesso empirico è relativo ai mezzi utilizzati. Per risolvere il paradosso nella sua prima formulazione, basta osservare che dalla discontinuità tra l'affermare la diversità e l'uguaglianza dei gas in A e B discende la discontinuità delle entropie nei due casi¹³¹. Inoltre si consideri che distinguere tra loro i due gas, è certamente legata a limitazioni tecniche e diminuisce

¹³¹ Cfr. Dieks (2010).

gradualmente quando i due gas diventano via via sempre più simili. Per cui sperimentalmente anche l'entropia dovrebbe diminuire in maniera continua.

Un tentativo per risolvere il paradosso nella sua seconda formulazione, si basa sul fatto che le molecole di un gas sono tutte qualitativamente le stesse, quindi le permutazioni tra esse non hanno effetti fisici e non portano a nuovi stati. Nel caso di gas di diverso tipo in A e B si ha¹³²:

$$\Delta S = S_f - S_i = k \log \frac{(2X)^{N_A+N_B}}{N_A!N_B!} - k \log \frac{X^{N_A}}{N_A!} - k \log \frac{X^{N_B}}{N_B!} = 2k(N_A + N_B) \log 2,$$

mentre per gas dello stesso tipo

$$\Delta S = S_f - S_i = k \log \frac{(2X)^{N_A+N_B}}{(N_A + N_B)!} - k \log \frac{X^{N_A}}{N_A!} - k \log \frac{X^{N_B}}{N_B!} = 0,$$

utilizzando la formula di Stirling $N! \approx \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N$.

La permutazione risolve la seconda formulazione del paradosso, risultato raggiunto se non si considera il fatto che le particelle classiche sono distinguibili e individuali, perché ad esempio occupano posti differenti nello spazio e sono impenetrabili.

L'assenza di entropia di mixing a livello della termodinamica è un'assunzione giustificata, ma ciò non implica che non dovrebbero esserci effetti a livello microscopico. L'esempio di Dieks (2010) è quello di una membrana, collegata ad un sofisticato computer, che seleziona da quale particella lasciarsi attraversare

¹³² Cfr. Dieks (2014).

sulla base della “storia” della particella, cioè sulla base della sua provenienza o meglio della traiettoria¹³³.

In conclusione, il paradosso in meccanica classica sembra non esserci e l'inconsistenza della meccanica statistica con la termodinamica può essere rimossa semplicemente considerando l'entropia come un concetto che differisce tra la sua formulazione in meccanica statistica e in termodinamica. Versteegh e Dieks (2011) hanno, infatti, rafforzato l'idea che le particelle classiche siano sempre distinguibili e che la non additività dell'entropia sia comunque accettabile su un piano teorico e sperimentale. La soluzione standard è che l'aumento di entropia c'è ma è significativo solo dal punto di vista microscopico.

Argomentando contro b), Dieks (2010) nota che in meccanica quantistica vale ISS. Non solo non è possibile distinguere le traiettorie delle singole particelle, ma la stessa permutazione degli indici, che lascia invariato lo stato del sistema, non comporta delle vere e proprie differenze fisiche. Inoltre non c'è entropia di mixing nel caso di due gas uguali. Dieks e Lubberdink (2011) individuano la chiave di risoluzione del paradosso basandosi proprio sulla non corrispondenza tra gli indici utilizzati per individuare matematicamente le particelle in meccanica quantistica e le “stesse” particelle che emergerebbero al limite classico. Questo perché il postulato di identità degli stati simmetrici vale in sostanza solo ed esclusivamente per gli indici e non si applica alle particelle intese in senso classico, ha pura natura formale. Cioè gli indici di particella della meccanica quantistica, su cui ha luogo la permutazione degli stati simmetrici, non si riferiscono a ciò che si intende come particella fisica in senso classico. C'è una rottura tra il formalismo della

¹³³ A tal considerazione si paragoni la discernibilità modale di van Fraassen (1991) che sarà illustrata in seguito nel corso della deposizione del testimone D. La posizione di van Fraassen è opposta a quella di Dieks sull'esistenza di traiettorie in meccanica quantistica.

meccanica quantistica e l'ontologia delle particelle: da una parte ci sono gli indici del formalismo quantistico che hanno un ruolo puramente matematico, dall'altro vi sono le differenze fisiche tra le particelle.

Le particelle quantistiche dello stesso tipo in alcuni casi, però, possono essere considerate distinguibili. Infatti, per opportune condizioni, può essere applicato il teorema di Ehrenfest che determina in terreno quantistico le traiettorie delle particelle in questo modo: Data un'osservabile a , il teorema di Ehrenfest stabilisce che l'evoluzione dei valori di aspettazione dell'operatore A associato alla osservabile fisica a descritta dalla meccanica quantistica, coincide con l'evoluzione descritta dalla meccanica classica. In termini matematici:

$$\frac{d\langle A \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [A, H] \right\rangle,$$

dove H è l'operatore associato all'energia. Le ipotesi del teorema sono del tutto generali.

Nel caso di una hamiltoniana $H = \frac{p^2}{2m} + V(r)$, introducendo un campo di forze

$F(r) = -\nabla V(r)$, si applica il teorema di Ehrenfest ottenendo una pseudo legge del

moto $\langle F(r) \rangle = m \frac{d^2}{dt^2} \langle r \rangle$. In alcuni casi particolari corrispondenti a specifici

potenziali si ha che $\langle F(r) \rangle = F(\langle r \rangle)$, quindi in questi casi il valor medio di r

soddisfa esattamente la pseudo legge del moto, rendendola una vera e propria

legge del moto classico¹³⁴. Ciò accade ad esempio nel caso dell'oscillatore

armonico per il quale si ha campo di forze $F = -m\omega^2 x$ e potenziale $V = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$.

¹³⁴ Cfr. Dieks e Lubberdink (2011).

L'equazione di Schrödinger è $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \psi(x) = H\psi(x)$, lo spettro

dell'operatore H è discreto e vale $\sigma(H) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$, $n = 0, 1, \dots$. Gli autovettori

(gli stati puri) sono a due a due ortogonali, come lo sono due qualunque autovettori corrispondenti a due distinti autovalori di un operatore simmetrico, e costituiscono un sistema completo in $L^2(R)$, spazio delle funzioni a quadrato sommabile.

Il teorema di Ehrenfest può essere applicato anche per il rotatore (punto materiale di massa m che si muove liberamente su una circonferenza) e per la buca infinita (moto di un punto materiale di massa m libero da forze attive esterne vincolato su di un generico intervallo $[0, L]$ limitato con $L \in R, L > 0$, e potenziale

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < L \\ +\infty & x = 0, L \end{cases}, \text{ fisicamente realizzato da pareti di altezza infinita in}$$

corrispondenza degli estremi donde il nome buca infinita.)

Questi esempi di sistemi quantistici appena considerati, si avvicinano al comportamento di un sistema classico, poiché risulta verificato che $\langle F(r) \rangle = F(\langle r \rangle)$ ed il baricentro del pacchetto d'onda sta su una traiettoria classica. Infatti se la funzione d'onda è localizzata in una regione sufficientemente piccola, dal teorema di Ehrenfest si ricava l'equazione del moto classico. Una singola particella quantistica può dunque seguire, approssimativamente e in certe condizioni, delle traiettorie classiche. L'affermazione "in certe condizioni esistono traiettorie in meccanica quantistica" è dunque non sempre falsa.

Laddove non sia possibile distinguere le particelle mediante il teorema di Ehrenfest, Versteegh e Dieks (2011) affermano che l'indistinguibilità delle

particelle quantistiche genera confusione sulla loro rappresentazione, concludendo che la meccanica quantistica sia irrilevante ai fini della spiegazione del paradosso di Gibbs, infatti il paradosso potrebbe sopravvivere nella sua forma anche in meccanica quantistica nonostante ISS.

Se dunque l'evaporazione delle individualità in meccanica quantistica non riesce ad affermarsi pienamente come chiave di soluzione del paradosso di Gibbs, non si può concludere che le particelle in meccanica quantistica siano non individuali e non discernibili.”

TESI DEL TESTIMONE B) Le particelle sono *non individuali* ma sono *discernibili*.

“Dal punto di vista statistico il comportamento di un insieme di oggetti quantistici è diverso da quello classico. Ad esempio vi sono macro-stati statistici ottenibili da vari micro-stati diversi (magari per semplici permutazioni tra particelle) che non risultano più frequenti di quelli ottenibili da un solo micro-stato: Sembra cambiare il criterio di applicazione dell'equi-probabilità. Se non cambia la misura di probabilità che applica lo stesso peso probabilistico ad ogni singolo stato del sistema, allora vi è il sospetto che gli oggetti quantistici siano non individuali.

Se i metodi classici validi per la fisica macroscopica, utilizzati per identificare e per poter discernere le particelle costituenti, come ad esempio quelli di discriminare tra particelle sulla base delle proprietà spazio-temporali o sulla base di proprietà qualitative, non sono adeguati nella fisica microscopica, si può fare dell'inferenza statistica sulla base delle proprietà statistiche di un insieme di

particelle dello stesso tipo, analizzandone differenze tra i possibili arrangiamenti
 135.

Questa deriva verso considerazioni statistiche pone però nuovi problemi nel dibattito della individualità degli oggetti fisici, in primo luogo il problema delle particelle numericamente distinte ma indistinguibili. Consideriamo due particelle classiche I e II, che possono stare in soli due stati a e b. Le situazioni possibili saranno allora:

STATO a	STATO b
I, II	
I	II
II	I
	I, II

Si assuma che i 2 stati siano equiprobabili e che le particelle siano fisicamente uguali a parte il loro stato a o b. Si assuma inoltre che valga il Principio Fondamentale della Meccanica Statistica (PFMS) secondo cui date queste premesse le 4 situazioni sono equiprobabili. Allora si possono avere:

1) La statistica di Maxwell-Boltzmann o classica, secondo cui la probabilità che entrambe le particelle siano nello stesso stato è $\frac{1}{4}$, mentre la probabilità che le particelle siano in uno stato diverso è $\frac{1}{2}$.

¹³⁵ Cfr. Reichenbach (1998, p. 65); French e Krause (2006, p.21).

Le particelle quantistiche non si comportano così, [come si è visto precedentemente] vi sono due differenti tipi di statistiche che descrivono questi comportamenti.

2) La statistica quantistica di Bose-Einstein. Per i bosoni la situazione aI, bII è identica alla situazione bI, aII. La probabilità che entrambe le particelle siano nello stato a è uguale a quella che stiano entrambe nello stato b, che è uguale a quella che siano in stati diversi, cioè $\frac{1}{3}$.

3) La statistica quantistica di Fermi-Dirac. La probabilità che due fermioni stiano in stati diversi è 1, cioè la certezza. Questo a seguito del principio di Pauli.

Le frequenti osservazioni confermano queste due ultime statistiche e inducono a ritenere le particelle microscopiche come particelle indistinguibili. Tale conclusione tuttavia è ingiustificata, quanto meno affrettata. Se le statistiche non sono unificabili, nel senso che non si riesce a ricavarle da un'unica statistica "primitiva" da cui le tre statistiche deriverebbero sotto opportune condizioni, vi sono due modi, abbastanza semplici, per accettare la discernibilità dei bosoni: il primo è quello di non considerarli numericamente diversi ma come costituenti una sola particella, cioè vi è un solo bosone, il secondo è quello di poterli distinguere mediante dei fattori nascosti¹³⁶.

Un'alternativa all'impegno ontologico circa l'affermazione di oggetti non individuali, è rappresentato da quello epistemico di discernere tra oggetti non

¹³⁶ Cfr. van Fraassen (1998, p.81). Si veda Aerts (1998).

individuali attraverso la diversità numerica ordinale (*countability*) o il concetto di estendibilità.

B.1. Contabilità ed estendibilità in meccanica quantistica.

Esattamente come si afferma che un chilo di pasta pesa un chilo riferendosi collettivamente a tutte le parti proprie del chilo di pasta, così è possibile dire che in un atomo di elio ci sono due elettroni. In più però i due elettroni sono contabili. Di per sé ciò rappresenta una forma di discernimento in quanto se ho una pluralità di elementi, intuitivamente, dovrà essere possibile una qualche forma di differenziazione tra di essi.

Si consideri allora il calcolo dei predicati del primo ordine con identità arricchito con gli assiomi della mereologia estensionale sufficiente a descrivere la teoria scientifica T . Si dice che il riferimento di una costante individuale “ a ” è primitivamente contabile in T se solo se:

1. $\Box \sim (E y (y = a) \rightarrow E z (z = x))$
2. $\Box \sim ((x < a) \wedge (\varphi(a) \equiv \varphi(x)))$

Dove $<$ è il simbolo per “parte propria di” e φ è una qualsiasi formula di un linguaggio L .

Il primo assioma afferma sostanzialmente che nessun enunciato vero nel nostro linguaggio impone che “a” non possa esistere da solo. Si noti che 1. è equivalente a:

$$1'. \sim \text{Ex}(\sim \text{Ez}(z=x) \rightarrow \sim \text{Ey}(y=a))$$

Si può anche dire che è nomologicamente possibile un mondo in cui ci sia solo “a”.

2. dice che “a” non è il riferimento di un termine massa, come oro, ma di un termine contabile.

È chiaro che è possibile anche contare un insieme di aggregati. In questo caso, però, la contabilità non è primitiva.

Si conclude che a livello intuitivo è possibile discernere sulla base della *countability*; cioè sulla base di questa contabilità (sia essa primitiva o meno).

Alexander Bach (1997) esplora la distinguibilità dal punto di vista logico-epistemologico in maniera del tutto originale. Le particelle della statistica di Maxwell-Boltzmann (MB) possono essere distinte in quanto esiste una variabile *random j* di configurazione cioè è possibile una distinguibilità combinatoriale mentre quelle di BE, ad esempio, non lo sono in quanto esiste una descrizione solo su un altro collettivo mediante l'*occupation number*¹³⁷.

Tuttavia in una distribuzione di probabilità simmetrica, due particelle a prescindere dalle traiettorie effettivamente seguite, le quali non entrano nella

¹³⁷ Gli *occupation number* sono vettori introdotti nella teoria dei campi quantistici che mostrano il numero di particelle che occupa un dato stato.

descrizione statistica¹³⁸, hanno la stessa probabilità di percorrere una fissata traiettoria, di seguire una certa evoluzione. Di conseguenza sono indistinguibili su base statistica.

Bach riesce ad aggirare questa conclusione sviluppando una nuova definizione di indistinguibilità¹³⁹: In ambito microscopico la definisce come identità delle particelle più simmetria degli stati (Bach 1997, p. 8), sottolineando come l'indistinguibilità non sia una proprietà intrinseca delle particelle ma dello stato. Cioè l'indistinguibilità è letta non sulla particella ma come uguale probabilità del verificarsi di eventi differenti, tra loro permutabili, negli stati. Gli eventi possono essere anche diversi ma sulla base delle loro probabilità sono indistinguibili. Quindi eventi diversi vengono fra loro identificati e questo rompe la simmetria. Per sistemi macroscopici, sottolinea Bach, è tuttavia preferibile considerare l'indistinguibilità come una proprietà delle particelle in quanto si dovrebbero identificare un numero di eventi dell'ordine di 10^{23} .

Con la nuova definizione di indistinguibilità si perde la classe di particelle MB distinguibili e si unifica nel quadro della indistinguibilità le particelle classiche e quantistiche potendo calcolare le correlazioni per particelle delle statistiche BE e FD. Quindi l'indistinguibilità non è una proprietà ontologica di certi oggetti bensì è solo un concetto probabilistico. È chiaro che se un operatore statistico W è funzione di una hamiltoniana allora l'identità implica la distinguibilità (Bach, 1997 pp. 15-16).

¹³⁸ La posizione di Bach è profondamente lontana da quella di Dieks che invece mantiene una descrizione spazio temporale per salvare PII nell'ambito matematico statistico del paradosso di Gibbs.

¹³⁹ Cfr. Bach (1997, §4).

L'estendibilità, invece, è un altro approccio alla classificazione degli stati simmetrici ed è la chiave che Bach utilizza per poter classificare l'indistinguibilità su base logica-epistemica. Si analizzerà ora tale concetto più approfonditamente:

Sia dato un sistema di n particelle distribuite su un numero di celle d : nella statistica FD non è possibile "allargare" il sistema con queste caratteristiche in maniera arbitraria, infatti non si possono avere più di una stessa particella nella medesima cella (stato). L'estendibilità è legata alle correlazioni statistiche delle particelle che hanno stati compatibili o meno con un numero massimo di particelle.

Seguendo Bach (1997, p. 30) si definisce l'osservabile estensiva come

$$S_n(b) = (n-1)! \frac{1}{n!} \sum_{\pi} U_{\pi} U_{\pi}^{\perp} (b \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1),$$

dove U_{π} è l'operatore permutazione. $S_n(b)$ appartiene alla sottoalgebra degli operatori simmetrici.

Un operatore statistico T_n simmetrico (antisimmetrico) è detto N -estendibile se per $N \geq n$ esiste un operatore statistico T_N simmetrico (antisimmetrico) tale che T_n è marginale di T_N ¹⁴⁰. Si dice che T_n è $\max(N)$ -estendibile se è N -estendibile ma non $(N+1)$ -estendibile, ∞ -estendibile se è estendibile per ogni N naturale, non estendibile se non è ∞ -estendibile.

¹⁴⁰ Cfr. Bach (1997, p. 31). Per una definizione di marginalità di un operatore vedi Bach (1997, §2).

Sulla base della estendibilità è possibile affermare che la statistica MB è ∞ -estendibile, mentre la statistica FD non è estendibile. I bosoni sono rappresentati nella statistica di BE da operatori di due tipi: o ∞ -estendibili o non estendibili¹⁴¹.

Bach usa l'estendibilità per classificare le particelle indistinguibili collegandola alle variabili *random* interscambiabili che sono utilizzate e introdotte da de Finetti per la descrizione degli eventi ripetuti indistinguibili e non necessariamente indipendenti tra loro.

Il teorema di de Finetti (1930) per una sequenza di variabili *random* interscambiabili stabilisce un criterio per controllare se la sequenza è ∞ -estendibile (Bach 1997, p. 64).

Oltre alla estendibilità, Bach introduce gli *occupancy number* che sono ben diversi dai numeri occupazionali (*occupation number*). L'*occupancy number* è un vettore $z \in \{0,1,\dots,d\}^{n+1}$ che stabilisce il numero di celle con un dato numero di particelle e che è soggetto a due vincoli $\sum_i z_i = d$, $\sum_i iz_i = n$.

La Figura 4 (tratta da Bach 1997, p. 66) mostra le statistiche MB, BE e FD. In genere la trattazione di queste statistiche si basa sulle configurazioni per MB mentre per BE e FD si usano i numeri occupazionali. Bach osserva però che questa rappresentazione mescola impropriamente questi due livelli di descrizione.

¹⁴¹ Gentile (1940), mediante dei metodi combinatori ed un parametro d che rappresenta il numero massimo di particelle che possono occupare un certo stato, determinò una sorta di distinguibilità legandola ad una individualità statistica. La statistica di Fermi-Dirac (FD) si ottiene per $d=1$ mentre quella di Bose-Einstein (BE) per $d=\infty$.

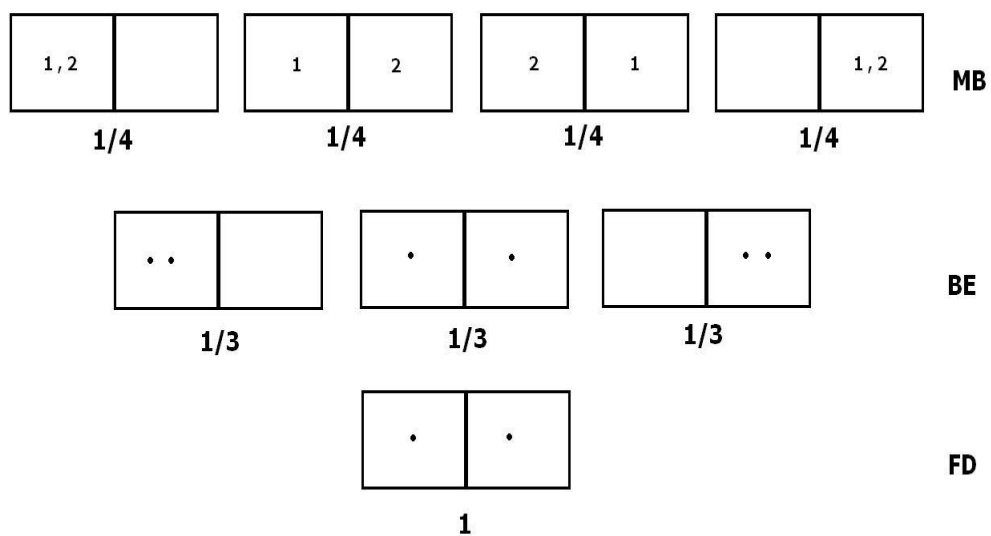


Figura 4. Analisi delle disposizioni di due particelle in due scatole secondo le statistiche MB, BE e FD, rispettivamente secondo le configurazioni e gli *occupation numbers*. Le frazioni in basso rappresentano le probabilità.

La soluzione ottimale per analizzare l'indistinguibilità è la seguente Figura 5 (tratta Bach 1997, p. 66).

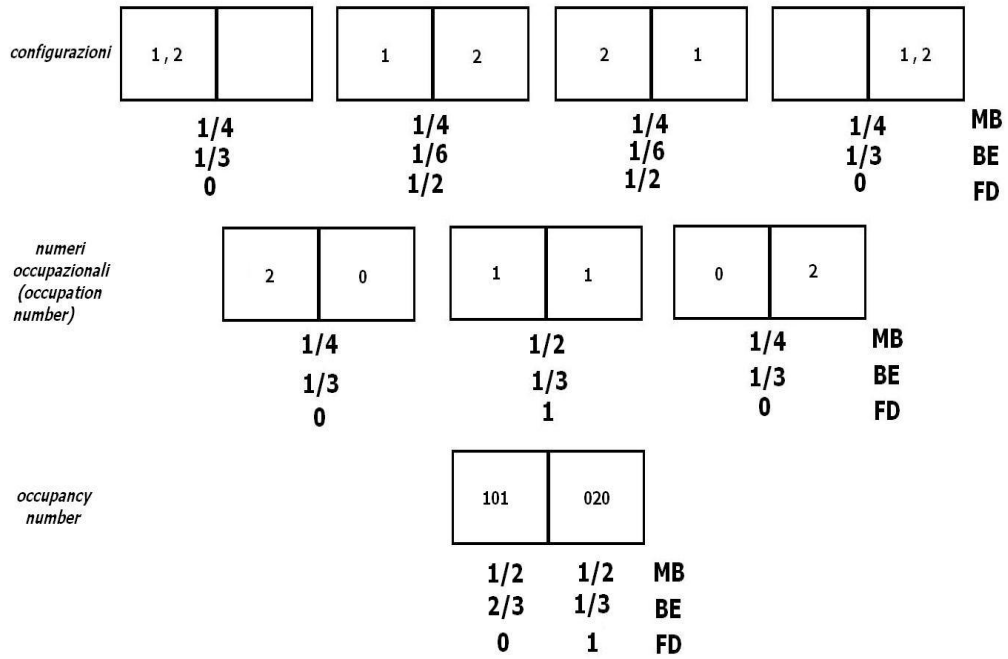


Figura 5. Analisi delle probabilità disposizionali di due particelle in due scatole secondo le statistiche MB, BE e FD, attraverso le configurazioni, gli *occupation numbers* e gli *occupancy numbers*. Le frazioni in basso rappresentano le probabilità

In Figura 5 si osservano le probabilità delle disposizioni di due particelle nelle varie statistiche: Nella prima riga si osservano le probabilità calcolate attraverso le configurazioni. Gli stati centrali sono gli stati simmetrici. Nella seconda riga, le probabilità calcolate attraverso gli *occupation number*, lo stato centrale è lo stato simmetrico. Nella terza riga, la probabilità calcolata attraverso gli *occupancy number*, lo stato di destra è lo stato simmetrico.

Si ha indistinguibilità se le probabilità degli stati simmetrici coincidono.

Il principio di esclusione¹⁴²della statistica FD, viene considerato come un assunto probabilistico e non ontologico sull'esistenza o meno di certi eventi. La non

¹⁴² Il principio di esclusione afferma: Sia T un operatore statistico simmetrico su $\otimes_n H$. Se per ogni b_i , base ortonormale di H , con $i \leq \dim(H)$, $\langle b_{i_1} \otimes \dots \otimes b_{i_n}, T b_{i_1} \otimes \dots \otimes b_{i_n} \rangle = 0$ vale quando

estendibilità delle particelle di FD quindi è una proprietà probabilistica. Bach riesce così a unificare il formalismo per le tre statistiche, perché togliendo identità ontologica agli eventi, viene meno la distinzione tra la statistica MB (quella classica) e BE e FD (quelle quantistiche) tra particelle distinguibili e indistinguibili¹⁴³.”

OBIEZIONE AL TESTIMONE B)

“Secondo Carnap (1950) la statistica di Bose-Einstein può essere proposta come *ur*-probabilità cioè “una funzione di probabilità [primitiva] determinata logicamente, data apriori, su un insieme di proposizioni che caratterizzano una certa situazione”¹⁴⁴ (van Fraassen 1998, p. 84) che unifica le statistiche illustrate. Questo risolverebbe il problema dell’aver un certo tipo di statistica (quella classica) per i fenomeni macroscopici, e un’altra (quella quantistica) per i fenomeni microscopici poiché le altre statistiche (quella di Maxwell-Boltzmann e di Fermi-Dirac) potrebbero essere ottenute da quella di Bose-Einstein mediante opportuno condizionamento. Non è necessario quindi cercare soluzioni legate a fattori nascosti per avere la discernibilità dei bosoni¹⁴⁵. Resta comunque aperta la questione riguardante un’ipotetica spiegazione di natura causale sulle correlazioni prodotte dalle statistiche quantistiche di Bose-Einstein e di Fermi-Dirac. Infatti in

esistono indici $i \leq k$, $j \leq n$ con $j \neq k$ tali che $i_j = i_k$ allora T soddisfa il principio di esclusione.

¹⁴³ Prima di Bach, Natanson (1911) analizzò l’indistinguibilità tra le statistiche MB e BE, osservando che se non si dispongono di informazioni sulle configurazioni, le particelle potrebbero essere indistinguibili. Cfr. Bach (1997, p. 138).

¹⁴⁴ Traduzione italiana libera.

¹⁴⁵ Alberto Cortes (1976) afferma che sarebbe opportuno abbandonare il principio di identità degli indiscernibili di Leibniz (di cui si parlerà nelle prossime sezioni) se non si vuole che la distinzione tra le particelle sia basata su fattori nascosti.

una prospettiva classica, si potrebbero interpretare i risultati di queste statistiche in virtù di una non indipendenza degli eventi elementari, una qualche sorta di interazionismo causale “anomalo” fra di esse. Infatti preso un sistema composto da due particelle, sembra che l’una conosca lo stato dell’altra¹⁴⁶. L’anomalia causale nella statistica di Fermi si esplicita nel principio di esclusione, interpretandolo come una sorta di “forza che soggiace tra le particelle” (Reichenbach 1998, p. 71). Per dirla alla Reichenbach (1998, pp. 71-72) per indagare questa questione basterebbe rifiutare il principio sinottico della fisica quantistica (che afferma che tutte le possibili informazioni fisiche su un sistema sono contenute nella funzione d’onda) e riuscire ad osservare contemporaneamente sia la posizione sia il momento di una particella, verificando così l’identità fisica della particella. Tutto ciò è chiaramente utopico perché si violerebbero l’ipotesi di indeterminazione che è un principio fisicamente inconfutabile. In questo caso, infatti, sarebbe ad esempio possibile identificare posizione e velocità della particella contemporaneamente.

Per quanto riguarda la discernibilità data dalla *countability*, secondo Lowe (1998, §2) non solo la discernibilità ma anche l’individualità è data se vi è una pluralità contabile, ma non è ben chiara una definizione precisa di questa pluralità contabile, né si può esprimere chiaramente questa differenziazione.

Non c’è nessuna ragione per cui se “a” è contabile allora deve anche essere discernibile.

La contabilità, termine che indica ordinalità (e non cardinalità), non implica la discernibilità. Si pensi ad esempio ad una moneta non truccata lanciata due volte: i

¹⁴⁶ Cfr. van Fraassen (1998, p. 88).

due esperimenti, primo lancio e secondo lancio, sono contabili nel senso che vi è un ordine che discrimina tra lanci tuttavia i due lanci sono del tutto indiscernibili¹⁴⁷. La contabilità è troppo poco, si può avere contabilità pur mantenendo l'indistinguibilità. Invece la discernibilità implica la contabilità: Se si possono discernere un insieme di N oggetti sulla base di una qualche caratteristica, sulla base della stessa è possibile introdurre un ordinamento sugli N oggetti dati.

Come afferma Teller (1995, p. 12) la differenza tra le particelle classiche e quelle quantistiche deriva dal fatto che le prime sono contabili mentre le seconde, cioè i quanti, sono degli aggregati. È la stessa differenza che vi è tra delle monete inserite nel salvadanaio e quelle versate in banca nel conto corrente. E se le particelle quantistiche non sono contabili allora non sono discernibili”

TESI DEL TESTIMONE C) Le particelle sono *individuali* ma *non discernibili*.

“French e Krause (2006) si sono chiesti che base abbia l'individualità in meccanica quantistica: Pur rimanendo agnostici sull'individualità, se non si è in grado di distinguere in maniera qualitativa o attraverso proprietà spazio-temporali, ciò che garantirebbe l'individualità sarebbe la trascendentalità, mediante una tra le seguenti proposte:

- In una prospettiva primitivista, la “*primitive thisness*” (Teller, 1995) identificabile con la proprietà relazionale di autoidentità (Adams, 1979);

¹⁴⁷ Si supponga che i due lanci siano stati effettuati nel medesimo luogo e che a priori non si conosca quale dei due sia avvenuto prima.

- il substrato sostanziale di Locke (French, 1989a)¹⁴⁸;
- le *haecceitates* di Ladyman ¹⁴⁹ (2007), proprietà metafisiche che garantiscono l'individualità a qualsiasi livello¹⁵⁰.

La differenza, seppur leggera, tra le *haecceitates* e la *primitive thisness* è la seguente: le prime costituiscono dei fattori metafisici aggiuntivi alle qualità di una cosa, che individuano quest'ultima, mentre la seconda è un fatto bruto di identità, è la fonte primitiva di individualità, la base che supporta l'autoidentità e la distinzione numerica tra gli oggetti. Le *haecceitates* implicano la *primitive thisness* ma non vale l'opposto, cioè si potrebbe dare *primitive thisness* senza l'aggiunta di "ingredienti ontologici"¹⁵¹. Il substrato sostanziale di Locke è qualcosa di descrivibile solo in maniera negativa cioè, come afferma lo stesso Locke, "qualcosa di cui noi sappiamo cosa non è".

OBIEZIONE AL TESTIMONE C)

“La questione di poter scomporre e riassembleare due oggetti indistinguibili pone dei seri problemi sotto gli aspetti delle *haecceitates*: se si scambiano tra loro le parti di due oggetti indistinguibili, che per semplicità chiamiamo I e II, come è possibile stabilire se il primo oggetto è ancora I e il secondo oggetto è ancora II?

¹⁴⁸ Cfr. French e Krause (2006); Hawley (2006a).

¹⁴⁹ Pur argomentandole, Ladyman (2007) non supporta le *haecceitates*.

¹⁵⁰ Post (1963) parla di identità trascendentale che a sua volta supporta l'*haecceitismo*, come osserva Lewis¹⁵⁰, qualcosa che è *over and above* le proprietà.

¹⁵¹ Cfr. Morganti (2013, §3).

Il contestualismo di Ladyman (2007), si oppone proprio a quest'idea, sulla base del fatto che se si continuasse a essere legati alla nozione di individualità, si dovrebbero introdurre queste *haecceitates*, che, come affermato sono qualcosa che dà l'individualità al di là di ciò che è scientificamente esprimibile. È difficile trovare un chiaro linguaggio logico utile per parlare di tali meta-proprietà ontologiche.

Inoltre seguendo la *primitive thisness* di Adams, si avrebbe la trivializzazione di PII causata dalla quantificazione su identità primitive¹⁵².”

TESI DEL TESTIMONE D) Le particelle sono *individuali* e *discernibili*.

“È bene distinguere tra individualità e distinguibilità. La prima si riferisce a qualcosa di interno o particolare, all'individuale nella sua interezza, mentre la seconda si riferisce a qualche relazione esterna che l'individuale intrattiene con altri individuali¹⁵³.

Le particelle classiche, oggetti costituenti la fisica classica, sono in prima approssimazione l'esempio per eccellenza degli oggetti individuali e distinguibili. Nella fisica classica un individuale è qualcosa che occupa una certa posizione nello spazio e nel tempo, e che può essere distinto da altri individuali. Se si considerassero due semplici particelle classiche, è noto che non possono trovarsi esattamente nello stesso stato fisico: Nello spazio-tempo newtoniano, infatti, particelle differenti non possono occupare la stessa posizione spaziale nello stesso

¹⁵² Cfr. French e Krause (2006, p. 14) a proposito di come l'autoidentità renda vacuamente vero il principio di identità degli indiscernibili di Leibniz che sarà introdotto e discusso nella prossima sezione.

¹⁵³ Cfr. French e Krause (2006, p. 6).

momento, in virtù della loro impenetrabilità, inoltre percorrono traiettorie ben definite, ragione sufficiente a permetterci di seguirle nel tempo. Si pensi, ad esempio, all'interpretazione bohmniana che pone l'individualità sulla base delle traiettorie spazio temporali, sulla base della doppia ontologia particella guida-onda pilota.

Molto interessanti sono le soluzioni che ha proposto Gregg Jaeger (2010): il principio interferometrico di individuazione (IPI) e il principio di individuazione quantistico (QPI). Il primo è un principio di natura empirica e si basa sull' adagio di Dirac secondo cui "ogni fotone interferisce solo con sé stesso"¹⁵⁴ ed è così formulato:

IPI: "Un apparente sistema fisico S è un individuale se e solo se la piena visibilità d'interferenza può essere osservata in principio in un esperimento eseguito su di esso" (Jaeger, 2010).

Jaeger (2010) riprende il principio eigenvalue-eigenstate link (EEL), secondo cui un sistema quantistico è un individuale se e associato ad uno stato puro¹⁵⁵, estendendolo in ciò che chiama principio quantistico di individuazione (QPI):

QPI: "Un sistema è un individuale se e solo se il suo stato è interamente descritto da un raggio nello spazio di Hilbert associato ad esso" (Jaeger, 2010).

¹⁵⁴ Dirac (1958) citato in Jaeger (2010).

¹⁵⁵ Questo principio è molto vicino alla posizione di Leibniz sull'identità degli indiscernibili, che sarà argomentato nella successiva sezione.

In questo modo si recuperano anche quegli stati non necessariamente puri ma che sono descritti nello spazio di Hilbert da un operatore statistico che sia in particolare un proiettore sul raggio vettore¹⁵⁶.

D.1. Un principio per l'individualità degli oggetti fisici: il principio di identità degli indiscernibili.

Per mostrare che le particelle descritte da una teoria fisica siano individuali e discernibili, basta mostrare la validità del *Principio di identità degli indiscernibili di Leibniz* (1720) formulato nel 1714, che si denoterà d'ora in avanti con la sigla PII¹⁵⁷, nel seguente modo:

“In natura non ci possono essere due esseri perfettamente simili e nei quali non sarebbe possibile trovare una differenza interna o basata su una denominazione intrinseca”

Per dirla in altri termini

Se per ogni proprietà o relazione E di un oggetto a, b ha la medesima E e viceversa, cioè se per ogni proprietà o relazione E di un oggetto b, a ha la medesima E, allora a e b sono identici.

¹⁵⁶ Cfr. Jaeger (2010).

¹⁵⁷ Leibniz enuncia il suo principio restringendolo alle possibili sostanze. In particolare “le proprietà estrinseche delle sostanze sopravvengono su quelle intrinseche” (Forrest, 2012).

La forma contronominale di questo principio è il criterio di dissimilarità dei diversi di John Ellis McTaggart¹⁵⁸.

Il principio di identità degli indiscernibili di Leibniz (PII) segue dal “principio di ragione sufficiente” secondo cui se ci fossero due oggetti indiscernibili in posizioni differenti e se fossero permutati tra loro, Dio non sarebbe stato in grado di poter scegliere e discernere tra i due (French e Krause 2006, p. 9), ed è un teorema della logica del secondo ordine¹⁵⁹ che ha generato alcune distinzioni sulla base delle proprietà che entrano in gioco.

Per poter maneggiare tale principio, la cui validità ci assicura di avere una teoria costituita di particelle individuali e discernibili, è necessario avere una chiara definizione di identità. Come è possibile fare ciò?

Un primo tentativo potrebbe essere quello di legare questo concetto al tempo. Un oggetto mantiene la propria identità attraverso il tempo se esiste *qualcosa* che collega gli stati istantanei dell’oggetto, intesi come parti a istanti successivi e consecutivi¹⁶⁰. Hans Reichenbach (1998) definisce un nuovo termine per questo *qualcosa*: il termine *genidentità*. Con questo termine si pone l’accento sugli stati differenti che può assumere lo stesso oggetto preso in considerazione in diversi istanti temporali¹⁶¹. In maniera più rigorosa, sia dato un oggetto inteso come successione di eventi che si avvicendano nel tempo, presa una qualunque coppia di eventi appartenenti a questa successione allora tale coppia si definisce

¹⁵⁸ Cfr. Forrest (2012).

¹⁵⁹ Precisando, è un teorema solo se si quantifica su tutti i predicati possibili ma in questo modo segue la trivializzazione.

¹⁶⁰ Cfr. Castellani (1998a, p. 7).

¹⁶¹ Cfr. Reichenbach (1998, p. 61).

genidentica. Si noti come tale definizione faccia leva sulla concezione di oggetto fisico inteso come serie di eventi¹⁶².

Reichenbach definisce due tipi di genidentità. La prima, di tipo *materiale*, è tipica degli oggetti macroscopici ed è caratterizzata da tre proprietà: 1) il possesso di una certa continuità nei cambiamenti, cioè un oggetto che si muove compie una transizione continua da una posizione iniziale a una finale non ammettendo né scambi di identità con altri oggetti con il quale potrebbe entrare in contatto, né compiendo traslazioni spazio-temporali discontinue, 2) la condizione di impenetrabilità spaziale, 3) il poter associare all'oggetto un'etichetta (*labelling*) o semplicemente un nome.

Questa caratterizzazione può essere estesa rinunciando a qualcuna delle tre caratteristiche sopra elencate ottenendo il secondo tipo di genidentità, quella *funzionale*, che estende il concetto di genidentità materiale violando l'impenetrabilità e l'operazione di *labelling* degli oggetti. È facile verificare ad esempio che l'energia di un oggetto ha genidentità funzionale: Si pensi ad un urto elastico tra due corpi perfettamente identici che procedono lungo una traiettoria rettilinea alla stessa velocità da direzioni opposte. Dopo l'urto i due viaggiano alla stessa velocità ma in direzioni opposte a quella di partenza, non vi è modo di identificare se l'energia sia stata scambiata tra i due corpi o se semplicemente abbiano cambiato velocità senza trasferirsi energia. Tuttavia i due oggetti hanno compiuto una transizione continua da una posizione iniziale a una finale¹⁶³.

¹⁶² Questo particolare linguaggio di eventi, preferibile a quello degli oggetti, ha in sé una forza che permette di eludere alcuni problemi filosofici legati all'identità degli oggetti, primo fra tutti il paradosso dei 1001 gatti di Geach (Geach 1980, pp.215-216). Si veda anche Castellani (1998b) e Reichenbach (1998).

¹⁶³ Cfr. Reichenbach (1998, pp. 61 e ss.).

PRIMA OBIEZIONE AL TESTIMONE D)

“La definizione di genidentità non è poi così buona in quanto è ristretta solo ad una specifica catena di eventi: quella dell’oggetto. Infatti, oltre alle catene di eventi legati alla genidentità, che sono particolari catene causali, ve ne sono delle altre ancor più generali. Inoltre un evento che appartiene ad una data catena di eventi genidentici, può comunque appartenere ad altre e numerose catene di eventi causali. Se dato un oggetto fisico è possibile determinare una coppia di eventi genidentici associati all’oggetto (cioè appartenenti a quella catena di eventi che danno l’identità all’oggetto), il viceversa non è sempre vero, cioè non è sempre possibile data una coppia di eventi genidentici, determinare la catena causale che fornisce l’identità.

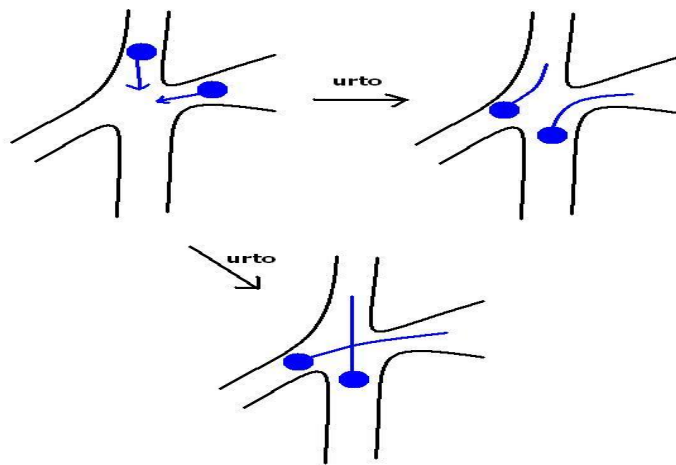


Figura 6: Un esempio di non determinazione dell’identità mediante catene causali.

Si pensi a due biglie perfettamente identiche poste su uno scivolo di sabbia. La prima scende da Nord, la seconda scende da Est (Figura 6). Per una particolare conformazione del percorso e della pista è possibile che dopo l’urto tra le due biglie, quella che proviene da Nord finisca a Sud o che quella che provenga da Est finisca a Sud. Cioè se si guarda solo alla biglia che arriva a Sud non è dato sapere

se essa sia quella che proveniva da Nord o quella da Est se non si è osservata l'intera evoluzione del processo.

La genidentità appena mostrata non sembra quindi una condizione sufficiente a definire l'individualità. Tuttavia resta una caratterizzazione necessaria.

Come nota lo stesso Reichenbach (1998, p. 65) questa distinzione tra le genidentità è inapplicabile in ambito quantistico, mostrando che per determinare l'identità delle particelle sia invece necessaria una inferenza su base statistica¹⁶⁴.

La proposta di Jaeger (2010), IPI, considera come individuali gli stati quantistici separabili nel prodotto tensoriale di spazi di Hilbert mentre considera come un unico individuale gli stati *entangled*. Essendo un principio empirico e quindi dipendente dalla misurazione, è in una prospettiva più lontana da quella assiomatica-logica del principio di Leibniz¹⁶⁵. Anche per QPI lo stato di singoletto è di per sé un individuale, non le sue componenti. Questi due principi tuttavia non sembrano risolvere a pieno il problema della discernibilità perché forniscono individualità anche agli stati *entangled*, nonostante questa individualità, come afferma Jaeger (2010), non sia più basata su considerazioni spazio-temporali o su determinate osservabili quantistiche.

Secondo Kant PII era generalmente falso. Celebre è il suo esempio, nella *Critica della ragion pura* (1781), delle due gocce d'acqua che sono indiscernibili ma non identiche¹⁶⁶. Forse la posizione di Kant è un po' estrema. Secondo Hacking (1975) infatti gli esempi spazio-temporali che invalidano PII non andrebbero considerati perché non hanno portata empirica. Essi sono inconclusivi ai fini di validare o

¹⁶⁴ Si vedranno in seguito in maniera approfondita queste considerazioni sollevate da Reichenbach (1998).

¹⁶⁵ Cfr. Jaeger (2010).

¹⁶⁶ Cfr. Kant (1781, trad. it. on line p. 216).

meno il principio stesso perché, come nota anche Strawson (1959) in *Individuals*, le monadi non hanno carattere spaziale. Tuttavia PII può comunque essere violato sul piano temporale piuttosto che su quello spaziale come mostra Ayer (1954) in *Philosophical Essays*. Un tentativo di salvare PII dalla trappola spazio-temporale è fornita da Hacking (1975) secondo cui il principio di Leibniz è solo “un principio metafisico su possibili descrizioni” dei mondi, cioè vero “su tutti i possibili mondi”. Non è quindi né un principio teologico come sostiene Strawson (1959) né un mero principio analitico come sostiene Ayer (1954). Non è nemmeno logicamente necessario come sostiene Parkinson (1965) in *Logic and Reality in Leibniz's metaphysics*, bensì è un principio che consegue dal principio di ragione sufficiente¹⁶⁷.

Sia esso un principio metafisico o meno, il principio di Leibniz risulta comunque apparentemente inefficace in meccanica quantistica.”

CONTRO-OBIEZIONE DEL TESTIMONE D)

“In base al contesto fisico e al tipo di proprietà considerate, PII può mantenere la sua validità anche in meccanica quantistica¹⁶⁸.

Seguendo Weatherston (2008) si potrebbero distinguere semplicemente proprietà *intrinseche* (indicate con nR) e proprietà *estrinseche* (indicate con R). Definire queste proprietà non è banale, si potrebbe però semplificare la questione

¹⁶⁷ Il principio di ragione sufficiente esprime la convinzione di poter sempre trovare una motivazione che spieghi in termini più o meno semplici il “perché” e il “come” si sia verificato un certo fenomeno preso in considerazione in un certo ambito, sia esso un semplice fatto che accade in circostanze ordinarie, premettendo di conoscere a sufficienza l’ambito (o lo stato delle cose) a cui il fenomeno appartiene. PII segue da questo principio perché non vi sarebbe una ragione sufficiente a spiegare l’esistenza di due oggetti distinti che condividono le medesime proprietà.

¹⁶⁸ Giustamente è stata criticata l’idea che il filosofo naturalisticamente orientato debba per forza accettare una qualche forma di PII (Morganti e Dorato, 2013) valido per ogni contesto. Sembra invece che sia il contesto a dover stabilire quale forma di PII sia quella preferibile.

definendo le prime come proprietà possedute da un corpo (ad esempio la proprietà di possedere il naso), mentre le seconde come proprietà non intrinseche. Si potrebbe complicare ulteriormente il quadro distinguendo tra proprietà *pure*, cioè proprietà determinate sulla base di relazioni con “sostanze generiche” (ad esempio la relazione del tipo “aver conseguito un dottorato presso un’università italiana” è una proprietà pura), e *impure*, cioè proprietà determinate sulla base di relazioni con “sostanze specifiche” (ad esempio la relazione “aver conseguito un dottorato presso l’Università di Urbino” è una proprietà impura)¹⁶⁹. Quest’ultime, quindi, a differenze delle prime sono esprimibili mediante relazioni con un’altra sostanza specifica. È sbagliato pensare che le proprietà estrinseche coincidano con quelle relazionali¹⁷⁰: È possibile avere proprietà intrinseche e relazionali, basti pensare a relazioni del tipo “avere il proprio naso sopra le labbra della propria bocca”, questa è una proprietà che un corpo possiede ma è anche una relazione tra due termini (il proprio naso e le proprie labbra della bocca). Si può anche dimostrare che tutte le proprietà intrinseche sono pure, per i dettagli di ciò si rimanda a Forrest (2012) (Figura 7a). Sulla base di queste proprietà si può dipingere il principio di Leibniz con tre diverse tonalità seguendo lo schema proposto da Forrest (2012)¹⁷¹ (Figura 7b):

- 1) Una forte (*strong version*, S) in cui le proprietà che si analizzano sono quelle pure ed intrinseche,
- 2) Una tenue (*weak version*, W) in cui le proprietà che si analizzano sono solo quelle pure ed estrinseche,

¹⁶⁹ Cfr. Forrest (2012).

¹⁷⁰ Cfr. Weatherson (2008).

¹⁷¹ Per un altro schema concettuale di classificazione delle proprietà e dei principi di Leibniz associabili con esse si veda Swiburne (1995).

3) Una estremamente tenue (*very weak version*, VW) in cui le proprietà che si analizzano sono quelle impure e per cui il principio di Leibniz diventa banalmente vero¹⁷².

	P	nP
R	W	VW
nR	S	

Figura 7a: Tabella di contingenza per le discernibilità sulla base delle proprietà.

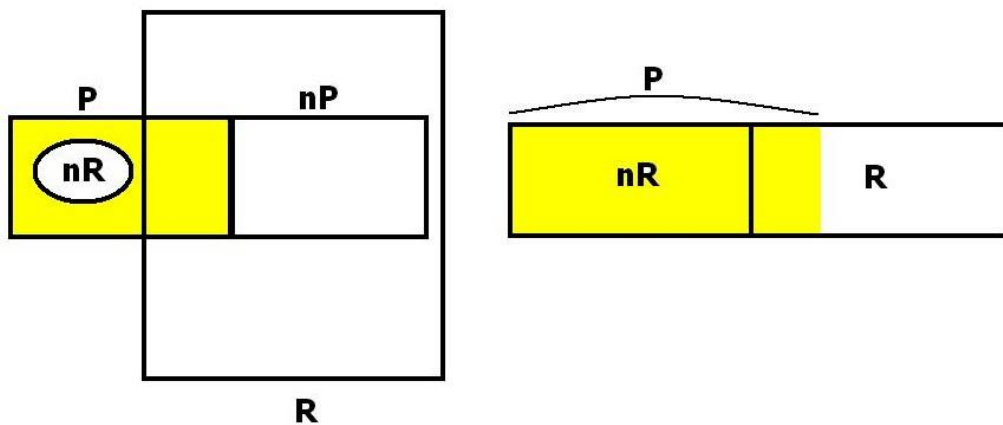


Figura 7b: Confronto tra proprietà pure (P) e impure (nP) e relazionali (R) e non relazionali (nR).

In letteratura si possono trovare esempi in cui la *weak version* viene soddisfatta ma non la *strong version* e altri in cui né la *weak* né la *strong* sono soddisfatte¹⁷³.

Per cui questa distinzione di proprietà non salva a pieno PII.

¹⁷² Se questa tripartizione non fosse abbastanza chiara, è possibile proporre un'altra più fluida seguendo French e Krause (2006): PII(1) considera tutte le proprietà di qualunque tipo, PII(2) tra tutte le proprietà esclude quelle relative allo spazio e al tempo, PII(3) considera solo proprietà monadiche e quindi non relazionali. Alcuni filosofi hanno affermato che PII(1) e PII(2) inducono già una diversità numerica per il semplice fatto che contengono le relazioni: questa una delle critiche mosse da Bigaj (2015) alla discernibilità debole.

Swiburne (1995) ha un'idea originale: comprende che un modo per conservare PII può giungere se si cambia la natura degli oggetti che entrano in gioco nella discernibilità. Infatti estende il campo di applicazione del principio di Leibniz non solo alla categoria di sostanza¹⁷⁴, ma anche ad oggetti astratti privi di questa categoria di sostanza, cioè a oggetti che sono propriamente delle proprietà o relazioni. Tuttavia in questo caso si corre il rischio di sollevare argomentazioni che sostengono la validità della *weak version* in ogni contesto logico, infatti due oggetti apparentemente indiscernibili, per il semplice fatto di relazionarsi a noi (non ammettendo copie di noi stessi) in modo differente, diventano discernibili: perché hanno questa proprietà pura diversa.”

PRIMO INTERVENTO DEL GIUDICE

“È necessario continuare la riflessione sull'applicabilità di PII perché ritengo sia la strada migliore da seguire per analizzare la questione dell'individualità e indiscernibilità in ambito fisico e quindi in particolare in meccanica quantistica. Chiedo al testimone D di proseguire la sua testimonianza e di essere ancora più chiaro e schematico in questa ricerca.”

¹⁷³ Si veda Forrest (2012).

¹⁷⁴ Secondo Russell una sostanza è un insieme di universali legati da una relazione speciale tra le proprietà conosciuta come compresenza. Considerando gli universali come proprietà intrinseche si ha che la teoria di Russell (1940) implica la *strong version* (O'Leary- Hawthorne (1995), Zimmerman (1997) e Rodriguez-Pereyra (2004)). Tuttavia la *strong version* è la più vulnerabile alle possibili critiche. Si veda al riguardo Armstrong (1989) e Forrest (2012).

RIPRENDE LA TESTIMONIANZA IL TESTIMONE D)

“Nel campo delle definizioni e delle speculazioni filosofiche, il modo migliore di formulare il principio di identità degli indiscernibili di Leibniz, è senza dubbio quello di utilizzare il formalismo del calcolo dei predicati del primo ordine con identità, ottenendo la seguente definizione:

PII: se i predicati monadici che valgono per un oggetto a sono esattamente quelli che valgono per un oggetto b , allora $a=b$.

Se per predicati monadici si intendono i termini che indicano le proprietà fisiche di un oggetto, il principio afferma che individui differenti non possono avere esattamente tutte le stesse proprietà fisiche.

Già in un mondo classico è possibile trovare contro-esempi a PII. Si prenda ad esempio uno spazio omogeneo, isotropo e in cui essere in moto uniforme o accelerato sia una differenza assoluta, ma essere a riposo o in moto uniforme non lo sia, allora due oggetti fisicamente identici, uno a riposo e l'altro in moto rettilineo uniforme sono indiscernibili, ma non identici, cioè hanno tutte le stesse proprietà, ma non sono lo stesso oggetto. Si potrebbe allora rafforzare PII nel modo seguente (StrPII, versione più forte):

StrPII: se i predicati che valgono per a sono esattamente quelli che valgono per b , allora $a=b$.

Cioè non solo le proprietà, ma anche le relazioni devono essere le stesse affinché si abbia identità. Ma ancora una volta è possibile trovare nel mondo classico contro-esempi a StrPII.

Max Black (1952) ha suggerito di pensare ad un mondo che contenga *solo* due particelle sferiche che hanno tutte le stesse proprietà. Lo spazio non è assoluto. Questi due oggetti hanno tutte le stesse proprietà e relazioni, ma sono due. Si supponga infatti che due sfere, S_1 e S_2 , siano situate su di uno spazio sferico, nella semplice ipotesi che lo spazio sia proprio una sfera di raggio 1 metro. S_1 e S_2 hanno tutte le proprietà monadiche in comune, anche quella non monadica di distare 2π l'una dall'altra. È ovvio che percorrendo questa distanza su un arco di meridiano a partire da un punto, si ritorna inevitabilmente al punto di partenza. Cioè partendo da S_1 si arriva a S_2 e viceversa. La misura dei meridiani di questo spazio sferico è esattamente pari a 2π . Con questo esempio si vuole introdurre che se l'universo fosse simmetrico, il problema di Black, sollevato anche da Ayer (1954), potrebbe essere risolto nel modo presentato da Hacking (1975): Si pensi ad esempio ad un universo dotato di un'opportuna struttura dello spazio-tempo (ad esempio una geometria non euclidea come quella sferica) contenente una sola sfera, l'evidenza empirica sarebbe la stessa di quella che si avrebbe nell'esempio delle due sfere appena mostrato, incluse le osservazioni sulle partenze da una sfera e arrivi sull'altra¹⁷⁵. Tale soluzione però si espone alle critiche di Adams (1979) legate sia al suo principio di continuità sia a considerazioni di logica modale. Altre soluzioni all'esempio anti-PII di Black sono quelle di Hawley (2009), di

¹⁷⁵ Hawley (2009) chiama questa posizione "difesa dell'identità". Da un punto di vista ontologico si osservi come la geometria utilizzata in meccanica quantistica, a differenza di quella impiegata nelle teorie di campo, sia "*for all practical purposes*" essendo certamente molto utile ma non l'ultima risposta alla rappresentazione del mondo.

O’Leary Hawthorne (1995) che interpreta la singola sfera di Black come un oggetto che ha ben due posizioni e di Markosian (1998) secondo cui le due sfere sono semplicemente uno stesso oggetto esteso. Quest’ultima ipotesi porta ad una tesi fortemente monista (Potrc e Hogan, 2008; Schaffer, 2008; Forrest, 2012) che si scontra con l’idea secondo cui due oggetti per essere un unico oggetto dovrebbero essere in qualche modo connessi (Markosian, 1998). Della Rocca (2005, p. 488) supporta Hawley (2009): Preso un numero n di oggetti indiscernibili con $n \geq 2$, fissato un dato luogo e un dato istante di tempo, non è possibile che gli n oggetti condividano, in quel dato luogo e in quel dato istante, le stesse parti¹⁷⁶. Quindi anche StrPII non risolve a pieno il problema della discernibilità. Recentemente è stato proposto, ispirandosi al “terzo grado di discernibilità” di Quine (1976a), una forma più debole di PII (Saunders, Muller, Seevinck). Due oggetti sono distinguibili quando fra essi vale una relazione irriflessiva¹⁷⁷. Saunders (2006) trova che questo principio è adattabile per i fermioni ma non per i bosoni. Si ottiene quindi una forma di PII che può essere parzialmente applicata in meccanica quantistica.

D.2. Identità relativa, discernibilità debole.

Di notevole importanza per la sua estrema chiarezza e perché mira a sviluppare una forma di PII generalmente applicabile in meccanica quantistica, è il risultato raggiunto da Muller e Seevinck (2009): dopo aver distinto tre tipi di discernibilità,

¹⁷⁶ Cfr. Forrest (2012).

¹⁷⁷ Cfr. Saunders (2006).

quella assoluta che è data dalle proprietà fisiche dell'oggetto e quella relazionale legata a relazione fisiche tra oggetti che può essere suddivisa in relazionale debole (se la relazione è irreflessiva e simmetrica) e relazionale relativa (se la relazione è irreflessiva e antisimmetrica), Muller e Seevinck illustrano che cosa sia una proprietà probabilistica, cioè una proprietà relazionale che coinvolge la probabilità, e una proprietà categorica, una proprietà relazionale che non coinvolge la probabilità. Dopo aver fatto ciò formulano un criterio di discernibilità debole che verrà chiamato "Muller-Seevinck thesis" (MST). MST si basa sul lemma di Muller e Seevinck secondo cui preso un insieme di N particelle simili, se esistono due operatori A e B , che agiscono parimenti su ogni singola particella, per i quali esiste un numero complesso c tale che $[A, B]\psi\rangle = c|\psi\rangle$ con $|\psi\rangle$ stato puro, allora le particelle sono categoricamente debolmente discernibili¹⁷⁸. La dimostrazione di questo lemma¹⁷⁹ si basa sui postulati quantistici in particolare sulla relazione di indeterminazione di Heisenberg. Per inoltrarsi nell'illustrazione di MST sono necessari alcuni postulati:

Il primo è il *postulato debole delle proprietà* (WP) secondo cui se un sistema fisico S si trova in un autostato w di una certa osservabile cui si fa corrispondere l'operatore A avente autovalore a , allora esso ha la proprietà fisica quantitativa data dal valore a di quella osservabile. Se vale WP allora MST afferma che le particelle quantistiche simili sono debolmente discernibili in:

- 1) spazi di Hilbert a dimensioni infinite,
- 2) una certa classe di stati in spazi di Hilbert a dimensioni finite,

¹⁷⁸ Cfr. Muller e Seevinck (2009, p. 187).

¹⁷⁹ Cfr. Muller e Seevinck (2009, pp. 187-189).

3) spazi di Hilbert a dimensione finita “in tutti gli stati ammissibili quando c’è sempre un operatore massimale di significato fisico” (Muller e Seevinck 2009, p. 198), se le particelle sono fermioni.

Il secondo è il *postulato forte delle proprietà* (SP) secondo cui se un sistema fisico S si trova in un autostato w di una certa osservabile cui si fa corrispondere l’operatore A avente autovalore a , allora esso ha la proprietà fisica quantitativa data dal valore a di quella osservabile (cioè la probabilità di ricavare il valore a quando l’osservabile è misurata, è pari a 1) e viceversa. Se vale SP allora MST afferma che “particelle quantistiche simili di ogni tipo e in ogni tipo di spazio di Hilbert che si trovino in uno stato qualsiasi, sono debolmente discernibili” (Muller e Seevinck, 2009, p. 198).

Come notano Muller e Seevinck, si può esitare ad accettare SP, in quanto da esso e con opportune assunzioni sul processo di misurazione di un sistema fisico, si potrebbe dedurre il postulato di proiezione¹⁸⁰. Tuttavia, l’importanza di MST sta nel riuscire a uniformare la natura delle particelle descritta dal formalismo della meccanica quantistica ottenendo dalla semplice diversità numerica ordinale (*countability*) la discernibilità debole¹⁸¹.

Un modo alternativo di salvare l’individualità è quindi quello di indebolire il concetto di assoluta discernibilità, relativizzandola a specifiche proprietà o relazioni. Conseguentemente anche il principio di Leibinz dovrà essere indebolito sulla base della discernibilità introdotta.

¹⁸⁰ Cfr. Muller e Saunders (2008, p. 514). Ricordiamo che tale postulato afferma che una misurazione di una certa osservabile compiuta su un sistema quantistico in stato di sovrapposizione, porta al collasso del sistema su un autostato e quindi ad un valore della misurazione dato dall’autovalore associato all’autostato.

¹⁸¹ Secondo Ladyman e Bigaj (2010) la discernibilità debole porta solo ad una distinzione numerica.

Si è già detto che Saunders (2003, 2006) sulla base dei lavori di Quine (1976a)¹⁸², ha mostrato una discernibilità debole, mediante relazioni irreflessive. Questa nozione è stata estesa ai bosoni da Muller e Saunders (2008) e Muller e Seevinck (2009). Il loro non è il primo tentativo di avere una discernibilità debole: Bas van Fraassen (1985, 1991) ha proposto a sua volta una discernibilità debole, basandosi su una interpretazione modale: si possono distinguere due stati di un oggetto, lo stato di valore (cioè i risultati) che si relaziona con le osservabili che hanno valore e con questi valori, e lo stato dinamico, che è connesso con l'evoluzione e lo sviluppo dello stato. Il primo è "empiricamente superfluo" perché non aumenta il potere predittivo della teoria che lo descrive, è solo una determinazione delle osservabili che hanno valore ed un calcolo di esse, il secondo invece aumenta il potere predittivo della teoria perché informa sull'evoluzione dell'oggetto inteso come sistema. Il collasso della funzione d'onda avviene sullo stato di valore e non su quello dinamico. Questa interpretazione salva PII poiché gli stati di valore delle osservabili non hanno significato empirico, in quanto non possono essere usati per prevedere i valori che l'osservabile assumerà nel futuro, sono cioè empiricamente superflui. È possibile assegnare valori distinti ad ogni particella e gli stati dinamici sono in questo modo stabiliti: PII non è violato perché gli stati di valore saranno comunque differenti e questa differenza è mantenuta dagli stati dinamici. In questo modo è possibile salvare PII per i fermioni, perché due fermioni hanno diversi stati di valore. Per i bosoni invece è la "storia" di ciascuna particella a salvare il principio."

¹⁸² Saunders si rifà al principio di Leibniz nella forma di Quine (1976a), infatti egli definisce il suo principio quineano.

SECONDA OBIEZIONE AL TESTIMONE D)

“La discernibilità debole di Saunders solleva la questione secondo la quale per avere una relazione bisogna dapprima considerare i “relata” cioè gli oggetti a cui ci si riferisce. Se la risposta è positiva, cioè le particelle sono debolmente discernibili, vi è già una relazione basata sulla diversità numerica dei relata (French e Krause, 2006; Hawley 2006b, 2009). Secondo questa visione vi è una superiorità ontologica degli oggetti sulla relazione e quindi gli oggetti sarebbero in qualche modo già stati rilevati e distinti (French, 2011). Cioè oltre a fornire un modo per determinarli, sono già dati. In questo caso oltre a mescolare il piano ontologico con quello epistemologico, si ha una vera e propria circolarità.

Per quanto riguarda la discernibilità debole di van Fraassen, essa vale per i fermioni. Per i bosoni, invece, sembra non valere in quanto come può qualche cosa di superfluo, cioè la “storia” della particella intesa come stato di valore, riuscire sia a salvare il principio sia ad evitare soluzioni primitivistiche^{183?}”

DEPOSIZIONE DELLA GIURIA: La sottodeterminazione della metafisica.

“Difficile esprimere un giudizio sulla individualità e discernibilità in meccanica quantistica: Se da una parte Saunders (2006) afferma che nel mondo quantistico ci sono solo delle strutture con un numero finito di posti e le particelle non sono altro che dei segnaposto che riempiono queste posizioni, dall’altro Simons (1998)

¹⁸³ Cfr. French (2011).

afferma che proprio l'individualità degli oggetti è data dai "tropi", istanze individuali di proprietà¹⁸⁴.

Neppure l'evaporazione della individualità delle particelle quantistiche, sulla base della statistica depone a favore della metafisica della non individualità. La statistica quantistica non è spiegabile solo abbandonando l'individualità ma vi sono altre opzioni: ad esempio abbandonando la distinguibilità e mantenendo l'individualità oppure mediante restrizioni sugli stati accessibili o attraverso l'olismo delle proprietà.

Inoltre uno stato quantistico statistico non è uno stato quantistico ontico¹⁸⁵. Sono quest'ultimi che andrebbero indagati per determinare l'individualità di una particella quantistica.

È chiaro che tutte queste posizioni poggiano su istanze ontologiche di tipo metafisico. È evidente che ci si sta spostando dall'ambito della fisica a quello della metafisica. Come ha affermato van Fraassen (1998), la spesso invocata teoria dei campi che attribuisce una tenue individualità alle particelle quantistiche considerandole mere perturbazioni di un campo, non riesce da sola a risolvere la sottodeterminazione della metafisica in meccanica quantistica, in quanto si possono sempre fare diverse formulazioni metafisiche che risultano tra loro incompatibili ma che risultino compatibili e di supporto alla teoria fisica. Le ipotesi metafisiche alternative sono sempre irrimediabilmente sottodeterminate, la sottodeterminazione è inevitabile anche nella scienza, figuriamoci in metafisica. Inoltre la scelta fra varie ipotesi è spesso guidata, più che dalla logica, dall'esigenza di avere continuità con le precedenti teorie che si sono già affermate

¹⁸⁴ Cfr. French (2011).

¹⁸⁵ Cfr. Calosi, Fano, Tarozzi (unpublished).

(seguendo, in un certo senso, la direzione di unificare il vecchio con il nuovo), evitando formulazioni complesse o soggettivamente poco verosimili, mantenendo un certo *fitting* con i dati e i fenomeni osservati. Lo spazio di possibilità della metafisica non è infatti ben definito: o risulta troppo vago (stando nel campo della possibilità logica) o è fondamentalemente riducibile¹⁸⁶. Come nota Hawley (2006a) “Le teorie fisiche raramente supportano direttamente risposte a domande metafisiche e la metafisica è sottodeterminata dalla fisica [...] sottodeterminata [a sua volta] dai dati empirici.”

Matteo Morganti (2013) assume un ragionevole principio, che si denoterà come *Principio della revisione minima* (PRM), secondo il quale la metafisica dovrebbe distare il meno possibile dal senso comune. È difficile dare valore conoscitivo al senso comune, per cui PRM dovrebbe essere assunto non tanto rispetto al senso comune, quanto rispetto ai nostri contenuti percettivi, che possono essere indagati sperimentalmente, per cui è più facile fare un confronto scientificamente fondato fra le metafisiche suggerite dalle teorie scientifiche e i contenuti della percezione. Inoltre le ontologie secondo Morganti (2013) dovrebbero essere *regionali*. Sarebbe quindi opportuno affermare questo principio della metafisica da un punto di vista metodologico:

Principio delle ontologie regionali (POR): Si considerino tutti gli oggetti X che sono modelli della teoria T. Si indaghi l'ipotesi metafisica H espressa in un linguaggio logico L sufficientemente potente da ricomprendere una formulazione

¹⁸⁶ Callender (2011) afferma che la conoscenza scientifica plasma ciò che concepiamo come possibile. Non si necessita di una nozione particolarmente forte di modalità metafisica, che anzi per Callender non si può definire in modo coerente.

di T. Se dentro L è possibile dedurre da T che per tutti gli X vale H, allora è possibile affermare H per tutti gli X.

Questo forse è il massimo che si può ottenere da un realismo scientifico parziale per giustificare ipotesi metafisiche e sfuggire alle trappole della sottodeterminazione. Dunque da una teoria scientifica non si può mai giustificare l'universalità completa di un enunciato metafisico. E se non può farlo una teoria scientifica non vi sono altri modi di farlo.

Alla luce delle deposizioni dei testimoni, questa giuria resta agnostica sulla metafisica della meccanica quantistica: è difficile accettare una metafisica che supporti l'individualità delle particelle, tanto quanto ricercarne un'altra che afferma il contrario.

Dopo aver analizzato gli ambiti della fisica e della metafisica, rimane il terreno dell'epistemologia. Può una speculazione epistemologica respingere la non individualità quantistica?

Secondo Redhead e Teller (1991, 1992) la speculazione epistemologica porta ad accettare la non individualità delle particelle quantistiche perché altrimenti vi sarebbe il rischio di preferire una teoria con un surplus di struttura, con tutte le implicazioni metafisiche connesse, invece di una senza¹⁸⁷. Sarebbe singolare infatti considerare le particelle quantistiche degli individuali attraverso l'introduzione degli indici di particelle e che vi sia un particolare sottoinsieme di stati, previsti dalla teoria, che non si realizzano in natura. Tutto questo sembra più un surplus teorico (French e Krause 2006, p. 193). Anche French e Readhead

¹⁸⁷ Cfr. French e Krause (2006, p. 196), Weyl (1950).

(1988) e French (1989a) sottolineano la presenza di un surplus di struttura nel formalismo della meccanica quantistica¹⁸⁸ dal momento che gli stati non simmetrici sembrerebbero avere significato fisico ma non essere mai realizzati, e quindi essere per qualche motivo non accessibili. Questi ultimi secondo Huggett (1995, 1997) sono non possibili fisicamente. Tuttavia non è chiaro il motivo per cui certi stati siano accessibili e altri no. Il motivo per cui certi stati non si osservano potrebbe comunque essere letto come estrema improbabilità del verificarsi di un certo evento e non come la sua impossibilità a verificarsi¹⁸⁹. Anche dal punto di vista epistemologico, risulta difficile giustificare la non individualità/individualità delle particelle.”

¹⁸⁸ Redhead (1975) afferma che quando una teoria è formalizzata in termini matematici, spesso si ottiene più matematica di quella necessaria per esprimere quella della teoria. Cfr. French e Krause (2006, p. 194).

¹⁸⁹ Cfr. French (2011).

VI. LA SENTENZA DEL GIUDICE: IL PRINCIPIO DI IDENTITA' DEGLI INDISCERNIBILI METODOLOGICO

Ascoltati testimonianze, obiezioni e la deposizione della giuria, il giudice emette la sua sentenza:

“Alla luce di queste considerazioni, si introduce un principio di carattere metodologico, estremamente importante, che colga la discernibilità e che rappresenta uno degli elementi di originalità di questa tesi, il *Principio di identità degli indiscernibili metodologico* (PIIM):

PIIM: *dal punto di vista scientifico*, due oggetti sono lo stesso oggetto se soddisfano esattamente gli stessi predicati.

È chiaro che PIIM non si impegna ontologicamente fino in fondo, ma solo in relazione alla nostra conoscenza. Esso si basa sull'idea aristotelica secondo cui “dell'individuale non c'è scienza”, oppure su quella kantiana, secondo cui l'X individuale non fa mai parte del mondo dei fenomeni. PIIM è in sintonia con la posizione di van Fraassen (2008) secondo cui la validità di PII in meccanica quantistica non diventa oggetto di disputa nell'ambito della scienza empirica.

L' esempio classico di Black (1952), è messo fuori gioco dal carattere metodologico di PIIM poiché del tutto estraneo alla realtà discussa dalla scienza.

PIIM è del tutto irrinunciabile: esso è anche una conseguenza di quello che è stato chiamato “realismo scientifico delle proprietà”, cioè la scienza non può fornire

alcuna informazione sull'esistenza ultima degli oggetti, ma solo sulle proprietà e le relazioni che valgono per essi. Si potrebbe anche provare a indebolire PIIM ottenendo ciò che si chiamerà *Principio di identità degli indiscernibili metodologico debole* (PIIM_R):

PIIM_R: dal punto di vista scientifico, due oggetti sono lo stesso oggetto se soddisfano esattamente gli stessi predicati *riflessivi*.

PIIM_R rientra in quelle discernibilità che sono di tipo *weak* [che saranno trattate nella prossima sezione di questa tesi] e, attraverso questa discernibilità, si rimettono fuori gioco buona parte delle relazioni. Però con PIIM_R vi è il rischio di ricadere nel terzo grado di Quine e nelle obiezioni di French (2006).

Il linguaggio che si sta utilizzando non è del tutto neutrale sull'ontologia delle relazioni o dei predicati *n*-adici con $n > 1$. Infatti esso tace sulla questione se le relazioni siano o meno sopravvenienti rispetto ai predicati monadici, ma afferma implicitamente che non esistono relazioni senza fondamento. Si dice che una relazione *R* fra *n* oggetti è *sopravveniente* se esistono predicati monadici *M* degli *n* oggetti tali che necessariamente¹⁹⁰ se vale *M* per gli *n* oggetti, allora vale *R* fra quegli oggetti. La validità della meccanica quantistica implica l'esistenza di relazioni non sopravvenienti.

Prendendo un sistema di *n* particelle, lo stato del sistema è dato dal prodotto tensoriale degli *n* spazi di Hilbert $H_1 \otimes H_2 \otimes H_3 \otimes \dots \otimes H_n$, dove ciascun H_i è lo spazio di Hilbert associato alla singola particella *i*. L'interpretazione che sembra

¹⁹⁰ Questo "necessariamente" ha solo valore nomologico, cioè si riferisce a leggi di natura.

spontanea e naturale è quella che ad ogni operatore densità definito nell' i -esimo spazio di Hilbert fa corrispondere il possibile stato della particella i . Allargando questa interpretazione, viene naturale poter interpretare gli indici di questi spazi non solo come riferenti al singolo spazio individuale ma anche come riferenti alla particella, permettendo in qualche modo di poterla individuare.

Ma sorgono alcune complicazioni: se le particelle sono dello stesso tipo (fermioni, bosoni), come già visto, vale il principio di identità degli stati simmetrici (ISS).

Matteo Morganti (2013) giustamente nota che il fatto che per tutte le particelle quantistiche valga ISS è estremamente rilevante dal punto di vista ontologico.

In tal senso French e Redhead (1988) hanno mostrato che per gli oggetti della meccanica quantistica non relativistica vale un *Principio di Indiscernibilità per Permutazione* (PIP): preso un insieme di n particelle tutte nello stesso stato con la medesima massa e carica, qualsiasi loro permutazione non cambierà la distribuzione di probabilità di alcuna osservabile.

Si ricordi che in meccanica quantistica alcune proprietà delle particelle, come la carica e la massa, non possono essere modificate dallo stato cioè sono “indipendenti dallo stato”; un po’ come la massa in meccanica classica. Altre proprietà, invece, si dicono “dipendenti dallo stato”, cioè esse dipendono da come è stato preparato il sistema fisico.

Le particelle dello stesso tipo che compongono lo stesso sistema fisico e che hanno le stesse proprietà indipendenti dallo stato (carica, massa), prima della misura, non possono essere individuate sulla base delle loro proprietà dipendenti dallo stato: questo porta alla conclusione che tutte le particelle quantistiche, dello stesso tipo, possiedono esattamente le stesse proprietà fisiche.

Si tenga conto anche che in meccanica quantistica, dopo aver preparato una grande quantità di sistemi nello stesso stato, è possibile misurare su tutti la stessa osservabile e così vedere la sua distribuzione probabilistica. Nel 1925 Goudsmith e Uhlenbeck introdussero lo *spin*, un quarto numero quantico, che rappresenta il momento magnetico indipendente dal moto orbitale. Un elettrone in una certa direzione spaziale α può avere $spin = \frac{1}{2}$ o $spin = -\frac{1}{2}$. Si possono preparare diversi elettroni nello stato in cui c'è probabilità $\frac{1}{2}$ che abbiano $spin = \frac{1}{2}$ nella direzione α e $\frac{1}{2}$ che abbiano $spin = -\frac{1}{2}$ nella stessa direzione. Questo è uno stato di *sovrapposizione*. Secondo la teoria standard, per ogni particella il valore di una certa osservabile prima della misurazione è indeterminata, a differenza della meccanica quantistica bohmiana che afferma l'esatto opposto.

Il PIP afferma che se si scambiano due particelle in un sistema di particelle che hanno le stesse proprietà non dipendenti dallo stato, la distribuzione di probabilità delle osservabili del sistema (proprietà) non cambia.

È chiaro che se la meccanica quantistica è una teoria vera almeno in parte allora per gli oggetti quantistici vale PIP. E se vale PIP, allora il PIIM è violato. Ovvero in meccanica quantistica ci sono oggetti che hanno esattamente tutti gli stessi predicati, eppure sono diversi. La loro individualità, in un certo senso, sembra evaporata: quest'ultima non può essere basata sulle proprietà fisiche dipendenti dallo stato e in meccanica quantistica il principio di Leibniz (nella sua versione metodologica) è apparentemente violato.

Sembra esserci un conflitto fra uno dei fondamenti del pensiero scientifico PIIM e la migliore teoria scientifica per descrivere la materia in condizioni non

relativistiche. Si è già visto che per i fermioni vale il cosiddetto *Principio di Pauli* (PP): due fermioni non possono avere tutte le proprietà dipendenti dallo stato uguali.

Il principio di esclusione di Pauli può essere connesso al principio di identità degli indiscernibili di Leibniz, in questo modo: due elettroni distinti che orbitano attorno ad un atomo sono caratterizzati da certe costanti più il loro stato di moto. Se la descrizione quanto-meccanica è completa allora PIIM richiederebbe che i loro stati siano differenti. Da PP alcuni pensatori (come ad esempio Hermann Weyl) hanno dedotto che per i fermioni vale PIIM, in sostanza per distinguere due elettroni appartenenti allo stesso orbitale basta analizzare lo spin opposto dei due fermioni. In realtà, come ha mostrato Margenau nel 1944, non è possibile affermare che l'elettrone rispetti PIIM, poiché nella meccanica quantistica standard sia se i fermioni sono *entangled*, sia se non lo sono, a priori vale che non è determinato quale fermione abbia quello specifico valore per le proprietà dipendente dallo stato¹⁹¹. Cioè se le caratteristiche degli elettroni sono totalmente descritte dalla meccanica quantistica, considerando una coppia di fermioni, questa non potrebbe essere ritenuta come un semplice prodotto di due identici stati puri, ma ciascun fermione dovrebbe essere considerato come un elettrone nello stesso stato misto.

Per ottenere da PIP la validità di PIIM per i fermioni, occorre assumere il *realismo delle proprietà quantistiche* (RPQ):

¹⁹¹ Cfr. Massimi (2001).

Data una qualsiasi distribuzione di probabilità per l'osservabile O relativa alla particella I , a O , ancor prima della misurazione, corrisponde una proprietà di I .

Tuttavia questo tipo di realismo porta come conseguenze ontologiche la non-località quantistica, cioè correlazioni statistiche a distanza, e la contestualità (una proprietà F è contestuale rispetto a G e H se la relativa osservabile, in due sistemi preparati nello stesso modo, assume diversi valori a seconda che sia misurata assieme a G oppure assieme a H). Proprio per questi effetti ontologici fortemente contro-intuitivi, molti assumono l'*eigenvalue-eigenvector link* (EEL)¹⁹², che consente l'attribuzione di una proprietà a una particella, *solo* se la particella, ancor prima della misura, ha una distribuzione probabilistica della relativa osservabile del tutto certa, cioè l'osservabile ha di sicuro un certo valore, che sembra piuttosto ragionevole. EEL permette quindi di quantificare su proprietà categoriche (cioè non probabilistiche), prescindendo quindi da probabilità, misure, ecc.

Come si è detto poc'anzi, Muller e Saunders (2008) e successivamente Muller e Seevinck (2009) hanno suggerito che i fermioni sono fisicamente debolmente discernibili (*weak discernibility*). In un certo senso, quindi, si potrebbe evitare di appellarsi a RPQ e a EEL e sostituire il PIIM semplicemente con il PIIM_R: in effetti gli oggetti quantistici hanno relazioni irreflessive diverse, per cui il PIIM_R non è violato. Ad esempio due fermioni nello stato di singoletto hanno la proprietà relazionale irreflessiva "avere lo spin opposto nella direzione α ", per cui sarebbero discernibili oltre che non identici, rispettando il principio di identità degli indiscernibili metodologico e debole. Dalla discernibilità debole Muller e

¹⁹² Cfr. §2 di questa tesi.

Seevinck inoltre hanno esteso la discernibilità a tutte le particelle quantistiche anche ai bosoni. Tuttavia sembra che non ci si è veramente liberati da RPQ, anzi questi argomenti sono validi solo se si assume RPQ, altrimenti la relazione fra i due fermioni è la stessa per entrambi e allora si è da capo.

Si è quindi in presenza con ogni probabilità di un caso di relatività ontologica cioè la tesi secondo cui “qualsiasi affermazione su come è strutturato il mondo ha un elemento convenzionale dovuto al linguaggio che si utilizza per esprimerla”¹⁹³. Per contro, si ha una forte sensazione che la meccanica quantistica introduca qualcosa di metafisicamente ulteriore rispetto a proprietà e relazioni. Emergono infatti due posizioni importanti:

- 1) Il Primitivismo, secondo il quale l’individualità degli oggetti è qualcosa che va al di là delle proprietà e relazioni che essi possiedono e intrattengono¹⁹⁴

- 2) Il Riduzionismo, secondo il quale l’individualità degli oggetti è data dalle proprietà e relazioni che essi possiedono e intrattengono.

Il punto di vista scientificamente più diffuso è di tipo riduzionista ma difficilmente si può considerare la domanda se sia vero il riduzionismo o il primitivismo come una questione alla quale può essere data risposta.

¹⁹³ Ludwig Wittgenstein (1967) sottolinea come il linguaggio ha permesso all’essere umano di pensare in termini di cose. Potrebbe proprio essere questo il motivo per cui gli esseri umani suddividono il mondo in oggetti individuali, secondo una visione di natura logocentrica. Nel pensiero filosofico di Jacques Derrida, il linguaggio sostituisce un insieme di segni convenzionali ai nostri pensieri. Cfr. Castellani (1998a).

¹⁹⁴ Cfr. Morganti (2013).

Metodologicamente si è necessariamente riduzionisti, ma non è chiaro sapere fino in fondo come sia fatto il mondo, cioè se esista qualcosa oltre alle proprietà e le relazioni.

In prima approssimazione, tuttavia, la meccanica quantistica sembra mostrare che vale il primitivismo.

Secondo Teller (1998) la visione del mondo composto di individuali che possiedono proprietà non relazionali e da relazioni che sono riducibili a proprietà non relazionali, è il *particolarismo*. Le differenze tra meccanica classica e meccanica quantistica sono dovute al fatto che il particolarismo è vero per gli oggetti della prima ma non per quelli della seconda. Nella meccanica quantistica sembra che debba essere accettata la visione dell'olismo relazionale, cioè una visione secondo la quale certe proprietà del sistema nella sua interezza non sono relazioni riducibili alle sue parti, per dirla in breve il tutto non è uguale alla somma delle parti che lo compongono. Teller definisce queste relazioni col termine *inerenti* e considera l'olismo relazionale in virtù della non fattorizzabilità degli stati *entangled*. Morganti (2013) estende questo olismo anche agli stati non *entangled*. Morganti (2013) suggerisce che quando si ha a che fare con un qualsiasi sistema quantistico S di n particelle esiste un unico individuo S non riducibile dotato di una sola proprietà monadica, identificabile con il suo stato, trattando gli stati non *entangled* esattamente come quelli *entangled* con i seguenti vantaggi:

1. Pur muovendosi in una prospettiva primitivista non si introducono strane *haecceitates* per distinguere le particelle indiscernibili.

2. Non solo non ci sono relazioni non sopravvenienti, ma in questa soluzione ontologica non ci sono relazioni in generale.
3. Questa soluzione si discosta pochissimo dalla nostra percezione.
4. Essa spiega perché vale PIP. Non ci sono singole particelle da permutare.
5. Essa spiega perché vale ISS. Non c'è nessuna identità di stati simmetrici, perché di nuovo non si possono scambiare le particelle.
6. Fornisce identità alle particelle quantistiche attraverso una *countability* primitivistica¹⁹⁵.

Questa soluzione comporta però la violazione del PIIM (ma non PIIM_R). O meglio essa è una “timida” violazione perché rispetto alla violazione di PIIM cerca di limitare al massimo i danni, evitando di introdurre delle *haecceitates* metafisicamente molto discutibili, ma appoggiandosi a un'istanza fortemente olistica. Morganti (2009, 2013) assume implicitamente il RPQ cioè deve andare oltre l'EEL, dando realismo alle proprietà quantistiche anche quando sono in sovrapposizione, cioè non hanno probabilità 1 di avere un certo valore.”

¹⁹⁵ Cfr. Rossanese (2015).

VII. IN VIAGGIO LUNGO L'AZZURRO FIUME DELLA DISCERNIBILITA' QUANTISTICA: ROTTA VERSO UNA NUOVA *WEAK DISCERNIBILITY*.

Il risultato delle nostre analisi si può così riassumere:

$(\text{MECCANICA QUANTISTICA} \wedge \text{RPQ}) \rightarrow \neg \text{PIIM}$

Morganti (2013) trova un realismo olistico mantenendo la violazione del PIIM. Si potrebbe invece mantenere la meccanica quantistica, perché è la migliore teoria della fisica microscopica e invece “buttare a mare” RPQ, cioè di fatto attenersi a EEL, che è la vecchia posizione verificazionista di Reichenbach. Con una differenza, però, rispetto a Reichenbach: è vero che per alcune teorie scientifiche il realismo scientifico moderato valga, non però per la meccanica quantistica. In questo modo PIIM sarebbe valido. Un'altra soluzione, più radicale, sarebbe quella di rifiutare o meglio abbandonare la meccanica quantistica ma per far questo sarebbe necessaria una nuova rivoluzione scientifica.

I principali criteri di discernibilità-individualità che sono stati finora incontrati si possono schematizzare in un grafico che rappresenta metaforicamente un fiume su cui naviga la nave della discernibilità quantistica. Nello specifico si mostreranno due grafici: Il primo rappresenta (Figura 8) una proiezione sulla direzione della discernibilità dei criteri fin ora incontrati ed è il seguente:

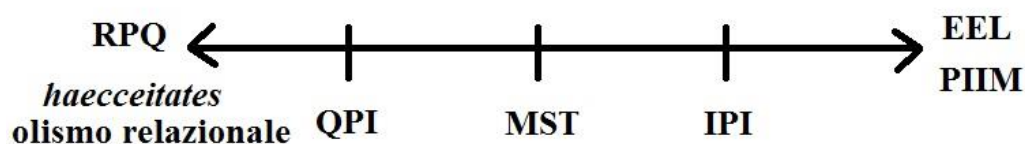


Figura 8: Rappresentazione grafica dei principali criteri di discernibilità analizzati

Se si sostiene il realismo delle proprietà scientifiche allora ci si sposta verso sinistra dove sono le soluzioni olistiche di Morganti e Teller e anche soluzioni metafisiche (come le *haecceitates*) individuate da Ladyman ed altri primitivisti, se invece si accetta l'*eigenvalue-eigenstate link* allora ci si sposta a destra dove vi è PIIM. Se si sostiene SP allora si naviga nel mezzo, dove sono le soluzioni di natura più o meno fisica, le tesi di Muller e Seevinck cioè la discernibilità debole, il cui esempio più generale è rappresentato ontologicamente da PIIM_R. Tra i due estremi si trovano i principi di Jaeger: IPI, se si sostiene una discernibilità di tipo spazio-temporale; QPI, se si abbandona la via spazio temporale e si abbracciano considerazioni legate agli operatori statistici. Questi ultimi due criteri nelle situazioni *entangled* forniscono individualità (metafisicamente parlando) non alle singole componenti bensì all'intero stato, per cui lo stato è discernibile (logicamente parlando) solo nella sua interezza. Risulterà molto più chiara e completa la Figura 9 in cui si analizzano qualitativamente le posizioni fino ad ora incontrate, scindendo il concetto ontologico di individualità da quello metodologico di discernibilità:

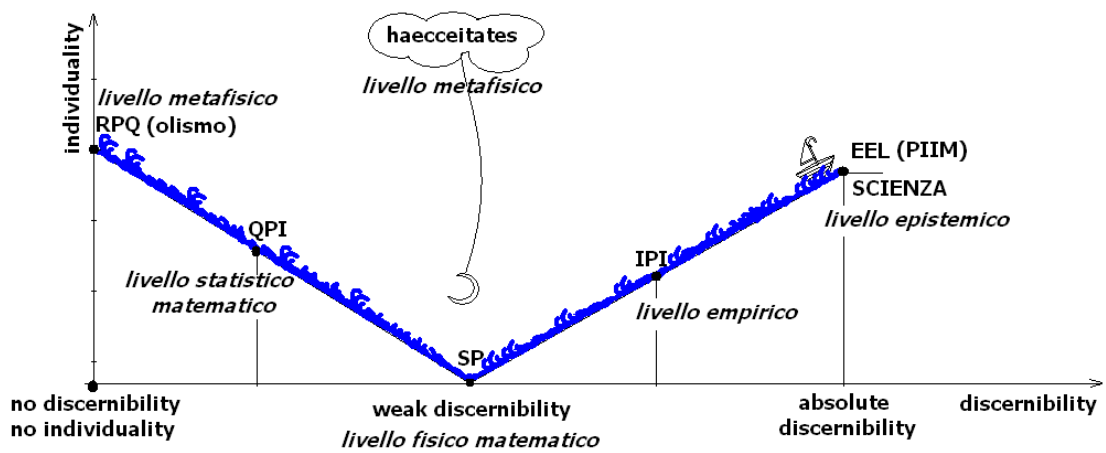


Figura 9: Principali criteri e posizioni di individualità e discernibilità lungo l’“azzurro” fiume quantistico.

Se si abbandona la nave della discernibilità e si precipita verso l’origine (*no indiscernibility, no individuality*) si trovano le tesi dei sostenitori della non individualità, scendendo in una terra ben più oscura e buia di quella “terra dell’anonimato” di Della Chiara e Toraldo di Francia, perché è una terra in cui nemmeno la discernibilità è data: è la terra di Margenau (1944), Weyl (1949), Schrödinger (1952), Cortes (1976), Barnette (1978), French e Redhead (1989), Giuntini e Mittelstaedt (1989), French (1989a, 1989b, 1998, 2006), Redhead e Teller (1992), Butterfield (1993), Teller (1998), Mittelstaedt e Castellani (2000), Massimi (2001), French e Rickles (2003), Huggett (2003), French e Krause (2006), che sono stati affrontati e obiettati da Muller e Seevinck (2009) in quanto, a loro parere, i sostenitori della indiscernibilità quantistica non hanno indagato le proprietà relazionali categoriche (cioè non probabilistiche) delle particelle elementari. Alle coordinate (*weak discernibility, no individuality*) si trova la discernibilità debole, infatti si collocano Muller e Seevinck (2009), ma anche Muller e Saunders (2008), Muller e Saunders (2006), Saunders (2006), van Fraassen (1991), PIIM_R che, come già affermato, rappresenta una forma

embrionale di *weak discernibility*, e una nuova proposta di discernibilità debole (Macrelli e Fano, in preparazione) che sarà analizzata nella prossima sezione di questa tesi.

Se invece si accetta di restare a bordo della nave della discernibilità allora si può scegliere di navigare verso le acque tranquille dell'EEL (*absolute discernibility, individuality*), se invece si ama il rischio allora si può scegliere di viaggiare verso le acque ondose della regione RPQ (*no discernibility, individuality*) che convergono verso l'olismo. L'agitazione di queste acque è data dalle correnti della contestualità e della non località che scorrono al di sotto di esse. Tuttavia se si vuole essere fortemente realisti forse vi è un modo di placare e dominare questa agitazione¹⁹⁶. L'olismo inoltre porta implicitamente ad assumere che gli stati quantistici siano ontici: questo implica che una soluzione olistica del problema delle individualità in meccanica quantistica, debba scontrarsi con il problema della misurazione. Infatti se la sovrapposizione è uno stato ontico, inevitabilmente si presenta il problema della misurazione¹⁹⁷. Da osservare infine quel “gancio” sospeso tra le nuvole rappresentato dalle *haecceitates*, difficili da comprendere in maniera concreta ma che permettono di agganciare la nave e fornire individualità alle particelle quantistiche. Su quelle nuvole vi sono i vari sostenitori di questa soluzione primitivistica del problema dell'individualità-discernibilità¹⁹⁸.

Forse una speculazione qualitativa e non semplicemente di natura formale in ambito fisico può fornire una rotta sicura da seguire in questo mare: l'autore di questa tesi è convinto, come sosteneva Fermi, che la struttura della meccanica

¹⁹⁶ Nelle prossime sezioni sarà mostrato un approccio teorico che preserva la località in meccanica quantistica.

¹⁹⁷ Cfr. Calosi, Fano, Graziani e Tarozzi (unpublished).

¹⁹⁸ Cfr. Ladyman (2007).

quantistica abbia una qualche problematica legata al suo formalismo (si pensi al problema della misurazione che è stato affrontato precedentemente). Una rotta sicura è quella che porta verso una discernibilità quantistica “debole” che riesce a risolvere alcune questioni e critiche sollevate dalle tesi di Muller, Seevinck e Saunders.

Si illustrerà ora nella maniera più esauriente e chiara possibile la storia e lo sviluppo della discernibilità debole, della *weak discernibility* (WD). Il pioniere in questo campo è certamente Simon Saunders (2003, 2006) che ha definito l'identità in meccanica quantistica non come un fatto primitivo ma sulla base di predicati qualitativi. Egli ha dimostrato che la WD, interpretata in maniera quineana, può essere applicata ai fermioni. In sostanza il fatto che due fermioni hanno spin opposto è sufficiente a garantire la WD. Nulla invece può essere utilizzato per concludere la discernibilità debole per i bosoni.

Il secondo sostenitore della WD è stato Fred A. Muller che ha risolto le critiche mosse a Saunders sul fatto che le particelle nell'interpretazione standard della meccanica quantistica non possiedono individualmente un valore preciso dello spin. Muller e Saunders (2008) hanno determinato la distinguibilità dei fermioni mediante l'uso delle proprietà categoriche, cioè mediante proprietà non probabilistiche. Ci si addenterà ora nei dettagli e si analizzeranno le successive formulazioni della WD con le relative critiche.

**1. Principali e recenti proposte di WD: punti forti, punti deboli.
meccanica quantistica¹⁹⁹**

Secondo Muller e Saunders (2008) è possibile discernere in forma debole mediante l'uso di una relazione formata da una famiglia di operatori chiamati "proiettori ortogonali".

Sia P_i una famiglia di proiettori ortogonali, cioè tali che $\sum_{i=1}^n P_i = I$, $P_i P_j = \delta_{i,j} P_i$.

Si definisce l'operatore per la particella a come $P_{ij}^{(a)} = P_j - P_i$ e la relazione

$$R_\lambda(a,b) \Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^n P_{ij}^{(a)} P_{ij}^{(b)} |\psi\rangle = \lambda |\psi\rangle. \quad (7.1)$$

Si può dimostrare che la relazione (7.1) $R_\lambda(a,b)$ discerne le particelle a e b debolmente in quanto si può decomporre in due casi distinti: nel caso in cui a e b siano la stessa particella allora

$$\sum_{i,j=1}^n P_{ij}^{(a)} P_{ij}^{(b)} |\psi\rangle = \sum_{i,j=1}^n P_{ij}^{(a)} P_{ij}^{(a)} |\psi\rangle = \sum_{i,j=1}^n (P_{ij}^{(a)})^2 \otimes I |\psi\rangle = 2(n-1)I \otimes I |\psi\rangle = 2(n-1)|\psi\rangle^{200},$$

nel caso in cui le particelle siano distinte allora

¹⁹⁹ La trattazione seguita in questo paragrafo, nel suo formalismo matematico e nelle notazioni matematico-operatoriali, fa principalmente riferimento allo splendido lavoro di Bigaj (2015).

²⁰⁰ Tutte queste relazioni si possono verificare in maniera semplice ponendo con $P_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

con $P_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, infine $P_{ij} = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrice di spin di Pauli diretto lungo l'asse z .

Cfr. Saunders (2003) e Bigaj (2015).

$$\sum_{i,j=1}^n P_{ij}^{(a)} P_{ij}^{(b)} |\psi\rangle = \sum_{i,j=1}^n P_{ij}^{(b)} P_{ij}^{(a)} |\psi\rangle = 2 \left(\sum_{i=1}^n P_i \otimes P_i - I \otimes I \right) |\psi\rangle .$$

Se le particelle sono dei fermioni, cioè $|\psi\rangle = |\psi_-\rangle \in H^-$ (H^- è il sottospazio ortogonale dei fermioni),

$$\text{allora si ha } \sum_{i=1}^n P_i \otimes P_i = 0, \text{ quindi } \sum_{i,j=1}^n P_{ij}^{(a)} P_{ij}^{(b)} |\psi_-\rangle = \sum_{i,j=1}^n P_{ij}^{(b)} P_{ij}^{(a)} |\psi_-\rangle = -2 |\psi_-\rangle .$$

La relazione (1) è soddisfatta per l'autovalore $\lambda = -2$, nel caso in cui le particelle non

siano la stessa, infatti $\sum_{i,j=1}^n P_{ij}^{(a)} P_{ij}^{(a)} |\psi\rangle = 2(n-1) |\psi\rangle \neq -2 |\psi\rangle, \forall n \in N$. Per cui

$R_{-2}(a,b)$ permette di discriminare debolmente i fermioni. Si può così riassumere seguendo Huggett e Norton (2014):

$$R_{-2}(a,b) \Leftrightarrow (a = b \wedge 2(n-1) |\psi\rangle = -2 |\psi\rangle) \vee (a \neq b \wedge -2 |\psi\rangle = -2 |\psi\rangle)$$

oppure togliendo $|\psi\rangle$,

$$R_{-2}(a,b) \Leftrightarrow (a = b \wedge 2(n-1) = -2) \vee (a \neq b \wedge -2 = -2) .$$

Le stesse considerazioni non possono essere effettuate per i bosoni, come già affermato. Chiaramente come notano Huggett e Norton (2014) le relazioni scritte senza $|\psi\rangle$ perderebbero di significato fisico e resterebbero interpretabili solo come relazioni matematiche, come nota Bigaj (2015) sarebbe necessario quindi distinguere a priori tra $a = b$ e $a \neq b$ per decidere quale operatore scegliere, per cui questo discernimento è circolare.²⁰¹

Poco dopo il tentativo di Muller e Saunders, Muller e Seevinck (2009) si sono avvalsi dell'analisi degli autovalori di particolari operatori relativi a certe osservabili, raggiungendo lo scopo di avere WD per ogni sorta di particella

²⁰¹ Cfr. Bigaj (2015). Tra i filosofi non tutti sono d'accordo su questo punto: è evidente che si hanno due nomi, a e b , di cui si ignora se parlino della stessa particella o di differenti particelle, tuttavia gli operatori nei casi in cui le particelle siano diverse o la medesima, non sono distinti bensì sono lo stesso operatore che agisce in modi diversi se si assume $a=b$ o il caso opposto.

microscopica (bosoni compresi). Muller e Seevinck hanno determinato un modo per discriminare le particelle quantistiche dotate di spin in spazi di Hilbert di dimensione finita e per quelle prive di spin in spazi di Hilbert di dimensioni infinite, mediante una relazione contemplata dai fondamenti della meccanica quantistica: per le particelle prive di spin (ma si potrebbe anche supporre per quelle dotate di spin) si considerano rispettivamente per la particella a l'operatore posizione $P^{(a)}$ e per la particella b l'operatore impulso $Q^{(b)}$. Si definisce la relazione

$$M_\lambda(a,b) \Leftrightarrow [P^{(a)}, Q^{(b)}]|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle, \text{ con } \lambda \neq 0. \quad (7.2)$$

La relazione (7.2) $M_\lambda(a,b)$ vale se le particelle sono la medesima, cioè $a=b$ infatti $M_\lambda(a,b) \Leftrightarrow [P^{(a)}, Q^{(b)}]|\psi\rangle = [P^{(a)}, Q^{(a)}]|\psi\rangle = -i\hbar I \otimes I|\psi\rangle = -i\hbar|\psi\rangle$. Se $a \neq b$, $M_\lambda(a,b)$ non vale infatti $M_\lambda(a,b) \Leftrightarrow [P^{(a)}, Q^{(b)}]|\psi\rangle = [P^{(b)}, Q^{(a)}]|\psi\rangle = 0|\psi\rangle = 0$. Quindi $M_\lambda(a,b)$ permette di discernere tra le particelle a e b quando non è verificata. Come già affermato, tale relazione vale per ogni particella quantistica. Tuttavia, come notano Huggett e Norton (2014), la relazione perde di significato fisico in quanto può essere riscritta in questo modo:

$$M_\lambda(a,b) \Leftrightarrow (a=b \wedge -i\hbar \neq 0) \vee (a \neq b \wedge 0=0),$$

in cui $|\psi\rangle$ è omessa. Anche in questo caso si avrebbe una relazione interpretabile solo matematicamente.

Per particelle dotate di spin, vi è una relazione di discernibilità alternativa. La relazione è la seguente: sia S l'operatore spin in particolare per la particella a si ha $S^{(a)} = S \otimes I$, per la particella b invece $S^{(b)} = I \otimes S$, si definisce

$$R(a,b) \Leftrightarrow |S^{(a)} + S^{(b)}|^2 |\psi\rangle = 4s(s+1)\hbar^2 |\psi\rangle. \quad (7.3)$$

Tale relazione è verificata se le particelle sono identiche in quanto $S^{(a)} = S^{(b)}$ implica $|2S^{(a)}|^2 |\psi\rangle = 4s(s+1)\hbar^2 |\psi\rangle$. La discernibilità debole segue perché se a e b sono distinte $|S^{(a)} + S^{(b)}|^2 |\psi\rangle = 2s(s+1)\hbar^2 I \otimes I + 2S^{(a)} \otimes S^{(b)} |\psi\rangle$ o meglio quando sono distinte si ha $|S^{(a)} + S^{(b)}|^2 |\psi\rangle \leq 2s(s+1)\hbar^2 |\psi\rangle < 4s(s+1)\hbar^2 |\psi\rangle$.

Per le relazioni (7.1)-(7.2), basta assumere solamente che essere in un autostato implica possedere il corrispondente autovalore e che un osservabile non può possedere contemporaneamente due distinti autovalori. Invece per la relazione (7.3), bisogna assumere RPQ perché le particelle per cui non vale S non si trovano di solito in un autostato definito dell'osservabile relazionata. Inoltre, come osservano Huggett e Norton (2014), l'operatore S agisce su stati non simmetrici in maniera differente da quelli simmetrici.

Quindi Muller, Saunders e Seevinck non sono esenti da critiche. Bigaj (2015) solleva la questione secondo cui la WD proposta da Muller, Saunders, Seevinck pecca di circolarità, in quanto sarebbe necessario conoscere a priori se le particelle sono o meno la stessa per scegliere quale operatore applicare nella WD²⁰².

²⁰² Come già affermato, non tutta la comunità dei filosofi concorda su questa circolarità.

Delle obiezioni “pacate” sono state sollevate da Adam Caulton (2013), il quale non supporta la WD²⁰³ e, come si è già osservato nel corpo della trattazione, da Nick Huggett e Josh Norton (2014) i quali hanno trovato nuove relazioni che a loro parere garantirebbero una miglior discernibilità debole rispetto a quelle di Muller e Seevinck. Huggett e Norton (2014) hanno proposto di considerare due operatori Hermitiani A e B , ciascuno referente ad una proprietà specifica differente, rispettivamente A corrisponde ad una proprietà della particella a , B ad una proprietà della particella b .

Siano date n particelle dello stesso tipo, allora è possibile definire la seguente relazione e i seguenti operatori:

$$N_\lambda(a,b) \Leftrightarrow \left(a = b \wedge \frac{1}{n} \sum_{p \in P} (AB \otimes I \otimes I \otimes \dots \otimes I) |\psi\rangle = \lambda |\psi\rangle \right) \\ \vee \left(a \neq b \wedge \frac{1}{D_{n,2}} \sum_{p \in P} (A \otimes B \otimes I \otimes \dots \otimes I) = \lambda |\psi\rangle \right) \quad (7.4)$$

Questa relazione, però, è valida solo per i fermioni e non può essere estesa ai bosoni.

Anche questa proposta è criticabile. Come nota Bigaj (2015) i due operatori nella relazione sono differenti e agiscono in maniera differente a seconda che le particelle a e b siano uguali o diverse. Bisognerebbe quindi conoscere a priori se le due particelle sono distinguibili o meno, ricadendo quindi nel problema della circolarità per la relazione di discernibilità²⁰⁴.

²⁰³ La WD si scontra anche con le già affermatesi posizioni di Margenau (1944), French e Redhead (1988), Giuntini e Mittelstaedt (1989), Redhead e Teller (1992) e Butterfield (1993).

²⁰⁴ Coloro che rifiutano la circolarità di questo tipo di relazioni spesso adducono il motivo che nella relazione vi è la disgiunzione inclusiva, interpretando l'operatore come unico. Non sarebbe

Caulton (2013) ha una diversa strategia. Introduce l'operatore varianza di una quantità A , $\Delta_A^2 = \frac{1}{4}(A \otimes I - I \otimes A)^2$, e la relazione

$$C(a,b) \Leftrightarrow (a \neq b \wedge \Delta_A^2|\psi\rangle \neq 0) \vee (a = b \wedge 0|\psi\rangle \neq 0) \quad (7.5)$$

che discerne le particelle a e b sulla base delle anticorrelazioni tra autostati, che per una singola particella è pari a 0. Ma anche in questo caso come nota Bigaj (2015), le due condizioni fisiche non sono le stesse: cambiano gli operatori e quindi si ricade nella circolarità.

Critiche contro la discernibilità quantistica debole in generale molto più aspre si possono trovare in Hawley (2006, 2009), French e Krause (2006), van Fraassen e Peschard (2008), Dieks e Versteegh (2008), Ladyman e Bigaj (2010).

2. Critica ai fondamenti della WD

Dunque è la parola fine per la WD? Sono state espresse critiche anche alle due condizioni di ammissibilità fisica di Muller e Saunders (2008) cui rispondono, o per meglio dire dovrebbero rispondere, le relazioni di WD. Le condizioni di ammissibilità sono l'invarianza secondo permutazione e l'assunzione di significato fisico. La prima afferma che le relazioni sono definite mediante stati

dunque necessario apriori distinguere se a e b si riferiscono alla stessa particella o a diverse particelle. È parere dell'autore di questa tesi che la circolarità possa essere respinta considerando sia a che b semplicemente dei simboli e non dei "pezzi" di mondo.

fisici e operatori che corrispondono a grandezze fisiche, la seconda afferma che le relazioni devono restare inalterate sotto permutazione degli elementi su cui la relazione opera. Nel caso di due particelle ciò significa che la relazione è simmetrica. Per soddisfare questi principi Muller e Saunders affermano che non si possono usare predicati nominali o concetti puramente matematici come essere membro di un insieme, cioè nessuna etichetta (*label*) permette di discernere fisicamente. Secondo Bigaj (2015) questo è troppo poco, infatti così si potrebbe accettare qualsiasi operatore autoaggiunto nelle relazioni di discernibilità.

L'invarianza per permutazioni, invece, richiede solo che l'operatore e gli stati analizzati nella WD siano simmetrici (antisimmetrici).

Caulton (2013) e Huggett e Norton (2014) attaccano il significato fisico delle relazioni di Muller e Saunders e Muller e Seevinck, in particolare l'uso non appropriato dell'identità, in quanto sarebbe come attribuire alla trivialità qualcosa di fisicamente significativo. Secondo Huggett e Norton (2014) è fondamentale che non solo la relazione ma anche l'operatore sia invariante rispetto alle

permutazioni: l'operatore $\sum_{i,j=1}^n P_{ij}^{(a)} P_{ij}^{(b)}$ violerebbe l'invarianza di permutazione se

il numero di particelle fosse maggiore di 3, quindi in generale tale operatore agirebbe in maniera non simmetrica sullo spazio dei bosoni H^+ . Di più, secondo Caulton (2013) anche le componenti degli operatori dovrebbero rispettare l'invarianza per permutazione. Per contro Bigaj (2015) afferma che le richieste di Caulton (2013) sono "estreme" in quanto escluderebbero operatori simmetrici di estrema rilevanza fisica in meccanica quantistica come quelli della forma

$\frac{1}{2}(A \otimes I + I \otimes A)$, con $A \otimes I$ e $I \otimes A$ componenti operatoriali non simmetriche.

Secondo Bigaj (2015) inoltre la trivialità dell'identità è un concetto che nella letteratura di Huggett e Norton e Caulton è confuso con quello del significato fisico: quel che sarebbe corretto affermare è che se la relazione R , su cui si basa la WD, contiene l'identità numerica ordinale (cioè la *countability*) su cui si è precedentemente discusso, come componente essenziale, allora la discernibilità diventa triviale e tutta la struttura è circolare.

Spesso, inoltre, le relazioni di discernibilità sono date come due enunciati disgiunti, legati da differenti operatori, e come nota Bigaj (2015) non è possibile scegliere l'operatore con cui operare se a priori non si è stabilito se le due particelle siano distinguibili o non distinguibili: si dovrebbe avere lo stesso operatore o per lo meno la stessa operazione sia nel caso in cui le particelle siano a priori diverse o siano uguali²⁰⁵. Ad esempio una corretta relazione per avere WD sarebbe $R(a,b) \Leftrightarrow (a=b \wedge R(a,a)) \vee (a \neq b \wedge R(a,b))$.

Giustamente Bigaj (2015) osserva che il problema delle formulazioni della WD è insito nel formalismo stesso della meccanica quantistica, poiché gli operatori si comportano diversamente se le particelle sono diverse o uguali.

²⁰⁵ Come nota Bigaj (2015) le relazioni di discernibilità di tipo spaziale alla Max Black sarebbero accettabili. La distinzione tra due particelle a e b deriverebbe dal fatto qualitativo che le relazioni di tipo spaziale fornirebbero un valore diverso da 0 se le particelle sono tra loro distinguibili. Tuttavia in questi casi si dovrebbe assumere una concezione aprioristica dello spazio, per lo meno non strutturalista. La meccanica quantistica pare invece suggerirci il contrario.

3. La proposta di Bigaj e gli spazi di Fock

L'idea di Bigaj è quella di lavorare con gli spazi di Fock, attraverso gli *occupation number* e definire una formula che opera sulle particelle e il cui valore restituisce come risposta se esse sono diverse o la medesima. Ad esempio definendo l'operatore $\tau = \sum_i t_i N_i$ con t_i autovalore dell'osservabile T associato all'autovettore $|T_i\rangle$, l'operatore numero $N_i = a_i^\dagger a_i$ con a_i^\dagger e a_i rispettivamente operatori di creazione e di distruzione, un vettore $|n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle$ con n_i numero di particelle che occupano lo stato $|T_i\rangle$, si potrebbe avere che per $a=b$ la distribuzione del vettore numero di particelle è $|0, 0, \dots, 1, \dots\rangle$ e se $a \neq b$ $|1, 0, \dots, 1, \dots\rangle$ e per tali distribuzioni ottenere valori differenti sull'azione dell'operatore $\tau = \sum_i t_i N_i$. Come è noto le uniche frasi che hanno significato fisico in meccanica quantistica sono quelle che sono formulate mediante operatori simmetrici o resi tali dal processo di simmetrizzazione. Secondo Bigaj (2015) è possibile percorrere la strada della assoluta discernibilità anche in meccanica quantistica. Infatti nonostante frasi del tipo “la particella a possiede la proprietà A ” sia in chiara violazione delle regole di invarianza per permutazione, tuttavia è possibile avere enunciati in accordo con le regole della meccanica quantistica del tipo “ci sono oggetti a e b tali che a possiede la proprietà A mentre b non la

possiede”²⁰⁶. Le speranze per l’assoluta discernibilità tra due particelle a e b si traducono nel seguente operatore $T: A \otimes (I - A) + (I - A) \otimes A$. L’unica pecca è che solo alcuni stati sono autovettori di questo operatore. Per cui i fermioni e i bosoni sarebbero discernibili assolutamente solo in questi stati²⁰⁷. Questo riabilita seppur in parte la versione di PII nella sua forma forte cioè quella dell’assoluta discernibilità. Negli stati non discernibili (ad esempio quelli *entangled*) per difendere la validità di PII, si potrebbe argomentare alla Friebe (2014) e alla Morganti (2013) dicendo che non ci sono particelle numericamente distinte ma un tutt’uno indiscernibile.

4. Una nuova WD derivante dalla seconda quantizzazione

La “seconda quantizzazione” della meccanica quantistica è la formulazione matematica adatta a descrivere sistemi ad N particelle²⁰⁸. Lo spazio di Hilbert per un sistema ad N particelle è dato dal prodotto tensoriale $H(N) = H_1 \otimes H_2 \dots \otimes H_N$ degli spazi H_i di Hilbert associati alla particella i . Lo spazio $H(N)$ è generato dalla combinazione lineare di vettori fattorizzati $|v_1, v_2, \dots, v_N\rangle = |v_1\rangle \otimes |v_2\rangle \otimes \dots \otimes |v_N\rangle$. Se le particelle sono identiche allora si può

²⁰⁶ Bigaj (2015) sostiene che l’assoluta discernibilità deve guardarsi bene dal discernere le particelle mediante la rappresentazione matematica degli indici delle particelle come nota anche Dieks e Lubberdink (2011) e Friebe (2014).

²⁰⁷ Cfr. Bigaj (2015).

²⁰⁸ Si guardi al riguardo Molinari (2013) e Moretti (2010). La prima quantizzazione si ottiene dalla rappresentazione delle quantità fisiche con gli operatori non commutabili, nella seconda quantizzazione si trattano le funzioni di stato della meccanica quantistica come se fossero una descrizione di un campo fisico. Cfr. Teller (1995).

scrivere $H(N) = \otimes_N H$, cioè gli spazi H_i di Hilbert sono N -plicati dello stesso spazio H . Su questo spazio si possono definire i seguenti operatori:

1) L'operatore permutazione $P_p |v_1, v_2, \dots, v_N\rangle = |v_{p1}, v_{p2}, \dots, v_{pN}\rangle$ con una sottoclasse data dagli operatori di scambio $P_{ij} |v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_N\rangle = |v_1, v_2, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_N\rangle$.

2) Gli operatori di simmetrizzazione $SM_N^+ = \frac{1}{N!} \sum_p (+1)^p P_p$ e antisimmetrizzazione $SM_N^- = \frac{1}{N!} \sum_p (-1)^p P_p$, dove $(+1)^p = 1$ e $(-1)^p = \pm 1$ se p è una permutazione pari il segno è positivo altrimenti se è dispari è negativo²⁰⁹.

Con $H^+(N) = SM_N^+ H(N)$ e $H^-(N) = SM_N^- H(N)$ si denotano i due spazi ortogonali rispettivamente dei bosoni e dei fermioni.

Dati due vettori fattorizzati $|v_1, v_2, \dots, v_N\rangle$ e $|w_1, w_2, \dots, w_N\rangle$, il prodotto interno tra $SM_N^\pm |v_1, v_2, \dots, v_N\rangle$, $SM_N^\pm |w_1, w_2, \dots, w_N\rangle$ proiezioni di tali vettori sugli spazi simmetrici (antisimmetrici) porta al seguente risultato:

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_2, \dots, v_N | (SM_N^\pm)^2 | w_1, w_2, \dots, w_N \rangle &= \frac{1}{N!} \sum_p (\pm 1)^p \langle v_1, v_2, \dots, v_N | P_p | w_1, w_2, \dots, w_N \rangle = \\ &= \frac{1}{N!} \sum_p (\pm 1)^p \langle v_1 | w_1 \rangle \langle v_2 | w_2 \rangle \dots \langle v_N | w_N \rangle = \end{aligned}$$

²⁰⁹ Con permutazione pari si intende una permutazione che si può decomporre in un numero pari di scambi, altrimenti è dispari.

$$= \frac{1}{N!} D_{\pm} \begin{bmatrix} \langle v_1 | w_1 \rangle & \langle v_1 | w_2 \rangle & \dots & \langle v_1 | w_N \rangle \\ \langle v_2 | w_1 \rangle & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \langle v_N | w_1 \rangle & \langle v_N | w_2 \rangle & \dots & \langle v_N | w_N \rangle \end{bmatrix} \quad (7.6).$$

L'azione D_{\pm} sulla matrice (7.6) prende il nome di determinante/permanente di Slater, dove D_- indica il determinante, D_+ indica il permanente della matrice, cioè il determinante ottenuto omettendo i segni ± 1 nello sviluppo secondo Laplace.

Sotto opportune condizioni matematiche (non troppo complesse) che riguardano l'introduzione di vettori $|v_i\rangle$ nel *bra* in (7.6), della forma $|v_i\rangle = \left| \begin{pmatrix} x_i \\ m_i \end{pmatrix} \right\rangle$, dove x e m rappresentano le variabili di posizione e massa per particella, e con la relativa ortonormalizzazione di ciascun elemento risultante all'interno della matrice in (7.6), è possibile leggere il determinante di Slater come una rappresentazione di uno stato normalizzato per un sistema di N fermioni²¹⁰. Questa matrice ha quindi un significato fisico specifico.

Se i due vettori $|v_1, v_2, \dots, v_N\rangle$ e $|w_1, w_2, \dots, w_N\rangle$ coincidono allora la matrice prende il nome di matrice di Gram. Essa è una matrice hermitiana ed ha autovalori non negativi, inoltre ha determinante nullo se e solo se i vettori $|v_i\rangle$ sono linearmente dipendenti.

Lo spazio delle N particelle può essere “immerso” nello spazio di Fock²¹¹

$$F = H_0 \oplus H_1 \dots \oplus H_N \oplus \dots$$

²¹⁰ Cfr. Molinari (2013).

²¹¹ Si ricordi che gli spazi di Fock riescono a eludere il problema del labelling cioè degli indici che vengono attribuiti alle particelle. È logicamente possibile che le entità corrispondenti gli *occupation numbers* siano degli individui grazie a identità primitive, tuttavia non è necessario assumere questa individualità.

Dove H_i corrisponde allo spazio con i particelle.

Lo spazio F_+ è lo spazio che si ottiene proiettando ogni spazio H_i sul sottospazio simmetrico H_N^+ , lo spazio F_- è lo spazio che si ottiene proiettando ogni spazio H_i sul sottospazio simmetrico H_N^- . Una base degli spazi F_{\pm} sono i vettori *occupation number* $|n_1, n_2, \dots, n_N, \dots\rangle$ dove n_i indica quante volte il vettore $|v_i\rangle$ compare nella sequenza $|v_1, v_2, \dots, v_N\rangle$ ossia quante particelle appartengono allo stato $|v_i\rangle$.

Siano dunque a e b due particelle quantistiche ($N=2$) che possono assumere due soli stati 1 e 2. Nello specifico se la particella a (o la particella b) assume lo stato 1 allora si considera il vettore *occupation number* (troncato al secondo termine) $|1,0\rangle$. Se invece la particella a assume lo stato 2 allora si considera il vettore *occupation number* $|0,1\rangle$. Se due particelle occupano stati differenti si considera il vettore $|1,1\rangle$.

Ora modifichiamo queste notazioni in questo modo: se la particella a (o la particella b) assume lo stato 1 allora si considera il vettore $\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Se invece la

particella a assume lo stato 2 allora si considera il vettore $\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Se due

particelle occupano stati differenti si considera il vettore $\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Cioè si sono

modificati i vettori *occupation number* (troncati al secondo termine) con i

seguenti vettori numeri di posizione $\left| \begin{pmatrix} n_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ con n_1 e n_2 indipendentemente

uguali a 0 o 1. Allora si può scrivere la seguente relazione di WD:

Se $a=b$ allora la matrice di Gram ha determinante diverso da zero, se $a \neq b$ allora la matrice di Gram ha determinante nullo.

Questo perché applicando gli operatori di simmetrizzazione SM_N^\pm al vettore

$\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e costruendo la matrice di Gram, il calcolo del determinante (o del

permanente) della matrice, fornirà un valore differente da zero perché i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti, viceversa il vettore $\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ fornirà valore

zero per il calcolo del determinante (permanente).

Cioè, indicando con R la relazione “due particelle a e b sono in relazione se e solo se la loro rappresentazione formale mediante i vettori numeri di posizione rende il determinante della matrice di Gram diverso da 0” si ha

$$R(a,b) \Leftrightarrow (a=b \wedge R(a,a)) \vee (a \neq b \wedge R(a,b)). \quad (7.7)$$

La relazione (7.7) soddisfa le richieste di Bigaj (2015), ed è valida solo se $a=b$.

Inoltre soddisfa anche le richieste di Muller e Saunders (2008) circa l'invarianza

per permutazione (di verifica banale) e l'assunzione di significato fisico²¹². Tale relazione è certamente valida per i fermioni. Per estendere questa discernibilità ai bosoni sorge una piccola problematica: se la particella a e la particella b assumessero lo stesso stato, ad esempio lo stato 1, si può avere $\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, cioè si sono resi i vettori numeri di posizione $\left| \begin{pmatrix} n_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ con n_1 e n_2 indipendentemente uguali a 0 o 1 o 2. Tuttavia in tale caso la relazione di discernibilità non risulta efficace in quanto darebbe lo stesso risultato sia nel caso in cui nello stato 1 vi siano due particelle, sia nel caso ve ne sia una sola; mentre fornirebbe una esatta discernibilità debole se le due particelle occupassero stati differenti, poiché si considererebbe il vettore $\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

5. Una parentesi metafisica: quale conclusione poter trarre sulla validità di PII?

Muller (2011, 2013) ha portato la WD da un livello fisico matematico ad un livello metafisico: la natura della realtà fisica è caratterizzata da elementi

²¹² Per la verifica di assunzione di significato fisico si ricordi che il determinante di Slater, sotto opportune condizioni matematiche, rappresenta uno stato normalizzato per un sistema di più fermioni. Nel nostro caso basta sostituire ai valori contenuti nei vettori utilizzati nella relazione di discernibilità, rispettivamente i valori della posizione x e della massa m della particella. Sono necessari opportuni accorgimenti legati alla proporzionalità tra i vettori e alla ortonormalizzazione dei valori che si ottengono all'interno della matrice in (7.6). Il risultato che si ottiene non è lontano da quello appena discusso e che è stato mostrato in termini numerici più semplici. È chiaro che l'assunzione di significato fisico che stiamo facendo e che affonda le sue radici in espedienti matematici, può non essere condivisa da tutti i pensatori.

relazionali, cioè gli elementi delle teorie fisiche non sono degli oggetti individuali o non individuali bensì sono oggetti determinati da quelle relazioni cui fanno parte²¹³. La visione di Muller è di tipo strutturalista, e la visione che fornisce primato ontologico delle relazioni di struttura, piuttosto che alla primitività degli oggetti, è il cosiddetto strutturalismo ontico.

Per molto tempo si è pensato che la meccanica quantistica rifiutasse la tesi lewsiana di sopravvenienza humeana. Si pensi a Teller (1986) che ha inaugurato tesi non sopravvenienti da un'ontologia fisicalista verso quello che è stato chiamato realismo strutturale ontico. Come riporta Michael Esfeld (2014) l'*entanglement* porta a considerare relazioni non sopravvenienti sulle proprietà dei relata, questi ultimi non contengono nemmeno la proprietà intrinseca dell'identità. Tuttavia queste tesi antiriduzioniste possono essere rappresentate mediante un appello ad ontologie primitivistiche. Vi sono infatti tre tipi di teorie ontologiche primitivistiche. La prima è la meccanica bohiana (Dürr, Goldstein e Zanghì (2013)) attribuibile a Bohm (1952a, 1952b) e de Broglie (1960) secondo cui vi sono delle particelle arrangiate nello spazio tridimensionale. L'insieme di queste particelle, ad ogni intervallo di tempo, assume una certa configurazione la cui evoluzione spaziale è guidata da un'equazione e la cui evoluzione temporale è regolata dall'equazione di Schrödinger della funzione d'onda universale. La seconda è l'ontologia *gunky* della dinamica di Ghirardi, Rimini e Weber (GRW) (1986), secondo cui la densità di materia nello spazio fisico è ciò che vi è, la localizzazione delle masse è data dallo spontaneo concentrarsi di tale densità che

²¹³ Cfr. Resnik (1990) nello strutturalismo matematico è possibile risolvere la questione della individualità quantistica: vi è una sottile differenza epistemica tra gli oggetti fisici e quelli matematici nella fisica moderna. Infatti, come per gli oggetti matematici, la primaria importanza degli oggetti della fisica moderna risiede nella struttura nella quale sono collocati.

porta all'ottenimento dei risultati di misurazione, spiegando così il paradosso della misura. La terza è l'ontologia GRW flash secondo cui vi sono degli eventi rappresentati con un'opportuna probabilità di verificarsi e che si verificano spontaneamente.

Lo strutturalismo ontico supporta la validità di PII (conseguentemente di PIIM e PIIM_R) in ambito scientifico: la metafisica fa proprio questo principio²¹⁴. A fare eco allo strutturalismo ontico e alle ambizioni di Muller, si può leggere Saunders (2003) nel quale la verità di PII porta ad avere l'identità non più come un fatto primitivo ma come un fatto qualitativo, del resto gli stessi oggetti fisici sono oggetti di predicati. Bigaj (2015) critica questo passaggio dal piano fisico matematico della WD a quello metafisico, che a suo dire è quantomeno prematuro.

La nuova relazione di WD (7.7) spezza una lancia a favore della metafisica di Muller.

Secondo Esfeld (2014) la fisica dei quanti riesce a supportare l'humeano nella misura in cui lo priva dell'arricchimento dato dalle proprietà intrinseche, cioè proprietà qualitative, alla materia locale. L'ontologia primitiva esfeldiana consiste in punti dello spazio-tempo occupati da *stuff* ("roba") o non occupati da essa, posizioni spaziali in cui si colloca la materia che una certa dinamica sviluppa nel corso del tempo. Con un'ontologia primitivistica *l'entanglement* può essere visto come una proprietà non emergente. Secondo Esfeld (2014) *l'entanglement* non ci impone di accettare relazioni non sopravvenienti o che il mondo sia una sorta di

²¹⁴ Muller propone delle ragioni per accettare questo principio: in primis se il principio fosse vero sarebbe meglio non ignorarlo in quanto avrebbe valenza ontologica, inoltre oltre ad essere un principio di estrema chiarezza ed eleganza formale, esso supporta la metafisica della discernibilità relazionale.

spazio delle configurazioni con un elevato numero di dimensioni. Se l'humeano è corretto è possibile evitare a monte queste conclusioni.

Per dirlo con le parole di Esfeld (2014, p. 458):

In being entangled, the wave-function establishes such correlations, but these are non addition to what there is over and above the occurrence of the "local beables" at space-time points, since the universal wave-function and its temporal development supervene on the entire mosaic of these "local beables". If one does not grant beable status to the wave-function, there is nothing that determines the temporal development of the initial configuration of the "local beables".

Questo tipo di ontologia riesce a eliminare le critiche mosse all'humeano secondo cui non si può accedere ad una conoscenza di queste proprietà superiore a quella epistemica, ed assume una posizione metafisica del tutto avulsa da ipotesi occulte (Black, 2000) mantenendo un certo equilibrio tra scienza e realtà. Se non vi è uno sviluppo che si verifica mediante una qualche guida fisica, resta il problema di dover precisare cosa guida e porta allo sviluppo temporale di questo arrangiamento di materia. Inoltre, se si rifiuta un impegno verso una modalità oggettiva, non è detto che qualsiasi funzione matematica possa essere fisicamente implementata dalla *local beables* che sono presenti nell'universo. Affermare ciò equivale a dire che tutto ciò che è calcolabile è anche computabile. Infatti in una elaborazione semplicistica si potrebbe vedere l'universo come un'immensa macchina di Gandy, un particolare tipo di macchina di Turing²¹⁵.

Nel caso in cui si pensi che oltre alla *local beables* vi sia qualcosa che porti allo sviluppo temporale di quest'ultima, allora le particelle non sarebbero più solo

²¹⁵ Cfr. Fano *et al.* (2016) a proposito della macchina di Gandy e della *innacuracy* presente in essa.

primitive ma possederebbero proprietà come massa e carica, qualità che determinano i fenomeni dell'attrazione gravitazionale ed elettrica. Tuttavia la massa e la carica si potrebbero pensare non come qualità intrinseche di per sé (Esfled, 2014) ma come qualcosa che è ottenuto dalla distribuzione della *stuff* nell'intero spazio-tempo. Queste teorie potrebbero essere interpretate come teorie super-sostanzialiste (Esfeld, 2014) perché lo spazio-tempo è l'unica sostanza e la materia una proprietà dello spazio-tempo. Secondo l'autore di questa tesi, diversamente da quanto è stato affermato dalle teorie super-sostanzialiste, lo spazio-tempo è *l'aposteriori* e deriverebbe dalla materia. La situazione è quindi capovolta.

6. L'evaporazione dello spazio-tempo

È volontà dell'autore di questa tesi soffermarsi su un tentativo estremamente elementare, non troppo formale, di connettere la meccanica quantistica con un modello di gravitazione semiclassico. Da qui si faranno alcune speculazioni di natura metafisica.

In una recente conversazione il prof. Vincenzo Fano sostenne che in fisica vi sono concetti semplici, come quello di quantità di moto, che hanno richiesto tempi lunghissimi per essere formulati ed espressi da giganti della scienza classica come Aristotele, Descartes e Newton. Tenere in mente questo potrebbe indurci a pensare che la soluzione ai problemi attuali della fisica teorica, ad esempio ai problemi in meccanica quantistica della misurazione, della non località, della

contestualità, ecc., potrebbe non trovarsi in nuovi o vecchi apparati matematici estremamente complessi, bensì in semplici cambi di prospettiva, in cambiamenti concettuali da affrontare mediante una corsa ad ostacoli epistemologici²¹⁶. Sulla base di questa chiara premessa si illustra un piccolo calcolo matematico su un modello teorico che vuole mettere in luce aspetti legati alla non separabilità pur mantenendone la località. La domanda che si è posta è la seguente: è possibile avere una teoria non separabile, locale e causale? Il messaggio che sembra giungere dalla fisica quantistica e da quella relativistica è sostanzialmente quello di mostrare come i riferimenti assolutistici newtoniani dello spazio e del tempo, siano labili e tendenti ad una evaporazione verso concetti di tipo aristotelico relazionali. In particolar modo se si indebolisce il concetto newtoniano di spazio, la non località di una teoria fisica può non implicarne l'acausalità. Si illustra ora questo esempio semiclassico cui si accennava poc'anzi.

Si assuma che si possa esplicitare con $U = -\frac{GMm_0\gamma}{R}$ l'energia potenziale gravitazionale relativistica²¹⁷ di un satellite di massa a riposo m_0 che viene lanciato da un pianeta di massa M ad una distanza tale da non risentire più dell'azione di attrazione gravitazionale del pianeta stesso, cioè ad una distanza infinita (Figura 10). Per la conservazione dell'energia si avrà allora:

$$-\frac{GMm_0\gamma}{R} + \gamma m_0 c^2 = m_0 c^2, (7.8)$$

²¹⁶ Analogamente a quanto afferma Bachelard (1934), gli ostacoli epistemologici portati da una certa visione scientifica dominante rappresentano una seria minaccia al progresso della fisica. Si veda anche Nickles (2014).

²¹⁷ Un potenziale gravitazionale relativistico di tipo scalare ha delle previsioni qualitative corrette su orbite planetarie. In particolar modo, viene messa in luce anche la precessione del perielio laddove si osserva tale fenomeno. Tuttavia dal punto di vista quantitativo si è osservato che nel caso del pianeta Mercurio le previsioni teoriche prevedono una precessione del perielio di 7 secondi d'arco per secolo, a differenza di un valore osservato di 43 secondi d'arco per secolo. Cfr. Gasperini (2015, pp. 28-32).

$$\text{con } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

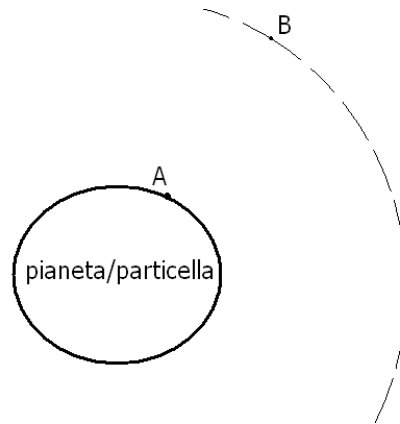


Figura 10: Rappresentazione grafica del lancio di un “satellite” in maniera tale da non risentire delle interazioni gravitazionali prodotte dal pianeta.

Ricavando la velocità v si ottiene la “velocità di fuga”, cioè la velocità che è necessario imprimere al satellite per spedirlo in orbita e fermarlo ad una distanza tale da non risentire più dell’attrazione gravitazionale del pianeta di origine:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R} - \left(\frac{GM}{Rc}\right)^2}. \quad (7.9)$$

Imponendo che $v = c = 2,99792458 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ cioè che la velocità di fuga sia pari a quella della luce nel vuoto, si calcola il raggio che dovrebbe avere il pianeta per diventare un buco nero. Il raggio del buco nero per la meccanica classica è

$$R_{bn} = \frac{2GM}{c^2},$$

mentre da (7.9) risulta

$$R_{bn}^* = \frac{GM}{c^2}.$$

Costruendo il grafico (Figura 11) della funzione (7.9),

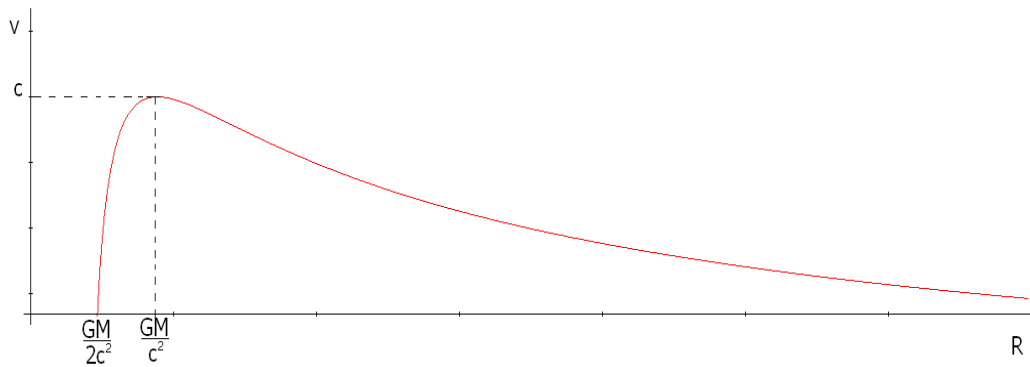


Figura 11: Rappresentazione grafica della velocità di fuga di un satellite lanciato da un pianeta in funzione del raggio del pianeta.

si osserva che la curva è limitata dall'alto dal massimo valore ($v=c$) assunto in corrispondenza di $R_{bn}^* = \frac{GM}{c^2}$. Si allarghi ora l'orizzonte e ci si concentri a sinistra di tale valore. Si indaghi cioè il comportamento della curva per valori più piccoli del raggio del buco nero R_{bn}^* . Alla luce di considerazioni su cui ci si soffermerà nel prossimo capitolo, si sta assumendo come vera la nostra teoria e si sta fornendo una qualche realtà alla parte non osservativa di essa, si sta quindi correndo un alto rischio ma, come si è precedentemente affermato, si stanno solo

facendo delle ipotesi speculative. Si osserva che per valori più piccoli di R_{bn}^* la velocità di fuga diminuisce, il che apparentemente è in controtendenza con l'aumentare del campo gravitazionale a regolato dall'espressione $a = \frac{GM}{R^2}$.

Un'ipotesi che concilia questo apparente paradosso è quella di assumere che lo spazio si contrae, per cui le distanze si modificano rendendo in qualche modo l'infinito "più vicino". Vi è anche un valore del raggio pari a $R = \frac{GM}{2c^2}$ per cui la velocità di fuga è prossima a 0. In questo caso è come se "l'infinito collassasse sulla superficie del pianeta". Si denoti tale valore con $R_{lim} = \frac{GM}{2c^2}$. Ora si compia un'altra acrobazia: se esistesse un pianeta che avesse geometria sferica con raggio inferiore a $R_{bn}^* = \frac{GM}{c^2}$ e massa pari a quella di un elettrone (cioè l'elettrone prende il posto del pianeta nel modello) $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg, allora potrebbe comunicare mediante un segnale (quest'ultimo prende il posto del satellite) a velocità subluminale con qualunque luogo dello spazio che lo circonda²¹⁸. Per cui due elettroni potrebbero trovarsi lontani quanto si vuole ma resterebbero comunque tra

²¹⁸ Vi sono altri modelli classici o semiclassici che violano la diseuguaglianza di Bell e conservano un carattere di località. È possibile avere una descrizione locale ed epistemologica del mondo fisico mantenendo la violazione della diseuguaglianza di Bell, vi sono infatti esempi epistemologici in tal senso: si veda ad esempio Aerts *et al.* (2000). La violazione della diseuguaglianza di Bell in meccanica quantistica, come afferma Fano (2004, 2005), ha un carattere non totalmente oggettivo ma in parte relazionale. Susskind e Friedman (2014, pp. 172-178) affermano che l'apparente violazione della località in meccanica quantistica non è un problema per la teoria stessa. Essi introducono due osservatori A e B ciascuno avente un proprio sistema fisico su cui compiere esperimenti, che inizialmente interagiscono e successivamente vengono separati (ad esempio A resta sulla Terra mentre B arriva su Saturno). La funzione d'onda che tiene conto sia di A che di B può essere *entangled*. Susskind e Friedman mostrano matematicamente che la matrice densità di A, che, come è noto, contiene la descrizione completa che A ha del suo sistema, resta inalterata per qualunque azione (unitaria) che avviene sul sistema di B. Da questo risultato Susskind e Friedman ricavano che nessun segnale superluminale è stato inviato da B ad A e viceversa. Nel corso della nostra trattazione, invece, si considera l'ipotesi che qualora "qualcosa" (una qualche informazione) sia emessa da una particella, essa sia capace di viaggiare verso un'altra particella a velocità inferiore a quella della luce.

loro in comunicazione mediante segnali subluminali²¹⁹. Per cui le modifiche legate alla misurazione su di uno stato di *entanglement* si potrebbero spiegare in termini di un simile ipotetico segnale che viaggia tra un elettrone e l'altro riportando nella teoria quantistica la località e la causalità, pur mantenendo la non separabilità. Tuttavia certamente la non separabilità è un duro colpo da accettare per coloro che sostengono, come Einstein, un principio di individualità derivante dalla separabilità²²⁰. Questa sarebbe una bella notizia per i sostenitori della discernibilità derivante da RPQ. Si ricordi che uno dei problemi a cui porta RPQ è il problema della misurazione. La pecca di questo modello artificioso e fantasioso è dovuta al valore che si ottiene calcolando il raggio di buco nero relativistico del pianeta-particella: Si avrebbe, infatti, un valore pari a $R_{bn}^* = 6,75 \cdot 10^{-58}$ m e un raggio limite relativistico $R_{lim} = 3,38 \cdot 10^{-58}$ m, valori dell'ordine di grandezze estremamente più piccoli di quelle del quanto di Planck (10^{-34} m), immensamente più piccoli dell'accuratezza che le nostri migliori strumentazioni potrebbero misurare (10^{-21} m)²²¹. Inoltre, alla luce delle nostre conoscenze di fisica e di astrofisica, un pianeta (o una stella) che avesse massa pari a quella di un elettrone sarebbe troppo poco massivo per potersi evolvere in futuro in un buco nero.

Dopo questa parentesi fisica, si ritornerà sulla questione della discernibilità.

²¹⁹ Qualcosa di analogo ed estremamente esauriente è suggerito da Maldacena e Susskind (2013): La relatività generale prevede l'esistenza dei cosiddetti *wormhole*, dei tunnel spazio temporali che connettono tra loro due buchi neri lontani. Interpretando il sistema costituito dai due buchi neri come uno stato *entangled*, è possibile estendere l'idea di questi "ponti" agli stati *entangled* in generale.

²²⁰ Cfr. Howard (1990).

²²¹ Secondo l'autore di questa tesi, il modello semiclassico appena discusso potrebbe raggiungere risultati migliori, e avere maggior valenza, se al posto di considerare gli elettroni (fermioni) si fossero considerati dei fotoni (bosoni). Per semplicità espositiva si è discusso il caso del pianeta-elettrone.

VIII. PERCHE' LA MECCANICA QUANTISTICA, COSI' COME NESSUN'ALTRA TEORIA, PUO' METTERE LA PAROLA "FINE" SULL'ACCETTAZIONE DEL PRINCIPIO DI IDENTITA' DEGLI INDISCERNIBILI IN AMBITO MICROSCOPICO

Come già affermato la meccanica quantistica ha creato un certo scompiglio nella comunità scientifica del secolo scorso a causa delle sue conseguenze fortemente contro intuitive e per i problemi fisico-filosofici che ha determinato. Tuttavia le sue capacità predittive e i numerosi riscontri sperimentali ne hanno decretato il successo ed è la migliore teoria fisica del mondo microscopico di cui disponiamo. Nonostante questo, resta comunque una mera teoria fisica e quindi non sarà mai capace di cogliere l'immensa varietà del reale. Una teoria ha sempre un forte connotato epistemologico. Possediamo un criterio per estendere questo connotato della teoria ad un piano ontologico, questo criterio è la *Inference to the Best Explanation*²²² (IBE) che si può così esporre:

Siano T_1, \dots, T_n , un insieme di teorie che fornisce una spiegazione di un dominio di oggetti e sia T_i la miglior spiegazione, cioè la teoria che non solo descrive ma spiega meglio delle altre questo dominio. Si potrebbe concludere la verità di T_i in

²²² Cfr. Harman (1965).

quanto se una teoria è la miglior spiegazione di un dato dominio di oggetti, allora ci sono buone ragioni per ritenerla vera²²³.

In fondo la scienza possiede dei metodi e delle procedure per valutare ed eliminare quelle teorie che dovrebbero spiegare un certo dominio empirico, oggetto di indagine scientifica, e conseguentemente determinare tra queste quale sia quella più azzeccata (o semplicemente la migliore) ad esplicarlo²²⁴.

Questa inferenza quindi ci permette di passare dal piano epistemologico di una teoria che è la migliore spiegazione, a quello ontologico delle sue condizioni di verità. Le limitazioni di IBE sono rappresentate dal fatto che la scienza è in continua evoluzione e le teorie che in passato avevano riscontrato un certo successo empirico ed erano state ritenute vere si sono rivelate successivamente false. Sembra che non vi siano ragioni di sostenere IBE nella sua forma forte, tuttavia anche se una teoria si rivela fallace nel corso dello sviluppo scientifico, specie se applicata in ambiti più generali di quelli su cui era stata formulata, il suo potere esplicativo riguardo un certo dominio di oggetti spesso non le toglie il fatto di essere la miglior spiegazione di quel particolare dominio di oggetti. Dunque IBE potrebbe essere riformulata in una versione più mite e cioè

“Se una teoria è la miglior spiegazione di un dato dominio di oggetti, allora ci sono buone ragioni per ritenerla vera in modo parziale dove con “in modo parziale” non intendiamo un termine che esprima una qualche probabilità, ma semplicemente che una o più parti della teoria sono vere²²⁵”
(Fano e Macrelli 2014, pp. 19-20).

²²³ Cfr. Fano (2005, pp. 114-115).

²²⁴ Cfr. Fano (2005, pp. 115).

²²⁵ Cfr. Fano (2005), Fano e Macrelli (2014).

L'utilizzo della *Inference to the Best Explanation* fornisce alla scienza un criterio di espansione della nostra ontologia dalle entità osservabili di una teoria a quelle non osservabili. Nonostante ciò, è estremamente complesso poter valutare in maniera comparativa o quantitativa le nostre conoscenze²²⁶. Secondo la premessa della valutazione²²⁷ è possibile valutare e comparare fra più teorie che descrivono un certo dominio di oggetti stabilendo fra esse quale sia più probabilmente vera.

Con questa premessa IBE prende ragionevolezza. Ma affermare che una teoria è vera significa attribuire alla teoria il potere di descrivere la realtà, in particolar modo anche la parte non osservativa della teoria avrà una qualche controparte nel mondo reale: quest'ultima osservazione è molto audace in quanto non è detto che, tra tutte le teorie che spiegano un certo dominio di oggetti, vi sia o sia già stata trovata quella vera. È una speranza non una certezza, come insegna la storia delle scienze mature. Si può criticare IBE formulando la seguente assunzione che si deve a van Fraassen²²⁸ chiamata "premessa del non privilegio": La quantità delle nostre ignoranze è molto maggiore rispetto a quella delle nostre conoscenze²²⁹.

Queste due premesse portano a escludere che in un insieme di teorie che spiegano un certo dominio di oggetti, quella con maggior probabilità di essere vera sia quella vera. La meta induzione pessimista, proposta da Larry Laudan (1981), afferma che le nostre migliori teorie saranno tutte scardinate nel futuro. Tutto questo è motivato dal lungo elenco di quelle entità non osservabili che hanno trovato conferme empiriche nel passato ma che sono risultate non reali nel

²²⁶ Per un tentativo di definizione si veda Niiniluoto (1987).

²²⁷ Cfr. Fano (2005, pp. 158-159).

²²⁸ van Fraassen (1989, pp. 142 ss.).

²²⁹ Cfr. Fano (2005, p. 160).

proseguito della scienza. Il tentativo di formulazione di nuove teorie che descrivono meglio un più ampio dominio di oggetti spesso porta verso “direzioni significativamente diverse da quelle attualmente seguite” come afferma Roger Penrose (2004): “La risposta a domande profonde suscita domande ancora più profonde”²³⁰. Spesso si ha la presunzione di essere vicini ad una spiegazione scientifica completa di alcuni fenomeni o questioni fisiche quindi alla verità: questa tuttavia è un'altra speranza illusoria. Se l'assunzione di van Fraassen-Penrose è corretta, allora l'utilizzo di IBE sembra piuttosto azzardato²³¹. Si potrebbe allora passare il bandolo della matassa del problema della individualità-discernibilità direttamente ai posteri, che sicuramente disporranno di teorie con un maggior potere esplicativo delle nostre.

Dopo questa riflessione di carattere epistemologico è bene notare che la metafisica e la fisica hanno uno stretto rapporto. È auspicabile, secondo l'autore di questa tesi, una forma di metafisica naturalizzata, nel senso che, il ruolo della metafisica sarebbe quello di formulare delle ipotesi su quello che c'è nel mondo sulle basi delle considerazioni fisiche. A sua volta lo sviluppo della fisica spesso è guidato da intuizioni metafisiche che ampliano l'ambito del suo potere esplicativo. La metafisica di per sé, cioè intesa in senso di pura speculazione filosofica rappresenta un importante stato germinativo della fisica. Come si è visto, il realismo, ad esempio, può ovviare il problema sulla metafisica dell'oggetto e sviluppare ontologie di strutture compatibili con la fisica (Ladyman, 1998, 2014)

²³⁰ Penrose (2004, trad. it. pp. 1132-1134).

²³¹ Un modo per superare le obiezioni della meta induzione pessimista “consiste nel richiamo al fatto che le teorie passate non si sono dimostrate false del tutto, ma solo parzialmente false. Si tratta di individuare che cosa è stato conservato nel passaggio da una teoria all'altra. [...] Il realismo strutturale sostiene che ciò che si conserva nel passaggio da una vecchia teoria a una nuova -nelle scienze mature- non sono gli enti, ma le relazioni strutturali che valgono fra tali enti, espresse di solito come equazioni, per cui possiamo affermare che queste equazioni individuano ciò a cui possiamo attribuire realtà.” (Fano 2005, p.172).

oppure con particelle descrivibili come punti di intersezioni di certe relazioni (Cassirer, 1937 p. 180). Per il realista il mondo è ciò che dice la fisica anche se c'è il problema del cambio di ontologia legato alla meta induzione pessimista e della sottodeterminazione della teoria dai dati (French, 2011).

van Fraassen (1991) afferma che la posizione corretta da assumere dovrebbe essere quella dell'antirealista secondo cui tutte le teorie dicono come potrebbe essere il mondo (French, 2011). Di recente l'esperimento di Aharonov *et al.* (2013) realizzato da Denkmar *et al.* (2014)²³², ha dato supporto al realismo ed in particolare alla concezione della realtà delle onde quantistiche: attraverso una procedura sperimentale, suddividendo un fascio di neutroni è stato possibile ottenere un risultato, mai registrato precedentemente, che può essere spiegato basandosi sulla separazione spaziale delle particelle dal loro spin. Una spiegazione di questo tipo è supportata dalla teoria delle onde quantistiche. Di per sé questo esperimento è un esempio di come le ricerche sui fondamenti della fisica siano ancora in corso e del fatto che esse rappresentino una matrice fertile per lo sviluppo della fisica. Non è ancora arrivata la parola "fine" sull'accettazione dell'individualità per le particelle quantistiche e sulla loro discernibilità²³³. Chissà se mai arriverà. Come diceva Shapere (1990) la scienza può risolvere la questione filosofica dell'identità e della distinguibilità tuttavia questi concetti sono in continua evoluzione e modifica alla luce di quello che la scienza dice.

²³² Cfr. Aharonov *et al.* (2013); Denkmar *et al.* (2014).

²³³ Nonostante l'obiettivo di questa tesi sia quello di determinare una nuova proposta di discernibilità debole (Macrelli e Fano, in preparazione) valida in ambito quantistico, si hanno delle ragionevoli motivazioni a ritenere che nel prossimo futuro tale proposta sarà superata da altre che riusciranno a estendere la discernibilità debole anche ai bosoni nello stesso stato.

1. Meccaniche quantistiche

Come si è accennato nel capitolo dedicato ai postulati della meccanica quantistica, basta una semplice modifica ad un assioma per avere una diversa teoria quantistica. Di meccaniche quantistiche infatti non ve ne è una soltanto. Come si è auspicato nelle precedenti sezioni di questa tesi in merito al poter modificare alcuni postulati della teoria senza cambiarne il suo potere esplicativo, nel primo decennio del XXI secolo ha avuto luogo un crescente sviluppo intorno ad applicazioni di modelli con operatori non autoaggiunti in ambito quantistico. Parallelamente è maturata la ricerca sulle teorie matematiche che fanno da supporto in meccanica quantistica in particolar modo attorno alle hamiltoniane pseudo-hermitiane. Un operatore H si dice pseudo-hermitiano se esiste un operatore hermitiano invertibile G tale che $H^* = GHG^{-1}$ dove H^* è l'operatore aggiunto di H . Le hamiltoniane non autoggiunte rappresentano in fisica la descrizione di una parte di un sistema su cui non imponiamo tutti i gradi di libertà, ad esempio per descrivere la dissipazione. Di esempi ce ne sono tanti come i potenziali che descrivono lo scattering o indici di rifrazione in ottica.

Oltre all'introduzione di questo tipo di hamiltoniane, da qualche anno si sta discutendo anche un'alternativa all'assioma della meccanica quantistica che richiede che l'hamiltoniana che specifica la dinamica del sistema e ne incorpora le simmetrie sia autoaggiunta. Questa richiesta è certamente sufficiente ma non necessaria a garantire che lo spettro dell'operatore associato all'energia sia reale e che l'evoluzione temporale sia unitaria: Molti studiosi ritengono che la condizione dell'autoaggiunzione sia una richiesta matematica la cui base fisica è non del tutto

chiara. Si è esaminata la possibilità di introdurre condizioni fisicamente molto più chiare, come la simmetria di riflessione spazio-temporale detta simmetria PT . È possibile costruire infinite hamiltoniane PT simmetriche non autoaggiunte e questo permette di studiare nuove teorie quantistiche. Indicando con P una involuzione unitaria in uno spazio di Hilbert ($P^2=1$, $P^{-1}=P^*$) e T un'involuzione antilineare ($T^2=1$, $\langle Tu, Tv \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$, $\forall u, v \in \mathcal{H}$), un operatore H nello spazio di Hilbert \mathcal{H} è chiamato PT -simmetrico se commuta con PT , cioè se il commutatore $[H, PT]=0$.

Un esempio di operatore di Schrödinger PT -simmetrico è dato dall'oscillatore anarmonico dispari unidimensionale in $L^2(\mathbb{R})$ definito da $H(\alpha) \equiv H_0 + i\alpha x^{2n+1}$,

con $n=1,2,3,\dots$, $\beta \in \mathbb{R}$, con $H_0 = p^2 + x^2$, $p = -i \frac{d}{dx}$ sul dominio

$D(H(\alpha)) = H^2(\mathbb{R}) \cap D(x^{2n+1})$, il cui spettro puramente discreto è stato dimostrato

da Caliceti, Graffi, Maioli (1980) e la realtà del cui spettro è stata mostrata da

Shin (2002, 2005) e Dorey, Dunning e Tateo (2004). Mediante tecniche nell'ambito

della teoria delle perturbazioni degli operatori lineari Caliceti, Cannata, Graffi e

Sjöstrand hanno esteso la classe degli operatori di Schrödinger PT -simmetrici.

Questa teoria ha molte applicazioni in meccanica quantistica dove gli autovalori

rappresentano i possibili valori dell'energia. Dato un operatore PT -simmetrico

$H(\alpha) \equiv H_0 + i\alpha W$ $\alpha \in \mathbb{R}$ con H_0 operatore autoaggiunto, PT -simmetrico,

limitato dal basso e con spettro discreto, W un operatore simmetrico e limitato tale

che $PW = -PW$ e $TW = WT$, allora sotto opportune condizioni per gli autovalori

degeneri di H_0 lo spettro di $H(\alpha)$ è reale per un certo intervallo simmetrico di

α . Un esempio di un simile operatore è stato studiato da Caliceti e Macrelli in un lavoro non pubblicato: Sia $H(\alpha, \beta)$ l'operatore perturbato PT -simmetrico definito in $L^2(\mathbb{R})$ in questo modo:

$$H(\alpha, \beta) \equiv H_0 + i\beta x^3 e^{-\alpha H_0},$$

dove $H_0 = p^2 + x^2$ è l'operatore di Schrödinger dell'oscillatore armonico, allora il suo spettro è reale $\forall \alpha > 0$ e $\forall \beta < \frac{1}{\|x^3 e^{-\alpha H_0}\|}$.

Con queste ultime riflessioni si vuole mostrare che da un cambio dei postulati della teoria, che ne preservi il suo potere esplicativo, si possono aprire scenari innovativi per la costruzione di nuovi operatori matematici. Magari, tra questi operatori, è possibile determinarne alcuni utili ad ottenere proposte di discernibilità deboli, tra le particelle quantistiche, alternative a quella illustrata nell'ambito di questa tesi (Macrelli e Fano, in preparazione), e che riusciranno a estendere la discernibilità debole anche ai bosoni nello stesso stato.

IX. CONCLUSIONI

Le speculazioni e le indagini qualitative svolte in questa tesi hanno mostrato come le criticità poste dalla meccanica quantistica sul principio di identità degli indiscernibili sono parzialmente risolte dalla discernibilità debole. In particolare è stato necessario introdurre una nuova *weak discernibility* per superare le recenti obiezioni mosse da Bigaj (2015) al grande lavoro dei “discernitori deboli” dei quali fanno parte Muller, Saunders e Seevinck. L’identità, del resto, è una nozione di difficile comprensione. Una semplice definizione data attraverso un linguaggio numerabile del primo ordine presenta delle criticità ineliminabili, così come una semplice definizione data sulla base del mantenimento di verità permutando i nomi attribuiti agli oggetti la cui identità viene indagata: l’operazione di *labelling* si è vista essere non sufficiente a determinare l’individualità non solo in meccanica quantistica ma neppure in meccanica classica²³⁴. Tutto ciò perché il problema si presenta laddove si hanno sistemi di particelle indistinguibili e per le quali è possibile definire una cardinalità ma non un’ordinalità: risulta quindi difficile cercare di trattare l’identità con la teoria degli insiemi. Quest’ultima non si mostra essere una soluzione adatta, o per lo meno non sposa una certa sensibilità di tipo fisico-filosofico.

Seguendo Quine (1976a) è possibile trattare l’identità attraverso diversi gradi di discernibilità: dalla contabilità primitiva, passando attraverso le forme di *weak discernibility* fino alle discernibilità assoluta data dal principio di identità degli

²³⁴ La posizione di questa tesi sull’individualità è sostanzialmente di tipo agnostico.

indiscernibili (PII). Tuttavia, come si accennava, PII e l'assoluta discernibilità sono messi a dura prova nella meccanica quantistica e tale principio sembra apparentemente violato. Seguendo Cortes (1976), per evitare di basare la distinguibilità su fattori nascosti sarebbe meglio rinunciare a PII, mentre per Aerts (1998) il mantenimento di PII è qualcosa di necessario e per fare ciò si può ricorrere a proprietà nascoste. La nozione di individualità può essere salvata dalle *haecceitates* (Ladyman (2007)), oppure ricorrendo alla *primitive thisness* introdotta da Teller (1995) o dall'autoidentità di Adams (1979) o dalla identità trascendentale di Post (1963) o dal substrato di Locke (French, 1989a).

Non bastasse il problema della individualità tra particelle indistinguibili, in meccanica quantistica vi è anche un ulteriore problema legato all'individualità di stati "particolari" di particelle. In meccanica quantistica vi sono proprietà non sopravvenienti (emergenti), che appartengono ad una coppia di particelle ma non sono determinate dalle singole particelle costituenti, in particolare la proprietà dovuta all'*entanglement* è una proprietà emergente di una coppia di particelle. L'*entanglement*, come proprietà emergente, mette in crisi il concetto classico di individualità di un oggetto. Il modello che si è mostrato in questa tesi, però, mostra come sia possibile in linea teorica, trattare l'*entanglement* come una relazione non emergente, sposando una sorta di ontologia primitivista, come quella esfeldiana. Forse è proprio questo il messaggio della meccanica quantistica: il concetto di spazio-tempo è un aposteriori, che evapora alla luce di considerazioni legate ad una qualche caratteristica propria della materia, un concetto relazionale²³⁵. Come afferma il principio di complementarità di Bohr se

²³⁵ Si ricordi che per Aristotele lo spazio di un oggetto, o meglio il luogo di un contenuto, è definito come primo limite del contenente che sia immobile.

si vuole una rappresentazione basata sulle leggi di conservazione è necessario rinunciare alla rappresentazione spazio temporale e se si vuole mantenere una rappresentazione spazio temporale invece è necessario rinunciare al nesso causale, cioè intuizione spazio-temporale e causalità sono due principi non contemporaneamente sostenibili. La località in meccanica quantistica è seriamente messa in discussione, ma in linea teorica è possibile mettere assieme la località con la non separabilità, cioè, come affermava Maudlin (1994), è possibile che la meccanica quantistica possa non violare la località mantenendo la non separabilità introdotta da Schrödinger, senza introdurre retrocausazioni. Per cui l'individualità determinata attraverso la separabilità come voleva Einstein non sembra un buon principio di individualità. Anzi è possibile trovare una soluzione all'*entanglement* considerando lo spazio come un a posteriori, non violando la teoria della relatività. Sono le relazioni gli strumenti su cui si dovrebbe basare la filosofia (e anche la fisica) per poter applicare criteri di discernibilità. Le discernibilità deboli (*weak discernibility*), principi di discernibilità che si relativizzano a specifiche proprietà o relazioni (Saunders, Muller, Seevinck), sono il “*must*” da utilizzare in tale ambito. Tuttavia esse sollevano la questione secondo cui per avere una relazione bisogna dapprima considerare i relata cioè gli oggetti cui la relazione si riferisce: ciò porterebbe inevitabilmente alla diversità numerica dei relata che induce una distinzione numerica (Ladyman e Bigaj, 2010), assieme ad un'individualità data dalla pluralità contabile (Lowe, 1998) anche se come concetto non sembra chiaro. Se si abbandona la strada delle discernibilità deboli e delle individualità “relazionali”, allora si resta con l'interpretazione bohmiana che fornisce individualità attraverso le traiettorie e i principi interferometrico e quantistico di

Jaeger (2010) che però non riescono a fornire individualità alle singole particelle in *entanglement*.

Sembra quindi non raggiungere un risultato chiaro e definitivo il problema della individualità in meccanica quantistica. Metaforicamente parlando, la battaglia è ancora aperta, e senza esclusione di colpi, e vede da una parte i sostenitori della non individualità e indistinguibilità quantistica (Hesse, Post, Schrödinger, Born, Dalla Chiara, Toraldo di Francia, French e Krause) e dall'altra coloro che sostengono l'individualità e la distinguibilità o solo la distinguibilità quantistica.

In particolare il massimo che può essere assunto per l'individualità e la distinguibilità in meccanica quantistica da un realismo scientifico delle proprietà, esprimibile mediante un linguaggio scientifico, è la versione epistemologica del principio di identità degli indiscernibili PIIM (che però è minacciata dal realismo delle proprietà quantistiche), oppure dalla sua forma più debole PIIM_R (che è avulsa dal realismo delle particelle quantistiche) oppure dall' *eigenvalue-eigenstate link*, perché si basano sulle strutture e non sui relata. Per cui in questa lotta, tra sostenitori e oppositori al criterio di identità degli indiscernibili in meccanica quantistica, sembra spuntarla la distinguibilità debole e l'individualità basata su relazioni.

È probabile che la meccanica quantistica sia una teoria incompleta dal momento che non vi sono buone spiegazioni a problemi come quello della misurazione, il realismo quantistico diventa quindi una tesi opinabile. Un modo per ovviare a questo problema è quello di considerare le particelle quantistiche come non sostanziali ma relazionali. La nuova *weak discernibility* (Macrelli e Fano, in preparazione), sembra fornire una risposta esauriente alle problematiche fin ora

esposte: concilia Bigaj (2015) e soddisfa la struttura del formalismo quantistico, non introduce i relata, ed è avulsa da elementi legati al realismo delle particelle quantistiche e anche dall'*eigenvalue-eigenstate link*.

Resta un'ultima osservazione fondamentale: Si possono sempre proporre diverse formulazioni metafisiche; lo spazio di possibilità metafisica non è infatti ben definito: da una teoria scientifica non si può mai giustificare l'universalità completa di un enunciato metafisico (van Fraassen, 1998) e la stessa cosa accade se si intende passare dal piano fisico-matematico della discernibilità debole a quello metafisico. Tuttavia si possono fare delle scelte economiche sulla metafisica (Redhead e Teller, 1991, 1992), attraverso la speculazione epistemologica: in questo caso accettare la non individualità delle particelle quantistiche sarebbe economicamente una scelta metafisica migliore perché altrimenti vi sarebbe il rischio di preferire una teoria con un surplus di struttura piuttosto che una senza. Tuttavia l'evaporazione dell'individualità delle particelle quantistiche identiche non può essere supportata dal suo potere risolutivo al paradosso di Gibbs: come si è mostrato, gli studi di Dieks e Vermaas (1998), Dieks (2010), Dieks e Versteegh (2008), Dieks e Lubberdink (2011), Versteegh e Dieks (2011), concludono che la sola indistinguibilità tra le particelle identiche, sia in meccanica classica che in meccanica quantistica non relativistica, non risolve a pieno il paradosso di Gibbs.

Anche se la meccanica quantistica si rivelerà, molto verosimilmente errata in futuro, seguendo la posizione della meta induzione pessimista di Laudan (1981), tuttavia resta un punto di partenza per fare della buona filosofia. Si potrebbe allora passare il bandolo della matassa del problema della individualità-discernibilità ai

posteriores che disporranno di teorie dotate di maggior potere esplicativo di quelle attuali. Del resto concetti come quello della individualità sono in continua evoluzione alla luce dei risultati scientifici (Shapere, 1990) ed il rapporto della filosofia con la scienza non va inteso, come semplice esplicitazione dell'ontologia e della metafisica implicite nelle attuali migliori teorie scientifiche, ma soprattutto come una continua formulazione di nuove possibilità di specifiche ontologie regionali. Tuttavia, riprendendo la posizione di van Fraassen (1991), la giusta posizione da assumere dovrebbe essere (sempre) quella dell'antirealista secondo cui tutte le teorie dicono come potrebbe essere il mondo (French, 2011), ma mai come è il mondo. La posizione di questa tesi è quella di ribadire che nulla si può dire sulla individualità in meccanica quantistica, ma che è possibile costruire e analizzare proposte di discernibilità tra le particelle quantistiche: in particolare la (nuova) discernibilità debole tra particelle quantistiche è generalmente valida.

APPENDICE

La spiegazione della riduzione della funzione d'onda: la decoerenza

Una delle problematiche principali della meccanica quantistica è rappresentato dal passaggio da valori indeterminati a valori determinati durante il processo di misurazione. Infatti la teoria quantistica è per lo più indeterministica se non si considera l'equazione di Schrödinger che invece è deterministica. Tuttavia, nel momento in cui avviene la misurazione si ottiene un valore probabilisticamente determinato, per tutte le variabili di un dato sistema fisico. Per risolvere questo problema si può rispondere da un punto di vista ontologico con la celebre interpretazione delle variabili nascoste di Bohm e cioè nel momento in cui si misura una proprietà, semplicemente, si porta in luce un valore che era già determinato ma che era sconosciuto. Tutto ciò ha delle conseguenze fortemente realistiche e impegna ontologicamente in maniera molto forte, portando a quelle problematiche quali la non località e la contestualità. Si potrebbe allora aggirare questo impegno ontologico seguendo la posizione di van Fraassen, cioè rimanendo agnostici e non attribuendo realtà a quel che non è possibile misurare in maniera diretta. In questo modo, però, si resterebbe su una posizione sterile che non consentirebbe di progredire nella conoscenza: c'è una certa ragionevolezza nel credere nell'esistenza delle entità non osservabili di una teoria fisica, entità matematiche descritte da una certa teoria, che ha mostrato un certo successo empirico. A questo punto si potrebbe sostenere di essere in una situazione di stallo: accettare l'impegno ontologico è troppo forte, ma rifiutarlo porta a delle considerazioni poco fruttuose. Si potrebbe allora seguire una linea ortodossa che è

quella che separa oggetti macroscopici, descritti secondo la fisica classica, e oggetti microscopici, descritti con la meccanica quantistica. Come nota Fano (2007) questo punto di vista è empiricamente falso ed epistemologicamente insoddisfacente in quanto in primo luogo esistono oggetti macroscopici che hanno caratteristiche descrivibili solo in maniera quantistica, in secondo luogo non è una legge di natura che tra mondo macroscopico e mondo microscopico vi sia una diversa fisica.

Si provi ad abbandonare allora ogni possibile descrizione empirica degli oggetti microscopici e si assuma che a livello quantistico vi siano solo enti non osservabili descrivibili matematicamente. In questa maniera il problema della misurazione si mostra a pieno: come è possibile che degli enti matematici teorici riescano a relazionarsi con ciò che viene percepito a seguito di una misurazione? In questo modo non si risolve nulla. Forse la soluzione sarà ottenuta solo con un superamento della teoria quantistica, con una rivoluzione scientifica che corregga questo problema insormontabile della misurazione.

Dal punto di vista scientifico è necessario avere una posizione realista ed empirista attenendosi al principio del realismo empirico che viene riproposto con la seguente formulazione²³⁶:

Realismo empirico: vi sono buone ragioni per credere nella realtà di quelle entità non osservabili per cui si ha una ragionevole spiegazione scientifica del fatto che non si riescano a percepirle.

²³⁶ Cfr. Fano (2007).

Questo principio può essere utile per spiegare il problema della misurazione, infatti si potrebbe motivare scientificamente la nostra incapacità empirica, come sarà mostrato nella teoria della *decoerenza*.

Sia S un sistema descritto come sovrapposizione di due autostati di una osservabile. Un apparato di misurazione si trova esclusivamente in uno stato o in un altro. Nel momento della misurazione, il sistema e l'apparato di misurazione interagiscono e si ottiene uno stato di sovrapposizione. Lo scioglimento di questo stato di sovrapposizione quantistico che risulta a seguito della misurazione non può essere spiegata dalla teoria quantistica stessa. Si potrebbe optare allora per una tra le seguenti ipotesi:

- 1) la sovrapposizione è sciolta da qualche variabile nascosta che muta la sovrapposizione in una semplice “miscela statistica classica” (Fano, 2007),
- 2) l'azione di scioglimento della sovrapposizione avviene nella coscienza dell'osservatore, che è la responsabile del collasso della funzione d'onda, come sostenevano London, Bauer, Wigner e anche in parte von Neumann. Tuttavia questa visione soggettivista del collasso della funzione d'onda sembra poco ragionevole in quanto la causalità degli eventi del mondo è di pertinenza esclusiva del mondo fisico stesso, cioè in pratica si contrappone a questa visione soggettivista la chiusura causale del mondo,

3) si può forzare il riduzionismo scientifico, introducendo un postulato che pur non spiegando il fenomeno, mostri che vi è qualcosa che scioglie la sovrapposizione ma che non si è in grado di spiegare attualmente,

4) si potrebbe negare il collasso, affermando che esso non avviene, anche se risulta il contrario. Si può fare ciò in due modi: o assumendo che la realtà è indeterminata e che gli esseri senzienti hanno accesso solo ad un aspetto di questa realtà, come sostiene Everett; oppure assumendo che gli strumenti dell'osservatore sono sistemi aperti cioè in contatto con l'ambiente nel quale si viene a disperdere l'informazione contenuta nella sovrapposizione quantistica, come affermano i sostenitori della teoria della *decoerenza*.

Parlare di misurazione di un sistema quantistico significa inevitabilmente rinunciare ad una qualche forma di isolamento del sistema fisico stesso²³⁷. Infatti nell'interazione con l'ambiente si ottiene un sistema fisico ben più ampio del "sistema + apparato" il quale non obbedisce all'equazione di Liouville quantistica²³⁸ ma ad una qualche equazione dissipativa che annulla i termini matematici legati all'interferenza. L'annullamento è spiegato fisicamente dall'incapacità dell'apparato di cogliere la sovrapposizione che si disperde nell'ambiente: è come se l'ambiente fosse un giudice che stabilisce, tra le osservabili che non comportano sovrapposizione, di mostrare volta per volta solo un valore definito dell'osservabile. Questa equazione, da determinare, viene chiamata *master equation* e sembra un'equazione che cambia la dinamica

²³⁷ Cfr. Zeh (1970).

²³⁸ Secondo il teorema di Liouville della meccanica hamiltoniana, la densità degli stati nello spazio delle fasi si conserva.

giustificando il problema della misura. Tuttavia se si accettasse questo, si avrebbe una soluzione del problema che non aggiunge altre conseguenze rilevanti dal punto di vista empirico. La *master equation* non può neanche essere assunta come confine arbitrario tra mondo classico macroscopico e mondo quantistico microscopico, sarebbe come ripercorrere la visione ortodossa già discussa. Se non si facesse uso di questo espediente ad hoc, si potrebbe argomentare che per qualche ragione biologica gli esseri senzienti non vedono alcuna sovrapposizione: sarebbe questa una spiegazione evolucionistica che è affermata da Zurek (1998) secondo cui il motivo per cui l'essere umano non vede la sovrapposizione è sostanzialmente legata al fatto che essa è irrilevante ai fini vitali. Sostenitori della decoerenza sono Joos *et al.* (2003) ed altri fisici, tra gli insoddisfatti di tale teoria invece si collocano Isham *et al.* (1994).

Ringraziamenti

Ringrazio particolarmente il prof. Vincenzo Fano per la dedizione e la cura che ha avuto nel sapermi consigliare per la stesura di questa tesi e per ogni cosa positiva e costruttiva che ho avuto in questi anni di dottorato: questa tesi ne rappresenta una dedica ed un ringraziamento. Ringrazio i due referee anonimi per il loro prezioso contributo fornito alla revisione di questa tesi. Ringrazio il prof. Gino Tarozzi per le splendide lezioni e seminari che ha tenuto sulla meccanica quantistica, i prof. Claudio Calosi e Pierluigi Graziani, Adriano Angelucci, Giovanni Macchia per i preziosi consigli e le chiacchierate avute durante questi anni di dottorato, i prof. Isabella Tassani, Stefano Bordoni, Alexander Afriat, Monica Ugaglia, per il loro prezioso supporto educativo, la dott.ssa Sara Matera, il prof. Riccardo Sturani, i prof. Martin Harper, Marcello Ceccarelli, la dott.ssa Letizia Fiorucci, mia madre Dina, mia sorella Sara e suo marito Luca, i miei amici e la prof.ssa Emanuela Caliceti cui sarò eternamente grato per i preziosi insegnamenti “quantistici”.

X. BIBLIOGRAFIA

Accardi, L., 1984. “Some Trends and Problems in Quantum Probability”, in L. Accardi, L., Frigerio, A., Gorini, V. (cur.), 1984, *Quantum Probability and Applications to the Quantum Theory of Irreversible Process*, Berlino, Springer, pp. 1-19.

Akhiezer, N.I., Glazman, I.M., 1977. *Teoriya lineinykh operatorov v Gilbertovom prostranstve. Tom I*, Vishcha Shkola, Kharkov, (*Theory of Linear Operators in Hilbert Space Volume I*, trad. en. di W. N. Everet, Bath, Pitman Advanced Publishing Program, 1981).

Akhiezer, N.I., Glazman, I.M., 1978. *Teoriya lineinykh operatorov v Gilbertovom prostranstve. Tom II*, Vishcha Shkola, Kharkov, (*Theory of Linear Operators in Hilbert Space Volume II*, trad. en. di W. N. Everet, Bath, Pitman Advanced Publishing Program, 1981).

Aharonov, Y., Popescu, S., Rohrlich, D., Skrzypczyk, P., 2013. “Quantum Cheshire Cats”, in *New Journal of Physics*, 15, 113015, pp. 1-8.

Adams, R., 1979. “Primitive Thisness and Primitive Identity”, in *Journal of Philosophy*, 76, pp. 5–26.

Aerts, D., 1998. “The Entity and Modern Physics: The Creation-Discovery View of Reality”, in Castellani, E. (cur.), 1998, *Interpreting Bodies: Classical and Quantum Objects in Modern Physics*, Princeton, Princeton University Press, pp. 223–257.

Aerts, D., Aerts, S., Broekaert, J., Gabora, L., 2000. “The violation of Bell inequalities in the macroworld”, in *Foundations of Physics*, 30, pp. 1387-1414.

Albarelli, F., 2012. “L’entropia nel paradosso di Gibbs”, tesi di laurea in teoria dei sistemi a molti corpi, disponibile al sito www.bo.infn.it/~apesci/3Thesis_Albarelli.pdf.

Armstrong, D. M., 1989. *Universals: An Opinionated Introduction*, Boulder, Westview Press.

Auletta, G., Fortunato, M., Parisi, G., 2009. *Quantum Mechanics*. New York, Cambridge University Press.

Auletta, G., Wang, S.Y., 2014. *Quantum Mechanics for Thinkers*. Singapore, Pan Stanford Publishing Pte.

Ayer, A. J., 1934. “Demonstration of the impossibility of the metaphysics”, in *Mind*, 43 (171), p. 335-345.

Ayer, A. J., 1954. *Philosophical Essays*, London, Macmillan.

Bach, A., 2007. *Indistinguishable Classical Particles*, Springer, Berlino.

Bachelard, G., 1934. *La formation de l'esprit scientifique*, Paris, Presses universitaires de France (1967, librairie philosophique J. Vrin., 5 edition, disponibile on line al sito: http://classiques.uqac.ca/classiques/bachelard_gaston/formation_esprit_scientifique/formation_esprit.pdf).

Barnette, R.L., 1978. "Does Quantum Mechanics Disprove the Principle of the Identity of Indiscernibles?", in *Philosophy of Science*, 45, pp. 466–470.

Bigaj, T., 2015. "Dissecting weak discernibility of quanta", in *Studies in History and Philosophy of Science Part B*, 50, pp.43-53.

Birkhoff, G.D., 1931. "Proof of the ergodic theorem", in *Proceedings of the National Academy of Sciences (USA)*, 17, pp. 656-660. Citato in Emch G.G., "Quantum Statistical Physics", in Butterfield J., Earman, j. (cur.), 2007, *Philosophy of Physics*, Elsevier, Oxford, pp. 1075-1170.

Birkhoff, G.D., von Neumann, J., 1936. "The Logic of Quantum Mechanics", in *Annals of Mathematics*, 37, pp. 823-843.

Birman, M. S., Solomjak, M. Z., 1987. *Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space*, Mathematics and its Applications, Dordrecht, Kluwer Academic Publisher.

Black, M., 1952. "The Identity of Indiscernibles", in *Mind*, 61, pp. 153-64.

Black, R., 2000. "Against Quidditism", in *Australasian Journal of Philosophy*, 78, 1, pp. 87-104.

Bohm, D., 1952a. "A suggested interpretation of the quantum theory in terms of 'hidden' variables, I", in *Physics Review*, 85, pp. 166–179. doi:10.1103/PhysRev.85.166

Bohm, D., 1952b. "A suggested interpretation of the quantum theory in terms of 'hidden' variables, II", in *Physics Review* 85, pp. 180–193. doi:10.1103/PhysRev.85.180

Bohr, N., 1927. "The Quantum Postulates and the Recent Development of Atomic Theory", in *Nature* (supplement), 121, pp. 580-590.

Bohr, N., 1985. *Niels Bohr's Collected Works*, Amsterdam, North Holland, J. Kalckar.

Boltzmann, L., 1897. *Vorlesungen über die Principe der Mechanik*, Barth, Leipzig.

Born, M., 1943. *Experiment and Theory in Physics*, Cambridge, Cambridge University Press.

Bose, S., N., 1924. "Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese", in *Zeitschrift für Physik* 26, pp. 178–181. Bibcode:1924ZPhy...26..178B. doi:10.1007/BF01327326.

Bub, J., 1968. "The Daneri–Loinger–Prosperi quantum theory of measurement", in *Il Nuovo Cimento B*, 57, pp. 503–520. doi:10.1007/BF02710216.

Butterfield, J., 1993. "Interpretation and Identity in Quantum Theory", in *Studies in History and Philosophy of Science*, 24, pp. 443–476.

Caliceti, E., Graffi, S., Maioli, 1980. "Perturbation theory of odd anharmonic oscillators", in *Communication in Mathematical Physics*, 75, pp. 51–66.

Callender, C., 2011. "Metaphysics and Philosophy of Science". in French, S., Saatsi, J., (cur.), 2011, *The Continuum Companion to the Philosophy of Science*, London, Continuum, pp. 33–54.

Calosi, C., Fano, V., Graziani, P., Tarozzi, G., (unpublished): Disponibile al sito http://philsci-archive.pitt.edu/9021/1/Statistical_Realism_Versus_Wave_Realism_in_the_Foundations_of_Quantum_Mechanics.pdf

Capra, F., 1975. *The Tao of Physics*, Colorado, Shambhala Publications, (*Il Tao della Fisica*, trad.it., Milano, Adelphi, 1989).

Carnap, R., 1932. “Überwindung der Metaphysik durch Logische Analyse der Sprache” in *Erkenntnis*, 2, (“The Elimination of Metaphysics Through Logical Analysis of Language”, trad. en., in Sarkar, Sahotra, (cur.), 1996, *Logical empiricism at its peak: Schlick, Carnap, and Neurath*, New York, Garland Pub., pp. 10–31).

Carnap, R., 1936. “*Testability and meaning*”, in *Philosophy of science*, 3, pp. 420-471, 4 (1937), pp. 2-40.

Carnap, R., 1950. *Logical Foundations of Probability*, Chicago, University of Chicago Press.

Cassirer, E., 1937. *Determinismus und Indeterminismus in der modern Physik*, Goteborg, Elanders Boktryckeri Aktiebolag, (*Determinism and Indeterminism in Modern Physics*, trad. en., New Haven, Yale University, 1956).

Castellani, E., 1998a. "Introduction", in Castellani, E. (cur.), 1998, *Interpreting Bodies: Classical and Quantum Objects in Modern Physics*, Princeton, Princeton University Press, pp. 3–17.

Castellani, E., 1998b. "Galilean Particles: An Example of Constitution of Objects", in Castellani, E. (cur.), 1998, *Interpreting Bodies: Classical and Quantum Objects in Modern Physics*, Princeton, Princeton University Press, pp. 181–194.

Caulton, A., 2013. "Discerning "indistinguishable" quantum systems", in *Philosophy of Science*, 80, pp. 49-72.

Church, A., 1956. *Introduction to Mathematical Logic*, vol. 1, Princeton, Princeton University Press.

Cortes, A., 1976. "Leibniz's Principle of the Identity of Indiscernibles: A False Principle", in *Philosophy of Science*, 43, pp. 491–505.

Da Costa, N.C.A., Krause, D., 1994. "Schrödinger logics", in *Studia Logica*, 53 (4), pp. 533-550.

Dalla Chiara, M. L., Toraldo di Francia G., 1973. "A logical Analysis of Physical Theories", in *Rivista del Nuovo Cimento*, 3, pp. 1-20.

Dalla Chiara, M. L. and Toraldo di Francia, G., 1993. “Individuals, Kinds and Names in Physics”, in Corsi, G., Dalla Chiara, M. L., Ghirardi, G. C., (cur.), 1993, *Bridging the Gap: Philosophy, Mathematics, Physics*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 261–283.

Dalla Chiara, M. L. and Toraldo di Francia, G., 1995. “Identity Questions from Quantum Theory”, in Gavroglu, K., Stachel, J. J., Wartofsky, M. W., (cur.), 1995, *Physics, Philosophy and the Scientific Community*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 39–46.

Dalla Chiara, M. L., Giuntini, R. and Krause, D., 1998. “Quasiset Theories for Microobjects: A Comparison”, in Castellani, E., (cur.), 1998, *Interpreting Bodies: Classical and Quantum Objects in Modern Physics*, Princeton, Princeton University Press, pp. 142–152.

Darby, G., 2010. “Quantum Mechanics and Metaphysical Indeterminacy”, in *Australasian Journal of Philosophy*, 88, pp. 227–245.

D’Espagnat, B., Klein, E., 1993. *Regards sur la matière*, Fayard, Paris.

De Broglie, L., 1960. *Non-Linear Wave Mechanics - A Causal Interpretation*, Elsevier, Amsterdam.

De Finetti, B., 1930. “Funzione caratteristica di una funzione aleatoria”, in *Memorie della R. Accademia dei Lincei*, (IV), fasc. V, pp. 86-133. Disponibile al sito: www.brunodefinetti.it/Opere.htm

De Finetti, B., 1937. “La prévision, ses lois logiques, et ses sources objectives”, in *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 7, pp. 1-68.

Debye, P., 1912. “Zur Theorie der spezifischen Wärme”, in *Annalen der Physik*, 39, pp. 789-839.

Denkmayr, T., Geppert, H., Sponar, S., Lemmel, H., Matzkin, A., Tollaksen, J., Hasegawa, Y., 2014. “Observation of a quantum Cheshire Cat in a matter-wave interferometer experiment”, in *Nature Communications*, 5, 4492, disponibile al sito: www.nature.com/ncomms/2014/140729/ncomms5492/full/ncomms5492.html

Dieks, D., Vermaas, P., 1998. *The Modal Interpretation of Quantum Mechanics*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Dieks, D., 2010. “The Gibbs paradox revisited”, in Dieks, D., Gonzalez, W. J., Hartmann, S., Uebel, T., and M. Weber (cur.), 2010, *Explanation, Prediction and Confirmation*, New York, Springer, pp. 367–377.

Dieks, D., Versteegh, M. A. M., 2008. “Identical quantum particles and weak discernibility”, in *Foundations of Physics*, 38, pp. 923–934.

Dieks, D., Lubberdink, A., 2011. “How classical particles emerge from the quantum world”, in *Foundations of Physics*, 41, pp. 1051–1064.

Dieks, D., 2014. “The Logic of Identity: Distinguishability and Indistinguishability in Classical and Quantum Physics”, in *Foundations of Physics*, 44, pp. 1302–1316.

Della Rocca, M., 2005. “Two Spheres, Twenty Spheres, and the Identity of Indiscernibles”, in *Pacific Philosophical Quarterly*, 86, pp. 480–492.

Deutsch, D., 1985. “Quantum Theory, the Church-Turing Principle and the Universal Quantum Computer”, in *Proceedings of the Royal Society A*, 400, pp. 97–117.

Dirac, P., A., M., 1926. “On the Theory of Quantum Mechanics”, in *Proceedings of the Royal Society A*, 112, 762, pp. 661–77. Bibcode:1926RSPSA.112..661D.

Dirac, P. A. M., 1929. “Quantum Mechanics of Many-Electron Systems”, in *Proceedings of the Royal Society A*, 123, 792, pp. 714–733. Disponibile al sito <https://archive.org/details/DiracPrinciplesOfQuantumMechanics>.

Dirac, P., A., M., 1930. *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford, Oxford University Press (1958, Oxford, Oxford University Press).

Domenach, G. and Holik, F., 2007. “A Discussion on Particle Number and Quantum Indistinguishability”, in *Foundations of Physics*, 37, pp. 855–878.

Dorey, P., Dunning, C., Tateo, R., 2004. “A reality proof in PT-symmetric quantum mechanics”, in *Czechoslovak Journal of Physics*, 54, pp. 35-41.

Duhem, P., 1906. *La théorie physique. Son objet et sa structure*, Paris, Rivière, (*La teoria fisica: Il suo oggetto e la sua struttura*, trad. it. di D. Ripa di Meana, S. Petruccioli, Bologna, Il Mulino, 1978).

Dürr, D., Goldstein, S., Zanghì, N., 2013. *Quantum physics without quantum philosophy*, Berlin, Springer.

Edwards, S., F., Anderson, P., W., 1975. “Theory of spin glasses”, in *Journal of physics: condensed matter*, V, pp. 965-974.

Ehrenfest, P., Ehrenfest, T., 1911. *Begriffliche Grundlagen der statistischen Auffassungen in der Mechanik*, volume 4/22 of *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Teubner, Leipzig.

Einstein, A., 1905. “Ueber die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen”, in *Annalen der Physik*, 17, pp. 549-560.

Einstein, A., 1906. "Eine neue Bestimmung der Moleküldimension", in *Annalen der Physik*, 19, pp. 289-306.

Einstein, A., 1907. "Die Plancksche Theorie der Strahlung und die Theorie der spezifischen Wärme", in *Annalen der Physik*, 22, pp. 180-190.

Einstein, A., 1911. "Elementare Betrachtungen über die thermische Molekularbewegung in festen Körpern", in *Annalen der Physik*, 35, pp. 679-694.

Einstein, A., 1925. "Quantentheorie des einatomigen idealen Gases", in *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, pp. 3-14.

Einstein, A., 1927a. "Theoretisches und Experimentelles zur Frage der Lichtentstehung", in *Zeitschrift für angewandte Chemie*, 40, p. 546.

Einstein, A., 1927b. Contribution to Discussion générale des idées émises, in Solvay, p. 253 (citato in Bohr, 1985, p. 101).

Einstein, A., Podolsky, B., Rosen, N., (EPR), 1935. "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?" in *Physical Review*, 47, pp. 777-780.

Einstein, A., Born, M., 1969. *Briefwechsel 1916-1955*, München, Nymphenburger Verlagshandlung, (*Scienza e vita. Lettere 1916-1955*, trad. it., Torino, Einaudi, 1973).

Emch, G., G., 2007. “Quantum Statistical Physic”, in Butterfield, J., Earmann, J., (cur.), 2007, *Philosophy of Physics part B*, Oxford, Elsevier, pp. 1075-1170.

Esfeld, M., 2004. “Quantum entanglement and a metaphysics of relations”, in *Studies in History and Philosophy of Science Part B*, 35(4), pp. 601-617.

Esfeld, M., 2014. “Quantum Humeanism, or: physicalism without properties”, in *The Philosophical Quarterly*, 64, 256, pp. 453-470.

Fano, V., 2004. “Non-materiality of non-locality”, in *Foundations of Physics*, 34, pp. 2005-2013.

Fano, V., 2005. *Comprendere la scienza. Un'introduzione all'epistemologia delle scienze naturali*, Napoli, Liguori editore.

Fano, V., 2006. “Quantum non-locality and the mathematical representation of experience”, in Garola, C., Rossi A., (cur.), 2006, *The Foundations of Quantum Mechanics. Historical Analysis and Open Questions – Cesena 2004*, Singapore, World Scientific, pp. 142-155.

Fano, V., 2007. “Decoerenza”, disponibile al sito: <https://viverestphilosophari.wordpress.com/2007/03/16/decoerenza/>.

Fano, V., 2012. *I Paradossi di Zenone*. Roma, Carocci editore.

Fano, V., Graziani, P., Macrelli, R., Tarozzi, G., 2016. “Are Gandy Machine Really Local?”, in Müller V. C. (cur.), 2015, *Computing and Philosophy, selected papers from IACAP 2014*, Berlino, Springer, pp. 27-44.

Fano, V., Macrelli, R., 2014. “Il determinismo: un’introduzione epistemologica”, in Bordoni, S., Matera, S. (cur.), 2014, *Forecasting the Future. Scientific, Philosophical, and Historical Perspectives*, Isonomia, Rivista online di Filosofia – Epistemologica, Urbino, Università degli Studi di Urbino Carlo Bo, pp. 13-29.

Fermi, E., 1926. “On the Quantization of the Monoatomic Ideal Gas” in *Rendiconti Lincei*, 3, pp. 145–9. (trad. it. di A., Zannoni, “Sulla quantizzazione del gas perfetto monoatomico”, 1999, disponibile al sito [arXiv:cond-mat/9912229](https://arxiv.org/abs/cond-mat/9912229) [*cond-mat.stat-mech*]).

Forrest, P., 2012. “The Identity of Indiscernibles”, in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2012 Edition)*, Edward N. Zalta, The Metaphysics Research Lab Center for the Study of Language and Information Stanford University, Stanford, disponibile al sito <http://plato.stanford.edu/archives/win2012/entries/identity-indiscernible/>.

Frege, G., 1884. *Die Grundloggen der Arithmetik-Eine logisch mathematische untersuchung über dem Begriff der Zahl*, Breslau, Koebner, (trad. fr. di C. Imbert, *Les Fondaments de l'Arithmétique*, Paris, Editions du Seuil, 1969).

French, S., 1988. "Quantum Physics and the Identity of Indiscernibles", in *British Journal of the Philosophy of Science*, 39, pp. 233-46.

French, S., 1989a. "Why the Principle of the Identity of Indiscernibles is not Contingently True Either", in *Synthese*, 78, pp. 141-66.

French, S., 1989b. "Identity and Individuality in Classical and Quantum Physics", in *Australasian Journal of Philosophy*, 67, pp. 432–446.

French, S., 1998. "On the Withering Away of Physical Objects", in Castellani, E. (cur.), 1998, *Interpreting Bodies: Classical and Quantum Objects in Modern Physics*, Princeton, Princeton University Press, pp. 93–113.

French, S., 2006. "Structure as a Weapon of the Realist", in *Proceedings of the Aristotelian Society*, 106, pp. 1–19.

French, S., 2011. "Identity and Individuality in Quantum Theory", in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2011 Edition)*, Edward N. Zalta, The Metaphysics Research Lab Center for the Study of Language and Information

Stanford University, Stanford, disponibile al sito
<http://plato.stanford.edu/archives/sum2011/entries/qt-idind/>.

French, S. and Krause, D., 1999. “The Logic of Quanta”, in Cao, T. (cur.), 1999, *Conceptual Foundations of Quantum Field Theory* Cambridge, Cambridge University Press, pp. 324–342.

French, S. and Krause, D., 2003. “Quantum Vagueness”, in *Erkenntnis*, 59, pp. 97–124.

French, S. and Krause, D., 2006. *Identity in Physics: A Formal, Historical and Philosophical Approach*, Oxford, Oxford University Press.

French, S. and Krause, D., 2010. “Remarks on the Theory of Quasi-sets”, in *Studia Logica*, 95, pp. 101-124.

French, S. and Redhead, M., 1988. “Quantum Physics and the Identity of Indiscernibles”, in *British Journal for the Philosophy of Science*, 39, pp. 233–246.

French, S., Rickles, D., 2003. “Understanding Permutation Symmetry”, in Brading, K., Castellani, E. (cur.), 2003, *Symmetries in Physics: New Reflections*, Cambridge, Cambridge University Press, pp. 212-238.

Friebe, C., 2014. "Individuality, distinguishability and (non-)entanglement: A defense of Leibniz's principle", in *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, pp. 89-98, disponibile al sito <http://dx.doi.org/10.1016/j.shpsb.2014.08.002>.

Gallavotti, G., 1995. "Trattatello di Meccanica Statistica", in *Quaderni del CBR-GNFM*, vol 50, pp. 1-350, disponibile al sito: <http://141.108.10.74/pagine/deposito/1995/E.pdf>

Galindo, A., Pascual, P., 1989. *Mecánica Cuántica*, Madrid, Eudema.

Gamow, G., 1940. *Mr Tompkins in Wonderland*, New York, Macmillan.

Gasperini, M., 2015. *Relatività Generale e Teoria della Gravitazione*, Berlino, Springer.

Geach, P., T., 1980. *Reference and Generality*, 3rd ed, New York, Cornell University Press.

Gentile, G., 1940. "Osservazioni sopra le statistiche intermedia", in *Nuovo Cimento*, 17, pp. 493-497.

Ghirardi, G.C., Rimini, A., Weber, T., 1986. “Unified dynamics for microscopic and macroscopic systems”, in *Physical Review D*, 34, p. 470-491, doi:10.1103/PhysRevD.34.470.

Gibbs, J. W., 1876. “On the Equilibrium of the Heterogeneous Substances”, in *Transactions of the Connecticut Academy*, III, pp. 108-248. disponibile al sito http://web.mit.edu/jwk/www/docs/Gibbs1875-1878_Equilibrium_of_Heterogeneous_Substances.pdf.

Gibbs, J. W., 1902. *Elementary Principles in Statistical Mechanics Developed with Special Reference to the Rational Foundation of Thermodynamics*, New York, Charles Scribner’s Sons.

Giuntini, R., Mittelstaedt, P., 1989. “The Leibniz Principle in Quantum Logic”, in *International Journal of Theoretical Physics*, 28, 2, pp. 159-168.

Gleason A.M., 1957. “Measures on the closed subspaces of a Hilbert space”, in *Journal of Mathematics and Mechanics*, 6, pp. 885-893.

Gouy, L., 1888. “Note sur le mouvement brownien”, in *Journal de Physique*, 2, 7, pp. 561-564.

Graffi, S. 1993. *Le Radici della Quantizzazione*, Quaderni di fisica teorica, Pavia, Università degli studi di Pavia.

Graffi, S., 2003. *Alcuni Aspetti Matematici della Meccanica Quantistica*, Bologna, Università degli studi di Bologna.

Graziani, P. 2014. “Tarozzi on change of logic”, in Fano, V. (cur.), 2014, *Gino Tarozzi Philosopher of Physics*, Milano, Franco Angeli, pp. 124-133.

Greenberger, D. M., Svozil, K., 2005. “Quantum Theory Looks at Time Travel”, in Elitzur, A. C., Dolev, S., Nancy Kolenda, N. (cur.), 2005, *Quo Vadis? Quantum Mechanics*, Berlino, Springer, pp. 63-71, disponibile online <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0506027v2>.

Grünbaum, A., 1977. “Absolute and Relational Theories of Space and Space-Time”, in Earman, J., Glymour, C., Stachel, J. (cur.), in *Foundations of Space-Time Theories*, Minneapolis, University of Minnesota Press, pp. 303-373.

Gurney, R., W., Condon, E., U., 1928. “Quantum mechanics and radioactive disintegration”, in *Nature*, 122, p. 439.

Gurney, R., W., Condon, E., U., 1929. “Quantum mechanics and radioactive disintegration”, in *Physical Review*, 33, pp. 127-140.

Hacking, I., 1975. “The Identity of Indiscernibles”, in *Journal of Philosophy*, 72 (9), pp. 249-256.

Harman, G., H., 1965. “The Inference to the Best Explanation”, in *The Philosophical Review*, 74 (1), pp. 88-95.

Hawley, K., 2006a. “Identity in Physics, by Steven French and Décio Krause, reviewed”, in *International Studies in the Philosophy of Science*, 21,1, pp. 106-108.

Hawley, K., 2006b, “Weak Discernibility”, in *Analysis*, 66 (4), pp. 300–303.

Hawley, K., 2009. “Identity and Indiscernibility”, in *Mind*, 118, pp. 101–119.

Heidegger, M., 1929. *Vas ist Metaphysik*, Bonn, Cohen, (*Che cos'è la metafisica*, trad. it. di F. Volpi, Milano, Adelphi, 1987).

Hesse, M., 1963. *Models and Analogies in Science*, London, Sheed and Ward, (reprinted Notre Dame, University of Notre Dame Press, 1966).

Höffe, O., 1992. *Immanuel Kant*, München, Verlag C.H. Beck, (*Immanuel Kant*, trad. it. di S. Carboncini, Bologna, Il Mulino, 1986).

Howard, D., 1990. “Nicht sein kann was nicht sein darf, Or the Pre-history of EPR, 1909-1935”, in Miller, A. I. (cur.), 1990, *Sixty-Two Years of Uncertainty*.

Historical, Philosophical, and Physical Inquiries into the Foundations of Quantum Mechanics, New York, Plenum, pp. 61-111.

Howard, D., 2015. *Anche Einstein gioca a dadi, la lunga lotta con la meccanica quantistica*, Roma, Carocci.

Huggett, N., 1995. "What are Quanta, and Why Does it Matter?", in *Proceedings of the 1994 Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, 2, East Lansing, Philosophy of Science Association, 1995, pp. 69–76.

Huggett, N., 1997. "Identity, Quantum Mechanics and Common Sense", in *The Monist*, 80, pp. 118–130.

Huggett, N., 2003. "Quartiles and the Identity of Indiscernibles", in Brading, K. A., Castellani, E. (cur.), 2003, *Symmetries in Physics: New Reflections*, Cambridge, Cambridge University Press, pp. 239-249.

Huggett, N., Norton, J., 2014. "Weak discernibility for quanta, the right way", in *British Journal for the Philosophy of Science*, 65, pp. 39-58.

Husserl, E., 1900. *Third Logical Investigation*, (London, Routledge and Kegan Paul, 1970).

Jammer, M., 1966. *The conceptual development of quantum mechanics*, New York, McGraw-Hill.

Jammer, M., 1974. *The philosophy of quantum mechanics*, New York, Wiley.

Jaeger, G., 2010. “Individuation in Quantum Mechanics and Space-Time”, in *Foundations of Physics*, 40, pp. 1396-1409.

Jarrett, J., P., 1984. “On the physical significance of the locality conditions in Bell argument”, in *Noûs*, 18, pp. 569–589.

Jaynes, E., T., 1992. “The Gibbs Paradox”, in Smith, C., R., Erickson, G., J. e Neudorfen, P., O. (cur.), 1992, *Maximum Entropy and Bayesian Methods*, Dodrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 1-22.

Joos, E., Zeh, H.D., Kiefer, C., Giulini, D.J.W., Kupsch, J., Stamatescu, I.-O., 2003. *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory*, Berlin, Springer.

Kant, I., 1781. *Kritik der reinen Vernunft*, Riga, J. F. HartKnoch, (*Critica della ragion pura*, trad. it. testo on-line disponibile al sito <http://filosofando.altervista.org/testi/CriticaDellaRagionPura.pdf>)

Kaplan, D., 1975. "How to Russell a Frege Church", in *Journal of Philosophy*, 72, pp. 716-729.

Kato, T., 1976. *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, Berlin.

Kreiser, L., Gottwald, S., Stelzner, W., 1990. *Nichtklassische Logik. Eine Einführung*. Berlin, Akademie-Verlag, pp. 41-45.

Khinchin, A., 1957. *Mathematical foundations of information theory*, New York, Dover.

Kolmogorov, A., N., 1933. *Grundbegriffeder Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Berlino, Springer, (*Foundations of the theory of probability*, trad. en. di N. Morrison, New York, Chelsea, 1956).

Krause, D., 1992. "On a Quasi-set Theory", in *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 33, pp. 402-411.

Isham, C., Linden, N., Schreckenberg, S., 1994. "The Classification of Decoherence Functionals: An Analogue of Gleason's Theorem", in *Journal of Mathematical Physics*, 35, pp. 6360-6370.

Ladyman, J., 1998. "What is Structural Realism?", in *Studies in History and Philosophy of Science*, 29, pp. 409-424.

Ladyman, J., 2007. “On the Identity and Diversity of Objects in a Structure”, In *Proceedings of the Aristotelian Society Supplementary*, 81, pp. 23-43.

Ladyman, J., 2014. “Structural realism”, in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta, The Metaphysics Research Lab Center for the Study of Language and Information Stanford University, Stanford, disponibile al sito <http://plato.stanford.edu/entries/structural-realism/>.

Ladyman, J. and Bigaj, T., 2010. “The Principle of Identity of Indiscernibles and Quantum Mechanics”, in *Philosophy of Science*, 77, pp. 117–136.

Lam, V., Wütrich, C., 2014. “No categorial support for radical ontic structural realism”, in *The British Journal for the Philosophy of Science*, 66, pp. 605-634.
doi: 10.1093/bjps/axt053

Laplace, P.S., 1814. *Essay philosophique sur les probabilités*, Paris, Mecourcier, disponibile online al sito: <http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PID=PPN615913083>.

Laudan, L., 1981. “A Confutation of Convergent Realism”, in *Philosophy of Science*, 48, 1, pp. 19-49.

Laudisa, F., 2015. *Albert Einstein e l'immagine scientifica del mondo*. Roma, Carocci editore.

Lavine, S., 1991. "Is Quantum Mechanics an Atomistic Theory?", in *Synthese*, 89, pp. 253–271.

Leibniz, G. W., 1720. *Monadologie*, (La monadologia, a cura di G. De Ruggiero, Bari, Laterza, pp. 119-121; 123-133; 139-147, 1948).

Lewis, D., 1986a. *On the Plurality of Worlds*, Oxford, Blackwell.

Lewis, D., 1986b. *Philosophical Papers: Volume II*, New York, Oxford University Press, pp. x-xi.

Lewis, D., 1998. "Many, but Almost One", in Castellani, E. (cur.), 1998, *Interpreting Bodies: Classical and Quantum Objects in Modern Physics*, Princeton, Princeton University Press, pp. 30–45.

Lieb, E. H., Lebowitz, J., 1972. "The constitution of matter: existence of thermodynamics for systems composed of electrons and nuclei", in *Advances in mathematics*, IX, pp. 316-398.

Lieb, E.H., Yngvason, J., 1999. “The physics and mathematics of the second law of thermodynamics (*Physics Reports 310 (1999) 1–96*)”, in *Physics Reports*, 314, 6, p. 669.

Lieb, E. H., Wu Fa Yueh, 1972. “Two-dimensional ferroelectric models”, in Domb, C., Green, M.S. (cur.), 1972, *Phase transitions and critical phenomena*, vol. I, London, Academic Press, pp. 332-490).

Lowe, E., J., 1998. “Entity, Identity and Unity”, in *Erkenntnis*, 48, 2, pp. 191-208.

Lukasiewicz, J., 1970. *Jan Lukasiewicz: Selected Works*, Amsterdam, North Holland Publishing Company.

Ma, X., S., Koflera, J., Qarrya, A., Tetika, N., Scheidla, T., Ursina, R., Ramelowa, S., Herbst, T., Ratschbacher, L., Fedrizzia, A., Jenneweina, T., Zeilinger, A. 2013. “Quantum erasure with causality disconnected choice”, in *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 110, 4, pp. 1221-1226.

Macrelli, R., Fano, V., “A new weak discernibility”, in preparation.

Maldacena, J., Susskind, L., 2013. “Cool horizons for entangled black holes”, in *Fortschritte der Physik*, 61, pp. 781-811.

Manin, Y. I., 1976. “Mathematical Problems I: Foundations”, in Browder, F. (cur.), 1976, *Mathematical Problems arising from Hilbert Problems. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, XXVIII, Providence, American Mathematical Society*, p. 36.

Margenau, H., 1944. “The Exclusion Principle and its Philosophical Importance”, in *Philosophy of Science*, 11, pp. 187-208.

Markosian, N., 1998, “Simples”, in *The Australasian Journal of Philosophy*, 76, pp. 213–229.

Massimi, M., 2001. “Exclusion Principle and the Identity of Indiscernibles: a Response to Margenau's Argument”, in *British Journal for the Philosophy of Science*, 52, pp. 303–330.

Maudlin, T., 1994. *Quantum Non-locality and Relativity*, Oxford, Blackwell.

Maudlin, T., 1998. “Part and Whole in Quantum Mechanics”, in Castellani, E. (cur.), 1998, *Interpreting Bodies: Classical and Quantum Objects in Modern Physics*, Princeton, Princeton University Press, pp. 46–60.

Merzbacher, E., 1961. *Quantum Mechanics*, New York, John Wiley.

Mittelstaedt, P. and Castellani, E., 2000. “Leibniz's Principle, Physics and the Language of Physics”, in *Foundations of Physics*, 30, pp. 1585–1604.

Molinari, L.G., 2013. “Seconda quantizzazione”, Università di Milano, note on line <http://pcteserver.mi.infn.it/~molinari/NOTES/secqtz.pdf>

Moretti, V., 2010. *Teoria Spettrale e Meccanica Quantistica*, Milano, Springer-Verlag Italia.

Morganti, M., 2009. “Inherent Properties and Statistics with Individual Particles in Quantum Mechanics”, in *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 40, pp. 223–231.

Morganti, M., Dorato, M., 2013. “Grades of Individuality. A Pluralistic View of Identity in Quantum Mechanics and in the Sciences”, in *Philosophical Studies*, 163, 3, pp. 591-610.

Morganti, M., 2013. *Combining Science and Metaphysics: Contemporary Physics, Conceptual Revision, and Common Sense*, London, Palgrave Macmillan.

Müller, I., 2004. “Consideration About the Gibbs Paradox”, in *Waves and Stability in Continuous Media, Proceedings of the 12th conference on WASCOM 2003, Singapore: World Scientific Publishing Company*, pp. 341-351.

Muller, F., A., 2011. “Withering away, weakly”, in *Synthese*, 180, pp.223-233.

Muller, F., A. and Saunders, S., 2008. “Discerning Fermions”, in *British Journal for the Philosophy of Science*, 59, pp. 499–548.

Muller, F., A. and Seevinck, M., 2009. “Discerning Elementary Particles”, in *Philosophy of Science*, 76, pp. 179–200.

Natanson, L., 1911. “Über die statische theorie der Strahlung”, in *Physikalische Zeitschrift*, 12, pp. 659-666.

Naimark, M., A., 1968a. *Linear Differential Operators in Hilbert Space Part I*, New York, Ungar.

Naimark, M., A., 1968b. *Linear Differential Operators in Hilbert Space Part II*, New York, Ungar.

Nickles, T., 2014. “Scientific Revolutions”, in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2014 Edition), Edward N. Zalta, The Metaphysics Research Lab Center for the Study of Language and Information Stanford University, Stanford, disponibile al sito <http://plato.stanford.edu/archives/sum2014/entries/scientific-revolutions/>.

Niiniluoto, I., 1987. *Truthlikeness*, Dordrecht, D. Reidel publishing company.

O'Leary-Hawthorne, J., 1995. "The Bundle Theory of Substance and the Identity of Indiscernibles", in *Analysis*, 55, pp. 191–196.

Parkinson, G. H. R., 1965. *Logic and Reality in Leibniz's Metaphysics*, Oxford, Clarendon Press

Pauli, W., 1985. *Wissenschaftlicher Briefwechsel mit Bohr, Einstein, Heisenberg u. a. vol II, 1930-1939*, Berlin, Springer.

Pegg, D., T., 2014. "Quantum Mechanical Model of a Time Travel Paradox", in *Cosmology*, 18, pp. 171-186.

Penrose, R., 2004. *The road to reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*, New York, Vintage Books, (*La strada che porta alla realtà. Le leggi fondamentali dell'universo*, trad. it. Di E. Diana, Milano, Rizzoli, 2011).

Piazza, L., Lummen, T., T., A., Quiñonez, E., Murooka, Y., Reed, B., W., Barwick, B., Carbone, F., 2015. "Simultaneous observation of the quantization and the interference pattern of a plasmonic near-field". In *Nature Communications*. 6, 6407 doi: 10.1038/ncomms7407.

Planck, M., 1900a. "Ueber eine Verbesserung der Wienschen Spektralgleichung", in *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*, 2, pp. 202-204.

Planck, M., 1900b. “Zur Theorie des Gesetzcs der Energieverteilung in Normalspektrum”, in *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*, 2, pp. 237-245.

Price, H., 2001. “Backward causation, hidden variables, and the meaning of completeness”, in *PRAMANA - Journal of Physics (Indian Academy of Sciences)*, 56, pp. 199-209.

Potrc, M. and Horgan, T., 2008. *Austere Realism: Contextual Semantics Meets Minimal Ontology*, Cambridge, MIT Press.

Post, H., 1963. “Individuality and Physics”, in *The Listener*, 70, pp. 534–537, ristampato in *Vedanta for East and West*, 32, pp. 14–22.

Putnam, H., 1969. “Is Logic empirical?”, in Cohen, R.S., Wartofsky, M.W. (cur.), 1969, *Boston Studies in the Phylosophy of Science*, vol. V, Dordrecht, Reidel, pp. 216-241.

Putnam, H., 1981. *Reason, Truth and History*, Cambridge, Cambridge University Press. (“Ragione, verità e storia”, trad. it. di A. N. Radicati di Bronzolo, Milano, il Saggiatore, 1985).

Quine, W., V., O., 1969. “Speaking of Objects”, in *Proceedings and Addresses of the American Philosophical Association*, 31, pp. 5-22.

Quine, W. V. O., 1976a. “Grades of Discriminability”, in *Journal of Philosophy*, 73, pp. 113–116.

Quine, W. V. O., 1976b. “Whither Physical Objects?”, in Cohen, R. S., Feyerabend, P. K., Wartofsky, M. (cur.), 1976, *Essays in Memory of Imre Lakatos*, Dordrecht, Reidel, pp. 497–504.

Redhead, M., 1975. “Symmetry in Intertheory Relations”, in *Synthese*, 32, pp. 77–112.

Redhead, M. and Teller, P., 1991. “Particles, Particle Labels, and Quanta: the Toll of Unacknowledged Metaphysics”, in *Foundations of Physics*, 21, pp. 43–62.

Redhead, M. and Teller, P., 1992. “Particle Labels and the Theory of Indistinguishable Particles in Quantum Mechanics”, in *British Journal for the Philosophy of Science*, 43, pp. 201–218.

Reed, M., Simon, B., 1978. *Methods of Modern Mathematical Physics, vol. IV, Analysis of Operators*, New York, Academic Press.

Reichenbach, H., 1944. *Philosophic Foundations of Quantum Mechanics*, Berkley and Los Angeles, University of California Press, disponibile al sito <https://archive.org/details/philosophicfound029245mbp>.

Reichenbach, H., 1998. "The Genidentity of Quantum Particles", in Castellani, E. (cur.), 1998, *Interpreting Bodies: Classical and Quantum Objects in Modern Physics*, Princeton, Princeton University Press, pp. 61–72.

Renninger, M., 1960. "Messungen ohne Störung des Messobjekts (Observations without disturbing the object)", in *Zeitschrift für Physik*, 158, pp. 417-421.

Resnik, M., 1990. "Between Mathematics and Physics", in *Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, 2, pp. 369-378.

Rodriguez-Pereyra, G., 2004. "The Bundle Theory Is Compatible with Distinct but Indiscernible Particulars", in *Analysis*, 64, pp. 72-81.

Rossanese, E., 2015. "Lecture Critiche di Combining Science and Metaphysics. Contemporary Physics, Conceptual Revision and Common Sense", in *Aphex, Portale italiano di filosofia analitica*, disponibile al sito: http://www.aphex.it/public/file/Content20150323_APhEx11,2014LetturecriticheCombiningRossanese.pdf.

Russell, B., 1940. *An Inquiry into Meaning and Truth*, London, Allen and Unwin.

Saunders, S., 2003. "Physics and Leibniz's Principles", in Brading, K., Castellani, E. (cur.), 2003, *Symmetries in Physics: Philosophical Reflections*, Cambridge, Cambridge University Press.

Saunders, S., 2006. "Are Quantum Particles Objects?", in *Analysis*, 66, pp. 52–63.

Schaffer, J., 2008. "Monism", in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2008 Edition), Edward N. Zalta, The Metaphysics Research Lab Center for the Study of Language and Information Stanford University, Stanford, disponibile al sito <http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/monism/>.

Schrödinger, E., 1926a. "Quantisierung als Eigenwertproblem (erste Mitteilung)", in *Annalen der Physik*, 79, pp. 361-376. "Quantizzazione. come problema agli autovalori (prima comunicazione)", trad. it. di S. Antoci, disponibile al sito: <http://ipparco.roma1.infn.it/pagine/deposito/archivio/schroedinger.html>.

Schrödinger, E., 1926b. "Quantisierung als Eigenwertproblem (zweite Mitteilung)", in *Annalen der Physik*, 79, pp. 489-527, "Quantizzazione come problema agli autovalori (seconda comunicazione)", trad. it. di S. Antoci, disponibile al sito: <http://ipparco.roma1.infn.it/pagine/deposito/archivio/schroedinger.html>.

Schrödinger, E., 1926c. Quantisierung als Eigenwertproblem (vierte Mitteilung), in *Annalen der Physik*, 81, pp. 109-139, “Quantizzazione come problema agli autovalori (quarta comunicazione)” trad. it. di S. Antoci, disponibile al sito: <http://ipparco.roma1.infn.it/pagine/deposito/archivio/schroedinger.html>.

Schrödinger, E., 1952. *Science and Humanism: Physics in Our Time*, Cambridge, Cambridge University Press.

Shapere, D., 1990. “The Origin and Nature of Metaphysics”, in *Philosophical Topics*, 18, pp. 163-174.

Sherrington, D., Kirkpatrick, S., 1975. “Solvable Model of a Spin-Glass”, in *Physical Review Letters*, 35, pp. 1792-1796, doi: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.35.1792>.

Shin, K., 2002. “On the reality of the eigenvalues for a class of PT-symmetric oscillators”, in *Communications in Mathematical Physics*, 229, 3, pp. 543–564.

Shin, K., 2005. “Eigenvalues of PT-symmetric oscillators with polynomial potentials”, in *Journal of Physics A*, 38, 27, pp. 6147–6166.

Simons, P., 1998. “Farewell to Substance: A Differentiated Leave-taking”, in *Ratio*, 11, pp. 235-252.

Simons, P., M., 1982. “The Formalization of Husserl’s Theory of Parts and Wholes”, in Smith, B. (cur.), 1982, *Parts and Moments. Studies in Logic and Formal Ontology*, Munich, Philosophia, pp. 113–159.

Smith, N. J., 2008. “Why Sense Cannot Be Made of Vague Identity”, in *Noûs*, 42, pp. 1–16.

Smolukowski, M., 1906. “Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekular Bewegung und der Suspensionen”, in *Annalen der Physik*, 21, pp. 755-780.

Smolukowski, M., 1916. “Drei Vorträge über Diffusion, Brownsche Molekularbewegung und Koagulation von Kolloidteilchen”, in *Physikalische Zeitschrift*, 17, pp. 557-571, 585-599.

Susskind, L., Friedman, A., 2014. *Mechanics. The Theoretical Minimum*, Basic Books, New York, (trad.it *Meccanica quantistica, il minimo indispensabile per fare della (buona) fisica*, Raffaello Cortina editore, Milano, 2015).

Stein, H., 1967. “Newtonian Space-Time”, in *Texas Quarterly*, 10, pp. 174-200.

Strawson, P. F., 1959. *Individuals*, London, Methuen.

Swinburne, R. 1995. “Thisness”, in *Australasian Journal of Philosophy*, 73, pp. 389-400.

Tassani, I., 2013. *Oltre la fisica normale. Interpretazioni alternative e teorie non standard nella fisica moderna per il 75-esimo compleanno di Franco Selleri*, Isonomia, Rivista online di Filosofia – Epistemologica, Urbino, Università degli Studi di Urbino Carlo Bo.

Tarozzi, G., 1985. “The resolution of the paradox of negative-results measurements”, in Tarozzi, G., van der Menwe, A. (cur.), 1985, *Open Questions in Quantum Physics*, Reidel Dordrecht, pp. 385-388.

Tarozzi, G., 1992. *Filosofia della Microfisica, vol I*, Modena, Accademia Nazionale di Scienze Lettere e Arti, Mucchi.

Teller, P., 1983. “Quantum Physics, the Identity of Indiscernibles and Some Unanswered Questions”, in *Philosophy of Science*, 50, pp. 309–319.

Teller, P., 1986. “Relational holism and quantum mechanics”, in *British Journal for the Philosophy of Science*, 37, pp. 71-81.

Teller, P., 1995. *An Interpretative Introduction to Quantum Field Theory*, Princeton, Princeton University Press.

Teller, P., 1998. “Quantum Mechanics and Haecceities”, in Castellani, E. (cur.), 1998, *Interpreting Bodies: Classical and Quantum Objects in Modern Physics*, Princeton, Princeton University Press, pp. 114–141.

Thirring, W., 1983. *Quantum mechanics of large systems*. New York, Springer.

Thomas, L., H., 1927. “The calculation of atomic fields”, in *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 23, pp. 542-548.

Toraldo di Francia, G., 1986. *Le cose e i loro nomi*. Laterza, Roma.

Toraldo di Francia, G., 1998. “A World of Individual Objects?” in Castellani, E. (cur.), 1998, *Interpreting Bodies: Classical and Quantum Objects in Modern Physics*, Princeton, Princeton University Press, pp. 21–29.

Trombino, M., 1998a. *Filosofia. Testi e Percorsi vol. 1*, Bologna, Poseidonia.

Trombino, M., 1998b. *Filosofia. Testi e Percorsi vol. 2*, Bologna, Poseidonia.

Uffink, J., 1995. “Can the minimum entropy principle be regarded as a consistency requirement?”, in *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 26, pp. 223-261.

Uffink, J., 2007. "Compendium of the Foundations of Classical Statistical Physics", in Butterfield, J., Earman, J. (cur.), 2007, *Philosophy of Physics part B*, pp. 1075-1170.

van Fraassen, B., 1984. "The Problem of Indistinguishable Particles", in Cushing, J. T., Delaney, C. F., Gutting, G. M. (cur.), 1984, *Science and Reality: Recent Work in the Philosophy of Science: Essays in Honor of Erman McMullin*, Notre Dame, University Notre Dame Press, pp. 153–172.

van Fraassen, B., 1985. "Statistical Behaviour of Indistinguishable Particles: Problems of Interpretation", in Mittelstaedt, P., Stachow, E. W. (cur.), 1985, *Recent Developments in Quantum Logic*, Mannheim, B.I. Wissenschaft, pp. 161–187.

van Fraassen, B., 1989. *Laws and symmetry*, Oxford, Clarendon Press.

van Fraassen, B., 1991. *Quantum Mechanics: An Empiricist View*, Oxford, Oxford University Press.

van Fraassen, B., 1998. The Problem of Indistinguishable Particles, in Castellani, E. (cur.), 1998, *Interpreting Bodies: Classical and Quantum Objects in Modern Physics*, Princeton, Princeton University Press, pp. 73–92.

van Fraassen, B., 2008. *Scientific Representation: Paradoxes of Perspective*, Oxford, Clarendon Press.

van Fraassen, B., Peschard, I., 2008. "Identity over time: Objectively, subjectively", in *Philosophical Quarterly*, 58, pp. 15-35.

von Ehrenfels, C., 1891. "Zur Philosophie der Mathematik", in *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie*, 15, pp. 285–347, disponibile al sito <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k941420/f290.image>.

von Mises, R., 1928. *Wahrscheinlichkeit, Statistik und ihre Wahrheit*, Wien, Springer.

von Neuman, J., 1932. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Berlin, Springer Verlag, (I fondamenti matematici della meccanica quantistica, trad. it. a cura di G. Boniolo , Padova, Il Poligrafo, 1998).

Versteegh, M. A. M., Dieks, D., 2011. "The Gibbs paradox and the distinguishability of identical particles", in *American Journal of Physics*, 79, 7, pp. 741-746.

Weatherson, B., 2008. "Intrinsic vs. Extrinsic Properties", in *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2008 Edition), Edward N. Zalta, The Metaphysics Research Lab Center for the Study of Language and Information

Stanford University, Stanford, disponibile al sito
<http://plato.stanford.edu/archives/fall2008/entries/intrinsic-extrinsic/>.

Weyl, H., 1931. *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, London, Methuen and Company (*The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, New York, Dover Publications, 1950).

Weyl, H., 1949. *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton, NJ: Princeton University Press.

Wheeler, J., A., 1992. “Quanti, significato e informazione”, in Tarozzi, G. (cur.), 1992, *Il paradosso della realtà fisica*, Accademia Nazionale di Scienze Lettere e Arti, Modena, Mucchi, pp. 143-166.

Wittgenstein, L. J. J., 1953. *Philosophische Untersuchungen/Philosophical Investigations*, Oxford, Blackwell, (*Ricerche filosofiche*, trad. it. a cura di R. Piovesan e M. Trinchero, Einaudi, Torino, 1967).

Zimmerman, D., 1997. “Distinct Indiscernibles and the Bundle Theory”, in *Mind*, 106, pp. 305-09.

Zeh, H., D., 1970. “On the Interpretation of Measurement in Quantum Theory”, in *Foundations of Physics*, 1, pp. 69–76.

Zurek, W., H., 1998. “Decoherence, Einselection and the Existential Interpretation (the Rough Guide)”, in *Philosophical Transactions of Royal Society A*, 356, 1, pp. 793-1820.