

UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA



TESI DI LAUREA MAGISTRALE

La caratterizzazione di Rivin dei poliedri iperbolici di volume finito

CANDIDATO:

Marco Antognozzi

RELATORE:

Prof. Bruno Martelli

ANNO ACCADEMICO 2013/2014

Indice

Introduzione	3
1 Lo spazio iperbolico e la sfera di de Sitter	5
1.1 La geometria piana e la geometria sferica	5
1.2 Lo spazio iperbolico	6
1.2.1 Sottospazi	6
1.2.2 Modello del disco e compattificazione di \mathbb{H}^n	7
1.2.3 Classificazione delle isometrie	8
1.2.4 Il modello proiettivo	8
1.2.5 Varietà iperboliche e geodetiche chiuse	9
1.3 La sfera di de Sitter	9
1.3.1 Sottospazi della sfera di de Sitter	10
1.3.2 Iperpiani e semispazi nella sfera di de Sitter	12
2 La trasformazione polare	13
2.1 Definizioni e prime proprietà	13
2.2 Poliedri	15
2.3 Superfici con singolarità coniche	18
2.4 Geodetiche sulla trasformata polare	19
3 Poliedri di volume finito	28
3.1 La trasformata polare generalizzata	28
3.2 Geodetiche sulla trasformata polare generalizzata	32
4 Risultati di unicità	38
4.1 Primi risultati	38
4.2 Poliedri generalizzati	41
4.3 Trasformata polare e unicità	44
4.4 Unicità dei poliedri ideali	46
5 Teorema di Rivin: caso compatto	49
5.1 Spazi ammissibili e spazi realizzabili	49
5.2 La distanza di Lipschitz	52
5.3 Dimostrazione del Teorema 5.2	54

5.4	La mappa ϕ è aperta	55
5.5	Successioni di spazi realizzabili	57
5.6	Archi di spazi ammissibili	61
5.6.1	Topologie sullo spazio delle metriche	61
5.6.2	Famiglie di triangolazioni geodetiche	62
5.6.3	Dimostrazione del Teorema 5.10	66
6	Teorema di Rivin: caso ideale	68
6.1	La trasformata polare generalizzata di un poliedro ideale	68
6.2	Spazi idealmente ammissibili	70
6.3	Deformazione di spazi idealmente ammissibili	71
6.4	Lo spazio Q^t è ammissibile	72
6.5	Ancora sui poliedri generalizzati	75
6.6	Poliedri quasi-ideali	75
6.7	Note sul modello dell'iperboloide	78
6.8	Dimostrazione del Teorema 6.2	79
6.9	Esistenza di poliedri ideali	81
7	Conclusioni	82
7.1	Teorema di Rivin: caso dei poliedri di volume finito	82
7.2	Poliedri inscritti nella sfera	84
7.3	Estensione del Teorema di Rivin alle dimensioni più alte	85
	Bibliografia	86

Introduzione

Nelle sue note del 1980 sulle 3-varietà ([22]) Thurston costruisce per la prima volta una famiglia di 3-varietà iperboliche incollando tra loro le facce di poliedri iperbolici. Più in generale sembra oggi avere ancora una certa importanza, nella teoria delle varietà iperboliche, lo studio delle proprietà dei poliedri iperbolici. In questo senso un risultato di respiro davvero ampio è fornito da Rivin e Hodgson in [15], laddove si caratterizzano i poliedri iperbolici compatti sulla base degli angoli diedrali, risultato poi ampliato dal primo autore ai poliedri iperbolici ideali e, più in generale, ai poliedri iperbolici di volume finito in [16] e [17].

L'oggetto della presente trattazione sarà la dimostrazione dei risultati principali contenuti in [15], [16] e [17], nonché lo studio sistematico degli strumenti adottati dagli autori. In particolare, nel Capitolo 2 esponiamo in dettaglio la definizione e le proprietà della *trasformata polare*, essenzialmente un analogo della mappa di Gauss per i poliedri, laddove si sostituiscono i piani tangenti con opportuni piani detti *piani di supporto*. Mentre il vettore unitario ortogonale uscente da un piano euclideo è un punto della sfera, per i piani iperbolici dovremo introdurre (nel Capitolo 1) una particolare varietà semi-riemanniana detta *sfera di de Sitter*. Nel Capitolo 3 introdurremo poi il concetto di *trasformata polare generalizzata* per i poliedri di volume finito, che presentano delle peculiarità.

La dimostrazione della caratterizzazione verrà poi completata nel Capitolo 5 per il caso dei poliedri compatti, nel Capitolo 6 per il caso dei poliedri ideali e nel Capitolo 7 nel caso dei poliedri di volume finito. Il caso di gran lunga più interessante è quello dei poliedri ideali, in quanto una opportuna riformulazione della caratterizzazione è alla base di un algoritmo efficiente per la realizzazione di poliedri ideali con una data struttura combinatoria (si veda la sezione 6.9).

Alcuni importanti risultati di unicità per i poliedri iperbolici sono dimostrati nel Capitolo 4. Tra questi citiamo:

- il fatto che un poliedro iperbolico compatto con una data struttura combinatoria sia individuato a meno di congruenza dagli angoli interni alle facce;

- il fatto che un poliedro iperbolico ideale con una data struttura combinatoria sia individuato a meno di congruenza dai suoi angoli diedrali.

Nel Capitolo 7 citiamo anche il fatto che la caratterizzazione di Rivin dei poliedri iperbolici ideali è anche una caratterizzazione dei poliedri euclidei che è possibile inscrivere nella sfera unitaria, il che rappresenta la soluzione a un problema formulato per la prima volta nel 1832 da Jakob Steiner ([19]).

In conclusione viene data anche un'idea per estendere questa caratterizzazione alle dimensioni più alte, caratterizzazione che sarebbe sicuramente utile per la costruzione di varietà iperboliche di dimensione maggiore di 3.

Capitolo 1

Lo spazio iperbolico e la sfera di de Sitter

In questo capitolo introdurremo brevemente lo spazio iperbolico al fine di fissare la terminologia e riassumere i risultati che più avanti verranno usati. La trattazione è molto sintetica: per i dettagli, le dimostrazioni, gli approfondimenti si vedano [1] e [12]. Daremo poi la definizione di *sfera di de Sitter* e ne studieremo in dettaglio alcune proprietà elementari.

Per tutte le definizioni e i risultati base relativi alle varietà riemanniane rimandiamo sin da ora ad un testo classico come [3].

1.1 La geometria piana e la geometria sferica

Ricordiamo, per fissare le notazioni, che lo spazio euclideo \mathbb{E}^n è lo spazio vettoriale \mathbb{R}^n munito del prodotto scalare standard, che indicheremo in questa sezione con $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Questo prodotto scalare induce una metrica riemanniana su \mathbb{E}^n che lo rende una varietà di curvatura sezionale costante 0.

Le isometrie di \mathbb{E}^n sono le affinità del tipo $x \mapsto Ax + b$ dove A è una matrice ortogonale. Definiamo i k -sottospazi di \mathbb{E}^n come i suoi k -sottospazi affini. È un risultato elementare il fatto che un k -sottospazio di \mathbb{E}^n è isometrico a \mathbb{E}^k .

La sfera n -dimensionale \mathbb{S}^n è l'insieme dei vettori unitari di \mathbb{E}^{n+1} :

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{E}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = 1\}.$$

Questa è una sottovarietà di \mathbb{E}^{n+1} che eredita per restrizione un tensore metrico, il quale rende \mathbb{S}^n una varietà di curvatura sezionale costante +1. Le isometrie di \mathbb{S}^n corrispondono alle isometrie di \mathbb{E}^{n+1} che fissano la sfera e quindi sono mappe del tipo $x \mapsto Ax$ con A una matrice ortogonale.

Definiamo k -sottospazio di \mathbb{S}^n l'intersezione della sfera con un $(k+1)$ -sottospazio vettoriale di \mathbb{E}^{n+1} . Questa intersezione è una sfera unitaria in

uno spazio isometrico a \mathbb{E}^{k+1} . Quindi un k -sottospazio di \mathbb{S}^n è isometrico a \mathbb{S}^k .

D'ora in poi, quando parleremo di k -sottospazi di una varietà di dimensione n : i sottospazi di dimensione 1 saranno detti rette, i sottospazi di dimensione 2 saranno detti piani e i sottospazi di dimensione $n - 1$ saranno detti iperpiani.

Dato un iperpiano π di \mathbb{S}^n , esiste un vettore unitario $\nu \in \mathbb{S}^n$ tale che $\pi = \{x \in \mathbb{S}^n \mid \langle \nu, x \rangle = 0\}$. Se π è considerato come il bordo del semispazio $\sigma = \{x \in \mathbb{S}^n \mid \langle \nu, x \rangle \leq 0\}$ allora ν è detto *vettore unitario ortogonale uscente* da π , ed è unicamente determinato da σ .

1.2 Lo spazio iperbolico

Per definire lo spazio iperbolico consideriamo \mathbb{E}_1^n , lo spazio \mathbb{R}^{n+1} munito del prodotto scalare standard di segnatura $(n, 1)$, dato da:

$$\langle x, y \rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + \dots + x_ny_n$$

Lo spazio iperbolico \mathbb{H}^n è la “sfera di raggio $\sqrt{-1}$ ” in \mathbb{E}_1^n . Più precisamente:

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{E}_1^n \mid \langle x, x \rangle = -1, x_0 > 0\}$$

Con questo modello \mathbb{H}^n è la falda superiore dell'iperboloide di rotazione a due falde, munita del tensore metrico indotto da $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sul fibrato tangente. Infatti per ogni punto $x \in \mathbb{H}^n$, lo spazio tangente a x è $T_x\mathbb{H}^n = \{x\}^\perp$ e quindi la restrizione di $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a questo spazio tangente è un prodotto scalare definito positivo.

Con questa definizione \mathbb{H}^n è una varietà riemanniana completa con curvatura sezionale costante -1 (per maggiori dettagli si veda [1]). Questo è solo uno dei possibili modelli isometrici per lo spazio iperbolico ed è detto *modello dell'iperboloide*.

Le isometrie di \mathbb{H}^n sono esattamente le isometrie di \mathbb{E}_1^n (cioè gli endomorfismi che conservano il prodotto scalare) che mandano la falda superiore dell'iperboloide in sé. Indicheremo con $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ il gruppo di Lie delle isometrie di \mathbb{H}^n .

1.2.1 Sottospazi

Un vettore $x \in \mathbb{E}_1^n$ è detto di tipo *tempo*, *luce*, o *spazio* se, rispettivamente il prodotto $\langle x, x \rangle$ è negativo, nullo o positivo. Un $(k + 1)$ -sottospazio di \mathbb{E}_1^n è detto di tipo *tempo*, *luce*, o *spazio* se, rispettivamente, la sua segnatura è $(k, 1, 0)$, $(k, 0, 1)$ oppure $(k + 1, 0, 0)$.

Un $(k + 1)$ -sottospazio di \mathbb{E}_1^n ha intersezione non vuota con \mathbb{H}^n se e solo se è di tipo tempo (e quindi è isometrico a \mathbb{E}_1^k). In questo caso la sua

intersezione con \mathbb{H}^n è detta *k-sottospazio* ed è una sottovarietà riemanniana di \mathbb{H}^n isometrica a \mathbb{H}^k .

Dato un iperpiano π di \mathbb{H}^n , esiste un vettore unitario di $\nu \in \mathbb{E}_1^n$ di tipo spazio (quindi tale che $\langle \nu, \nu \rangle = +1$) tale che $\pi = \{x \in \mathbb{H}^n \mid \langle \nu, x \rangle = 0\}$. Se π è considerato come il bordo del semispazio $\sigma = \{x \in \mathbb{H}^n \mid \langle \nu, x \rangle \leq 0\}$ allora ν è detto *vettore unitario ortogonale uscente* da π , ed è unicamente determinato da σ .

1.2.2 Modello del disco e compattificazione di \mathbb{H}^n

Abbiamo introdotto lo spazio iperbolico col modello dell'iperboloide $\mathbb{H}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Si consideri ora la proiezione φ di \mathbb{H}^n sull'iperpiano $\{x_0 = 0\}$ con centro $(-1, 0, \dots, 0)$ di equazione:

$$\varphi(x_0, x_1, \dots, x_n) = \left(0, \frac{x_1}{1+x_0}, \dots, \frac{x_n}{1+x_0} \right)$$

Questa è un omeomorfismo con l'immagine, che possiamo identificare con il disco unitario aperto

$$D^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\}$$

con l'usuale topologia euclidea. Se poniamo su D^n la metrica riemanniana indotta da φ questo è detto *modello del disco* per lo spazio iperbolico. Mentre la topologia non cambia, la distanza euclidea è molto diversa dalla distanza iperbolica indotta da φ .

In \mathbb{R}^n la chiusura topologica del disco D^n è il disco chiuso

$$\overline{D^n} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$$

che è un compatto ottenuto aggiungendo a D^n i punti del bordo. Si possono aggiungere allo stesso modo di bordo allo spazio iperbolico prendendo $\partial\mathbb{H}^n = \partial D^n$ e prendendo quindi come compattificazione dello spazio iperbolico $\overline{\mathbb{H}^n} = \mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$, con la topologia di $\overline{D^n}$. Questa compattificazione è intrinseca a \mathbb{H}^n : infatti ogni isometria di \mathbb{H}^n si estende in modo unico a un omeomorfismo di $\overline{\mathbb{H}^n}$.

Nel seguito ci saranno utili delle particolari ipersuperfici di \mathbb{H}^n :

Definizione 1.1. Dato un punto $p \in \partial\mathbb{H}^n$, una *orosfera* di centro p è una ipersuperficie di \mathbb{H}^n ortogonale a tutte le rette γ tali che $p \in \overline{\gamma}$.

Per ogni punto p c'è una famiglia a un parametro di orosfere di centro p . Col modello del disco queste sono esattamente le $(n-1)$ -sfere contenute nell'interno di ∂D^n e tangenti a ∂D^n in p . Altra proprietà notevole è che queste ipersuperfici, con la metrica di sottovarietà, sono isometriche a \mathbb{E}^{n-1} .

1.2.3 Classificazione delle isometrie

Le isometrie di \mathbb{H}^n possono essere classificate in base al loro *spostamento minimo*: data una isometria $f \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$, il suo spostamento minimo è:

$$\inf_{x \in \mathbb{H}^n} d(x, f(x))$$

dove d è la distanza iperbolica. Si noti che una isometria f potrebbe avere spostamento minimo 0 ma non avere punti fissi. Una isometria di $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ si dice:

- *ellittica* se ha almeno un punto fisso;
- *parabolica* se ha spostamento minimo 0 ma non ha punti fissi;
- *iperbolica* se ha spostamento minimo > 0 .

Come detto prima ogni isometria f si estende in modo unico a un omeomorfismo di $\partial\mathbb{H}^n$ e perciò, per il teorema del punto fisso di Brouwer, ha almeno un punto fisso in $\overline{\mathbb{H}^n}$. Se f è ellittica ha almeno un punto fisso in \mathbb{H}^n , se f è parabolica non ha punti fissi in \mathbb{H}^n ma ha esattamente un punto fisso in $\partial\mathbb{H}^n$ e se f è iperbolica non ha punti fissi in \mathbb{H}^n e ha esattamente due punti fissi in $\partial\mathbb{H}^n$.

1.2.4 Il modello proiettivo

L'iperboloide \mathbb{H}^n è un chiuso di \mathbb{R}^{n+1} che non contiene l'origine. È naturale studiare la sua proiezione in $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$. Essa è contenuta nella carta $\{x_0 \neq 0\}$, una cui copia omeomorfa è l'iperpiano $\{x_0 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. L'immagine dell'iperboloide nello spazio proiettivo è data quindi dalla proiezione sull'iperpiano $\{x_0 = 1\}$ di centro l'origine, cioè l'applicazione seguente:

$$\psi(x_0, x_1, \dots, x_n) = \left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right).$$

La mappa ψ è un omeomorfismo con l'immagine. Quest'ultima è la palla unitaria proiettiva $B^n = \{x_1^2 + \dots + x_n^2 < x_0^2\} \subseteq \mathbb{R}\mathbb{P}^n \cap \{x_0 \neq 0\}$. Se poniamo su B^n la metrica indotta da ψ questo è detto *modello proiettivo* per lo spazio iperbolico.

Consideriamo ora su B^n le coordinate indotte dalla carta $\{x_0 = 1\}$. Allora l'isometria tra il modello del disco e quello proiettivo è data da:

$$\psi \circ \varphi^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{2y_1}{1 + \|y\|^2}, \dots, \frac{2y_n}{1 + \|y\|^2} \right)$$

dove $\|y\|^2 = y_1^2 + \dots + y_n^2$ e φ è l'isometria tra il modello dell'iperboloide e quello del disco. Questa isometria si estende ad un omeomorfismo tra \overline{D}^n e \overline{B}^n , quindi nel modello proiettivo abbiamo $\partial\mathbb{H}^n = \partial B^n$.

Questo modello ha anche una particolarità: i k -sottospazi iperbolici di B^n sono k -sottospazi proiettivi intersecati con la palla, ovvero sottospazi affini se ci restringiamo alla carta $\{x_0 \neq 0\}$.

1.2.5 Varietà iperboliche e geodetiche chiuse

Una varietà iperbolica M è una varietà riemanniana con curvatura sezionale costante pari a -1 . Se M è completa allora è isometrica a \mathbb{H}^3/Γ , dove Γ è un sottogruppo discreto non contenente elementi ellittici del gruppo $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ delle isometrie di \mathbb{H}^3 . Si ha inoltre $\Gamma \cong \Pi_1(M)$.

Definizione 1.2 (Geodetica chiusa). Data una varietà riemanniana M , una curva chiusa differenziabile $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow M$ è detta *geodetica chiusa* se la composizione $\alpha \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ della curva γ con il rivestimento universale $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ della circonferenza, risulta essere una geodetica non banale.

La prossima proposizione è molto importante nello studio delle varietà iperboliche e per la sua dimostrazione rimandiamo a [1].

Proposizione 1.1. *Sia $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ una varietà iperbolica e sia $\gamma \in \Gamma \cong \Pi_1(M)$ un elemento iperbolico. Allora esiste una geodetica chiusa in M liberamente omotopa a γ inteso come elemento di $\Pi_1(M)$.*

Lemma 1.1. *Sia C una superficie iperbolica completa omeomorfa a $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ tale che le due code $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1$ e $\mathbb{R}^- \times \mathbb{S}^1$ siano entrambe di volume infinito. Allora esiste una geodetica chiusa in C omotopa al meridiano $\{0\} \times \mathbb{S}^1$.*

Dimostrazione. Come appena visto si ha $C = \mathbb{H}^2/\Gamma$, dove Γ è un sottogruppo di $\mathcal{I}(\mathbb{H}^2)$. Inoltre $\Gamma \cong \Pi_1(C)$ e quest'ultimo è un gruppo ciclico. Allora Γ è generata da un'isometria ϕ . Se ϕ fosse una isometria di tipo parabolico, una delle due code di C avrebbe volume finito (infatti C sarebbe una cuspidale). Allora l'isometria ϕ è di tipo iperbolico e quindi, grazie alla proposizione precedente, esiste una geodetica chiusa di C liberamente omotopa ad un generatore di $\Pi_1(C)$, quindi nella classe di omotopia di $\{0\} \times \mathbb{S}^1$. \square

1.3 La sfera di de Sitter

Nella sezione 1.2.1 abbiamo visto che, dato un iperpiano π di \mathbb{H}^n che sia il bordo di un semispazio σ , esiste un unico vettore di tipo spazio $\nu \in \mathbb{E}_1^n$ che sia unitario, ortogonale e uscente da π . Viceversa ogni vettore unitario di tipo spazio ν è ortogonale uscente da un unico iperpiano iperbolico $\pi = \{x \in \mathbb{H}^n \mid \langle \nu, x \rangle = 0\}$ considerato come il bordo del semispazio $\sigma = \{x \in \mathbb{H}^n \mid \langle \nu, x \rangle \leq 0\}$.

È quindi naturale studiare l'insieme dei vettori unitari di tipo spazio in \mathbb{E}_1^n . L'insieme di tali vettori è detto *sfera di de Sitter* e si indica con:

$$\mathbb{S}_1^{n-1} = \{x \in \mathbb{E}_1^n \mid \langle x, x \rangle = +1\}.$$

Questo è l'iperboloide di rotazione a una falda (si veda la figura 1.1).

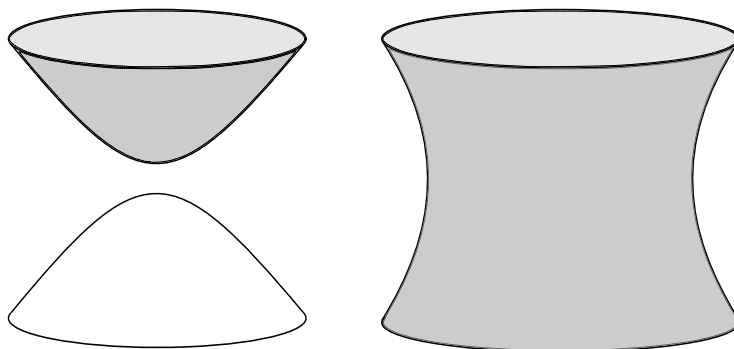


Figura 1.1: A sinistra l'iperboloide \mathbb{H}^2 . A destra la sfera di de Sitter \mathbb{S}_1^1 .

Poiché il differenziale di $f(x) = \langle x, x \rangle - 1$ non si annulla mai su \mathbb{S}_1^{n-1} , questa è una n -sottovarietà differenziabile di \mathbb{E}_1^n . Dato $x \in \mathbb{S}_1^{n-1}$, il piano tangente $T_x \mathbb{S}_1^{n-1} = \{x\}^\perp$ è un sottospazio di tipo tempo. La restrizione del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ai piani tangenti determina quindi un prodotto scalare di segnatura $(n-1, 1)$. Questo fa della sfera di de Sitter una varietà non riemanniana ma semi-riemanniana (per le generalità riguardo tali varietà rimandiamo a [13]).

Si noti che ogni isometria di \mathbb{E}_1^n determina un diffeomorfismo di \mathbb{S}_1^{n-1} il cui differenziale è, in ogni punto, un'isometria tra gli spazi tangenti muniti del prodotto scalare. Le isometrie di \mathbb{S}_1^{n-1} come varietà semi-riemanniana corrispondono alle isometrie di \mathbb{E}_1^n .

1.3.1 Sottospazi della sfera di de Sitter

L'intersezione della sfera di de Sitter \mathbb{S}_1^{n-1} con un $(k+1)$ -sottospazio di \mathbb{E}_1^n ha una forma diversa a seconda del tipo di sottospazio:

- se il sottospazio è di tipo spazio allora è isometrico a \mathbb{E}^{k+1} e l'intersezione è composta dai vettori unitari di uno spazio euclideo, quindi è isometrica a una sfera \mathbb{S}^k ; diremo che questa intersezione è un k -sottospazio della sfera di de Sitter (si veda la figura 1.2);
- se il sottospazio è di tipo tempo allora è isometrico a \mathbb{E}_1^k e l'intersezione è una sottovarietà della sfera di de Sitter isometrica a una sfera di de Sitter dimensione più bassa \mathbb{S}_1^{k-1} ;
- se il sottospazio è di tipo luce l'intersezione è una sottovarietà differenziabile omeomorfa a un cilindro $\mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{R}$.

Nella nostra trattazione sarà sufficiente considerare i k -sottospazi della sfera di de Sitter, cioè le sottovarietà determinate dall'intersezione con \mathbb{S}_1^{n-1}

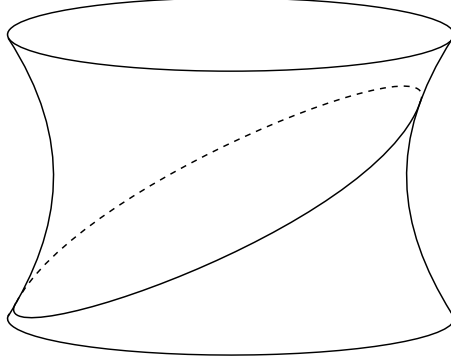


Figura 1.2: Un iperpiano nella sfera di de Sitter \mathbb{S}_1^1 è isometrico a \mathbb{S}^1 .

di un sottospazio di tipo spazio. Cionondimeno anche l'intersezione con un sottospazio di tipo luce ha un significato geometrico, su cui ci soffermiamo brevemente.

Esempio 1.1. Consideriamo lo spazio iperbolico con il modello del disco e sia φ l'isometria tra l'iperboloide e il disco definita nella sezione 1.2.2. Allora la sua inversa è la mappa:

$$\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1 + \|x\|^2}{1 - \|x\|^2}, \frac{2x_1}{1 - \|x\|^2}, \dots, \frac{2x_n}{1 - \|x\|^2} \right)$$

dove abbiamo indicato con $\|\cdot\|$ l'usuale norma euclidea.

Come abbiamo già visto, un punto $\nu \in \mathbb{S}_1^{n-1}$ della sfera di de Sitter corrisponde a un unico iperpiano iperbolico, il quale, con il modello del disco, ha equazione $\langle \nu, \varphi^{-1}(x) \rangle = 0$. Da ciò si vede, per continuità, che un punto $x \in \partial\mathbb{H}^n$ (cioè un punto di $\overline{D^n}$ tale che $\|x\| = 1$) appartiene all'iperpiano se e solo se:

$$-\nu_0 + \nu_1 x_1 + \dots + \nu_n x_n = 0 .$$

Viceversa, un punto della sfera di de Sitter ν definisce un iperpiano passante per il punto x se e solo se vale l'equazione appena scritta, quindi se e solo se è ortogonale in \mathbb{E}_1^n al vettore di tipo luce

$$(1, x_1, \dots, x_n) .$$

Ciò permette di concludere che l'insieme dei vettori ortogonali a iperpiani iperbolici passanti per un dato punto $x \in \partial\mathbb{H}^n$ è l'intersezione con la sfera di de Sitter di un iperpiano di tipo luce. Non è complicato vedere anche il viceversa.

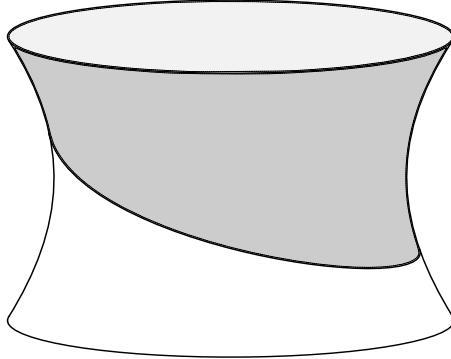


Figura 1.3: I semispazi nella sfera di de Sitter sono rivolti verso l'alto.

1.3.2 Iperpiani e semispazi nella sfera di de Sitter

Dato un iperpiano π di \mathbb{S}_1^{n-1} , esiste un vettore unitario di $\nu \in \mathbb{E}_1^n$ di tipo tempo (quindi tale che $\langle \nu, \nu \rangle = -1$) tale che $\pi = \{x \in \mathbb{S}_1^{n-1} \mid \langle \nu, x \rangle = 0\}$. Se π è considerato come il bordo del semispazio $\sigma = \{x \in \mathbb{S}_1^{n-1} \mid \langle \nu, x \rangle \leq 0\}$ allora ν è detto *vettore unitario ortogonale uscente* da π , ed è unicamente determinato da σ .

Intuitivamente parlando, il vettore ν , essendo di tipo tempo, è “entrante” nel semispazio $\langle \nu, x \rangle \leq 0$. La dicitura di vettore “uscente” deriva soltanto da una volontà di omogeneità del linguaggio con i precedenti casi sferico e iperbolico.

Concludiamo questo capitolo rimarcando questo fatto: per ogni iperpiano iperbolico che sia il bordo di un semispazio esiste un unico punto della sfera di de Sitter che sia il vettore unitario ortogonale uscente. Affinché accada il fatto duale, cioè che ogni iperpiano della sfera di de Sitter che sia il bordo di un semispazio abbia un punto dello spazio iperbolico come vettore ortogonale uscente, dobbiamo considerare come semispazi della sfera di de Sitter soltanto quelli “rivolti verso l’alto” (vedi figura 1.3), cioè i semispazi del tipo $\langle \nu, x \rangle \leq 0$ con $\nu \in \mathbb{H}^n$.

Capitolo 2

La trasformazione polare

In questo capitolo definiremo in primo luogo la trasformazione polare seguendo [15] e ne studieremo le prime proprietà. Vedremo che dato un poliedro iperbolico compatto P , la sua trasformata polare P^* è un poliedro nella sfera di de Sitter combinatoriamente duale a P . Studieremo inoltre le proprietà della metrica intrinseca di P^* ed enunceremo il Teorema di Rivin, che caratterizza i poliedri iperbolici compatti in termini della metrica intrinseca della loro trasformata polare.

2.1 Definizioni e prime proprietà

Sia $X = \mathbb{S}^n, \mathbb{H}^n$ o \mathbb{S}_1^{n-1} . Definiamo rispettivamente $X^* = \mathbb{S}^n, \mathbb{S}_1^{n-1}$ o \mathbb{H}^n . Inoltre con un piccolo abuso di notazione useremo da qui in avanti il simbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sia per indicare il prodotto scalare standard di \mathbb{E}^n sia per indicare il prodotto scalare di \mathbb{E}_1^n . Ricordiamo che i semispazi chiusi di X sono gli insiemi del tipo $\sigma = \{x \in X \mid \langle \nu, x \rangle \leq 0\}$ per un qualche $\nu \in X^*$, come definiti nel capitolo precedente, dove ν è il vettore ortogonale uscente dall'iperpiano $\pi = \{x \in X \mid \langle \nu, x \rangle = 0\}$ che è il bordo del semispazio σ .

Definizione 2.1. Sia $X = \mathbb{S}^n, \mathbb{H}^n$ o \mathbb{S}_1^{n-1} . Diciamo che $C \subseteq X$ è un *corpo convesso* se è intersezione di semispazi chiusi e se la sua parte interna è non vuota. Diciamo che un semispazio σ con bordo π è un *semispazio di supporto* per C se $C \subseteq \sigma$ e $C \cap \pi \neq \emptyset$.

Definiamo inoltre $S \subseteq X$ *ipersuperficie convessa* se è il bordo di un corpo convesso C . Dato un iperpiano π che sia il bordo di un semispazio chiuso σ , diciamo che π è un *iperpiano di supporto* per S se $S \subseteq \sigma$ e $S \cap \pi \neq \emptyset$.

Alcuni esempi di corpi convessi sono mostrati nella figura 2.1.

Definizione 2.2 (Trasformata polare). Sia $X = \mathbb{S}^n, \mathbb{H}^n$ o \mathbb{S}_1^{n-1} . Sia inoltre $S \subseteq X$ una ipersuperficie convessa. La *trasformata polare* di S è l'insieme $S^* \subseteq X^*$ dei vettori unitari ortogonali uscenti dai piani di supporto per S .

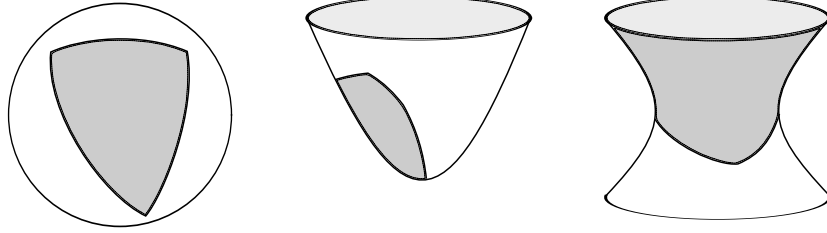


Figura 2.1: Esempi di corpi convessi in \mathbb{S}^2 , \mathbb{H}^2 e \mathbb{S}_1^1 .

Osservazione 2.1. Si noti che se $X = \mathbb{S}^n$, \mathbb{H}^n o \mathbb{S}_1^{n-1} e $S \subseteq X$ è una ipersuperficie convessa, allora dato $\nu \in X^*$, si ha

$$\nu \in S^* \iff \{0\} \subseteq \{\langle \nu, x \rangle \mid x \in S\} \subseteq (-\infty, 0]$$

La prossima proposizione è elementare. Omettiamo la dimostrazione per non appesantire troppo la trattazione.

Proposizione 2.1. *Sia $X = \mathbb{S}^n$, \mathbb{H}^n o \mathbb{S}_1^{n-1} e sia $C \subseteq X$ un corpo convesso. Allora C è intersezione dei suoi semispazi di supporto.*

Arriviamo ora a tratteggiare le prime caratteristiche della trasformata polare. La prossima proposizione mostra come la trasformata polare di una ipersuperficie convessa compatta sia anch'essa una ipersuperficie convessa e dice anche che la trasformata polare è un'involuzione (si noti che se $X = \mathbb{S}^n$, \mathbb{H}^n o \mathbb{S}_1^{n-1} , si ha $X^{**} = X$).

Proposizione 2.2. *Sia $X = \mathbb{S}^n$, \mathbb{H}^n o \mathbb{S}_1^{n-1} e sia $S \subseteq X$ una ipersuperficie convessa compatta. Se*

$$\Gamma = \bigcap_{x \in S} \{\nu \in X^* \mid \langle \nu, x \rangle \leq 0\}$$

ha parte interna non vuota allora S^ è un'ipersuperficie convessa di X^* e si ha $S^* = \partial\Gamma$. Inoltre si ha $S^{**} = S$.*

Dimostrazione. Γ è una intersezione di semispazi di X^* ed ha parte interna non vuota quindi è un corpo convesso. Inoltre, grazie all'osservazione 2.1 abbiamo che, dato $\nu \in X^*$, si ha:

$$\nu \in S^* \iff \{0\} \subseteq \{\langle \nu, x \rangle \mid x \in S\} \subseteq (-\infty, 0] .$$

Si vede facilmente (anche nel caso che S non sia compatta) che $S^* \subseteq \partial\Gamma$. Infatti se $\nu \in S^*$ allora $\nu \in \Gamma$. Inoltre esiste $x \in S$ tale che $\langle \nu, x \rangle = 0$. Allora esiste una successione $\nu_n \rightarrow \nu$ in X^* tale che $\forall n, \langle \nu_n, x \rangle > 0$. Da questo segue che $\forall n, \nu_n \notin \Gamma$ e quindi ν è un punto di bordo.

Viceversa, se $\nu \in \partial\Gamma$ allora esiste una successione $\nu_n \rightarrow \nu$ in X^* tale che $\forall n, \nu_n \notin \Gamma$. Allora $\forall n, \exists x_n \in S$ tale che $\langle \nu_n, x_n \rangle > 0$. Senza perdita di generalità, poiché S è compatta, possiamo supporre che $x_n \rightarrow x \in S$. Poiché la forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è continua, si ha $\langle \nu, x \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle \nu, x \rangle = 0$. Allora $\nu \in S^*$ e quindi $S^* = \partial\Gamma$.

Per quanto riguarda l'ultima parte della tesi, è evidente l'inclusione $S \subseteq S^{**}$. Inoltre $x_0 \in S^{**} \iff \{0\} \subseteq \{\langle \nu, x_0 \rangle \mid \nu \in S^*\} \subseteq (-\infty, 0]$. Se C è un corpo convesso di X tale che $S = \partial C$, l'ultima condizione può essere riletta come “ x_0 appartiene al bordo dell'intersezione dei semispazi di supporto di C ”. Allora si conclude grazie alla proposizione precedente. \square

Osservazione 2.2. Nella proposizione precedente, la condizione che Γ abbia parte interna non vuota è necessaria. Come controesempio si consideri infatti un iperpiano π nella sfera di de Sitter \mathbb{S}_1^{n-1} che sia il bordo di un semispazio σ . L'iperpiano π è isometrico a una sfera \mathbb{S}^{n-1} ed è perciò compatto. La sua trasformata polare π^* consta di un solo punto ν che è anche il vettore unitario ortogonale uscente da π . È evidente allora che π^* non può essere il bordo di un corpo convesso, e quindi non è una ipersuperficie convessa.

2.2 Poliedri

Definiremo ora gli n -poliedri convessi, un caso particolare di ipersuperfici convesse.

Definizione 2.3. Dato $X = \mathbb{E}^n, \mathbb{S}^n, \mathbb{H}^n$ o \mathbb{S}_1^{n-1} e dato C un corpo convesso che sia l'intersezione di un numero *finito* di semispazi chiusi, si dice *n -poliedro convesso* l'ipersuperficie convessa $P = \partial C$.

Una *k -faccia* Q di P è una componente connessa dell'intersezione di P con un iperpiano di supporto π che sia contenuta in un k -sottospazio Y di X con k minimo (allora Y è detto *sottospazio di supporto* per Q). Se $k = 0$, Q è detto *vertice*, se $k = 1$, Q è detto *spigolo*, se $k = n - 1$, Q è detta semplicemente *faccia*.

Si noti che:

- un n -poliedro è l'unione delle sue $(n - 1)$ -facce;
- se non è vuota, l'intersezione di una k -faccia e di una h -faccia distinte è una i -faccia con $i < \min\{k, h\}$;
- se $X = \mathbb{E}^n, \mathbb{S}^n$ o \mathbb{H}^n il bordo di ogni k -faccia di un n -poliedro (compatto) P è un k -poliedro (compatto) nel suo sottospazio di supporto.

Di seguito un 3-poliedro convesso sarà semplicemente chiamato poliedro, mentre un 2-poliedro sarà detto *poligono*. Inoltre gli spigoli di un poligono saranno detti *lati*.

Sia dato un poligono P in $X = \mathbb{E}^2, \mathbb{S}^2$ o \mathbb{H}^2 :

- due vertici appartenenti allo stesso lato sono detti *adiacenti* e la loro distanza sarà detta *lunghezza del lato*;
- due lati che hanno intersezione non vuota sono detti *adiacenti* e si incontrano in un vertice v ;
- l'*angolo interno* θ del poligono nel vertice v è definito come l'angolo formato in $T_v X$ dai due vettori di norma unitaria tangenti ai due lati; l'*angolo esterno* in v è definito come $\pi - \theta$.

Sia dato un poliedro P in $X = \mathbb{E}^3, \mathbb{S}^3$ o \mathbb{H}^3 :

- le facce di un poliedro P hanno per bordo dei poligoni; gli angoli interni di questi poligoni si dicono *angoli delle facce* di P ;
- due facce di P si dicono *adiacenti* se la loro intersezione è uno spigolo l ;
- ogni faccia f è contenuta in un unico piano di supporto per P che ha un unico vettore unitario ortogonale uscente ν ; sia l uno spigolo che sia intersezione delle facce f_1 e f_2 , l'*angolo diedrale esterno* θ di P in l è l'angolo formato dai vettori unitari ortogonali uscenti ν_1 e ν_2 ; l'*angolo diedrale interno* di P in l è $\pi - \theta$.

Esempio 2.1 (Poligoni nella sfera di de Sitter). Un n -poliedro è il bordo dell'intersezione di un numero finito di semispazi. Ogni semispazio ha per bordo un iperpiano. Come notato nel primo capitolo gli iperpiani della sfera di de Sitter \mathbb{S}_1^{n-1} sono isometrici a una sfera \mathbb{S}^{n-1} . Inoltre la traccia su ogni iperpiano di un semispazio della sfera di de Sitter, risulta essere a sua volta un semispazio della sfera.

Come notato in precedenza un n -poliedro è l'unione delle sue $(n - 1)$ -facce. Nel caso della sfera di de Sitter un poliedro è dunque l'unione di corpi convessi sferici (ciascuna faccia è l'intersezione di semipiani in uno spazio isometrico alla $(n - 1)$ -sfera).

Osservazione 2.3. Nelle geometrie della sfera e della sfera di de Sitter tutti i poliedri sono compatti: nel caso della sfera il risultato è banale, mentre nel caso della sfera di de Sitter l'osservazione segue dall'esempio precedente.

In queste geometrie ci sono degli n -poliedri compatti con facce che non contengono vertici. Un primo esempio è costituito dagli iperpiani. Inoltre consideriamo, nel caso $n \geq 3$, il bordo dell'intersezione di due semispazi: questo è un n -poliedro compatto con solo due $(n - 1)$ -facce e una $(n - 2)$ -faccia, quindi nessun vertice.

Proposizione 2.3. *Sia $X = \mathbb{S}^n, \mathbb{H}^n$ o \mathbb{S}_1^{n-1} e $P \subseteq X$ un n -poliedro convesso compatto tale che ogni k -faccia contenga almeno un vertice. Detti inoltre v_1, \dots, v_h i vertici di P supponiamo che*

$$\Gamma = \bigcap_{i=1}^h \{\nu \in X^* \mid \langle \nu, v_i \rangle \leq 0\}$$

abbia parte interna non vuota. Allora $P^ \subseteq X^*$ è a sua volta un n -poliedro convesso, e si ha $P^* = \partial\Gamma$.*

Dimostrazione. Sappiamo già, dalla proposizione 2.2, che P^* è una ipersuperficie convessa. Quello che dobbiamo dimostrare è che P^* è un poligono in X^* , cioè bordo dell'intersezione di un numero *finito* di semispazi.

Un iperpiano di X è di supporto per P se e solo se interseca P in almeno un vertice (infatti ogni k -faccia contiene almeno un vertice) ed è il bordo di un semispazio che contiene tutti i vertici. Allora si ha $P^* = \partial\Gamma$. \square

Esempio 2.2 (Polare sferica). Sia P un poligono di \mathbb{S}^2 avente $n \geq 2$ lati di lunghezza $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ e angoli interni di ampiezza $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. È facile verificare dalla definizione che la trasformata polare P^* (che chiameremo *polare sferica*) è il luogo dei punti a distanza $\frac{\pi}{2}$ da P .

Se non ci sono vertici antipodali (cioè se i lati hanno tutti lunghezza $\lambda_i < \pi$) siamo nelle ipotesi della proposizione precedente e quindi anche P^* è un poligono convesso. Inoltre si vede che ad ogni lato di P corrisponde un vertice di P^* e ad ogni vertice v di P corrisponde un lato di P^* di lunghezza pari all'angolo esterno in v . Quindi i lati di P^* hanno lunghezza $\pi - \alpha_1, \dots, \pi - \alpha_n$ e, poiché $P^{**} = P$, gli angoli interni di P^* hanno ampiezze $\pi - \lambda_1, \dots, \pi - \lambda_n$.

Sia ora $X = \mathbb{S}^3$ o \mathbb{H}^3 e definiamo, dato $p \in X$, l'iperpiano $S_p = \{\nu \in X^* \mid \langle \nu, p \rangle = 0\}$ dei vettori di X^* ortogonali a p . Si vede immediatamente che S_p è la sfera unitaria nel piano tangente $T_p X$, il quale, con il prodotto scalare indotto dalla metrica riemanniana di X , è isometrico a \mathbb{E}^3 . Quindi S_p è isometrica a \mathbb{S}^2 (questo non ci stupisce: S_p è un iperpiano in X^* e sia nel caso della 3-sfera che in quello della sfera di de Sitter un iperpiano è una 2-sfera).

Osservazione 2.4. Un n -poliedro iperbolico compatto P soddisfa le ipotesi della proposizione 2.3. Infatti poiché esiste sempre un iperpiano iperbolico disgiunto da P , l'insieme Γ ha parte interna non vuota. Inoltre si dimostra per induzione che ogni k -faccia di P contiene almeno un vertice.

Sia ora P un poliedro compatto in X che soddisfi le ipotesi della proposizione 2.3. Dato un suo vertice v , definiamo il *link* di v (indicato con $\text{link}(v)$) come il poligono sferico in S_v dei vettori tangenti alle facce contenenti v . Questo poligono ha lati corrispondenti alle facce di P contenenti v e di lunghezza pari agli angoli interni $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ di queste facce in v . Inoltre

i suoi vertici sono corrispondenti agli spigoli di P contenenti v e hanno angoli interni di ampiezza pari agli angoli diedrali interni $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ di questi spigoli. La polare sferica $\text{link}(v)^* \subseteq S_v$ di $lk(v)$ ha quindi, grazie all'esempio precedente, lati di lunghezza pari a $\pi - \alpha_1, \dots, \pi - \alpha_n$ (cioè gli angoli diedrali esterni) e angoli di ampiezza pari a $\pi - \lambda_1, \dots, \pi - \lambda_n$ (cioè gli angoli esterni delle facce).

Come dimostrato in precedenza la trasformata polare P^* di P è a sua volta un poliedro. Per ipotesi ogni piano di supporto π di P contiene almeno un vertice v , e quindi il suo vettore unitario ortogonale uscente è contenuto in S_v .

Sia ora π un piano di supporto di P (considerato come il bordo del semispazio σ) contenente il vertice v e ν il vettore unitario ortogonale uscente da π . Allora $\nu \in S_v$. Inoltre l'intersezione di σ con S_v è una semisfera contenente $\text{link}(v)$, da cui si può dedurre che ν ha distanza sferica non inferiore a $\frac{\pi}{2}$ da $\text{link}(v)$ in S_v . Grazie all'esempio precedente ν è contenuto nel corpo convesso sferico v^* di S_v che ha per bordo il poligono $\text{link}(v)^*$. Viceversa, ogni punto di v^* è il vettore ortogonale unitario uscente da un piano di supporto di P in v .

Le facce di P^* sono quindi esattamente i corpi convessi sferici $v^* \subseteq S_v$ al variare di v tra i vertici di P . Ricordando anche le proprietà di $\text{link}(v)^*$ di cui abbiamo parlato sopra, si hanno le seguenti corrispondenze:

- ad ogni faccia f di P corrisponde un vertice f^* di P^* ;
- ad ogni spigolo l di P con angolo diedrale θ corrisponde uno spigolo l^* di P^* di lunghezza $\pi - \theta$;
- ad ogni vertice v di P corrisponde una faccia v^* di P^* ;
- due facce v_1^* e v_2^* sono adiacenti e si incontrano in uno spigolo l^* se e solo se i vertici v_1 e v_2 appartengono allo stesso spigolo l (e viceversa);
- un vertice f^* appartiene alla faccia v^* se e solo se il vertice v appartiene alla faccia f ;
- se la faccia f ha angolo interno α in v allora la faccia v^* ha angolo $\pi - \alpha$ in f^* .

2.3 Superfici con singolarità coniche

Come abbiamo appena visto il poliedro $P^* \subseteq X^*$ ha facce che sono corpi convessi sferici, quindi ha una sua struttura metrica, che in questa sezione studieremo in dettaglio.

Definizione 2.4. Una *superficie con singolarità coniche* è una 2-varietà differenziabile M con un tensore metrico g definito su $M \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ che

ammette una tassellazione in poligoni di cui i punti $\{p_1, \dots, p_k\}$ (detti *punti conici*) sono vertici. Inoltre richiediamo che ciascuno dei poligoni sia isometrico ad un poligono chiuso a bordo geodetico a tratti in una qualche superficie riemanniana. Per ogni p_i , la somma degli angoli interni dei poligoni contenenti p_i nel punto conico si chiama *angolo conico* in p_i .

La trasformata polare P^* del poliedro P è ottenuta incollando un numero finito di corpi convessi sferici con bordo poligonale lungo dei lati. Da questi incollamenti è indotta su P^* una struttura di varietà differenziabile chiusa e un tensore metrico fuori dai vertici f_1^*, \dots, f_k^* (il tensore è definito anche nei punti interni agli spigoli perché si incolla tramite isometrie) di curvatura sezionale costante 1. Inoltre su P^* è definita una tassellazione riemanniana che la rende una superficie con singolarità coniche con punti conici f_1^*, \dots, f_k^* .

Proposizione 2.4. *Sia $X = \mathbb{S}^3$ o \mathbb{H}^3 e $P \subseteq X$ un poliedro convesso compatto. Allora P^* è una superficie con singolarità coniche f_1^*, \dots, f_k^* (corrispondenti alle facce f_1, \dots, f_k di P) omeomorfa a \mathbb{S}^2 con metrica di curvatura sezionale costante 1 e con angoli conici in f_j^* pari a $2\pi - K \cdot \text{area}(f_j)$ dove K è la curvatura di X .*

Dimostrazione. La prima parte della proposizione è stata già dimostrata. Inoltre l'angolo conico in f_j^* è pari alla somma degli angoli esterni della faccia corrispondente f_j di P . Grazie al teorema di Gauss-Bonnet questa somma è $2\pi - K \cdot \text{area}(f_j)$ dove K è la curvatura di X .

Infine: sia V il numero di vertici, S il numero di spigoli e F il numero di facce di P . Anche per i poliedri sferici e iperbolici vale la nota formula di Eulero $V - S + F = 2$. Poiché la superficie P^* ha una naturale tassellazione con F vertici, S spigoli e V facce, anch'essa ha caratteristica di Eulero 2 e quindi P^* è omeomorfa a \mathbb{S}^2 . \square

Osservazione 2.5. Un poliedro P in $X = \mathbb{S}^3$ o \mathbb{H}^3 considerato con la sua metrica intrinseca è una superficie con singolarità coniche con i vertici come punti conici. Dato un vertice v l'angolo conico di P in v è pari alla somma degli angoli interni delle facce in v , quindi è pari al perimetro di $lk(v)$. Questo è un poligono sferico convesso non banale, quindi ha perimetro strettamente minore di 2π .

2.4 Geodetiche sulla trasformata polare

Notiamo innanzitutto che in una superficie con punti conici M è possibile definire comunque la lunghezza di una curva differenziabile a tratti (eventualmente passante anche per i punti conici) e quindi è presente la nozione di distanza. In M chiamiamo *geodetica* (eventualmente chiusa) una curva (eventualmente chiusa) che sia una curva differenziabile a tratti che minimizzi localmente la distanza. Una geodetica può passare anche per un punto conico.

Proposizione 2.5. *Sia M una superficie con punti conici e supponiamo che sia possibile tassellare M solo con poligoni sferici o solo con poligoni iperbolici. Allora γ è una geodetica in M se e solo se fuori dai punti conici è una geodetica nel senso delle varietà riemanniane e se, nell'eventualità che attraversi un punto conico, sottende da ambo le parti un angolo non inferiore a π .*

Dimostrazione. Le condizioni espresse sono sicuramente sufficienti. Sono anche necessarie: supponiamo per assurdo che γ , attraversando un punto conico p , sottenda da una delle due parti un angolo inferiore a π . Allora, per una applicazione della disuguaglianza triangolare sferica o iperbolica, vicino a p la curva γ non minimizza la distanza. \square

Lo scopo di questo capitolo è dimostrare la seguente:

Proposizione 2.6. *Sia P un poliedro convesso compatto in \mathbb{H}^3 . Ogni geodetica chiusa γ in P^* ha lunghezza strettamente maggiore di 2π .*

Cominciamo con un risultato sulle curve poligonali nello spazio iperbolico.

Definizione 2.5. Una curva semplice γ in \mathbb{H}^3 è detta *poligonale* se è una geodetica a tratti. I punti dell'immagine in cui γ non è differenziabile sono detti vertici. Se γ è una poligonale con vertici p_1, \dots, p_n , si dice *angolo di rotazione* in p_i l'angolo esterno $\tau_{p_i}(\gamma)$ del triangolo di vertici p_{i-1}, p_i, p_{i+1} nel vertice p_i (laddove si prende $p_0 = p_n$ e $p_{n+1} = p_1$). Si definisce *angolo totale di rotazione* $\tau(\gamma)$ la somma degli angoli di rotazione nei vertici.

Teorema 2.1 (Teorema di Fenchel iperbolico). *Se γ è una curva poligonale chiusa in \mathbb{H}^3 , $\tau(\gamma) > 2\pi$.*

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che se γ ha vertici p_1, \dots, p_n , si ha $n \geq 3$. Consideriamo i triangoli iperbolici T_i di vertici p_1, p_i e p_{i+1} , per $2 \leq i \leq n-1$ (vedi figura 2.2). La somma degli angoli interni di ciascuno di questi triangoli $n-2$ triangoli è minore di 2π .

Ogni vertice p_j diverso da p_1, p_2 e p_n è contenuto in esattamente due di questi triangoli (T_{j-1} e T_j) e il complementare $\pi - \tau_{p_j}(\gamma)$ dell'angolo di rotazione in p_j è minore della somma degli angoli di T_{j-1} e T_j in p_j . Questo si vede grazie ad un'applicazione della disuguaglianza triangolare sferica in $S_{p_j} \subseteq T_{p_j} \mathbb{H}^3$.

I vertici p_2 e p_n appartengono ad un solo triangolo T_i e in questi due punti il complementare dell'angolo di rotazione è pari all'angolo interno di T_i in p_j .

Il vertice p_1 appartiene a tutti i T_i e, di nuovo grazie ad un'applicazione della disuguaglianza triangolare sferica in S_{p_1} , $\pi - \tau_{p_1}(\gamma)$ è minore della somma degli angoli di T_i in p_1 .

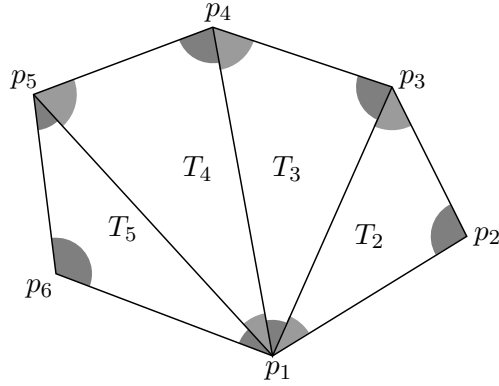


Figura 2.2: Un esempio del teorema 2.1 caso $n = 6$.

Allora la somma dei complementari degli angoli di rotazione è minore della somma degli angoli interni dei triangoli, quindi:

$$n\pi - \tau(\gamma) < (n - 2)\pi$$

da cui la tesi. □

Come già notato precedentemente, un poliedro iperbolico P compatto, considerato con la sua metrica intrinseca, è una superficie con singolarità coniche i cui punti conici sono i vertici ed hanno angolo conico strettamente minore di 2π . Quindi possiamo considerare le geodetiche γ nella metrica intrinseca di P . Una geodetica γ interseca ogni faccia in segmenti geodetici di \mathbb{H}^3 , quindi una geodetica (chiusa) nella metrica intrinseca di P è una curva poligonale (chiusa) in \mathbb{H}^3 . Inoltre poiché l'angolo conico in ogni vertice è minore di 2π non può attraversare un vertice v , altrimenti dovrebbe sottendere da almeno uno dei due lati un angolo minore di π .

Cionondimeno una geodetica può attraversare uno spigolo: infatti sia p un punto interno dello spigolo l all'incontro delle facce f_1 e f_2 . Allora esiste un intorno di p isometrico ad un aperto del piano iperbolico e nel quale l è una geodetica. Le condizioni affinché γ sia una geodetica sono che le restrizioni γ_1 e γ_2 alle facce f_1 e f_2 siano archi di geodetiche iperboliche e che l'angolo "di entrata" formato da γ_1 e l sia uguale all'angolo "di uscita" formato da γ_2 e l (per riferirci a questo fatto elementare useremo la dicitura *legge di Snell*). Inoltre abbiamo il seguente risultato, che ci sarà utile più avanti:

Lemma 2.1. *Sia P un poliedro iperbolico, siano f_1 e f_2 due facce di P che si incontrano in uno spigolo l e sia γ una geodetica nella metrica intrinseca di P che passa nel punto $p \in l$ (necessariamente un punto interno). Allora l'angolo di rotazione di γ in p (come curva poligonale di \mathbb{H}^3) è minore o uguale dell'angolo diedrale esterno di P in l .*

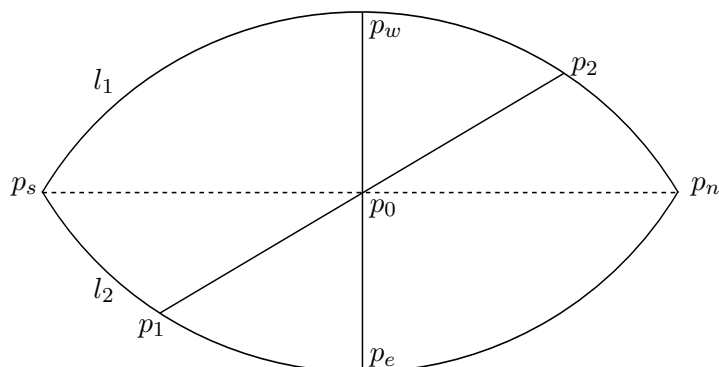


Figura 2.3: Il bigono sferico della dimostrazione del lemma 2.1.

Dimostrazione. Il link di p in S_p è un bigono sferico (quindi avente due soli vertici). Siano p_n e p_s i vertici di $lk(p)$ e l_1, l_2 i suoi lati (corrispondenti alle facce f_1 e f_2). Siano p_e e p_w i punti medi di l_1 ed l_2 e sia p_0 il punto medio del segmento $\overline{p_e p_w}$ (si veda la figura 2.3).

Consideriamo i due rami γ_1 e γ_2 della geodetica contenuti in f_1 e f_2 e siano allora $p_1 \in l_1$ e $p_2 \in l_2$ i vettori unitari tangenti a questi due rami della geodetica in p . Grazie al fatto che l'angolo di entrata di γ in l è pari al suo angolo di uscita, il segmento $\overline{p_1 p_2}$ ha p_0 come punto medio.

Allora per un'applicazione della disuguaglianza triangolare sferica si ha che la lunghezza del segmento $\overline{p_1 p_2}$ (pari a $\pi - \tau_p(\gamma)$) è maggiore della lunghezza del segmento $\overline{p_e p_w}$ (pari all'angolo diedrale di P in l) da cui la tesi. □

Concentriamoci ora sullo studio delle geodetiche nella trasformata polare P^* di un poliedro iperbolico compatto P . Come visto nella sezione precedente P^* è una superficie con singolarità coniche.

Più precisamente P^* è un poliedro nella sfera di de Sitter, ed è l'unione delle sue facce v^* , ciascuna delle quali è un corpo convesso sferico nell'iperpiano S_v della sfera di de Sitter, che è isometrico alla sfera.

Sia γ_t un arco geodetico contenuto in una faccia v^* che colleghi i punti γ_0 e γ_1 . Questo è anche un arco di circonferenza geodetica nella sfera S_v . Per ogni t il punto γ_t è il vettore unitario ortogonale uscente a un piano di supporto Π_t passante per v (si veda la figura 2.4).

Inoltre γ_t è contenuta in una circonferenza geodetica della sfera S_v , la quale è l'intersezione con S_v di un 2-sottospazio di \mathbb{E}_1^3 . Il complemento ortogonale di questo sottospazio, intersecato con lo spazio iperbolico \mathbb{H}^3 , forma una retta iperbolica Γ passante per v . Questa retta è anche l'intersezione dei piani Π_t al variare di t . La lunghezza di γ_t è pari all'angolo diedrale

esterno tra Π_0 e Π_1 , grazie alla definizione di quest'ultimo. Intuitivamente, potremmo quindi dire che la geodetica è una “rotazione attorno all'asse Γ ”.

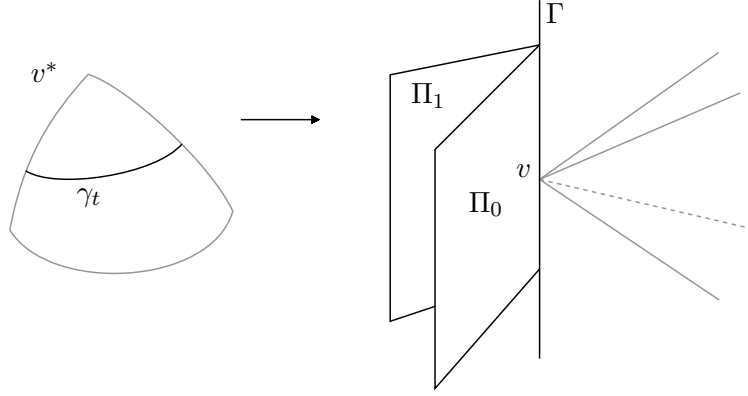


Figura 2.4: Una geodetica polare in v^* corrisponde a una rotazione attorno ad un asse Γ di piani di supporto a P in v .

Consideriamo ora una geodetica γ che passi dalla faccia v_1^* alla faccia v_2^* intersecando nel punto π^* l'interno dello spigolo l^* . Siano γ_1 e γ_2 le intersezioni di γ con le due facce. Come abbiamo visto sopra, γ_1 è una rotazione di piani di supporto di P in v_1 attorno ad un asse Γ_1 e γ_2 è una rotazione di piani di supporto di P in v_2 attorno ad un asse Γ_2 .

Lemma 2.2. *Con le notazioni precedenti, Γ_1 e Γ_2 sono complanari e iperparalleli¹.*

Dimostrazione. Poiché γ_1 e γ_2 si intersecano in π^* , Γ_1 e Γ_2 sono contenuti nel piano iperbolico π di cui π^* è il vettore unitario ortogonale uscente. Inoltre notiamo che anche in questo caso vale la legge di Snell e l'angolo di entrata α formato da γ_1 con l^* è pari all'angolo di uscita formato γ_2 con l^* .

Lo spigolo l^* è una geodetica sia in v_1^* che in v_2^* e quindi è una rotazione di piani di supporto per P che contengono sia v_1 che v_2 (e quindi l'intero spigolo $l = \overline{v_1 v_2}$) attorno allo spigolo l , a sua volta contenuto in π . Si noti che l'asse Γ_1 passa in v_1 e l'asse Γ_2 passa in v_2 . Allora lo spigolo l interseca Γ_1 in v_1 e Γ_2 in v_2 . Inoltre l'angolo interno nel piano π tra l e Γ_i è pari a $\pi - \alpha$ (vedi figura 2.5), dato che l'angolo formato dai loro ortogonali l^* e γ_i è α .

Supponiamo ora che, diversamente da quanto riportato dall'immagine, Γ_1 e Γ_2 abbiano un punto x di intersezione in $\overline{\mathbb{H}^3}$. Allora il triangolo di vertici v_1, v_2, x avrebbe somma degli angoli interni non inferiore a $(\pi - \alpha) + \alpha = \pi$, che è assurdo per un triangolo iperbolico. \square

¹Cioè l'intersezione delle loro chiusure in $\overline{\mathbb{H}^3}$ è vuota.

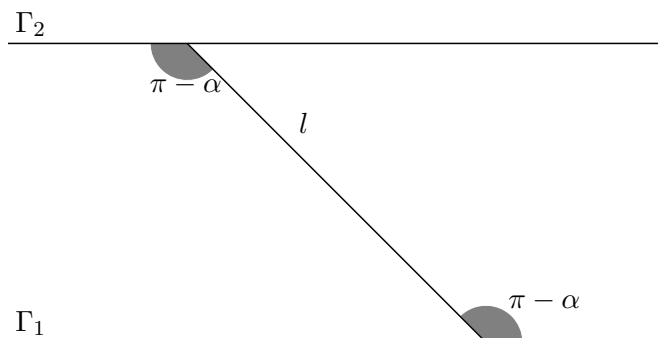


Figura 2.5: Γ_1 e Γ_2 sono complanari e iperparalleli.

Notiamo che, poiché gli angoli conici di P^* hanno ampiezza superiore a 2π , una geodetica può attraversare un vertice, a patto che sottenda da entrambi i lati un angolo maggiore o uguale a π .

Sia quindi f^* un vertice di P^* (corrispondente in P a una faccia f), cui siano afferenti facce v_1^*, \dots, v_n^* (corrispondenti in P a vertici v_1, \dots, v_n) e spigoli l_1^*, \dots, l_n^* (corrispondenti in P a spigoli l_1, \dots, l_n), e sia γ una geodetica che passi attraverso f^* . Supponiamo che $v_i^* \cap v_{i+1}^* = l_i^*$ (dove $v_{n+1}^* = v_0^*$). Supponiamo inoltre che γ passi dalla faccia v_1^* alla faccia v_{k+1}^* e siano γ_1 e γ_2 le intersezioni di γ con le due facce (vedi figura 2.6).

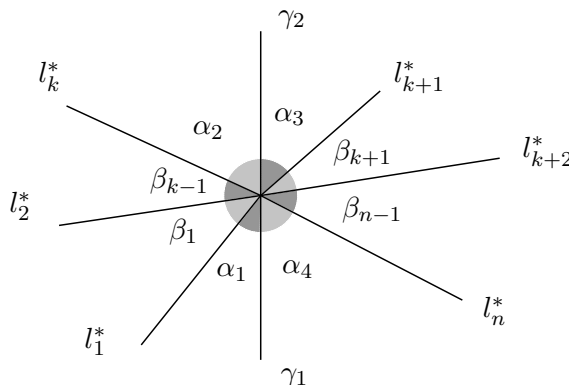


Figura 2.6: Geodetica che attraversa un vertice di P^* .

Inoltre siano: α_1 l'angolo fra γ_1 e l_1^* , α_2 l'angolo tra l_k^* e γ_2 , α_3 l'angolo fra γ_2 e l_{k+1}^* , α_4 l'angolo tra l_n^* e γ_1 , β_i l'angolo tra l_i^* e l_{i+1}^* (come si vede nella figura 2.6). Poiché γ è una geodetica che “separa” gli spigoli l_1, \dots, l_k

dagli spigoli l_{k+1}, \dots, l_n , si ha:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i \geq \pi \quad \text{e} \quad \alpha_3 + \alpha_4 + \sum_{i=k+1}^{n-1} \beta_i \geq \pi .$$

Come sopra, γ_1 è una rotazione attorno all'asse Γ_1 di piani di supporto per P in v_1 e γ_2 è una rotazione attorno all'asse Γ_2 di piani di supporto per P passanti in v_2 .

Lemma 2.3. *Con le notazioni precedenti, Γ_1 e Γ_2 sono complanari e iperparalleli.*

Dimostrazione. Poiché γ_1 e γ_2 passano per f^* , gli assi Γ_1 e Γ_2 sono contenuti nell'unico piano iperbolico π contenente f e quindi sono complanari.

Inoltre nel piano π la faccia f ha per bordo un poligono iperbolico (vedi figura 2.7), e si ha:

- l'asse Γ_1 è una retta di supporto per f nel vertice v_1 e forma con l_1 un angolo $\pi - \alpha_1$ (infatti i loro ortogonali formano un angolo di ampiezza α_1) e con l_n un angolo $\pi - \alpha_4$ (per lo stesso motivo);
- l'asse Γ_2 è una retta di supporto per f nel vertice v_{k+1} e forma con l_k un angolo $\pi - \alpha_2$ e con l_{k+1} un angolo $\pi - \alpha_3$;
- grazie alle corrispondenze individuate nella sezione precedente tra un poliedro P e la sua trasformata polare P^* , gli angoli interni alla faccia f sono $\pi - \beta_1, \dots, \pi - \beta_n$.

Ricordiamo che $\beta_k = \alpha_2 + \alpha_3$ e $\beta_n = \alpha_1 + \alpha_4$.

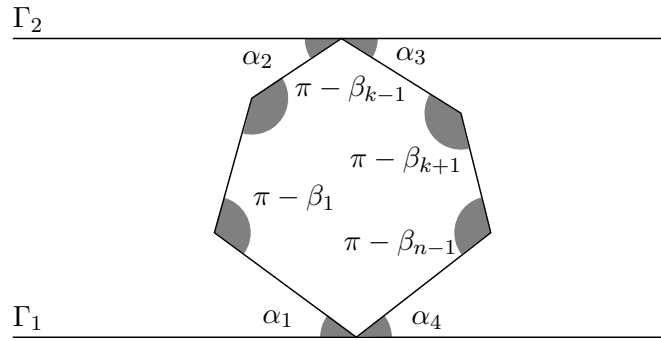


Figura 2.7: Γ_1 e Γ_2 sono complanari e iperparalleli.

Supponiamo ora che, diversamente da quanto accade in figura, Γ_1 e Γ_2 abbiano un punto di intersezione x in $\overline{\mathbb{H}^3}$ nel quale formino un angolo interno θ . Per ciò che abbiamo appena visto $x \notin f$ (infatti le rette Γ_1 e Γ_2 sono rette di supporto per f). Allora si hanno due alternative:

- se l'intersezione è a sinistra nella figura 2.7 il poligono non convesso K_1 di vertici x, v_1, \dots, v_{k+1} ha angoli interni $\theta, \alpha_1, \pi + \beta_1, \dots, \pi + \beta_{k-1}, \alpha_2$;
- se l'intersezione è a destra nella figura 2.7 il poligono non convesso K_2 di vertici $x, v_{k+1}, \dots, v_n, v_1$ ha angoli interni $\theta, \alpha_3, \pi + \beta_{k+1}, \dots, \pi + \beta_{n-1}, \alpha_4$.

Supponiamo di essere nel primo caso. Il poligono K_1 ha $k+2$ lati. Allora se σ è la somma dei suoi angoli interni deve essere $\sigma < k\pi$. Si ha invece:

$$\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 + \sum_{i=1}^{k-1} (\pi + \beta_i) + \theta \geq (k-1)\pi + \alpha_1 + \alpha_2 + \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i \geq k\pi$$

che è assurdo. Poiché se il secondo è del tutto analogo, possiamo solo concludere che Γ_1 e Γ_2 sono iperparalleli. \square

Dimostrazione della proposizione 2.6. Sia γ una geodetica chiusa nella trasformata polare. La geodetica può essere suddivisa in un numero finito di tratti in cui è contenuta in una faccia di P^* (eventualmente anche nel bordo) e in un numero finito di punti in cui attraversa un vertice oppure interseca trasversalmente uno spigolo di P . Si noti che se per un certo tratto la geodetica γ è contenuta nel bordo di una faccia, essa può entrare o uscire dalla faccia soltanto attraverso un vertice (grazie alla legge di Snell, infatti, l'angolo di entrata in una faccia dev'essere uguale all'angolo di uscita).

Siano Π_1^*, \dots, Π_n^* i punti di γ in cui attraversa un vertice di P^* oppure interseca trasversalmente uno spigolo di P^* . Questi sono i vettori unitari ortogonali uscenti a piani iperbolici Π_1, \dots, Π_n di supporto per il poliedro P .

Siano $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ i tratti in cui viene divisa γ da Π_1^*, \dots, Π_n^* (in particolare supponiamo che γ_i colleghi il punto Π_i^* al punto Π_{i+1}^*). La lunghezza di γ è ovviamente pari alla somma delle lunghezze dei tratti γ_i . Ogni tratto γ_i è contenuto in una faccia di P^* e quindi è una rotazione attorno ad un asse Γ_i di piani di supporto di P che va dal piano Π_i al piano Π_{i+1} . Inoltre, grazie a quanto detto sopra, la lunghezza di γ_i è pari all'angolo diedrale esterno tra i piani Π_i e Π_{i+1} .

Nelle ultime proposizioni abbiamo dimostrato che gli assi Γ_i e Γ_{i+1} sono complanari e iperparalleli. Si ricordi inoltre che $\Gamma_i = \Pi_i \cap \Pi_{i+1}$.

Consideriamo ora la superficie iperbolica completa C ottenuta incollando le strisce di piano comprese tra le rette Γ_i e Γ_{i+1} . La lunghezza di γ è pari alla somma degli angoli diedrali esterni $\delta(\Gamma_i)$ di C . Questa è omeomorfa ad un cilindro: le strisce di piano sono orientate – il vettore unitario ortogonale uscente a Π_i è Π_i^* – e l'orientazione viene preservata durante l'incollamento. Inoltre grazie al fatto che gli assi Γ_i e Γ_{i+1} sono iperparalleli ciascuna delle

due code ha volume infinito. Allora grazie al Lemma 1.1 esiste una geodetica chiusa σ nella metrica intrinseca di C .

La geodetica chiusa σ è una curva poligonale chiusa in \mathbb{H}^3 con vertici q_i corrispondenti alle intersezioni con gli assi Γ_i . Allora grazie al Lemma 2.1 per ogni vertice di σ vale la disuguaglianza $\tau_{q_i}(\sigma) \leq \delta(\Gamma_i)$. Inoltre per il Teorema 2.1 si ha:

$$\sum_{i=1}^n \delta(\Gamma_i) \geq \sum_{i=1}^n \tau_{q_i}(\sigma) = \tau(\sigma) > 2\pi$$

Questo completa la dimostrazione. \square

Enunciamo ora uno dei risultati principali, la caratterizzazione di Rivin dei poliedri iperbolici compatti:

Teorema 2.2 (Rivin). *Una superficie con singolarità coniche M con un numero finito di punti conici è isometrica alla trasformata polare di un unico poliedro iperbolico compatto (a meno di congruenza) se e solo se:*

1. *la superficie M è omeomorfa a \mathbb{S}^2 ;*
2. *fuori dai punti conici M ha curvatura sezionale costante 1;*
3. *gli angoli conici hanno tutti ampiezza strettamente maggiore di 2π ;*
4. *ogni geodetica chiusa ha lunghezza strettamente maggiore di 2π .*

La dimostrazione della prima parte di questo teorema, cioè della necessità delle condizioni espresse, è stata l'oggetto di questo capitolo. Il risultato di unicità è contenuto nel capitolo 4. La parte riguardante la sufficienza delle condizioni sarà dimostrata nel capitolo 5.

Capitolo 3

Poliedri di volume finito

Nel seguito studieremo la trasformata polare di un poliedro iperbolico di volume finito e definiremo la trasformata polare generalizzata allo scopo di estendere (con le opportune modifiche) il teorema 2.2 al caso dei poliedri di volume finito.

3.1 La trasformata polare generalizzata

Avendo definito un n -poliedro iperbolico come il *bordo* di un'intersezione finita di semispazi chiusi in \mathbb{H}^n , chiameremo *volume* del poliedro P la somma dei volumi delle sue $(n - 1)$ -facce. Altrove questa grandezza è chiamata *superficie laterale* del poliedro, ma qui è bene non confondere un poliedro con il corpo convesso di cui è il bordo. Da qui in poi ci concentreremo senz'altro sul caso $n = 3$.

Proposizione 3.1. *Un poliedro iperbolico P ha volume finito se e solo se la sua chiusura topologica \bar{P} in \mathbb{H}^3 è tale che l'insieme $\bar{P} \cap \partial\mathbb{H}^3$ è finito. I punti $p \in \bar{P} \cap \partial\mathbb{H}^3$ sono detti vertici ideali (mentre i vertici definiti in precedenza saranno qui chiamati vertici finiti). Un poliedro iperbolico di volume finito sarà detto ideale se non ha vertici finiti.*

Dimostrazione. Il volume di un poliedro iperbolico, per come lo abbiamo definito, è pari alla somma delle aree delle sue facce. Ciascuna di queste è un chiuso nel piano iperbolico dato dall'intersezione di un numero finito di semipiani e avente per bordo un poligono iperbolico.

Data una faccia f di P , questa ha area finita se e solo se la sua chiusura \bar{f} in \mathbb{H}^2 è tale che l'insieme $\bar{f} \cap \partial\mathbb{H}^2$ è finito. Dato che P è l'unione delle sue facce questo ci permette di concludere. \square

Osservazione 3.1. Un poliedro iperbolico P che sia il bordo di un corpo convesso C è di volume finito se e solo se C ha volume finito.

Osservazione 3.2. Un n -poliedro compatto è un poliedro di volume finito che non ha vertici ideali.

Osservazione 3.3. Consideriamo ora il modello proiettivo dello spazio iperbolico introdotto nel primo capitolo. In questo modello lo spazio iperbolico è costituito dalla parte interna B^n della palla unitaria nel piano proiettivo e la sua chiusura è costituita dalla chiusura della palla unitaria $\overline{B^n}$. Inoltre B^n è contenuta in una carta affine e i sottospazi e i semipiani iperbolici sono costituiti dall'intersezione con B^n di sottospazi e semipiani affini.

Consideriamo ora un poliedro iperbolico in \mathbb{H}^3 . Se P è compatto, allora il suo modello in B^3 è un poliedro euclideo contenuto in B^3 . Se P è di volume finito, allora il suo modello è un poliedro euclideo contenuto in $\overline{B^3}$ la cui intersezione con ∂B^3 sono i vertici ideali. Se P è ideale allora tutti i suoi vertici sono su ∂B^3 e cioè il modello di P è un poliedro euclideo inscritto nella sfera.

In ogni caso il modello di P è un poliedro euclideo compatto. Se P ha V vertici, S spigoli e F facce, resta acquisita la formula (che avevamo in precedenza dato per scontata) $F - S + V = 2$, dove $V = V_f + V_i$ con V_f il numero dei vertici finiti e V_i il numero dei vertici ideali.

Sia ora P un poliedro di volume finito. In generale non siamo più nelle ipotesi della proposizione 2.3: infatti P non è necessariamente compatto e non è più vero che ogni faccia o spigolo contiene almeno un vertice finito.

Quello che abbiamo è che ogni faccia o spigolo contiene almeno un vertice (finito o ideale) e quindi ogni piano di supporto di P interseca $\overline{P} \subseteq \overline{\mathbb{H}^3}$ in almeno uno di questi vertici.

Sia π un piano di supporto per P e supponiamo che π intersechi P nel vertice finito v . Sia ν il vettore unitario ortogonale uscente da π . Il vettore ν appartiene all'iperpiano S_v della sfera di de Sitter \mathbb{S}_1^2 dei vettori unitari ortogonali a v (che, ricordiamo, è anche la sfera unitaria nello spazio tangente $T_v\mathbb{H}^3$). Grazie ad un ragionamento del tutto analogo a quello visto nel capitolo precedente nel caso dei poliedri compatti il vettore ν appartiene al corpo convesso in S_v che ha per bordo il poligono sferico $\text{link}(v)^*$ (la polare sferica di $\text{link}(v)$).

Sia ora π un piano di supporto per P che interseca \overline{P} in un vertice ideale v . Allora, poiché il piano π interseca il poliedro P in almeno un punto deve contenere uno spigolo l afferente a v . Lo spigolo l è contenuto in una retta che è l'intersezione di un piano dello spazio \mathbb{E}_1^3 con l'iperboloide. Il suo complemento ortogonale interseca la sfera di de Sitter in una retta. Abbiamo visto nel primo capitolo che i k -sottospazi della sfera di de Sitter sono isometrici alla sfera \mathbb{S}^k . Il vettore unitario ν ortogonale uscente da π appartiene a questa retta della sfera di de Sitter che è isometrica a una circonferenza.

L'insieme dei vettori unitari ortogonali uscenti dai piani tangenti che contengono lo spigolo l afferente al vertice ideale v è un segmento (che chiameremo l^*) di questa retta della sfera di de Sitter (vedi figura 3.1). Grazie

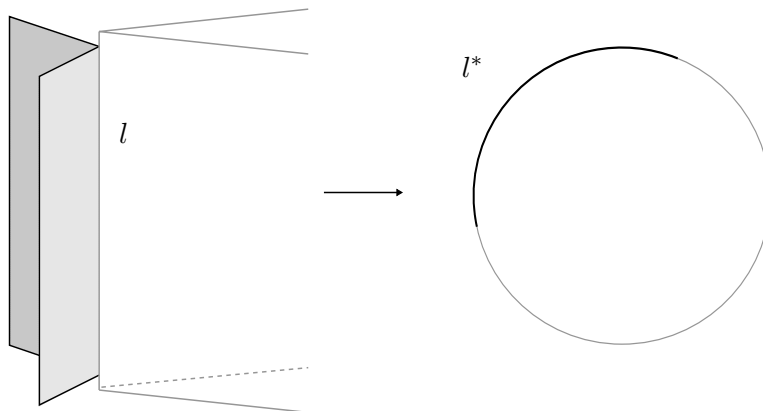


Figura 3.1: L'insieme dei vettori unitari ortogonali uscenti dai piani tangenti che contengono lo spigolo l è un segmento l^* di una opportuna retta della sfera di de Sitter.

alla definizione di angolo diedrale esterno α in uno spigolo l possiamo concludere che la lunghezza del segmento l^* è proprio pari ad α . In generale, l'insieme dei vettori unitari ortogonali uscenti da piani di supporto π passanti per un vertice ideale v è una curva poligonale chiusa nella sfera di de Sitter formata dai segmenti l^* corrispondenti agli spigoli l afferenti a v , ciascuno dei quali ha lunghezza pari all'angolo diedrale esterno in l .

Possiamo concludere quindi che la polare sferica P^* di un poliedro di volume finito P è l'unione di V_f corpi convessi v_* corrispondenti ai vertici finiti e di V_i curve poligonali (che per ora chiameremo ancora v^*) corrispondenti ai vertici ideali. Due di questi oggetti v_1^* e v_2^* si intersecano in un segmento l^* solo se il corrispondente spigolo l ha per vertici v_1 e v_2 . In generale la trasformata polare P^* non è un poliedro della sfera di de Sitter (potremmo dire, per sollecitare l'intuizione, che c'è un "buco" al posto della faccia duale ad ogni vertice ideale). Ne forniamo un esempio nella figura 3.2.

Proposizione 3.2. *Se v è un vertice ideale di un poliedro iperbolico P , la somma degli angoli diedrali esterni degli spigoli afferenti a v è pari a 2π .*

Dimostrazione. Sia H una piccola sfera centrata in v . L'intersezione di P con H è un poligono euclideo di angoli interni pari agli angoli diedrali degli spigoli afferenti a v . Allora la somma degli angoli diedrali esterni è pari alla somma degli angoli esterni di un poligono euclideo, da cui la tesi. \square

Grazie alla proposizione precedente sappiamo quindi che, per ogni vertice ideale v del poligono P , la curva poligonale v^* ha lunghezza 2π . Vorremmo quindi "riempire" i buchi della trasformata polare P^* relativi ai vertici ideali con delle semisfere da incollare alla curva poligonale v^* tramite un'isometria del bordo.

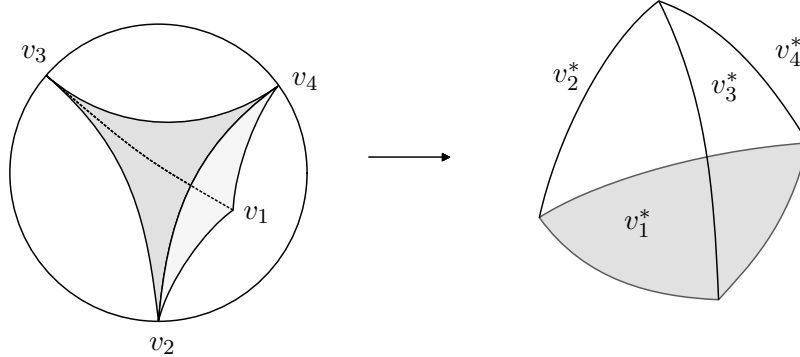


Figura 3.2: La trasformata polare di un poliedro di volume finito (visto con il modello del disco) non è un poliedro della sfera di de Sitter. Infatti nella figura a destra l'unica faccia è v_1^* . Le parti indicate con v_2^* , v_3^* e v_4^* sono solo delle curve chiuse.

Definizione 3.1 (Trasformata polare generalizzata). Dato un poliedro iperbolico di volume finito P , la sua trasformata polare generalizzata $\overline{P^*}$ è lo spazio metrico, considerato a meno di isometrie, ottenuto incollando ad ogni curva poligonale v^* di P^* corrispondente ad un vertice ideale v , una copia isometrica della semisfera $\mathbb{S}^2 \cap \{x_1 \geq 0\}$ lungo il suo bordo. Chiameremo queste semisfere *facce ideali* di $\overline{P^*}$ e denoteremo anch'esse, con un abuso di notazioni, con v^* , dove v è il vertice ideale corrispondente.

Osservazione 3.4. Si noti che mentre la trasformata polare P^* è un poliedro della sfera di de Sitter, abbiamo definito la trasformata polare generalizzata $\overline{P^*}$ come uno spazio astratto, non immerso in \mathbb{S}_1^2 .

La trasformata polare generalizzata ha una struttura di superficie con singolarità coniche: infatti è una superficie chiusa che ha una tassellazione in $V = V_f + V_i$ facce, S spigoli e F vertici. Allora, poiché $F - S + V = 2$, la superficie $\overline{P^*}$ è omeomorfa a \mathbb{S}^2 . Inoltre ha un tensore metrico ben definito (incolliamo tramite isometria) e avente curvatura sezionale costante 1, fuori da un insieme finito di punti conici corrispondenti alle facce di P .

L'angolo conico in ogni punto conico f^* corrispondente alla faccia f è ancora una volta pari alla somma degli angoli esterni della faccia f . Infatti se f contiene un vertice finito v , la faccia $v^* \subseteq P^*$ ha angolo interno in f^* pari all'angolo esterno di f in v (grazie alle proprietà di $\text{link}(v)$ e della polare sferica studiate nel capitolo precedente). Se f contiene un vertice ideale v , l'angolo interno in v è nullo e l'angolo esterno è pari a π , pari all'angolo interno della faccia ideale $v^* \subseteq \overline{P^*}$ (che è una semisfera), considerata come corpo convesso sferico, nel vertice f^* . Allora l'angolo conico in f^* è pari a $2\pi + \text{area}(f) > 2\pi$.

3.2 Geodetiche sulla trasformata polare generalizzata

Per ottenere un risultato analogo al teorema 2.2 ci manca di dare una stima sulla lunghezza delle geodetiche chiuse. Ricordiamo che, poiché la trasformata polare generalizzata $\overline{P^*}$ è una superficie con singolarità coniche che ammette una tassellazione in poligoni sferici, una geodetica (eventualmente chiusa) di $\overline{P^*}$ è tale se e solo se:

- interseca ciascuna faccia in un tratto di geodetica sferica (eventualmente contenuta anche nel bordo della faccia);
- rispetta la legge di Snell, cioè interseca ogni spigolo di $\overline{P^*}$ con uguale angolo di entrata e uscita;
- quando attraversa un vertice sottende da ambo i lati un angolo non inferiore a π .

A differenza del caso compatto, abbiamo quindi almeno V_f geodetiche chiuse di lunghezza pari a 2π , cioè i bordi delle facce ideali.

Osservazione 3.5. Come abbiamo osservato nella dimostrazione della proposizione 2.6, se per un certo tratto la geodetica γ è contenuta nel bordo di una faccia, essa può entrare o uscire dalla faccia soltanto attraverso un vertice (grazie alla legge di Snell, infatti, l'angolo di entrata in una faccia dev'essere uguale all'angolo di uscita).

Supponiamo che una geodetica γ non intersechi la *parte interna* di nessuna faccia ideale, cioè mettiamoci nel caso in cui $\gamma \subseteq P^*$. Se un tratto della geodetica γ è contenuto in una faccia v^* corrispondente a un vertice finito v , come nel capitolo precedente è possibile interpretare questo tratto come una rotazione di piani di supporto per P attorno ad un asse Γ contenente il vertice v . Se questa rotazione va dal piano Π_0 al piano Π_1 allora la lunghezza di questo tratto è pari all'angolo diedrale esterno tra Π_0 e Π_1 .

Se un tratto della geodetica γ passa invece per il *bordo* di una faccia ideale v^* , grazie all'osservazione precedente deve necessariamente coincidere con uno o più spigoli di questa faccia ideale. Supponiamo che un tratto di geodetica coincida con uno spigolo l^* . Grazie a quanto rimarcato nello studio della trasformata polare di P questo spigolo è interpretabile come una rotazione di piani di supporto per P attorno all'asse contenente lo spigolo l di P e se questo spigolo è all'incontro delle facce f_1 e f_2 , la lunghezza di l^* è pari all'angolo diedrale esterno tra (i piani di supporto contenenti) le facce f_1 e f_2 .

Supponiamo che una geodetica γ di $\overline{P^*}$ e che sia contenuta in P^* passi dalla faccia (eventualmente anche ideale) v_1^* di P^* alla faccia v_2^* (eventualmente anche ideale) attraversando un vertice di P^* o intersecando trasversalmente uno spigolo. Sia γ_1 il tratto contenuto in v_1 e γ_2 il tratto contenuto in v_2 .

Per quanto abbiamo appena detto γ_i corrisponde a una rotazione di piani di supporto attorno ad una asse Γ_i . Allora, ricalcando le dimostrazioni del capitolo precedente, abbiamo che Γ_1 e Γ_2 sono complanari e iperparalleli.

Proposizione 3.3. *Una geodetica chiusa γ in $\overline{P^*}$ che non interseca la parte interna di alcuna faccia ideale ha lunghezza strettamente maggiore di 2π a meno che non sia il bordo di una faccia ideale, nel qual caso ha lunghezza pari a 2π .*

Dimostrazione. Dividiamo la geodetica γ in tratti $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ che siano contenuti in una faccia v^* corrispondente ad un vertice finito v oppure coincidenti con uno spigolo del bordo di una faccia ideale. Ciascuno di questi tratti γ_i corrisponde ad una rotazione di piani di supporto per P attorno ad un asse Γ_i dal piano Π_i al piano Π_{i+1} (dove $\Pi_{n+1} = \Pi_0$) ed ha lunghezza pari all'angolo diedrale esterno tra Π_i e Π_{i+1} .

Se γ_i e γ_{i+1} sono contenuti in due facce distinte allora Γ_i e Γ_{i+1} sono complanari e iperparalleli. Se γ_i e γ_{i+1} sono spigoli della stessa faccia ideale v^* allora Γ_i e Γ_{i+1} sono paralleli (e quindi complanari) e si incontrano solo nel vertice ideale v .

Se γ coincide con il bordo di una faccia ideale allora ha necessariamente, come mostrato in precedenza, lunghezza pari a 2π . Altrimenti gli assi $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ non sono tutti a due a due paralleli, ed esistono almeno due assi consecutivi iperparalleli Γ_i e Γ_{i+1} .

Sia, come nella dimostrazione della proposizione 2.6, C la superficie iperbolica completa ottenuta incollando le strisce dei piani Π_{i+1} comprese tra le rette Γ_i e Γ_{i+1} . Questa superficie iperbolica è omeomorfa a un cilindro le cui code hanno entrambe volume infinito. Allora, applicando i Lemmi 1.1 e 2.1 e il Teorema 2.1, possiamo concludere che la lunghezza di γ è strettamente maggiore di 2π . \square

Sia ora γ una geodetica chiusa che interseca l'interno di almeno una faccia ideale. Notiamo che il tratto di geodetica ottenuto dall'intersezione di γ con l'interno di una faccia ideale, essendo un arco massimo di geodetica in una semisfera, ha lunghezza pari a π . Nonostante abbiamo questa informazione in più abbiamo una grande limitazione data dal fatto che non possiamo interpretare un tratto di geodetica che passi per l'interno di una faccia ideale come una rotazione di piani di supporto attorno ad un asse.

Proposizione 3.4. *Una geodetica chiusa γ in $\overline{P^*}$ che interseca la parte interna di almeno una faccia ideale ha lunghezza strettamente maggiore di 2π .*

Dimostrazione. Supponiamo che γ sia contenuta nell'unione di due facce ideali distinte v_1^* e v_2^* (nel qual caso avrebbe lunghezza 2π), e siano γ_1 il tratto contenuto in v_1^* , γ_2 il tratto contenuto in v_2^* . Poiché ciascuno spigolo di P^* ha lunghezza strettamente minore di π , i punti di intersezione di γ

con la parte comune del bordo di v_1^* e v_2^* appartengono a due spigoli l_1^* e l_2^* distinti, corrispondenti a spigoli distinti l_1 e l_2 di P . Poiché però l_1 e l_2 contengono entrambi i vertici ideali distinti v_1 e v_2 , si ha $l_1 = l_2$, cioè un assurdo.

Quindi se γ passa per la parte interna di due facce ideali distinte, non può essere contenuta nell'unione di queste due facce e quindi la sua lunghezza è strettamente maggiore di 2π .

Supponiamo ora che γ intersechi l'interno di una sola faccia ideale v^* . Supponiamo che γ sia divisa nei tratti $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ ciascuno dei quali contenuto in una faccia di P^* (oppure coincidente con uno spigolo del bordo di una faccia ideale) e nel tratto γ_{n+1} passante nella faccia ideale corrispondente a un vertice ideale v . Per quanto visto prima basta dimostrare che le lunghezze di $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ hanno somma maggiore di π .

Ciascuno dei tratti γ_i corrisponde a una rotazione di piani di supporto per P attorno a un asse Γ_i . Come prima Γ_i e Γ_{i+1} sono complanari e paralleli o iperparalleli. Questi assi non sono tutti paralleli tra di loro, altrimenti i tratti γ_i dovrebbero appartenere tutti al bordo di una faccia ideale che dovrebbe coincidere necessariamente con v^* . Allora il tratto γ_{n+1} , per la legge di Snell, dovrebbe anch'esso far parte del bordo di v^* , mentre abbiamo supposto che questo passasse per la parte interna di v^* . In particolar modo γ_1 e γ_n non possono essere spigoli di v^* e quindi gli assi Γ_1 e Γ_n non contengono v come punto all'infinito. Per fissare la notazione supponiamo anche che il tratto γ_i corrisponda a una rotazione dal piano Π_i al piano Π_{i+1} . Allora, come sopra, la lunghezza del tratto γ_i è pari all'angolo diedrale esterno tra Π_i e Π_{i+1} .

L'intersezione di γ con il bordo della faccia ideale v^* è data da due punti antipodali, corrispondenti ai vettori ortogonali uscenti dai piani di supporto Π_1 e Π_{n+1} , che quindi contengono come punto all'infinito il vertice ideale v . Poiché questi punti sono antipodali, i piani Π_1 e Π_{n+1} sono paralleli e si incontrano nel punto all'infinito v . Infatti le lunghezze degli spigoli di v^* corrispondono agli angoli diedrali esterni di P negli spigoli afferenti a v . Allora l'intersezione di P e dei piani Π_1 e Π_{n+1} con una piccola sfera centrata in v è una coppia di rette euclidee di supporto a un poligono euclideo (come mostrato in figura 3.3), i cui angoli esterni corrispondono agli angoli diedrali esterni di P . Per la corrispondenza tra gli angoli esterni di questo poligono e le lunghezze degli spigoli di v^* le due rette sono parallele, il che garantisce che i piani Π_1 e Π_{n+1} sono paralleli e si incontrano solo nel punto all'infinito v . In particolare otteniamo anche che le rette Γ_1 e Γ_n sono iperparallele.

Costruiamo adesso la superficie C_0 incollando le strisce di piano tra Γ_i e Γ_{i+1} con $i = 1, \dots, n$. Quello che vogliamo è chiudere C_0 per ottenere un cilindro e così stimare l'ampiezza dei suoi angoli diedrali esterni come nella dimostrazione della proposizione 2.6. Cominciamo col notare che la superficie a bordo C_0 (avente per bordo gli assi Γ_1 e Γ_n) ha una naturale orientazione indotta dalla geodetica γ , i cui punti sono i vettori ortogonali uscenti ai piani di supporto per C_0 . Allora, come rappresentato nella figu-

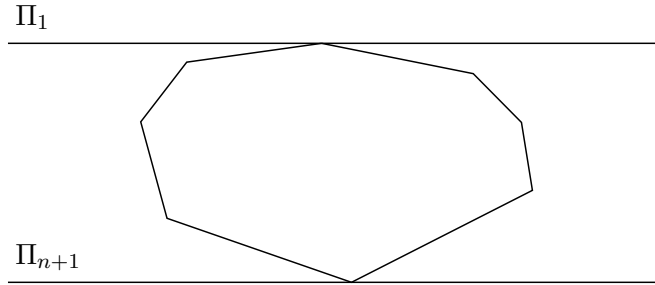


Figura 3.3: I piani Π_1 e Π_{n+1} sono paralleli.

ra 3.4, l'orientazione di C_0 induce un'orientazione anche sul bordo. Stante questa orientazione indotta, i punti all'infinito delle rette di bordo Γ_1 e Γ_n possono essere presi come due coppie ordinate (w_1, w_2) e (w_3, w_4) .

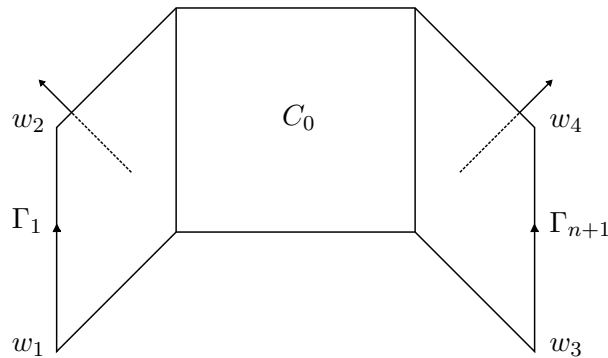


Figura 3.4: La superficie C_0 è orientata e quindi induce un orientamento sul bordo.

Siano nel piano Π_1 la retta Γ_0 con punti all'infinito w_1 e v e nel piano Π_{n+1} la retta con punti all'infinito w_3 e v . Le rette Γ_0 e Γ_{n+1} sono parallele e dunque complanari. Sia Π_0 il piano che le contiene entrambi. Sia ora C la superficie ottenuta incollando a C_0 le strisce di piano tra Γ_0 e Γ_1 (contenuta nel piano Π_1), tra Γ_n e Γ_{n+1} (contenuta nel piano Π_{n+1}) e tra Γ_0 e Γ_{n+1} (contenuta nel piano Π_0). Una rappresentazione di queste strisce di piano è fornita nella figura 3.5.

Grazie alle scelte fatte la superficie C è omeomorfa a un cilindro. Inoltre ha una struttura di superficie iperbolica completa che rende entrambe le code di volume infinito. Attraverso un'applicazione dei Lemmi 1.1 e 2.1 e del Teorema 2.1 come nella dimostrazione della proposizione 2.6 abbiamo che la somma degli angoli diedrali esterni di C è strettamente maggiore di 2π . Inoltre l'angolo diedrale di C in Γ_i , con $i = 1, \dots, n$ è pari alla lunghezza del

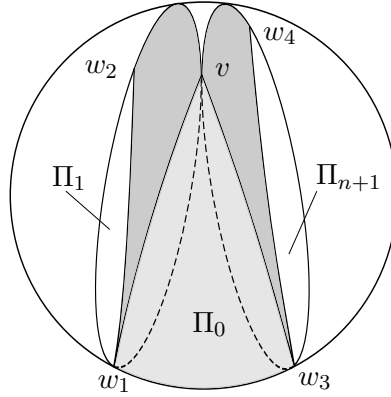


Figura 3.5: Le strisce di piano (rappresentate in \mathbb{H}^3 col modello del disco) che chiudono la superficie C_0 al cilindro C .

tratto di geodetica γ_i . Per concludere ci serve stimare gli angoli diedrali di C in Γ_0 e Γ_{n+1} . Intersecando i piani Π_0 , Π_1 e Π_{n+1} con una piccola orosfera centrata in v questi angoli corrispondono agli angoli indicati nella figura 3.6. Essendo l'intersezione di Π_1 e Π_{n+1} con questa orosfera un coppia di rette parallele, questi due angoli sono complementari.

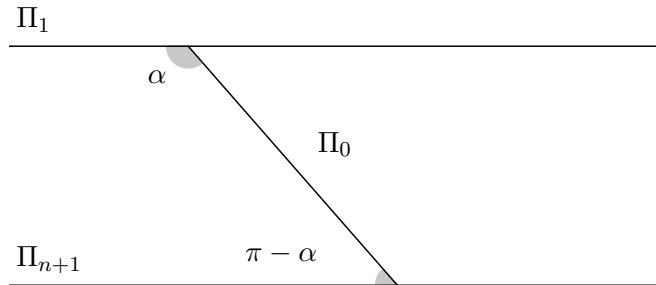


Figura 3.6: Gli angoli diedrali esterni in Γ_0 e Γ_{n+1} sono complementari.

Allora la somma degli angoli diedrali in Γ_i , con $i = 1, \dots, n$ è superiore a π e, come notato in precedenza, questo permette di concludere. \square

Osservazione 3.6. Nella dimostrazione della proposizione precedente abbiamo scelto le rette Γ_0 e Γ_{n+1} in modo tale che le strisce di piano che abbiamo aggiunto rispettassero l'orientamento di C_0 . Così facendo la superficie C risulta orientata ed è quindi omeomorfa a un cilindro. Se però avessimo scelto, ad esempio, come Γ_{n+1} la retta con punti all'infinito v e w_4 (come si vede in figura 3.7) si sarebbe ottenuta una superficie C_1 non orientabile.

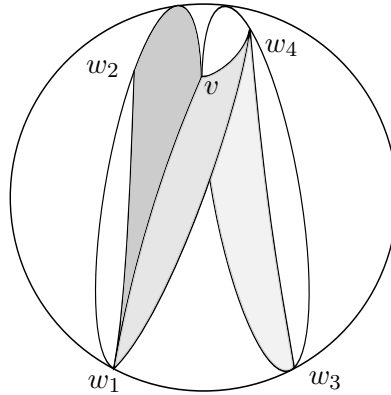


Figura 3.7: Se chiudiamo la superficie C_0 non rispettando l'orientamento otteniamo una striscia di Moebius.

Chiudendo la superficie C_0 con le strisce di piano indicate in figura si ottiene infatti una superficie C_1 omeomorfa a un nastro di Moebius. Questa superficie ha comunque naturalmente definita una struttura di superficie iperbolica completa.

Concludiamo questo capitolo enunciando come promesso l'analogo del teorema 2.2 relativo ai poliedri di volume finito.

Teorema 3.1 (Rivin). *Una superficie con singolarità coniche M con un numero finito di punti conici è isometrica alla trasformata polare generalizzata di un poliedro iperbolico di volume finito se e solo se:*

1. *la superficie M è omeomorfa a \mathbb{S}^2 ;*
2. *fuori dai punti conici M ha curvatura sezionale costante 1;*
3. *gli angoli conici hanno tutti ampiezza strettamente maggiore di 2π ;*
4. *ogni geodetica chiusa ha lunghezza strettamente maggiore o uguale a 2π ;*
5. *l'insieme $G_{2\pi}$ delle geodetiche di lunghezza 2π è finito e se $\gamma \in G_{2\pi}$ allora esattamente una delle componenti di $M \setminus \gamma$ è isometrica a una semisfera aperta.*

In questo capitolo abbiamo fornito la dimostrazione della necessità di queste condizioni. Dimostreremo, nel caso ideale, anche un risultato di unicità nel capitolo 4 e la sufficienza delle condizioni nel capitolo 6. Nella parte finale mostreremo brevemente come estendere la dimostrazione del caso ideale al caso dei poliedri di volume finito.

Capitolo 4

Risultati di unicità

In questo capitolo proveremo alcuni risultati di unicità riguardo i poliedri iperbolici. Oltre al naturale interesse in sé che hanno questi risultati, ci saranno utili per dimostrare che due poliedri iperbolici compatti sono congruenti se e solo se c'è un'isometria tra le rispettive trasformate polari. Estenderemo inoltre questo risultato anche al caso dei poliedri ideali.

4.1 Primi risultati

Cominciamo con la definizione di congruenza tra due poliedri. In seguito enunceremo alcuni risultati che ci forniranno gli strumenti per dimostrare i criteri di congruenza tra due poliedri.

Definizione 4.1. Sia $X = \mathbb{E}^3, \mathbb{H}^3$ o \mathbb{S}^3 . Due poliedri P e P' in X si dicono *congruenti* se esiste una isometria di X che porta P in P' .

Osservazione 4.1. È un risultato elementare che due poliedri compatti euclidei, sferici o iperbolici, combinatoriamente equivalenti, sono congruenti se e solo se hanno facce congruenti e medesimi angoli diedrali. La dimostrazione per il caso euclideo può essere reperita in [2] e si estende naturalmente anche ai casi sferico e iperbolico.

I primi due lemmi che enunciamo riguardano la natura topologica di un poliedro combinatoriamente equivalente a un poliedro convesso euclideo (grazie al modello proiettivo abbiamo visto che tali sono i poliedri iperbolici di volume finito). Sono un indebolimento dei lemmi usati da Cauchy per la dimostrazione del teorema di rigidità dei poliedri euclidei (i quali non sono veri in generale). La dimostrazione del primo è presente in [21], mentre il secondo si può ricavare passando al poliedro duale (in senso combinatorio). Nell'enunciato chiamiamo un cambio di segno in una successione di segni $+$, $-$, o 0 il fatto che dopo un segno $+$ o $-$ ci sia, dopo un certo numero di segni 0 , il segno opposto.

Lemma 4.1 (Lemma topologico di Cauchy). *Sia dato un poliedro P combinatorialmente equivalente a un poliedro convesso euclideo. Supponiamo che agli spigoli di P sia assegnato un segno $+$, $-$, o 0 e che il numero di cambi di segno che è possibile contare passando da uno spigolo al suo adiacente attorno a un fissato vertice v , sia ≥ 4 o 0 per ogni vertice v . Supponiamo inoltre che se in un vertice non ci sono cambi di segno, allora tutti gli spigoli sono contrassegnati con 0 . Allora tutti gli spigoli di P sono contrassegnati con 0 .*

Lemma 4.2 (Lemma topologico di Cauchy duale). *Sia dato un poliedro P combinatorialmente equivalente a un poliedro convesso euclideo. Supponiamo che agli spigoli di P sia assegnato un segno $+$, $-$, o 0 e che il numero di cambi di segno che è possibile contare passando da uno spigolo al suo adiacente in una fissata faccia f , sia ≥ 4 o 0 per ogni faccia f . Supponiamo inoltre che se in una faccia non ci sono cambi di segno, allora tutti gli spigoli sono contrassegnati con 0 . Allora tutti gli spigoli di P sono contrassegnati con 0 .*

I prossimi risultati che enunciamo riguardano la geometria dei poligoni. Il primo è ancora una volta dovuto a Cauchy (nella versione euclidea). La dimostrazione in tutti e tre i casi euclideo, sferico e iperbolico è sostanzialmente fedele a quella originale. Quella del caso euclideo, ricalcando la quale si possono costruire le dimostrazioni degli altri due casi, può essere trovata anch'essa in [21].

Lemma 4.3 (Lemma geometrico di Cauchy). *Sia $X = \mathbb{E}^2, \mathbb{S}^2$ o \mathbb{H}^2 . Siano inoltre P_1 e P_2 due poligoni convessi compatti combinatorialmente equivalenti in X aventi lati corrispondenti di uguale lunghezza. Contrassegniamo ogni vertice v di P_1 (corrispondente ad un vertice v' di P_2) con il segno $+$, $-$, o 0 , della differenza tra l'angolo in v e quello in v' . Allora si hanno due possibilità:*

- i segni sono tutti 0 e allora i due poligoni sono congruenti, oppure
- ci sono almeno quattro cambi di segno.

Il secondo è un risultato duale che vale nel caso euclideo e per la cui dimostrazione rimandiamo di nuovo a [21].

Lemma 4.4 (Lemma geometrico di Cauchy duale). *Siano P_1 e P_2 due poligoni convessi compatti euclidei combinatorialmente equivalenti, aventi angoli corrispondenti di uguale ampiezza e tali che nessuno dei due può essere trasportato isometricamente nell'altro (a meno che i due poliedri non siano congruenti). Contrassegniamo ogni lato l di P_1 (corrispondente ad un vertice l' di P_2) con il segno $+$, $-$, o 0 , della differenza tra la lunghezza di l e quella di l' . Allora si hanno due possibilità:*

- i segni sono tutti 0 e allora i due poligoni sono congruenti;

– oppure ci sono almeno quattro cambi di segno.

Il terzo è ancora un risultato duale rispetto al lemma 4.3 che vale nel caso sferico e iperbolico. La dimostrazione nel caso sferico può essere facilmente ottenuta dal lemma 4.3 passando alla polare sferica. Quella del caso iperbolico invece deve essere effettuata direttamente. La dimostrazione è elementare ma piuttosto tecnica, quindi rimandiamo all'articolo originale di Rivin e Hodgson [15].

Teorema 4.1. *Sia $X = \mathbb{S}^2$ o \mathbb{H}^2 . Siano inoltre P_1 e P_2 due poligoni convessi compatti combinatoriamente equivalenti in X , e aventi angoli corrispondenti di uguale ampiezza. Contrassegniamo ogni lato l di P_1 (corrispondente ad un lato l' di P_2) con il segno $+$, $-$, o 0 , della differenza tra la lunghezza di l e quella di l' . Allora si hanno due possibilità:*

- i segni sono tutti 0 e allora i due poligoni sono congruenti, oppure
- ci sono almeno quattro cambi di segno.

Cominciamo ora con i risultati riguardanti condizioni di unicità per i poliedri iperbolici.

Teorema 4.2. *Sia $X = \mathbb{S}^3$ o \mathbb{H}^3 e siano P_1 e P_2 due poliedri compatti combinatoriamente equivalenti in X , con angoli interni alle facce di uguale ampiezza. Allora i due poliedri sono congruenti.*

Dimostrazione. Contrassegniamo gli spigoli di P_1 con i segni $+$, $-$, o 0 ottenuti dal confronto con le lunghezze degli spigoli di P_2 . Applicando alle facce il teorema 4.1 deduciamo di essere nelle ipotesi del Lemma 4.2 e quindi gli spigoli di P_1 e P_2 hanno tutti lunghezza uguale (cioè le facce sono a due a due congruenti).

Contrassegniamo ora gli spigoli di P_1 con i segni $+$, $-$, o 0 ottenuti dal confronto con l'ampiezza degli angoli diedrali di P_2 . Ricordiamo che se uno spigolo l afferisce al vertice v , l'ampiezza dell'angolo diedrale in l corrisponde all'ampiezza dell'angolo corrispondente nel poligono sferico $\text{link}(v)$ (vedi capitolo 2). Per ogni vertice v di P_1 corrispondente ad un vertice v' di P_2 , confrontiamo gli angoli interni di $\text{link}(v)$ con gli angoli interni di $\text{link}(v')$. Questi sono poligoni sferici aventi lati di lunghezza pari all'ampiezza degli angoli interni delle facce nel vertice v . Quindi hanno lati di uguale lunghezza per ipotesi. Allora applicando il Lemma 4.3 a questi poligoni sferici, deduciamo di essere nelle ipotesi del Lemma 4.1 per quanto riguarda il poliedro P_1 , quindi gli angoli diedrali di P_1 e P_2 hanno tutti uguale ampiezza. Si conclude applicando l'osservazione 4.1. \square

Corollario 4.1. *Sia $X = \mathbb{S}^3$ o \mathbb{H}^3 e siano P_1 e P_2 due poliedri compatti combinatoriamente equivalenti in X , con vertici trivalenti (cioè aventi tutti tre spigoli afferenti) e angoli diedrali di uguale ampiezza. Allora i due poliedri sono congruenti.*

Dimostrazione. Per ogni vertice v di P_1 corrispondente al vertice v' di P_2 si ha che $\text{link}(v)$ e $\text{link}(v')$ sono triangoli sferici con gli stessi angoli e quindi congruenti. Allora gli angoli interni delle facce di P_1 e P_2 sono uguali. Si conclude grazie al teorema precedente. \square

4.2 Poliedri generalizzati

Il prossimo risultato di unicità è leggermente più generale di quanto ci serva, ma lo riportiamo fedelmente (si veda [15]) per l'interesse in sé e perché lo sforzo che richiede non è elevato. Cominciamo con una definizione.

Definizione 4.2. Un *poliedro generalizzato* P in \mathbb{H}^3 è l'intersezione con lo spazio iperbolico, considerato col modello proiettivo, di un poliedro euclideo convesso compatto \tilde{P} i cui spigoli hanno tutti intersezione non vuota con \mathbb{H}^3 . Un vertice v di \tilde{P} è detto vertice finito di P se $v \in \mathbb{H}^3$, infinito se $v \in \partial\mathbb{H}^3$, iperinfito se $v \notin \overline{\mathbb{H}^3}$.

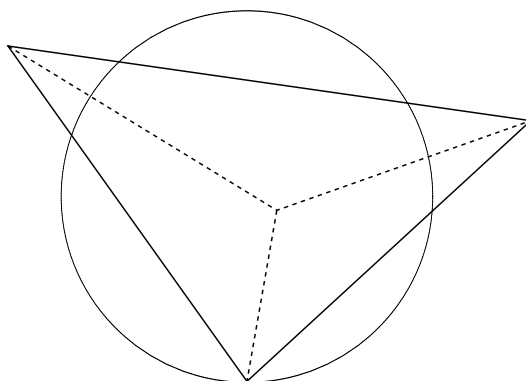


Figura 4.1: Un tetraedro iperbolico generalizzato nel modello proiettivo con un vertice finito, un vertice infinito e due vertici iperinfiniti.

Un poliedro generalizzato è effettivamente un poliedro iperbolico con le definizioni date nel primo capitolo. Evidentemente un poliedro generalizzato è un poliedro compatto se ha solo vertici finiti, un poliedro di volume finito se non ha vertici iperinfiniti. Per ognuno dei tipi di vertice possiamo dare una appropriata definizione di “link”:

- se v è un vertice finito la definizione è quella usuale data nel capitolo 2 e $\text{link}(v)$ è un poligono sferico;
- se v è un vertice infinito c'è una famiglia a un parametro di orosfere centrate in v e se l'orosfera H è abbastanza piccola l'intersezione $P \cap H$ è un poligono convesso euclideo; al variare di H tra le orosfere

abbastanza piccole, si ottiene una famiglia ad un parametro di poligoni euclidei simili; definiamo $\text{link}(v)$ l'astratto poligono euclideo ottenuto riscaldando $P \cap H$ ad un poligono avente il maggiore dei lati di lunghezza 1;

- se v è un vertice iperinfito si verifica direttamente (passando al modello dell'iperboloide – vedi sezione 6.5) che esiste un unico piano iperbolico ortogonale a tutte le facce afferenti a v ; l'intersezione di questo piano con P è allora un poligono compatto iperbolico e prendiamo questo come $\text{link}(v)$.

Queste definizioni hanno tutte in comune il fatto che gli angoli interni di $\text{link}(v)$ corrispondono agli angoli diedrali interni degli spigoli afferenti a v .

Introdurremo ora il concetto di *coda* di un poliedro generalizzato in un vertice infinito o iperinfito. In letteratura questa entità è definita in modo molto più generale, ma noi ci limiteremo qui ad introdurre una terminologia atta a dimostrare il risultato principale di questa sezione. Dato un poliedro generalizzato P e un suo vertice iperinfito v , esiste ed è unico un piano iperbolico π ortogonale a tutte le facce afferenti a v . Il complementare di questo spazio iperbolico è costituito da due semispazi aperti, di cui uno, che chiamiamo σ , interseca solo le facce afferenti a v . Chiamiamo *coda* di P in v l'insieme $P \cap \sigma$ (si veda la figura 4.2).

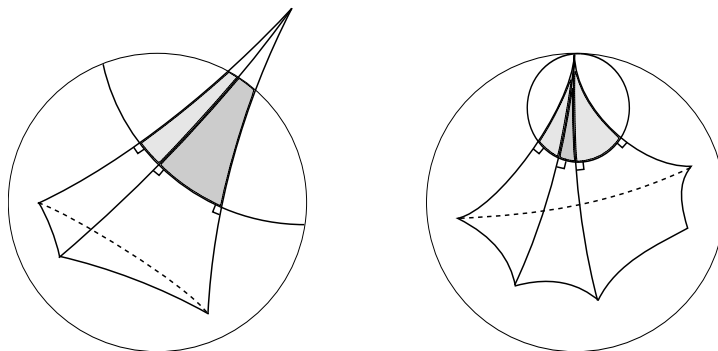


Figura 4.2: A sinistra, la coda di un poliedro iperbolico in un vertice iperinfito. A destra, la coda di un poliedro iperbolico in un vertice infinito.

Proposizione 4.1. *Dati due poliedri generalizzati P_1 e P_2 e due vertici iperinfiti v_1 di P_1 e v_2 di P_2 , se il poligono iperbolico $\text{link}(v_1)$ è congruente al poligono iperbolico $\text{link}(v_2)$ allora la coda di P_1 in v_1 è congruente alla coda di P_2 in v_2 .*

Dimostrazione. Sia π_1 il piano iperbolico contenente $\text{link}(v_1)$ e π_2 il piano iperbolico contenente $\text{link}(v_2)$. Essendo questi due poligoni congruenti, esiste

una isometria di π_1 in π_2 che manda $\text{link}(v_1)$ in $\text{link}(v_2)$. È possibile estendere questa isometria in modo unico ad una isometria φ di \mathbb{H}^3 che manda il semispazio contenente la prima coda nel semispazio contenente la seconda. È facile verificare che questa isometria è una congruenza tra le due code. \square

Sia ora v un vertice infinito di P . Come detto sopra, ogni orosfera H centrata in v e abbastanza piccola interseca P in un poligono simile a $\text{link}(v)$. Inoltre il complementare di H è costituito da due componenti connesse, una sola delle quale interseca solo le facce afferenti a v . Per ogni orosfera abbastanza piccola chiamiamo questa intersezione *coda* di P in v (si veda la figura 4.2).

Proposizione 4.2. *Dati due poliedri generalizzati P_1 e P_2 e due vertici infiniti v_1 di P_1 e v_2 di P_2 , se il poligono euclideo $\text{link}(v_1)$ è congruente al poligono euclideo $\text{link}(v_2)$ allora la coda di P_1 in v_1 è congruente alla coda di P_2 in v_2 .*

Dimostrazione. Poiché i due link sono congruenti esistono due orosfere abbastanza piccole H_1 centrata in v_1 e H_2 centrata in v_2 tali che i poligoni euclidei $P_1 \cap H_1$ e $P_2 \cap H_2$ siano congruenti. Esiste un'unica isometria φ di \mathbb{H}^3 che manda v_1 in v_2 , l'orosfera H_1 nell'orosfera H_2 e il poligono $P_1 \cap H_1$ nel poligono $P_2 \cap H_2$. Questa isometria è una congruenza tra le due code. \square

Teorema 4.3. *Siano P_1 e P_2 due poliedri iperbolici generalizzati tali che i poliedri euclidei corrispondenti \tilde{P}_1 e \tilde{P}_2 sono combinatoriamente equivalenti. Supponiamo inoltre che ci sia una corrispondenza tra i tipi di vertici di P_1 e P_2 e che i link di ciascuna coppia di vertici corrispondenti abbiano lati di pari lunghezza. Allora P_1 e P_2 sono congruenti.*

Dimostrazione. Assegniamo a ciascuno spigolo l_1 di P_1 (corrispondente a uno spigolo l_2 di P_2) un segno proveniente dal confronto degli angoli diedrali in l_1 e l_2 . Per ogni vertice v_1 di P_1 (corrispondente a un vertice v_2 di P_2) questi segni corrispondono a segni nei vertici di $\text{link}(v_1)$ provenienti dal confronto degli angoli interni di $\text{link}(v_1)$ e $\text{link}(v_2)$. Questi poligoni (entrambi euclidei, sferici o iperbolici a secondo del tipo di vertice di v_1 e v_2) hanno lati di uguale lunghezza, quindi applicando ad essi il Lemma 4.3 e al poliedro P_1 il Lemma 4.1 deduciamo che gli angoli diedrali di P_1 e P_2 sono uguali e che, per ogni coppia di vertici, $\text{link}(v_1)$ e $\text{link}(v_2)$ sono congruenti.

Grazie alle proposizioni precedenti sappiamo quindi che le code di P_1 e P_2 sono congruenti. Per ogni vertice iperinfinite v_1 di P_1 corrispondente ad un vertice iperinfinite v_2 di P_2 , esiste un unico piano iperbolico π_1 ortogonale a tutte le facce afferenti a v_1 , che viene mandato, nella congruenza tra le due code, nell'unico piano iperbolico π_2 ortogonale a tutte le facce di P_2 afferenti a v_2 . Troncando i poliedri P_i lungo i piani π_i si ottengono poliedri P'_i con un vertice iperinfinite in meno e una nuova faccia (con soli vertici finiti)

costituita da $\text{link}(v_i)$. Inoltre le facce afferenti a v_i formano, nei vertici di $\text{link}(v_i)$, angoli retti.

Per ogni vertice infinito v_1 di P_1 corrispondente ad un vertice infinito v_2 di P_2 , la congruenza tra le rispettive code ci permette di troncare P_i lungo opportuni piani π_i che intersecano solo le facce afferenti a v_i e in modo che la congruenza porti π_1 in π_2 . Otteniamo così poliedri P'_i con un vertice infinito in meno e una nuova faccia con soli vertici finiti. Le due nuove facce di P'_1 e P'_2 sono congruenti per costruzione e gli angoli interni delle facce afferenti a v_1 nei vertici della nuova faccia di P'_1 hanno, sempre per costruzione, ampiezza uguale agli angoli delle facce afferenti a v_2 nei vertici della nuova faccia di P'_2 .

Troncando i poliedri lungo opportuni piani come descritto sopra otteniamo due poliedri compatti Q_1 e Q_2 che hanno gli stessi angoli interni alle facce, quindi grazie al Teorema 4.2 sono congruenti. È facile verificare che se ψ è una isometria di \mathbb{H}^3 che porta Q_1 in Q_2 , la stessa isometria porta le code di P_1 nelle code di P_2 . Quindi P_1 è congruente a P_2 . \square

Osservazione 4.2. Si noti che il teorema precedente è a tutti gli effetti una generalizzazione del teorema 4.2.

4.3 Trasformata polare e unicità

Il prossimo risultato, di fondamentale importanza per la nostra trattazione, riguarda l'unicità della metrica intrinseca della trasformata polare di un poliedro iperbolico compatto.

Teorema 4.4. *La metrica intrinseca sulla trasformata polare di un poliedro iperbolico compatto P lo determina a meno di congruenza.*

Dimostrazione. Iniziamo col notare che se due poliedri P e P' sono congruenti allora lo sono le rispettive trasformate polari, e quindi a maggior ragione sono isometriche. Consideriamo viceversa una superficie con singolarità coniche M isometrica alla trasformata polare di un poliedro P . Dobbiamo dimostrare questo: se M è isometrica alla trasformata polare di un ulteriore poliedro P' allora i due poliedri sono congruenti.

Le trasformate polari di P e P' sono poliedri nella sfera di de Sitter e inducono due diverse tassellazioni su M aventi però gli stessi vertici, corrispondenti ai punti conici di M . Sovrapponendo le due tassellazioni otteniamo una nuova tassellazione su M avente un certo numero di nuovi vertici, che possiamo considerare come punti conici di angolo conico 2π . Possono accadere i seguenti fatti:

- due spigoli appartenenti uno a P^* ma non a $(P')^*$ e uno a $(P')^*$ ma non a P^* si intersecano creando un nuovo vertice g^* (vedi figura 4.3), oppure

- due spigoli appartenenti uno a P^* ma non a $(P')^*$ e uno a $(P')^*$ ma non a P^* si intersecano in un vertice già esistente f^* (vedi figura 4.3).

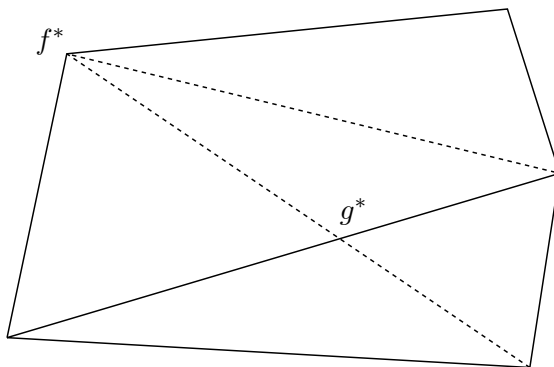


Figura 4.3: Sovrapposizione delle triangolazioni su M .

Questa nuova tassellazione di M può essere riportata rispettivamente su P^* e su $(P')^*$. Grazie alle corrispondenze tra un poliedro iperbolico e la sua trasformata polare, le nuove tassellazioni (combinatoriamente equivalenti) su P^* e su $(P')^*$ inducono le strutture combinatorie duali su P e P' , che quindi possono essere considerati ora combinatoriamente equivalenti. In particolare:

- ad ogni punto conico f^* di P^* di angolo conico α corrisponde una faccia f di P di area $2\pi - \alpha$, quindi i nuovi vertici ottenuti dalla sovrapposizione delle tassellazioni inducono su P facce degeneri di area nulla;
- ogni spigolo $(l')^*$ della nuova tassellazione di P^* proveniente dalla tassellazione di $(P')^*$ è contenuto nell'interno di una faccia v^* , quindi corrisponde a uno spigolo degenero di lunghezza nulla che collega il vertice v a sé stesso;
- per ogni faccia f (non degenera) di P , l'angolo formato da due suoi spigoli l_1 e l_2 è il complementare dell'angolo formato in P^* dagli spigoli l_1^* e l_2^* nel vertice f^* .

Le corrispondenze tra la nuova tassellazione di $(P')^*$ e P' sono del tutto analoghe. Allora non solo le nuove strutture di poliedro su P e P' sono combinatoriamente equivalenti, ma si ha (grazie al primo punto) una corrispondenza tra facce degeneri di P e facce degeneri di P' (data dalla corrispondenza tra i punti conici di P^* e $(P')^*$) e (grazie all'ultimo punto) il fatto che facce non degeneri corrispondenti hanno angoli interni di uguale ampiezza. Si vorrebbe qui concludere che P e P' sono quindi congruenti grazie al Teorema 4.2, ma questo non è applicabile a causa della presenza delle facce degeneri.

Assegniamo ad ogni spigolo di P (anche agli spigoli degeneri) un segno $+$, $-$ o 0 proveniente dal confronto con la lunghezza del corrispondente spigolo di P' . Si hanno due casi:

- grazie alle corrispondenze elencate in precedenza, nelle facce degeneri ci sono almeno due coppie di spigoli che hanno lunghezza nulla in P e non nulla in P' e viceversa, provenienti dall'incontro in un nuovo vertice di due spigoli appartenenti uno a P^* ma non a $(P')^*$ e uno a $(P')^*$ ma non a P^* (si veda di nuovo il caso del vertice g^* nella figura 4.3); quindi si hanno almeno 4 cambi di segno;
- nelle facce non degeneri possiamo applicare il teorema 4.1 e quindi ci sono almeno 4 cambi di segno oppure i segni sono tutti 0.

Applicando il lemma 4.2 al poliedro P abbiamo che i segni sono tutti 0 e quindi P e P' hanno spigoli di uguale lunghezza. In particolare non ci sono facce degeneri (in una faccia degenerare il cambio di segni è sempre non inferiore a 4) nè spigoli degeneri (uno spigolo degenerare in P avrebbe lunghezza non nulla in P'). Ricordando che gli angoli interni alle facce hanno, nella corrispondenza tra P e P' , medesima ampiezza, si può concludere grazie al Teorema 4.2. \square

4.4 Unicità dei poliedri ideali

Dimostreremo ora un risultato di unicità per i poliedri ideali attraverso il teorema 4.3. Nel capitolo 6 riformuleremo questo Teorema in modo analogo al Teorema 4.4.

Teorema 4.5. *Due poliedri iperbolici ideali combinatoriamente equivalenti e aventi angoli diedrali di pari ampiezza sono congruenti.*

Dimostrazione. Siano dati due poliedri ideali P e P' combinatoriamente equivalenti e con gli stessi angoli diedrali. Se dividiamo le facce corrispondenti in triangoli, nello stesso modo sia in P che in P' , otteniamo due poliedri ideali con facce congruenti (tutti i triangoli ideali sono congruenti) e stessi angoli diedrali (a meno di ammettere un certo numero di angoli diedrali degeneri di ampiezza pari a π).

Dato un vertice ideale v di P , $\text{link}(v)$ è il poligono euclideo ottenuto intersecando P con una piccola sfera centrata in v e riscalato fino ad avere il maggiore dei lati con lunghezza pari a 1. È possibile inoltre ordinare in modo unico i lati di $\text{link}(v)$, dato che ogni sfera H è orientata dal suo centro. Supponiamo che $\text{link}(v)$ abbia lati ordinati l_1, \dots, l_n tali che l_i sia adiacente a l_{i+1} (con un piccolo abuso di notazione indicheremo con l_i sia il nome del lato sia la sua lunghezza). Assegniamo al vertice compreso tra l_i e l_{i+1} le quantità l_i/l_{i+1} .

Notiamo da subito che questa quantità è la stessa per ogni poligono simile a $\text{link}(v)$. Sia ora s lo spigolo di P afferente a v corrispondente al vertice compreso tra l_i e l_{i+1} . Supponiamo che s abbia vertici ideali v e w e sia adiacente alle facce f_1 e f_2 di vertici rispettivamente v, w, w_1 e v, w, w_2 (vedi figura 4.4). Una isometria di \mathbb{H}^3 che scambi v con w e w_1 con w_2 , scambia le rette $\overline{vw_1}$ e $\overline{vw_2}$ rispettivamente con le rette $\overline{ww_1}$ e $\overline{ww_2}$ e manda una orosfera H centrata in v in una orosfera H' centrata in w . Perciò, dette m_j e m_{j+1} le lunghezze dei lati di $\text{link}(w)$ contenenti il vertice corrispondente a s , si ha $m_j/m_{j+1} = l_i/l_{i+1}$. Possiamo quindi assegnare senza ambiguità ad ogni spigolo s la quantità $\rho_s = l_i/l_{i+1}$.

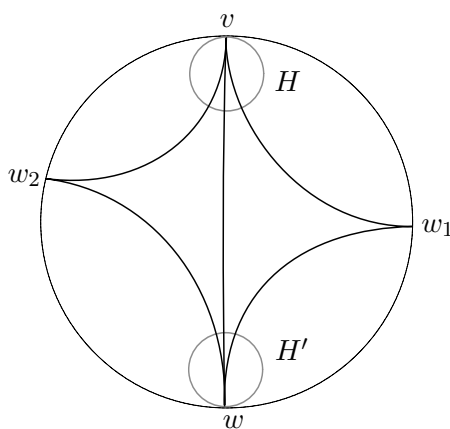


Figura 4.4: Le facce f_1 e f_2 di P .

Dati ora due vertici corrispondenti v di P e v' di P' , abbiamo che $\text{link}(v)$ e $\text{link}(v')$ hanno gli stessi angoli interni, dato che corrispondono agli angoli diedrali. A meno di riscalarli fino ad avere la stessa area, possiamo applicare ai poligoni euclidei $\text{link}(v)$ e $\text{link}(v')$ il Lemma 4.4 e quindi o sono congruenti oppure ci sono almeno 4 cambi di segno nel confronto tra le lunghezze dei lati.

Contrassegniamo ora ogni spigolo s di P (corrispondente a uno spigolo s' di P') con il segno di $\rho_s - \rho_{s'}$. Grazie a quanto evidenziato ora e alla proposizione 4.3 siamo nelle ipotesi del Lemma 4.1 (cioè attorno ad ogni vertice ci sono almeno 4 cambi di segno oppure tutti segni 0). Quindi per ogni coppia di spigoli corrispondenti s e s' si ha $\rho_s = \rho_{s'}$. Questo ci permette di concludere che per ogni vertice v di P corrispondente ad un vertice v' di P' , i poligoni $\text{link}(v)$ e $\text{link}(v')$ sono simili. Poiché il maggiore dei loro lati ha stessa lunghezza pari a 1, allora i link hanno lati di pari lunghezza. Possiamo quindi concludere applicando il Teorema 4.3. \square

Dimostriamo ora brevemente la seguente proposizione, che abbiamo utilizzato nella dimostrazione precedente:

Proposizione 4.3. *Date due successioni di numeri reali l_1, \dots, l_n e l'_1, \dots, l'_n (con $l_n = l_1$ e $l'_n = l'_1$) siano a_1, \dots, a_n la successione dei segni di $l_i - l'_i$ e b_1, \dots, b_n la successione dei segni di $\frac{l_i}{l_{i+1}} - \frac{l'_i}{l'_{i+1}}$. Allora se a_1, \dots, a_n è la successione costantemente 0, tale è la successione b_1, \dots, b_n . Inoltre il numero di cambi di segno in b_1, \dots, b_n è non inferiore al numero di cambi di segno in a_1, \dots, a_n .*

Dimostrazione. La prima parte è banale. La seconda deriva dal fatto che un cambio di segno da + a - o a 0 (oppure da 0 a -) in a_1, \dots, a_n determina un + in b_1, \dots, b_n e un cambio di segno da - a 0 o + (o da 0 a +) in a_1, \dots, a_n determina un - in b_1, \dots, b_n . \square

Capitolo 5

Teorema di Rivin: caso compatto

Nel capitolo 2 abbiamo introdotto la trasformata polare di un poliedro iperbolico compatto e ne abbiamo studiato le proprietà, fino a enunciare il Teorema 2.2, che elenca le caratteristiche che deve avere una superficie con singolarità coniche affinché possa essere isometrica alla trasformata polare di un poliedro iperbolico compatto. Nello stesso capitolo abbiamo dimostrato la necessità di queste condizioni. In questo capitolo dimostreremo che queste condizioni sono anche sufficienti.

5.1 Spazi ammissibili e spazi realizzabili

Iniziamo con una riformulazione della parte del Teorema 2.2 che ci interessa. Ci servirà qualche definizione:

Definizione 5.1. Una superficie con singolarità coniche M con un numero finito di punti conici è detta *spazio ammissibile* se:

1. la superficie M è omeomorfa a \mathbb{S}^2 ;
2. fuori dai punti conici M ha curvatura sezionale costante 1;
3. gli angoli conici hanno tutti ampiezza strettamente maggiore di 2π ;
4. ogni geodetica chiusa ha lunghezza strettamente maggiore di 2π .

L'insieme degli spazi ammissibili (a meno di isometria) con esattamente n punti conici ordinati di ampiezza strettamente maggiore di 2π sarà denotato con \mathcal{M}_n .

Osservazione 5.1 (Geodetiche chiuse locali e globali). La definizione che abbiamo dato di geodetica (eventualmente chiusa) è essenzialmente una definizione locale. In letteratura esiste un altro concetto di geodetiche chiuse, le

geodetiche chiuse globali. Considerata una circonferenza di lunghezza l (che denoteremo sempre con $S(l)$) e una superficie con singolarità coniche M , una geodetica chiusa globale in M di lunghezza l è una mappa $f : S(l) \rightarrow M$ che sia una isometria con l'immagine, considerata con la distanza indotta da M . Evidentemente una geodetica chiusa globale è anche una geodetica chiusa in senso locale.

In [4], Bowditch definisce una superficie con singolarità coniche M di tipo CAT(1) nel modo seguente. Dati tre archi geodetici (in senso locale) in M , $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : [0, 1] \rightarrow M$ che formano un triangolo geodetico con perimetro minore di 2π , e dati tre archi geodetici in \mathbb{S}^2 , $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^2$ che formano un triangolo con i lati delle stesse lunghezze, allora M è di tipo CAT(1) se, per ogni $i \neq j$ e per ogni $u, v \in [0, 1]$, si ha $d_M(\alpha_i(u), \alpha_j(v)) \leq d_{\mathbb{S}^2}(\alpha'_i(u), \alpha'_j(v))$.

Lo spazio M è detto *localmente di tipo CAT(1)* se ogni suo punto ha un intorno di tipo CAT(1). Sempre in [4] Bowditch nota che una superficie con singolarità coniche omeomorfa a \mathbb{S}^2 che ammetta una tassellazione in poligoni sferici e abbia tutti i punti conici di angolo conico $\geq 2\pi$ è localmente di tipo CAT(1). Infine Bowditch dimostra il seguente risultato:

Teorema 5.1. *Sia M uno spazio localmente di tipo CAT(1). Allora se in M non ci sono geodetiche chiuse globali di lunghezza $\leq 2\pi$ allora non ci sono neanche geodetiche chiuse locali di lunghezza $\leq 2\pi$.*

Grazie al teorema precedente nella definizione 5.1 possiamo considerare solo le geodetiche chiuse globali.

Abbiamo molti esempi di spazi ammissibili, costituiti dalle trasformate polari dei poliedri iperbolici compatti. Vediamo qualche esempio di superficie con singolarità coniche che non è uno spazio ammissibile.

Esempio 5.1. La sfera \mathbb{S}^2 non è ammissibile perché non è rispettata la condizione sulle geodetiche. D'altra parte una qualsiasi sfera di raggio $r > 1$ rispetta la condizione sulle geodetiche ma non quella sulla curvatura costante pari a 1.

Esempio 5.2 (Sospensioni). Un bigono sferico di angolo α è il corpo convesso nella sfera ottenuto dall'intersezione di due semispazi che ha per bordo un poligono con solo due lati, entrambi di lunghezza π , e due angoli di pari ampiezza α . Sia ora M la superficie con singolarità coniche ottenuta incollando n bigoni sferici di angolo α_i lungo i lati come in figura 5.1. Quello che si ottiene è una superficie, detta *sospensione*, omeomorfa alla sfera, con due punti conici, entrambi di ampiezza $\beta = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Se $\beta \leq 2\pi$ la superficie M non è ammissibile perché non rispetta la condizione sui punti conici. Se $\beta > 2\pi$ allora si possono trovare infinite geodetiche chiuse di lunghezza pari a 2π costituite da segmenti geodetici di lunghezza π che collegano i due punti conici, quindi neanche in questo caso M è ammissibile.

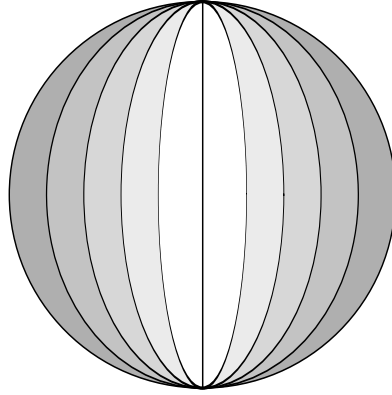


Figura 5.1: Una superficie ottenuta incollando bigoni sferici non è ammissibile.

Definizione 5.2. Una superficie con singolarità coniche M è detta *spazio realizzabile* se è isometrica alla trasformata polare di un poliedro iperbolico compatto P . Inoltre denotiamo con \mathcal{P}_n l'insieme dei poliedri iperbolici con esattamente n facce ordinate a meno di congruenza.

Grazie al fatto che le trasformate polari di due poliedri congruenti sono a loro volta congruenti, e quindi a maggior ragione isometriche, è ben definita una applicazione $\phi : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{M}_n$ data da $\phi([P]) = [P^*]$. Inoltre grazie al Teorema 4.4 l'applicazione ϕ è iniettiva. L'insieme degli spazi realizzabili è quindi $\phi(\mathcal{P}_n) \subseteq \mathcal{M}_n$. Il principale risultato di questo capitolo può essere quindi enunciato come segue:

Teorema 5.2. *Con le notazioni precedenti, l'applicazione ϕ è surgettiva.*

Delineeremo la dimostrazione di questo Teorema nella sezione 5.3. Nelle sezioni successive dimostreremo poi alcuni risultati che costituiscono i passi fondamentali di tale dimostrazione.

Introdurremo ora topologie sugli spazi \mathcal{M}_n e \mathcal{P}_n che rendano la mappa ϕ continua. In \mathbb{H}^n un ε -intorno di un insieme X è l'insieme dei punti che sono a distanza iperbolica $\leq \varepsilon$ dai punti di X e si indica con $N_\varepsilon(X)$. Poniamo su \mathcal{P}_n la distanza d_H indotta dalla topologia di Hausdorff dei chiusi di \mathbb{H}^3 . Più precisamente:

Definizione 5.3. Date due classi $[P]$ e $[P']$ di \mathcal{P}_n , si ha $d_H([P], [P']) \leq \varepsilon$ se esiste una isometria h dello spazio iperbolico tale che $P' \subseteq N_\varepsilon(hP)$ e $hP \subseteq N_\varepsilon(P')$.

Della topologia su \mathcal{M}_n ci occuperemo nella prossima sezione.

5.2 La distanza di Lipschitz

Cominciamo con qualche definizione. La *distorsione* di una mappa f tra due spazi metrici compatti M_1 ed M_2 è denotata con $\mathcal{D}(f)$ ed è così definita:

$$\mathcal{D}(f) = \sup_{x \neq y \in M_1} \left| \log \frac{d_{M_2}(f(x), f(y))}{d_{M_1}(x, y)} \right|.$$

Se $f : M_1 \rightarrow M_2$ è tale che $\mathcal{D}(f) \leq \varepsilon$, la mappa f è detta ε -*quasi-isometria*.

La *distanza di Lipschitz* tra due spazi metrici compatti M_1 ed M_2 tra loro omeomorfi è definita come $d_L(M_1, M_2) = \inf \mathcal{D}(f)$ dove f varia tra gli omeomorfismi tra i due spazi. Si verifica immediatamente che d_L è una pseudodistanza. Inoltre $d_L(M_1, M_2) = 0$ se e solo se i due spazi sono isometrici (per approfondimenti si veda [7]).

Data una varietà differenziabile compatta M , la distanza di Lipschitz induce effettivamente una distanza sullo spazio $\text{Met}(M)$ delle metriche riemanniane su M viste a meno di isometria. Inoltre se M è una superficie la distanza di Lipschitz induce anche una distanza sull'insieme $\text{Met}^*(M)$ delle strutture di superficie con singolarità coniche su M . In particolare, poiché tutti gli spazi ammissibili (con un numero qualsiasi di punti conici) sono omeomorfi a \mathbb{S}^2 , l'insieme $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_n$ può essere visto come un sottospazio dello spazio $\text{Met}^*(\mathbb{S}^2)$ delle strutture di superficie con singolarità coniche sulla sfera. Abbiamo quindi una topologia, indotta dalla distanza d_L , sull'insieme delle classi di isometria di spazi ammissibili.

Su ciascuno degli spazi \mathcal{M}_n diamo anche una topologia diversa (che nel seguito chiameremo per brevità topologia di \mathcal{M}_n per distinguerla dalla topologia indotta dalla distanza di Lipschitz), quella indotta dalla distanza $d_{\mathcal{M}_n}$. Definiamo $d_{\mathcal{M}_n}(M_1, M_2) = \inf \mathcal{D}(f)$, dove f varia tra gli omeomorfismi che mandano i punti conici di M_1 nei punti conici di M_2 rispettando l'ordine (si veda la definizione di \mathcal{M}_n).

Osservazione 5.2. Si ha evidentemente $d_L(M_1, M_2) \leq d_{\mathcal{M}_n}(M_1, M_2)$, quindi la topologia di \mathcal{M}_n è più fine di quella indotta dalla distanza di Lipschitz. Se una successione di spazi $\{M_k\}$ in \mathcal{M}_n converge a $M_\infty \in \mathcal{M}_n$ nella topologia di \mathcal{M}_n allora che $M_k \rightarrow M_\infty$ anche con la topologia indotta dalla distanza di Lipschitz.

I prossimi risultati sulla distanza di Lipschitz ci saranno utili nel corso del capitolo. Data una superficie con singolarità coniche M , abbiamo definito una geodetica chiusa globale come una mappa dalla circonferenza $S(c)$ di lunghezza c in M che sia un'isometria con l'immagine. Similmente chiamiamo ε -*quasi-geodetica* una mappa $\gamma : S(c) \rightarrow M$ che sia un'isometria con l'immagine. Il numero c è detto lunghezza della ε -quasi-geodetica e si indica con $l(\gamma)$.

Teorema 5.3. *Sia data una successione di superfici con singolarità coniche compatte $\{M_k\}$ e una superficie con singolarità coniche compatta M_∞ tali che*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d_L(M_k, M_\infty) = 0$$

cioè tali che tra M_k ed M_∞ ci siano delle ε_k -quasi-isometrie con $\varepsilon_k \rightarrow 0$. Siano date inoltre $\gamma_k \subseteq M_k$ delle ε'_k -quasi-geodetiche tali che $\varepsilon'_k \rightarrow 0$ e $l(\gamma_k) \rightarrow c$ al tendere di $k \rightarrow \infty$. Allora esiste una geodetica chiusa γ in M di lunghezza c .

Dimostrazione. Sia $c_k = l(\gamma_k)$. Innanzitutto notiamo che esiste una quasi-isometria tra $S(c_k)$ e $S(c)$, con distorsione esattamente pari a $\log(c_k/c)$. Componendo quindi le mappe:

$$S(c_k) \rightarrow S(c) \rightarrow M_k \rightarrow M_\infty$$

si ottengono delle δ_k -quasi isometrie $f_k : S(c) \rightarrow M_\infty$ con $\delta_k \leq \log(c_k/c) + \varepsilon_k + \varepsilon'_k$. Si ha quindi $\delta_k \rightarrow 0$. Le f_k sono mappe equicontinue in uno spazio metrico compatto, quindi, per il teorema di Ascoli-Arzelà (si veda [18]), esiste una sottosuccessione $\{f_{k_i}\}$ che converge uniformemente ad una mappa $f : S(c) \rightarrow M_\infty$ che deve necessariamente essere una isometria con l'immagine. Questo conclude la dimostrazione. \square

Data una superficie con singolarità coniche (M, g) , denotiamo con $l_0(g)$ l'estremo inferiore delle lunghezze delle geodetiche chiuse in M nella metrica g .

Teorema 5.4. *Con le notazioni precedenti, la funzione:*

$$l_0 : \text{Met}^*(M) \rightarrow [0, \infty]$$

è semicontinua inferiormente, cioè $\forall a \in \mathbb{R}^+$ gli insiemi $\{g \in \text{Met}^(M) \mid l_0(g) > a\}$ sono aperti della topologia di Lipschitz.*

Dimostrazione. Poiché $\text{Met}^*(M)$ è uno spazio metrico con la distanza d_L , basta verificare che se $\{g_k\}$ è una successione di metriche su M tali che nella topologia di Lipschitz $(M, g_k) \rightarrow (M, g_\infty)$, allora:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} l_0(g_k) \geq l_0(g_\infty) .$$

Sia $c = \liminf_{k \rightarrow \infty} l_0(g_k)$. Allora esiste una sottosuccessione $\{g_{k_i}\}$ tale che, detto $c_i = l_0(g_{k_i})$, si ha $c_i \rightarrow c$. Inoltre in (M, g_{k_i}) esistono geodetiche chiuse di lunghezza arbitrariamente vicina a c_i . Applicando allora il Teorema precedente a una opportuna successione di geodetiche chiuse, si ottiene l'esistenza di una geodetica chiusa in (M, g_∞) di lunghezza c , da cui la disuguaglianza precedente. \square

5.3 Dimostrazione del Teorema 5.2

All'inizio di questo capitolo abbiamo definito la mappa $\phi : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{M}_n$ come la mappa che associa alla classe di congruenza di un poliedro iperbolico P la classe di isometria della sua trasformata polare P^* . Abbiamo inoltre notato che ϕ è iniettiva. Abbiamo poi introdotto topologie sui due spazi \mathcal{P}_n e \mathcal{M}_n . Cominciamo questa sezione vedendo che la mappa ϕ è continua.

Notiamo innanzitutto che se una successione di poliedri iperbolici $\{P_k\} \subseteq \mathcal{P}_n$ tende al poliedro $P \in \mathcal{P}_n$ nella topologia di Hausdorff, necessariamente allora i vertici dei poliedri P_k devono tendere ai vertici del poliedro P .

Viceversa, gli n vertici della trasformata polare P^* di un poliedro P (intesa come poliedro nella sfera di de Sitter) sono i vettori unitari ortogonali uscenti dalle facce di P . Se una faccia f contiene (almeno) i vertici v_1, v_2, v_3 (opportunamente ordinati), allora il vertice f^* di P^* può essere calcolato normalizzando il vettore v ottenuto come determinante formale (sviluppato rispetto alla prima colonna) della matrice seguente:

$$v = \det \begin{vmatrix} -e_0 & v_1^0 & v_2^0 & v_3^0 \\ e_1 & v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 \\ e_2 & v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 \\ e_3 & v_1^3 & v_2^3 & v_3^3 \end{vmatrix}$$

dove si è indicato con e_i i vettori della base canonica di \mathbb{E}_1^3 e con v_i^j la j -esima componente del vettore v_i . Si noti che i componenti della prima colonna sono vettori e ciò nonostante il determinante è formalmente ben definito e il risultato è un vettore.

Grazie a questo sappiamo quindi che se la successione $\{P_n\}$ tende a P , allora i vertici di P_n^* tendono ai vertici di P^* . Non è difficile vedere ora che se due poliedri della sfera di de Sitter hanno i vertici abbastanza vicini allora esiste una ε -quasi-isometria che manda i vertici nei vertici e con la costante ε che diminuisce all'avvicinarsi dei vertici dei due poliedri. Si può concludere quindi che se $P_n \rightarrow P$ nella topologia di Hausdorff allora $P_n^* \rightarrow P^*$ nella topologia di \mathcal{M}_n , da cui la continuità di ϕ .

Delineremo ora la dimostrazione del risultato principale di questo capitolo, cioè il fatto che l'applicazione ϕ è surgettiva. Le prossime sezioni saranno poi dedicate alle dimostrazioni dei risultati utilizzati qui sotto.

Dimostrazione del teorema 5.2. Dalla definizione (all'inizio di questo capitolo) sappiamo che uno spazio ammissibile è una superficie con singolarità coniche omeomorfa a \mathbb{S}^2 . Possiamo quindi confondere uno spazio ammissibile con n punti conici appartenente a \mathcal{M}_n con la sua metrica g . Fissiamo quindi una metrica ammissibile $g \in \mathcal{M}_n$ e una metrica realizzabile $g' \in \phi(\mathcal{P}_m)$ con un numero m qualsiasi di punti conici.

Nelle sezioni successive dimostreremo i seguenti risultati:

1. nella sezione 5.4 dimostreremo che la mappa $\phi : \mathcal{P}_k \rightarrow \mathcal{M}_k$ è aperta per ogni k , quindi l'insieme degli spazi realizzabili $\phi(\mathcal{P}_k)$ è aperto in \mathcal{M}_k ;
2. nella sezione 5.5 dimostreremo che se $\{g_k\}$ è una successione di metriche realizzabili (con un numero limitato di punti conici) che tende a una metrica ammissibile g_∞ nella topologia di Lipschitz, allora g_∞ è realizzabile;
3. nella sezione 5.6 dimostreremo infine che esistono un intero N (maggiore del numero di punti conici sia di g che di g') ed una funzione continua:

$$g : (0, 1) \rightarrow \mathcal{M}_N$$

tale che:

- (a) $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = g'$ nella topologia di Lipschitz;
- (b) $\lim_{t \rightarrow 1} g(t) = g$ nella topologia di Lipschitz;
- (c) le metriche $g(t)$ sono realizzabili per ogni t abbastanza vicino a 0.

Applicando i primi due risultati al terzo otteniamo che le metriche $g(t)$ sono realizzabili per ogni $t \in (0, 1)$. Applicando ancora una volta il secondo punto otteniamo che anche g è una metrica realizzabile. \square

5.4 La mappa ϕ è aperta

Nella sezione iniziale del capitolo abbiamo definito la mappa $\phi : \mathcal{P}^n \rightarrow \mathcal{M}^n$ e abbiamo notato che è iniettiva. Nella sezione precedente abbiamo visto che questa mappa è anche continua. Nella presente sezione dimostreremo che \mathcal{P}_n e \mathcal{M}_n sono entrambe varietà topologiche di dimensione $3n - 6$. Allora il fatto che la mappa ϕ è aperta segue dal *Teorema dell'invarianza dei domini* di Brouwer (vedi [5]).

Teorema 5.5. *Lo spazio \mathcal{P}_n dei poliedri iperbolici con n facce ordinate a meno di congruenza è una varietà topologica di dimensione $3n - 6$.*

Dimostrazione. Dato un poliedro P con n facce, questo è l'intersezione di n semispazi che hanno per bordo gli n piani di supporto alle facce. Possiamo quindi immergere lo spazio $\tilde{\mathcal{P}}_n$ dei poliedri con n facce ordinate nella varietà di dimensione $3n$ costituita da $(\mathbb{S}_1^2)^n$ (dove \mathbb{S}_1^2 è la sfera di de Sitter) mandando P nella n -upla ordinata dei vettori unitari ortogonali uscenti dai piani di supporto alle facce.

L'immagine di $\tilde{\mathcal{P}}_n$ in $(\mathbb{S}_1^2)^n$ è un aperto. Infatti ogni n -upla di vettori della sfera di de Sitter abbastanza vicina all'immagine di un poliedro P corrisponde all'immagine di un poliedro P' compatto e con n facce ordinate. Questa

immersione dà a $\tilde{\mathcal{P}}_n$ una struttura di varietà differenziabile compatibile con la topologia di Hausdorff.

Consideriamo ora il gruppo delle isometrie dello spazio iperbolico, che nel primo capitolo abbiamo indicato con $\mathcal{I}(\mathbb{H}^3)$. Questo gruppo ha una naturale struttura di gruppo di Lie che lo rende una varietà compatta di dimensione 6. Inoltre $\mathcal{I}(\mathbb{H}^3)$ agisce liberamente su $\tilde{\mathcal{P}}_n$. Infatti se P è un poliedro con n facce ordinate e ψ è una isometria di \mathbb{H}^3 tale che $\psi(P) = P$ rispettando l'ordine delle facce, allora ψ ha come punti fissi i vertici di P . Poiché ci sono almeno 4 vertici non complanari, ψ è l'identità.

È evidente che lo spazio \mathcal{P}^n è lo spazio quoziente $\tilde{\mathcal{P}}_n/\mathcal{I}(\mathbb{H}^3)$. Poiché il gruppo compatto $\mathcal{I}(\mathbb{H}^3)$ agisce in modo libero, si può concludere grazie al risultato di Koszul (si veda [11]) che lo spazio quoziente è una varietà e ha dimensione pari a $3n - 6$. \square

Nel prossimo risultato dimostreremo un fatto più debole di quello che ci eravamo prefissi, ma comunque sufficiente a dimostrare che la mappa ϕ è aperta. Non dimostreremo che lo spazio \mathcal{M}_n è una varietà di dimensione $3n - 6$ nel suo complesso, ma dimostreremo che l'insieme degli spazi realizzabili è contenuto in un aperto che è una varietà di dimensione $3n - 6$. Da questo seguirà il fatto che la mappa ϕ è aperta.

Teorema 5.6. *L'insieme \mathcal{M}_n degli spazi ammissibili con n punti conici ordinati a meno di isometria è una varietà topologica di dimensione $3n - 6$ vicino ad ogni spazio realizzabile.*

Dimostrazione. Sia \mathcal{S}_n lo spazio delle superfici con singolarità coniche omeomorfe alla sfera, tassellabili con poligoni sferici e con n punti conici ordinati, viste a meno di isometria. Poniamo su \mathcal{S}_n la topologia attenuata dalla distanza di Lipschitz. Ovviamente si ha $\mathcal{M}_n \subseteq \mathcal{S}_n$.

Poiché tutti gli spazi con cui abbiamo a che fare sono omeomorfi alla sfera, confonderemo, come nei paragrafi precedenti, un elemento di \mathcal{S}_n con la sua metrica. Sia ora g una metrica realizzabile, ottenuta cioè come metrica intrinseca della polare sferica P^* di un poliedro P . Allora il poliedro della sfera di de Sitter P^* determina una tassellazione sulla sfera avente come vertici i punti conici e avente spigoli tutti di lunghezza strettamente minore di π (non possono essere quindi presenti, nella tassellazione, bigoni sferici). È facile inoltre triangolare ogni poligono sferico della tassellazione senza aggiungere nuovi vertici. Necessariamente i lati di questi triangoli sferici hanno tutti lunghezza minore di π .

Otteniamo quindi una triangolazione T della sfera con n vertici. Dalla formula di Eulero otteniamo inoltre che la triangolazione ha esattamente $3n - 6$ spigoli. Notiamo che la metrica g è completamente determinata dalle lunghezze dei lati di questa triangolazione (ogni triangolo sferico con lati di data lunghezza è unico). Per ogni una metrica g' di \mathcal{S}_n abbastanza vicina a g esiste unica una triangolazione della superficie con singolarità

coniche (\mathbb{S}^2, g') combinatorialmente equivalente a T con triangoli aventi lati di lunghezza vicina ai lati dei triangoli di T e minore di π .

Allora l'elemento g ha un intorno aperto in \mathcal{S}_n che può essere immerso in un aperto di \mathbb{R}^{3n-6} , attraverso l'applicazione continua che manda una metrica g' nel vettore delle lunghezze dei lati della triangolazione. Da questo si deduce che gli spazi realizzabili sono contenuti in un aperto di \mathcal{S}_n che è una varietà topologica di dimensione $3n - 6$.

Consideriamo ora \mathcal{M}_n : questo è l'insieme degli spazi ammissibili, cioè degli spazi di \mathcal{S}_n con tutti i punti conici di ampiezza $> 2\pi$ e con tutte le geodetiche chiuse di lunghezza maggiore di 2π . La prima condizione è aperta, dato che la funzione che misura l'ampiezza dei punti conici è continua. Inoltre anche la seconda condizione è aperta, grazie al Teorema 5.4. Allora \mathcal{M}_n è un aperto di \mathcal{S}_n . Inoltre la sua topologia è più fine di quella indotta dalla distanza di Lipschitz. Questo ci permette di concludere che ogni metrica realizzabile g ha un intorno aperto in \mathcal{M}_n immerso in \mathbb{R}^{3n-6} . \square

5.5 Successioni di spazi realizzabili

In questo capitolo dimostreremo che se una successione di metriche realizzabili sulla sfera converge a una metrica ammissibile nella topologia di Lipschitz, allora questa metrica è realizzabile. Lo faremo per assurdo, dimostrando che se questa metrica non è realizzabile allora non è ammissibile. Prima di enunciare il teorema teniamo a isolare alcuni punti.

Osservazione 5.3. Una successione convergente di poliedri iperbolici $\{P_n\}$ con un numero $\leq N$ di vertici può tendere, nella topologia di Hausdorff dei chiusi di \mathbb{H}^3 , a un poliedro iperbolico P_∞ , oppure degenerare a un poligono, un segmento o un punto. In ogni caso la successione delle trasformate polari $\{P_n^*\}$ convergerà a una superficie isometrica alla trasformata polare del limite.

Nel caso in cui il limite sia degenere la trasformata polare assume le seguenti forme:

- nel caso di un punto p la sua trasformata polare, intesa come lo spazio dei vettori unitari ortogonali ai piani di supporto, è semplicemente la sfera S_p dei vettori unitari nello spazio tangente $T_p\mathbb{H}^3$ (come abbiamo notato in precedenza questa sfera è contenuta nella sfera di de Sitter);
- nel caso di un segmento $\overline{p_1p_2}$ la sua trasformata polare è comunque una sfera, data dall'unione di due semisfere una in S_{p_1} l'altra in S_{p_2} ;
- nel caso di un poligono piano la trasformata polare è una *sospensione* (si veda l'esempio 5.2) con due angoli conici di pari ampiezza β , corrispondente alla somma degli angoli esterni del poligono iperbolico.

Tutti questi spazi non sono ammissibili.

Il prossimo risultato ci sarà utile nel corso della dimostrazione. La dimostrazione è qui solo abbozzata per non appesantire la trattazione.

Teorema 5.7 (Disuguaglianza isoperimetrica iperbolica). *Sia C un corpo convesso in \mathbb{H}^2 avente per bordo un poligono compatto. Allora la sua area è strettamente minore del suo perimetro.*

Dimostrazione. Una conseguenza della legge dei coseni per i triangoli iperbolici (vedi [22]) è che l'area di un triangolo iperbolico è minore della lunghezza del minore dei lati. Suddividendo ora C in triangoli si ha facilmente la tesi. \square

Enunciamo ora il risultato principale di questa sezione:

Teorema 5.8. *Sia $\{g_i\}$ una successione di metriche realizzabili sulla sfera, in modo tale che lo spazio (\mathbb{S}^2, g_i) sia isometrico alla trasformata polare del poliedro iperbolico compatto P_i con un numero di facce $\leq n$. Supponiamo che la successione $\{g_i\}$ tenda nella topologia di Lipschitz alla metrica ammissibile g_∞ . Allora questa metrica è realizzabile, cioè esiste un poliedro compatto P_∞ tale che lo spazio (\mathbb{S}^2, g_∞) sia isometrico alla trasformata polare P_∞^* .*

Procediamo per passi. Vediamo prima il caso più semplice.

Lemma 5.1. *Con le notazioni del teorema 5.8, se la successione $\{\text{diam}(P_i)\}$ dei diametri di P_i è limitata allora la metrica g_∞ è realizzabile.*

Dimostrazione. Nell'enunciato i poliedri P_i possono essere presi a meno di congruenza. Quindi possiamo supporre che la parte interna di ogni P_i contenga uno stesso punto p_0 . Poiché i poliedri P_i hanno diametri limitati allora sono contenuti tutti in una qualche sfera chiusa di centro p_0 e quindi esiste una sottosuccessione convergente nella topologia di Hausdorff dei chiusi di \mathbb{H}^3 . Come notato nell'osservazione 5.3, se questa sottosuccessione degenerasse a un punto, un segmento o un poligono allora la metrica g_∞ non sarebbe ammissibile. Quindi questa sottosuccessione converge necessariamente ad un poliedro compatto P_∞ e g_∞ è la metrica intrinseca della trasformata polare P_∞^* , dunque è realizzabile. \square

Nel resto della sezione supporremo senza perdita di generalità che la successione dei diametri di P_i tenda a ∞ . L'idea è questa: se la successione dei diametri diverge, i P_i sviluppano, al crescere di i , dei lunghi tubi sottili, ai quali corrispondono delle quasi-geodetiche di lunghezza vicina a 2π in P_i^* . Questo implica la presenza nello spazio (\mathbb{S}^2, g_∞) di una geodetica di lunghezza 2π , conducendoci ad un assurdo, giacché la metrica g_∞ risulta non ammissibile. Dimostriamo per prima cosa l'esistenza di questi lunghi tubi sottili.

Teorema 5.9 (Lunghi tubi sottili). *Dati $\varepsilon > 0$, $N > 0$ ed $L > 0$ esiste $D > 0$ tale che, dato un poliedro iperbolico compatto P con un numero $\leq N$ di vertici e $\text{diam}(P) \geq D$, esiste un piano Π tale che:*

1. *il piano Π è a distanza $> L$ da tutti i vertici di P ;*
2. *il piano Π interseca P in una curva C di lunghezza $< \varepsilon$;*
3. *gli angoli diedrali formati da Π con le facce di P hanno ampiezze comprese tra $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$ e $\frac{\pi}{2} + \varepsilon$.*

Osservazione 5.4. Nel teorema precedente, quando ε è piccolo e L è grande, le facce contenenti la curva C formano un lungo tubo sottile (vedi la figura 5.2).

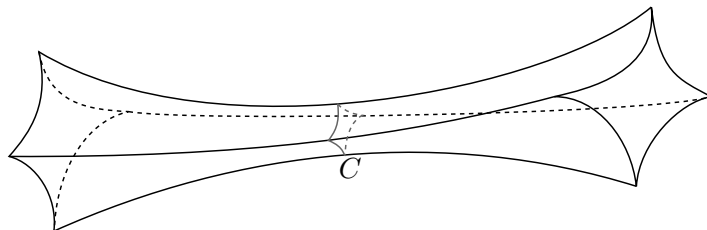


Figura 5.2: La curva C su un lungo tubo sottile.

Dimostrazione. Sia P un poliedro con diametro maggiore di un certo valore D . Il diametro di un poliedro è realizzato dalla distanza di due dei suoi vertici. Siano allora v_1 e v_2 due vertici di P a distanza $\text{diam}(P) > D$. Proiettando ortogonalmente gli altri vertici sul segmento $\overline{v_1v_2}$, questo viene diviso in ulteriori tratti, uno dei quali ha sicuramente lunghezza maggiore di $\frac{D}{N-1}$. Sia l tale tratto e sia Π il piano ortogonale a l e passante per il suo punto medio.

Un primo punto da notare è che il piano Π dista dagli altri vertici almeno $\frac{D}{2(N-1)}$, quindi possiamo sicuramente scegliere D abbastanza grande da rendere questa grandezza $> L$. Quello che ci manca da vedere è che la curva $C = \Pi \cap P$ è corta e che il piano Π interseca le facce contenenti C quasi ortogonalmente.

Per fissare la notazione chiamiamo O_1 e O_2 i punti all'infinito della retta contenente l e Π_1 e Π_2 i piani ortogonali a l passanti per i suoi estremi.

Osserviamo che il segmento l divide i vertici di P in due insiemi, a seconda della componente connessa di $\overline{v_1v_2} - l$ a cui appartengono. Le facce di P che intersecano la curva C hanno vertici in entrambi gli insiemi e quindi intersecano sia Π_1 che Π_2 .

Al tendere di D a ∞ , i piani Π_1 e Π_2 tendono ai punti all'infinito O_1 e O_2 . Quindi qualsiasi piano Θ che intersechi sia Π_1 che Π_2 tende a un piano

che contiene sia O_1 che O_2 , quindi contiene anche il segmento l ed è perciò ortogonale al piano Π .

Per concludere, se D è abbastanza grande, i piani contenenti le facce di P che intersecano C sono tutti arbitrariamente vicini a l (da cui si può ricavare che la curva C è arbitrariamente corta) e intersecano Π con angolo diedrale arbitrariamente vicino a $\frac{\pi}{2}$. \square

Una geodetica in una superficie con singolarità coniche (con una data tassellazione) con angoli conici maggiori di 2π è una curva che interseca le facce in archi geodetici (nella metrica intrinseca delle facce) e che interseca ogni vertice della tassellazione sottendendo da ambo i lati un angolo θ maggiore di π . Se una tale curva γ interseca un vertice v con un angolo θ minore di π da una delle due parti, chiamiamo la curva *geodetica a tratti* e chiamiamo *angolo di rotazione* di γ in v l'angolo $\pi - \theta$. Chiamiamo *angolo di rotazione totale* di γ la somma $\tau(\gamma)$ dei suoi angoli di rotazione.

Osservazione 5.5. Una geodetica a tratti chiusa γ di lunghezza c è anche una ε -quasi-geodetica di lunghezza c con ε che diminuisce al diminuire dell'angolo di rotazione totale $\tau(\gamma)$.

Lemma 5.2. *Dati $\eta > 0$ e $N > 0$, esiste $D > 0$ tale che se un poliedro iperbolico compatto P ha diametro maggiore di D e un numero $\leq N$ di vertici, allora la sua trasformata polare P^* contiene una geodetica a tratti chiusa γ di lunghezza compresa tra 2π e $2\pi + \eta$ e angolo di rotazione totale $\tau(\gamma) < \eta$.*

Dimostrazione. Come abbiamo visto nel teorema precedente, se D è abbastanza grande si sviluppa un lungo tubo sottile T , dato dall'unione di alcune facce f_1, \dots, f_k che si intersecano negli spigoli l_1, \dots, l_k . L'insieme dei vettori unitari ortogonali uscenti dai piani di supporto di queste facce e questi spigoli è una geodetica a tratti chiusa in P^* , risultante dall'unione degli archi di geodetica l_i^* (di lunghezza pari all'angolo diedrale esterno in l_i) che si intersecano nei vertici f_i^* .

Se l_i e l_{i+1} appartengono alla faccia f_i e si incontrano in un vertice v di tale faccia, l'angolo di rotazione di γ in f_i^* è pari all'angolo interno θ_i della faccia f_i in v . Se l_i e l_{i+1} appartengono alla faccia f_i ma non si incontrano in un vertice, si verifica, con un ragionamento analogo a quello del lemma 2.3, che l'angolo di rotazione di γ in f_i^* è minore dell'angolo interno θ_i formato dalle rette contenenti l_i e l_{i+1} (se le due rette sono iperparallele si prende $\theta_i = 0$ – per farsi un'idea si veda la figura 2.6). Quindi $\tau(\gamma) < \sum \theta_i$.

Ora, grazie al terzo punto del teorema precedente, per D abbastanza grande gli spigoli l_i formano con il piano Π angoli vicini a $\frac{\pi}{2}$, quindi gli angoli θ_i sono necessariamente vicini a 0, da cui segue che per D abbastanza grande $\tau(\gamma)$ è molto piccolo.

Occupiamoci ora della lunghezza di γ . Questa è pari alla somma degli angoli diedrali esterni di P negli spigoli l_i . Sempre grazie al terzo punto del

teorema precedente, le facce f_i si discostano di poco dall'essere ortogonali al piano Π . Quindi la lunghezza di γ si discosta di poco dalla somma $\tau(C)$ degli angoli esterni della curva poligonale piana C . Ora, grazie al teorema di Gauss-Bonnet si ha che $\tau(\gamma)$ è pari a 2π più l'area del poligono C e grazie al teorema 5.7 l'area del poligono C è minore del suo perimetro, il quale tende a 0 grazie al secondo punto del teorema precedente, da cui segue che al crescere di D la lunghezza di γ si avvicina a 2π . \square

Dimostrazione del Teorema 5.8. Se i diametri dei poligoni P_i sono limitati, abbiamo già visto nel lemma 5.1 che la metrica g_∞ è realizzabile. Supponiamo quindi che tali diametri non siano limitati. Allora, a meno di estrarre una sottosuccessione, possiamo supporre che $\text{diam}(P_i) \rightarrow \infty$.

Si noti innanzitutto che, poiché i poliedri hanno un numero di facce $\leq n$ allora, grazie alla formula di Eulero hanno un numero di vertici $\leq N = 2n - 2$. Possiamo quindi applicare il lemma precedente e trovare in ogni P_i^* una ε_i -quasi-geodetica chiusa γ_i con $\varepsilon_i \rightarrow 0$ e tale che $l(\gamma_i) \rightarrow 2\pi$. Allora grazie al teorema 5.3 esiste in (\mathbb{S}^2, g_∞) una geodetica chiusa di lunghezza 2π . Ma questo è assurdo, dato che avevamo supposto che la metrica g_∞ fosse ammissibile. \square

5.6 Archi di spazi ammissibili

In questa sezione verrà dimostrato il seguente Teorema, che come si è visto è fondamentale nella dimostrazione del risultato principale di questo capitolo:

Teorema 5.10. *Siano g_0 e g_1 due metriche ammissibili sulla sfera. Allora g_0 e g_1 possono essere collegate da un arco g_t ($0 \leq t \leq 1$) di metriche ammissibili sulla sfera tale che:*

1. g_t ha esattamente N punti conici per $0 < t < 1$, con N un intero maggiore o uguale del numero di punti conici di g_0 e g_1 ;
2. g_t è una funzione continua nella topologia di Lipschitz per $0 \leq t \leq 1$ e nella topologia di \mathcal{M}_N per $0 < t < 1$;
3. se g_0 è realizzabile allora g_t è realizzabile per t vicino a 0.

Prima di dimostrare questo teorema abbiamo bisogno di alcuni risultati. Al fine di non appesantire la trattazione, di alcuni di questi non forniremo dimostrazione, per la quale si rimanda all'articolo originale di Rivin e Hodgson [15].

5.6.1 Topologie sullo spazio delle metriche

Al fine di dimostrare una serie di risultati dobbiamo introdurre, sullo spazio delle metriche riemanniane di una varietà differenziabile chiusa M , delle topologie, in generale più fini della topologia di Lipschitz.

Definizione 5.4. Se M è una varietà differenziabile chiusa, definiamo per ogni $k \in \mathbb{N}$, lo spazio $\text{Met}^k(M)$ delle metriche riemanniane su M a meno di isometria con la topologia \mathcal{C}^k . Due metriche g_1 e g_2 sono vicine se lo sono i loro coefficienti metrici fino alla k -esima derivata.

Lemma 5.3. Con la notazione della definizione precedente, lo spazio $\text{Met}^k(M)$ è connesso per archi per ogni $k \geq 0$.

Lemma 5.4. I coefficienti del tensore di curvatura sono funzioni continue sullo spazio prodotto $M \times \text{Met}^2(M)$.

Si ricordi che abbiamo definito in precedenza lo spazio $\text{Met}(M)$ delle metriche riemanniane sulla varietà M a meno di isometria, con la topologia indotta dalla distanza di Lipschitz.

Lemma 5.5. Per ogni varietà chiusa M la funzione identità dà mappe continue:

$$\dots \rightarrow \text{Met}^2(M) \rightarrow \text{Met}^1(M) \rightarrow \text{Met}^0(M) \rightarrow \text{Met}(M) .$$

Si possono introdurre analogamente topologie \mathcal{C}^k anche sullo spazio delle metriche che rendono M una varietà con singolarità coniche e il risultato precedente vale anche per queste topologie. Abbiamo il seguente risultato, di importanza cruciale:

Lemma 5.6. Data una metrica ammissibile g_0 sulla sfera \mathbb{S}^2 , esiste un arco g_t ($0 \leq t \leq 1$) di metriche che rendono \mathbb{S}^2 una varietà con singolarità coniche tale che:

1. la metrica g_1 è una metrica riemanniana su \mathbb{S}^2 ;
2. ogni metrica g_t ha gli stessi punti conici di g_0 , con angoli conici $\geq 2\pi$;
3. esiste $K_0 \leq 1$ tale che le curvature sezionali delle metriche g_t siano comprese tra K_0 e 1;
4. l'arco g_t è continuo nella topologia \mathcal{C}^2 .

5.6.2 Famiglie di triangolazioni geodetiche

In questa sezione ci concentreremo sulla dimostrazione della proposizione seguente:

Proposizione 5.1. Sia g_t un arco di metriche con singolarità coniche sulla sfera \mathbb{S}^2 , continuo nella topologia \mathcal{C}^1 , tale che la metrica g_0 sia realizzabile e tale che i punti conici di g_t siano contenuti nell'unione dei punti conici di g_0 e g_1 . Allora dato $\delta > 0$ esiste per ogni $0 \leq t \leq 1$ una triangolazione geodetica T_t di (\mathbb{S}^2, g_t) tale che:

1. tutte le triangolazioni T_t hanno lo stesso insieme dei vertici, che contiene anche i punti conici di g_0 e g_1 ;
2. tutti i triangoli di T_t hanno diametro $< \delta$;
3. le triangolazioni T_t sono combinatoriamente equivalenti a T_0 e hanno lunghezze dei lati che variano in modo continuo con t .

Ci servono un paio di lemmi preliminari:

Lemma 5.7. *Con le notazioni della proposizione precedente, esiste un numero $\theta_0 > 0$ tale che, per ogni $\delta_0 > 0$, esiste una triangolazione T_0 su (\mathbb{S}^2, g_0) nella quale ogni triangolo di T_0 ha diametro minore di δ_0 e angoli interni compresi nell'intervallo chiuso $[\theta_0, \pi - \theta_0]$. Inoltre l'insieme dei vertici della triangolazione T_0 contiene i punti conici di g_0 e di g_1 .*

Dimostrazione. Poiché lo spazio (\mathbb{S}^2, g_0) è realizzabile, è data una tassellazione su questo spazio avente per vertici i punti conici di g_0 in poligoni sferici con almeno tre lati. Possiamo allora suddividere ogni poligono con più di tre lati in triangoli, collegando con un arco geodetico i vertici del poligono ad un qualsiasi punto interno al poligono (figura 5.3 a sinistra) ottenendo così una triangolazione. Gli angoli di questa triangolazione sono compresi in un qualche intervallo $[\theta, \pi - \theta]$.

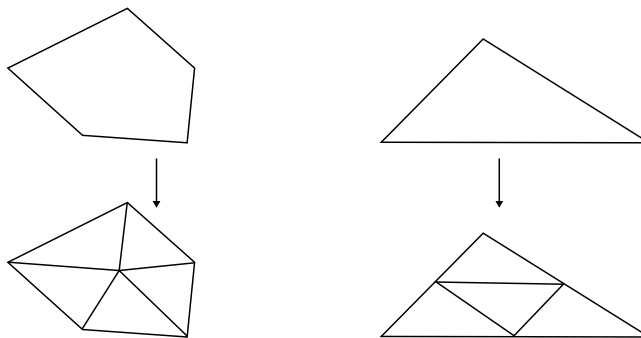


Figura 5.3: Le suddivisioni della dimostrazione del lemma 5.7.

Suddividiamo ora ogni triangolo in altri quattro triangoli collegando con archi geodetici i punti medi dei lati (figura 5.3 a destra). Applicando queste suddivisioni in modo ricorsivo, ad ogni passo il diametro dei triangoli diminuisce progressivamente e diventa arbitrariamente piccolo. Inoltre al tendere a 0 del diametro dei triangoli, la somma dei loro angoli interni tende a π . Questo garantisce che gli angoli interni dei triangoli ottenuti da una nuova suddivisione sono arbitrariamente vicini agli angoli precedenti (per convincersi si pensi che al tendere a 0 dei diametri i triangoli si avvicinano a triangoli euclidei e, se si suddivide un triangolo euclideo congiungendo i punti

medi dei lati si ottengono quattro triangoli simili). Da questo segue che gli angoli dei triangoli appartengono definitivamente a un intervallo $[\theta_0, \pi - \theta_0]$ per un qualche $\theta_0 \leq \theta$.

Si noti che attraverso suddivisioni analoghe a quelle che abbiamo descritto possiamo includere nell'insieme dei vertici della triangolazione T_0 ogni insieme finito di punti, quindi in particolare anche i punti conici di g_1 . \square

Osservazione 5.6. Nella dimostrazione del teorema precedente abbiamo modificato la tassellazione dello spazio realizzabile (\mathbb{S}^2, g_0) corrispondente alla struttura combinatoria della trasformata polare P^* di un poliedro iperbolico compatto P . Ad ogni passo della suddivisione esistono tuttavia perturbazioni canoniche arbitrariamente piccole della metrica g_0 che danno una metrica realizzabile corrispondente alla nuova triangolazione. Queste si possono ottenere come le metriche intrinseche sulle trasformate polari di poliedri ottenuti modificando opportunamente P :

1. una faccia v^* con k lati della tassellazione corrisponde a un vertice v cui afferiscono k spigoli; suddividere un poligono v^* con $k > 3$ lati come descritto nella dimostrazione del lemma precedente corrisponde a troncare il poligono P vicino al vertice v con un opportuno piano; questa operazione elimina un vertice e ne introduce altri k , tutti trivalenti (si veda la figura 5.4 a sinistra);
2. suddividere un triangolo v^* collegando i punti medi dei lati corrisponde a troncare il poliedro P con piani vicini agli spigoli afferenti a v ; questa operazione aggiunge tre facce tra loro adiacenti.

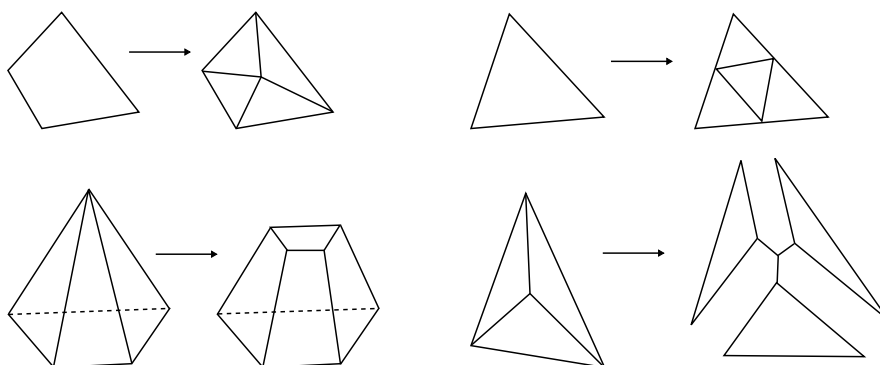


Figura 5.4: Perturbazione della metrica realizzabile g_0 .

Del prossimo risultato omettiamo la dimostrazione, per la quale si rimanda ancora una volta a [15]:

Lemma 5.8. *Con le notazioni del lemma 5.1, sia d_t la distanza determinata da g_t su \mathbb{S}^2 . Allora esistono $r > 0$ e $C \geq 1$ tali che per ogni $x \in \mathbb{S}^2$ e per ogni y tale che $d_0(x, y) < r$ si ha:*

1. *esiste un'unico arco geodetico e_t da x a y per ogni $0 \leq t \leq 1$;*
2. *$d_t(x, y) < Cd_0(x, y)$;*
3. *la lunghezza di e_t varia in modo continuo con t ;*
4. *l'angolo tra e_0 e e_t nella metrica g_0 è minore di $Cd_0(x, y)$.*

Dimostrazione della Proposizione 5.1. Dato $\delta > 0$, siano r e C dati dal Lemma 5.8, sia θ_0 dato dal lemma 5.7 e sia $\delta_0 < \min\{r, \frac{\theta_0}{3C}, \frac{\delta}{C}\}$. Lo stesso lemma 5.7 assicura allora l'esistenza di una triangolazione T_0 di g_0 con triangoli di diametro $\leq \delta_0$.

Se e_0 è uno spigolo della triangolazione T_0 che collega i vertici v e w , poiché la lunghezza di e_0 è minore di r , il lemma precedente assicura l'esistenza di un arco geodetico e_t che collega i vertici v e w di lunghezza minore di $Cd_0(v, w) \leq C\delta_0 < \delta$. Sostituendo agli spigoli e_0 gli archi geodetici e_t si ottiene quindi una triangolazione geodetica T_t nella metrica g_t i cui triangoli hanno tutti diametro minore di δ e i cui spigoli hanno lunghezze che variano in modo continuo con t .

Infine: i triangoli di T_0 hanno tutti angoli compresi tra θ_0 e $\pi - \theta_0$. Poiché l'angolo compreso tra e_0 ed e_t è minore di $Cd_0(v, w) < C\delta_0 < \frac{\theta_0}{3}$ gli angoli interni ai triangoli di T_t sono tutti compresi tra $\frac{2}{3}\theta_0$ e $\pi - \frac{2}{3}\theta_0$, che garantisce che i triangoli di T_t siano tutti non degeneri. \square

Concludiamo questa sezione con un caso particolare del teorema di confronto per triangoli geodetici di Aleksandrov e Toponogov (vedi [9]).

Lemma 5.9. *Date costanti $\varepsilon > 0$, $K_1 \leq K_2$, esiste $\delta' > 0$ tale che valga quanto segue. Sia (M, g) una varietà riemanniana e sia τ un triangolo a bordo geodetico in M di diametro minore di δ' . Supponiamo che le curvature sezionali di M calcolate nei punti di τ siano comprese tra K_1 e K_2 e sia τ' un triangolo con lati di lunghezza pari ai lati di τ costruito in uno spazio di curvatura costante K_2 . Allora:*

1. *gli angoli interni di τ' sono non inferiori agli angoli di τ , con una disuguaglianza stretta se vale la disuguaglianza stretta per le curvature sezionali;*
2. *l'isometria tra i bordi di τ e τ' si estende a una ε -quasi-isometria tra i due triangoli.*

5.6.3 Dimostrazione del Teorema 5.10

Siamo finalmente in grado di fornire la dimostrazione del principale risultato di questo capitolo. A questa premettiamo una definizione:

Definizione 5.5. Una metrica g con un numero finito di singolarità coniche sulla sfera \mathbb{S}^2 sarà detta quasi-ammissibile se:

1. g ha curvatures sezionali ≤ 1 ;
2. tutti i punti conici hanno angolo conico $\geq 2\pi$;
3. tutte le geodetiche chiuse hanno lunghezza $> 2\pi$.

Ricapitolando: dobbiamo collegare la metrica realizzabile g_0 con m punti conici alla metrica ammissibile g_1 con n punti conici con un arco g_t ($0 \leq t \leq 1$) di metriche ammissibili tutte con N punti conici ($N \geq \max\{m, n\}$). Inoltre richiediamo che l'arco g_t sia continuo nella topologia di Lipschitz e che l'arco aperto g_t con $0 < t < 1$ sia continuo nella topologia di \mathcal{M}_N .

Dimostrazione del Teorema 5.10. Divideremo questa dimostrazione in tre parti.

Prima parte: costruzione di un arco h_t di metriche con singolarità coniche su \mathbb{S}^2 che collega g_0 a g_1 .

Attraverso il lemma 5.6 possiamo collegare la metrica g_0 a una metrica riemanniana g'_0 e la metrica g_1 a una metrica riemanniana g'_1 con archi a_t e b_t continui nella topologia \mathcal{C}^2 . Le metriche a_t e b_t hanno gli stessi punti conici rispettivamente di g_0 e g_1 . I punti conici di a_t e b_t hanno tutti ampiezza $\geq 2\pi$. Inoltre esiste una costante K_0 per cui le curvatures sezionali delle metriche a_t e b_t sono comprese tra K_0 e 1.

Infine grazie al lemma 5.3 possiamo collegare g'_0 a g'_1 con un arco continuo nella topologia \mathcal{C}^2 . Accodando questi tre archi otteniamo un arco di metriche con singolarità coniche h_t che collega g_0 a g_1 .

Seconda parte: riscaldamento delle h_t a metriche quasi-ammissibili \tilde{h}_t .

Grazie al Teorema 5.4 e al Lemma 5.5 la funzione $l_0(h_t)$ è semicontinua inferiormente. Inoltre sappiamo che esiste $\eta > 0$ tale che $l_0(h_t) > 2\pi + \eta$ per $t = 0$ e 1.

Grazie al Lemma 5.4 esistono funzioni continue $K_1(t) \leq K_2(t)$ che limitano le curvatures sezionali delle metriche h_t , quindi esistono costanti K_1 e K_2 tali che $K_1 \leq K_1(t) \leq K_2(t) \leq K_2$ per ogni t . Inoltre $K_2(t) = 1$ per t vicino a 0 e 1.

Possiamo quindi trovare una funzione differenziabile $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

1. $c(t)l_0(h_t) > 2\pi + \eta$ per $0 \leq t \leq 1$;
2. $\frac{1}{c(t)^2}K_2(t) < 1$ per $0 < t < 1$;

3. $c(t) = 1$ per $t = 0$ e 1 .

Allora le metriche $\tilde{h}_t = c(t)h_t$ sono quasi-ammissibili: infatti $l_0(\tilde{h}_t) > 2\pi + \eta$, le curvature sezionali sono tutte minori o uguali a 1 e tutti i punti conici sono $\geq 2\pi$ (riscaldare la metrica non cambia le ampiezze degli angoli). Inoltre \tilde{h}_t è un arco di metriche quasi ammissibili continuo nella topologia \mathcal{C}^2 .

Si noti infine che le curvature sezionali di \tilde{h}_t sono tutte strettamente minori di 1 per $0 < t < 1$.

Terza parte: costruzione di un arco di metriche ammissibili g_t attraverso un'approssimazione con poligoni sferici delle metriche \tilde{h}_t .

Dati $\varepsilon > 0$, un opportuno K_1 che limiti inferiormente le curvature sezionali delle \tilde{h}_t e $K_2 = 1$, scegliamo $\delta' > 0$ tale che valga il Lemma 5.9 e scegliamo $\delta < \delta'$. L'arco di metriche quasi-ammissibili \tilde{h}_t rispetta le ipotesi della Proposizione 5.1. Questo dà per ogni $0 \leq t \leq 1$ una triangolazione geodetica T_t nella metrica \tilde{h}_t con gli stessi vertici (comprendenti i punti conici di g_0 e g_1), con la stessa struttura combinatoria, con i triangoli di diametro inferiore a δ e aventi lati di lunghezze che variano in modo continuo con t .

Allora costruiamo per ogni \tilde{h}_t una metrica g_t sostituendo ad ogni triangolo di T_t un triangolo sferico con i lati della medesima lunghezza. Notiamo che le metriche $\tilde{h}_0 = g_0$ e $\tilde{h}_1 = g_1$ non vengono modificate da questa operazione. Inoltre le metriche g_t sono ammissibili. Infatti:

- hanno tutte curvatura sezionale costante pari a 1 ;
- grazie al primo punto del lemma 5.9 le metriche g_t hanno tutte gli stessi N punti conici, corrispondenti ai vertici della triangolazione T_t ; questi punti conici hanno tutti angolo conico $> 2\pi$;
- grazie al secondo punto le metriche g_t sono ε -quasi-isometriche alle metriche \tilde{h}_t , quindi, scegliendo ε abbastanza piccolo si ha $l_0(g_t) > l_0(\tilde{h}_t) - \eta/2 > 2\pi$ (per un'applicazione del Teorema 5.4).

Inoltre l'arco g_t per $0 \leq t \leq 1$ è continuo nella topologia di Lipschitz dato che le lunghezze dei lati della triangolazione T_t variano in modo continuo rispetto a t . Per la stessa ragione, e per il fatto che le g_t hanno gli stessi punti conici, l'arco aperto g_t per $0 < t < 1$ è continuo nella topologia di \mathcal{M}_N .

Infine possiamo usare l'osservazione 5.6 per perturbare le metriche g_t per t abbastanza vicino a 0 in modo da renderle realizzabili. Questo conclude la dimostrazione. □

Capitolo 6

Teorema di Rivin: caso ideale

In questo capitolo ci occuperemo principalmente di dimostrare il Teorema 3.1 nel caso dei poliedri ideali. Prima di tutto specializzeremo il teorema e faremo vedere come, attraverso un'applicazione del Teorema 4.5, un poliedro ideale è determinato dalla sua trasformata polare generalizzata. In secondo luogo dimostreremo il risultato principale attraverso un'applicazione del Teorema 2.2.

6.1 La trasformata polare generalizzata di un poliedro ideale

Come abbiamo visto nel Capitolo 3 la trasformata polare di un poliedro di volume finito non è sempre una superficie chiusa. In particolare se P è un poliedro ideale la sua trasformata polare P^* è un grafo con vertici f^* corrispondenti alle facce f di P e spigoli s^* corrispondenti agli spigoli s di P . Inoltre in P^* lo spigolo s^* collega i vertici f_1^* e f_2^* se e solo se in P lo spigolo s è adiacente alle facce f_1 e f_2 .

Abbiamo anche visto che la lunghezza di uno spigolo s^* in P^* è pari all'angolo diedrale esterno di P in s . Inoltre, se gli spigoli s_1, \dots, s_k afferiscono tutti al medesimo vertice ideale v e sono tali che s_i e s_{i+1} appartengono entrambi ad una faccia f_i , allora in P^* gli spigoli s_1^*, \dots, s_k^* sono tutti consecutivi, si incontrano nei vertici f_i^* e formano una curva chiusa di lunghezza 2π .

Sempre nel capitolo 3 abbiamo costruito la trasformata polare generalizzata $\overline{P^*}$ di un poliedro di volume finito P incollando isometricamente a P^* delle semisfere chiuse (che abbiamo chiamato facce ideali e indicato con v^*) a queste curve di lunghezza 2π (corrispondenti ai vertici ideali v) lungo il proprio bordo, ottenendo così una superficie chiusa (abbiamo sostanzialmente “riempito i buchi”). In particolare se P è un poliedro ideale allora $\overline{P^*}$ è effettivamente l'unione delle facce ideali, in questo modo: due facce ideali

v_1^* e v_2^* si intersecano solo al bordo e si incontrano in uno spigolo s^* di P^* se e solo se lo spigolo s ha vertici ideali v_1 e v_2 in P .

Si ha così che la trasformata polare generalizzata $\overline{P^*}$ di un poliedro ideale P ha una naturale struttura di complesso di celle, dove le 2-celle corrispondono alle facce ideali, le 1-celle corrispondono agli spigoli di P^* e le 0-celle corrispondono ai vertici di P^* . In particolare la trasformata polare $P^* \subseteq \overline{P^*}$ è l'1-scheletro della trasformata polare generalizzata.

La trasformata polare generalizzata di un poliedro ideale P possiede naturalmente anche una struttura di superficie con singolarità coniche. I punti conici di $\overline{P^*}$ corrispondono precisamente ai vertici f^* di P^* . Inoltre l'angolo conico in f^* corrisponde alla somma degli angoli interni in f^* delle facce ideali che lo contengono come vertice. Essendo le facce ideali tutte semisfere gli angoli interni in f^* sono tutti pari a π . Inoltre se la faccia f contiene vertici v_1, \dots, v_k , allora il vertice f^* appartiene alle facce ideali v_1^*, \dots, v_k^* e quindi l'angolo conico in f^* corrisponde a $k\pi$ (si noti che $k \geq 3$).

Ricordiamo che l'altra proprietà caratterizzante della trasformata polare generalizzata di un poliedro iperbolico di volume finito è il fatto che le geodetiche chiuse abbiano lunghezza $\geq 2\pi$ e le uniche geodetiche chiuse di lunghezza 2π siano i bordi delle facce ideali. Per quanto riguarda la trasformata polare generalizzata di un poliedro ideale P siamo in grado di rimpiazzare questa condizione con una condizione leggermente più debole:

Proposizione 6.1. *Sia Q una superficie con singolarità coniche omeomorfa alla sfera con una decomposizione in complesso di celle tale che:*

1. ogni 2-cella è isometrica a una semisfera chiusa;
2. ogni coppia di 2-celle distinte H e K si interseca solo nel bordo in un arco di geodetica sferica di lunghezza compresa strettamente tra 0 e π .

Allora ogni geodetica chiusa in Q che non sia il bordo di una 2-cella ha lunghezza strettamente maggiore di 2π se e solo se ogni curva chiusa nell'1-scheletro di M che non sia il bordo di una 2-cella ha lunghezza strettamente maggiore di 2π .

Osservazione 6.1. Una superficie con singolarità coniche che ha le proprietà enumerate nelle ipotesi della proposizione precedente “somiglia” molto alla trasformata polare generalizzata di un poliedro ideale. In particolare ha punti conici di ampiezza $k\pi$ con $k \geq 3$.

Dimostrazione. Ogni curva chiusa nell'1-scheletro di Q è una geodetica chiusa, quindi una delle implicazioni è banale. Viceversa supponiamo che ogni curva chiusa nell'1-scheletro che non sia il bordo di una 2-cella abbia lunghezza strettamente maggiore di 2π e sia γ una geodetica chiusa in Q . Naturalmente il caso in cui γ non intersechi la parte interna di alcuna 2-cella è banale.

Si noti ora che se γ passa per l'interno di una 2-cella lo fa con un tratto di lunghezza π . Se γ passa per la parte interna di almeno due 2-celle H e K allora non può essere contenuta nell'unione di queste due. Infatti se così fosse γ intersecherebbe il bordo comune di H e K in due punti a distanza π , contraddicendo la seconda ipotesi su M . Quindi la lunghezza di γ supera strettamente 2π .

Se γ passa per la parte interna esattamente di una 2-cella H , allora γ interseca necessariamente il bordo di H in due punti conici p e q antipodali sul bordo di H . Sia γ' la curva ottenuta sostituendo in γ il tratto che passa per la parte interna di H con uno dei due tratti (entrambi di lunghezza π) del bordo di H che collegano p a q . La curva γ' è contenuta nell'1-scheletro di Q e non può essere il bordo di una 2-cella. Allora γ' ha lunghezza strettamente maggiore di 2π . Si conclude notando che γ ha la stessa lunghezza di γ' . \square

Da quanto detto finora è chiaro che la metrica sulla trasformata polare generalizzata di un poliedro ideale P è determinata dalla struttura combinatoria di P e dai suoi angoli diedrali. Possiamo quindi riformulare il Teorema 4.5 nel seguente modo:

Teorema 6.1. *Due poliedri iperbolici ideali P_1 e P_2 sono congruenti se e solo se le rispettive trasformate polari generalizzate \overline{P}_1^* e \overline{P}_2^* sono isometriche.*

Dimostrazione. Se P_1 e P_2 sono congruenti allora hanno la stessa struttura combinatoria e gli stessi angoli diedrali, quindi è evidente che \overline{P}_1^* e \overline{P}_2^* sono isometriche.

Viceversa, se \overline{P}_1^* e \overline{P}_2^* sono isometriche, allora una isometria da \overline{P}_1^* in \overline{P}_2^* deve necessariamente mandare facce ideali in facce ideali (infatti le uniche geodetiche chiuse di lunghezza 2π sono i bordi delle facce ideali). Grazie a quanto detto sopra questa osservazione ci permette di concludere che P_1 e P_2 hanno la stessa struttura combinatoria e gli stessi angoli diedrali. Allora grazie al Teorema 4.5 si ha la tesi. \square

6.2 Spazi idealmente ammissibili

In questa sezione specializzeremo il Teorema 3.1 al caso dei poliedri iperbolici ideali e lo faremo con un linguaggio molto simile a quello usato nel capitolo precedente. Per prima cosa diamo una definizione:

Definizione 6.1. Una superficie con singolarità coniche Q si dice *spazio idealmente ammissibile* se:

- Q è omeomorfa alla sfera \mathbb{S}^2 ;
- Q ammette una decomposizione in complesso di celle tale che:
 1. ogni 2-cella è isometrica a una semisfera chiusa (chiameremo queste 2-celle *facce* di Q);

2. ogni coppia di 2-celle distinte H e K si interseca solo nel bordo in un arco di geodetica sferica $s(H, K)$ (detto *spigolo* di Q) di lunghezza $l(H, K)$ con $0 < l(H, K) < \pi$;
- ogni curva chiusa γ contenuta nell'1-scheletro di Q e che non sia il bordo di una 2-cella ha lunghezza strettamente maggiore di 2π .

Il Teorema di Rivin per i poliedri iperbolici ideali può allora essere enunciato come segue:

Teorema 6.2. *Una superficie con singolarità coniche Q è isometrica alla trasformata polare generalizzata di un poliedro iperbolico ideale P (unico a meno di congruenza) se e solo se è uno spazio idealmente ammissibile.*

La parte del teorema che resta da dimostrare è la seguente: dato uno spazio idealmente ammissibile Q , esiste un poliedro iperbolico ideale P tale che Q è isometrico a $\overline{P^*}$. La strategia che seguiremo è la seguente:

- dato uno spazio idealmente ammissibile Q , lo deformeremo in modo canonico ad uno spazio Q^t dipendente dal parametro reale t strettamente positivo e vicino a 0;
- dimostreremo che lo spazio Q^t è ammissibile e quindi è isometrico alla trasformata polare di un opportuno poliedro iperbolico compatto P^t grazie al Teorema 2.2;
- otterremo P come “limite” di una successione di poliedri P^{t_i} con $t_i \rightarrow 0$.

6.3 Deformazione di spazi idealmente ammissibili

Sia Q un fissato spazio idealmente ammissibile con una fissata decomposizione in complesso di celle che rispetti le condizioni della definizione di spazio idealmente ammissibile. Data una faccia H di Q denoteremo con $N(H)$ il suo *polo Nord* e con $E(H)$ il suo *equatore*, che coincide anche con il bordo. Chiamiamo inoltre *triangolo equatoriale* in H un triangolo sferico T avente un vertice coincidente con $N(H)$ e il lato opposto giacente su $E(H)$ (lo chiameremo *lato equatoriale*). Notiamo subito che un triangolo equatoriale ha angolo apposto al lato equatoriale l di ampiezza esattamente pari a l e gli altri due angoli di ampiezza $\frac{\pi}{2}$. Se il lato equatoriale ha lunghezza l , definiamo per $0 < t < \frac{\pi}{l} - 1$ una *t-espansione* T^t del triangolo T come un triangolo equatoriale avente lato equatoriale di lunghezza $(1+t)l$.

L'equatore $E(H)$ di una faccia H è l'unione degli spigoli s_1, \dots, s_k (le intersezioni di H con le facce ad essa adiacenti). Quindi la faccia H è l'unione dei triangoli equatoriali T_1, \dots, T_k ottenuti congiungendo i vertici degli spigoli s_1, \dots, s_k ad $N(H)$. Siano T_1^t, \dots, T_k^t delle fissate *t-espansioni* di

T_1, \dots, T_k . Definiamo la t -espansione H^t della faccia H come lo spazio ottenuto incollando i triangoli T_1^t, \dots, T_k^t nello stesso modo in cui i triangoli T_1, \dots, T_k sono incollati per formare H .

La t -espansione H^t della faccia H è una superficie con una singolarità conica di ampiezza $2(1+t)\pi$ (che chiameremo *polo Nord* di H^t e denoteremo con $N(H^t)$) con bordo geodetico costituito da una curva chiusa di lunghezza $2(1+t)\pi$ (che chiameremo *equatore* di H^t e denoteremo con $E(H^t)$).

Infine, notiamo che lo spazio idealmente ammissibile Q è l'unione delle sue facce H_1, \dots, H_m . Chiamiamo t -espansione di Q lo spazio Q^t ottenuto incollando le t -espansioni H_1^t, \dots, H_m^t nello stesso modo in cui le facce H_1, \dots, H_m sono incollate per formare Q . Chiameremo H_1^t, \dots, H_m^t *facce* dello spazio Q^t .

6.4 Lo spazio Q^t è ammissibile

Ricordiamo che nel capitolo precedente abbiamo definito gli spazi ammissibili come superfici con singolarità coniche, omeomorfe alla sfera, di curvatura sezionale costante 1 fuori dai punti conici, con punti conici di angolo conico $> 2\pi$ e con geodetiche chiuse di lunghezza $> 2\pi$. Ricordiamo inoltre che abbiamo dimostrato che uno spazio ammissibile è isometrico alla trasformata polare di un poliedro iperbolico compatto, unico a meno di isometria.

Fissiamo uno spazio idealmente ammissibile Q e sia L la massima lunghezza dei suoi spigoli. Quello che segue è il risultato principale di questa sezione:

Teorema 6.3. *Con le notazioni precedenti, per $0 < t < \frac{\pi}{L} - 1$ lo spazio Q^t è ammissibile.*

Innanzitutto notiamo che la condizione $0 < t < \frac{\pi}{L} - 1$ serve affinché siano ben definite le t -espansioni di tutti i triangoli equatoriali coinvolti. È evidente che lo spazio Q^t è omeomorfo a Q , quindi alla sfera. Inoltre Q^t è stato costruito incollando triangoli sferici, quindi fuori dai punti conici deve avere curvatura sezionale costante pari a 1.

Lo spazio Q^t ha due tipi di punti conici. In primo luogo ci sono i punti conici corrispondenti ai punti conici di Q , che conservano la stessa ampiezza; infatti un punto di Q^t che sia l'intersezione delle facce H_1^t, \dots, H_k^t è un punto conico di angolo conico $k\pi$, corrispondente al punto conico in Q dato dall'intersezione delle facce H_1, \dots, H_k (il cui angolo conico ha medesima ampiezza). In secondo luogo, per ogni faccia H^t , il suo polo Nord $N(H^t)$, come abbiamo già visto, è un punto conico con angolo conico di ampiezza $2(1+t)\pi$. Quindi tutti i punti conici hanno angolo conico $> 2\pi$.

In buona sostanza per dimostrare che gli spazi Q^t sono ammissibili non rimane da verificare che le geodetiche chiuse hanno tutte lunghezza $> 2\pi$. Prima di dare una dimostrazione diretta di questo risultato ci serviranno un paio di Lemmi preliminari.

Osservazione 6.2. Lo spazio Q^t è stato costruito incollando triangoli sferici lungo i lati. Esso ha quindi una naturale triangolazione. I vertici di questa triangolazione sono esattamente i punti conici di Q^t . Come abbiamo visto, questi si sono di due tipi: quelli che corrispondono ai punti conici di Q , che chiameremo Q -vertici, e quelli che corrispondono al polo Nord di una qualche faccia H^t , che chiameremo N -vertici.

Analogamente anche i lati di questa triangolazione sono di due tipi. Da una parte ci sono i lati che corrispondono a spigoli della fissata decomposizione in complesso di celle di Q , che chiameremo Q -lati. I lati rimanenti, con notazione suggestiva, saranno detto *radiali*.

Si noti infine che le triangolazioni su Q^t al variare di t sono tutte combinatoriamente equivalenti.

Sia γ^t una curva chiusa in Q^t che sia l'unione di Q -lati della triangolazione. Due Q -lati si incontrano sempre in un Q -vertice formando da ambo le parti un angolo non inferiore a π . Quindi la curva γ^t è una geodetica chiusa in Q^t . Sia inoltre $l_0(Q)$ la lunghezza minima delle geodetiche di Q contenute nel suo 1-scheletro e che non sono il bordo di una faccia di Q (dalla trattazione precedente $l_0(Q) > 2\pi$).

Lemma 6.1. *Con le notazioni precedenti, la geodetica γ^t ha lunghezza strettamente maggiore di 2π . Inoltre consideriamo, al variare di t , la famiglia di geodetiche γ^t tutte combinatoriamente equivalenti:*

- se γ^t è il bordo di una faccia H^t allora $\lim_{t \rightarrow 0} l(\gamma^t) = 2\pi$; altrimenti
- si ha $l(\gamma^t) \geq (1+t)l_0(Q)$.

Dimostrazione. Poiché γ^t è costituita dall'unione di Q -lati, esiste una geodetica chiusa γ^0 in Q combinatoriamente equivalente a γ^t . Si ha necessariamente $l(\gamma^t) = (1+t)l(\gamma^0)$, da cui la tesi. \square

Lemma 6.2. *Sia γ un arco di geodetica in Q^t contenuto in una faccia H^t , che intersechi la parte interna di H^t e che colleghi due punti p e q dell'equatore $E(H^t)$. Allora $l(\gamma) = \pi$. Siano inoltre γ_1 e γ_2 i due tratti in cui viene diviso $E(H^t)$. Allora:*

- se γ non passa per il polo Nord $N(H^t)$ allora $l(\gamma_1) = \pi$ e $l(\gamma_2) = \pi + 2t\pi$;
- se γ passa per il polo Nord $N(H^t)$ allora $\pi \leq l(\gamma_i) \leq \pi + 2t\pi$.

Dimostrazione. Se γ non passa per $N(H^t)$ allora divide H^t in due parti, una delle quali non contiene al proprio interno nessun punto conico ed è isometrica a un aperto della sfera con bordo costituito da due tratti di geodetica (precisamente γ e γ_1) che si incontrano nei vertici p e q . Quindi deve necessariamente essere isometrica ad un bigono con i vertici in p e q . Da questo segue che γ e γ_1 hanno lunghezza π e γ_2 ha lunghezza $2(1+t)\pi - \pi = \pi + 2t\pi$.

Se γ passa per $N(H^t)$ allora è l'unione del segmento che unisce p a $N(H^t)$ e del segmento che unisce $N(H^t)$ a q , entrambi necessariamente di lunghezza $\frac{\pi}{2}$. Inoltre siccome γ è un arco geodetico, gli angoli sottesi in $N(H^t)$ sono entrambi $\geq \pi$. Poiché l'angolo conico in $N(H^t)$ ha ampiezza $2(1+t)\pi$, gli angoli sottesi hanno ampiezze comprese tra π e $\pi + 2t\pi$ e quindi tali sono le lunghezze di γ_1 e γ_2 . \square

Possiamo ora procedere alla dimostrazione del risultato principale:

Dimostrazione del Teorema 6.3. Come notato in precedenza, l'unico punto ancora da dimostrare è che tutte le geodetiche chiuse in Q^t hanno lunghezza $> 2\pi$. Sia allora γ una geodetica chiusa. Se γ non interseca la parte interna di nessuna faccia H^t , allora siamo nel caso del lemma 6.1 e quindi $l(\gamma) > 2\pi$.

Supponiamo ora che γ intersechi la parte interna di almeno due facce H^t e K^t . Quindi γ è composta da almeno due tratti distinti di lunghezza π . Se γ fosse contenuta nell'unione di H^t e K^t allora, grazie al lemma 6.2, il tratto comune del bordo di H^t e K^t avrebbe necessariamente lunghezza $\geq \pi$. Allora nello spazio idealmente ammissibile Q le facce H e K si intersecherebbero in uno spigolo $s(H, K)$ di lunghezza $l(H, K) = \frac{\pi}{1+t}$. Ricordiamo che abbiamo chiamato L la lunghezza massima degli spigoli di Q e abbiamo supposto $0 < t < \frac{\pi}{L} - 1$. Allora si avrebbe $l(H, K) = \frac{\pi}{1+t} > L$, cioè un assurdo. Quindi una geodetica chiusa γ che intersechi l'interno di almeno due facce ideali non vi può essere contenuta, quindi dev'essere $l(\gamma) > 2\pi$.

Rimane da esaminare solo il caso in cui la geodetica chiusa γ intersechi l'interno della sola faccia H^t . Per fissare le notazioni supponiamo che la geodetica γ intersechi il bordo di questa faccia nei punti p e q (che devono necessariamente essere punti conici di Q^t). La geodetica γ può essere divisa nel tratto γ' , composto solo di Q -lati, e nel tratto γ'' , contenuto nella faccia H^t . Dal lemma 6.2 sappiamo che $l(\gamma'') = \pi$ e che il bordo di H^t viene diviso in due archi geodetici entrambi di lunghezza compresa tra π e $\pi + 2t\pi$.

Siano γ_1 e γ_2 le geodetiche chiuse (composte solo di Q -lati) ottenute unendo γ' con i due tratti in cui viene diviso $E(H^t)$ da p e q . Supponiamo che γ_1 e γ_2 siano i bordi di due facce K_1^t e K_2^t . Si avrebbe necessariamente $Q^t = H^t \cup K_1^t \cup K_2^t$ e quindi $Q = H \cup K_1 \cup K_2$. Ma questo è assurdo, giacché in questo caso almeno una coppia di facce si incontrerebbe in uno spigolo di lunghezza $\geq \pi$.

Quindi almeno una tra γ_1 e γ_2 non è il bordo di una faccia di Q^t . Supponiamo che sia γ_1 . Allora, grazie rispettivamente ai lemmi 6.2 e 6.1, si ha:

$$l(\gamma) \geq l(\gamma_1) - 2t\pi \geq (1+t)l_0(Q) - 2t\pi > 2\pi .$$

\square

6.5 Ancora sui poliedri generalizzati

Nella sezione 4.2 abbiamo introdotto il concetto di poliedro iperbolico generalizzato con il modello proiettivo di \mathbb{H}^3 . Quello che vogliamo fare in questa sezione è evidenziare alcune proprietà di questi poliedri nel modello dell'iperboloide.

Ricordiamo innanzitutto che il modello dell'iperboloide è definito come la falda superiore dell'iperboloide di rotazione in \mathbb{E}_1^3 , mentre al modello proiettivo si passa attraverso la proiezione di centro l'origine sul piano $\{x_0 = 1\}$. Ricordiamo inoltre che l'immagine di questa proiezione è un disco aperto. I k -sottospazi di \mathbb{H}^3 col modello dell'iperboloide sono le intersezioni dei $(k+1)$ -sottospazi vettoriali di tipo tempo (vedi sezione 1.2.1) di \mathbb{E}_1^3 con l'iperboloide. Dato un k -sottospazio iperbolico nel modello dell'iperboloide, la sua immagine nel modello proiettivo è data dall'intersezione del corrispondente $(k+1)$ -sottospazio vettoriale con il piano $\{x_0 = 1\}$.

Consideriamo ora un poliedro iperbolico generalizzato P e sia v un suo vertice (finito, infinito o iperinfito). Siano f_1, \dots, f_i le facce afferenti a v ; queste facce sono contenute in altrettanti piani iperbolici, i quali a loro volta sono contenuti in iperpiani vettoriali Π_1, \dots, Π_i di \mathbb{E}_1^3 . Le facce f_1, \dots, f_i si incontrano nel vertice v se e solo se gli iperpiani Π_1, \dots, Π_i si intersecano in una retta vettoriale ρ . Se questa retta è un sottospazio di tipo tempo di \mathbb{E}_1^3 allora il vertice v è di tipo finito (e corrisponde all'intersezione della retta con \mathbb{H}^3), se è di tipo luce allora il vertice v è infinito, se è di tipo spazio allora v è un vertice iperinfito.

In quest'ultimo caso la retta ρ interseca la sfera di de Sitter \mathbb{S}_1^2 in una coppia di punti $\{\nu, -\nu\}$ i quali sono ortogonali a un unico piano iperbolico Π . A sua volta questo piano Π è ortogonale a tutte le facce f_1, \dots, f_i afferenti a v (fatto già citato nella sezione 4.2). Si ha anche il viceversa: se in un dato poliedro generalizzato P le facce f_1, \dots, f_i sono tutte adiacenti e ortogonali a una faccia f , si può eliminare la faccia f e prolungare le facce f_1, \dots, f_i ottenendo un poliedro generalizzato con una faccia in meno e un vertice iperinfito in più. Infatti se ν è il vettore della sfera di de Sitter ortogonale uscente alla faccia f , e se le facce f_1, \dots, f_i sono contenute negli iperpiani euclidei Π_1, \dots, Π_i , allora questi iperpiani si intersecano nella retta euclidea generata da ν .

6.6 Poliedri quasi-ideali

Come abbiamo visto nella sezione 6.3, dato uno spazio idealmente ammissibile Q , per t opportunamente limitato la sua t -espansione Q^t è uno spazio ammissibile. Grazie al Teorema 2.2 allora Q^t è isometrico alla trasformata polare di un poliedro compatto P^t (unico a meno di congruenza, che chiameremo poliedro t -quasi-ideale o semplicemente poliedro quasi-ideale. Lo

scopo di questa sezione è studiare la struttura combinatoria di P^t , dato che il Teorema 2.2 non la specifica.

Innanzitutto ricordiamo che c'è una corrispondenza tra facce f di P^t di area α e punti conici di Q^t di ampiezza $2\pi + \alpha$. In Q^t i punti conici sono di due tipi: quelli corrispondenti ai punti conici di Q (che abbiamo chiamato Q -vertici), e quelli corrispondenti al polo Nord di una qualche faccia H^t (che abbiamo chiamato N -vertici). Chiameremo le facce corrispondenti ai punti conici del primo tipo *facce ordinarie* e le facce corrispondenti ai punti conici del secondo tipo *facce speciali*.

Notiamo ora che sullo spazio Q^t ci sono due strutture combinatorie distinte aventi però gli stessi vertici, la triangolazione naturale di Q^t e la tassellazione indotta da $(P^t)^*$.

Teorema 6.4. *Con le notazioni precedenti, la tassellazione indotta da $(P^t)^*$ su Q^t coincide con la sua triangolazione naturale.*

Dimostrazione. Faremo vedere che i lati della triangolazione naturale di Q^t coincidono con i lati della tassellazione indotta da $(P^t)^*$. Questo implicherà la tesi.

Supponiamo che esista un lato l^* della tassellazione indotta su Q^t da $(P^t)^*$ che non coincida con uno dei lati della triangolazione naturale. Il lato l^* è un arco di geodetica in Q^t e grazie al lemma 6.2 deve avere lunghezza pari almeno a π . Ma questo è assurdo giacché la lunghezza di l^* corrisponde all'angolo diedrale esterno di P^t nello spigolo l .

D'altra parte ogni lato della triangolazione naturale di Q^t contiene almeno un Q -vertice f^* . Ad ogni Q -vertice f^* afferiscono $2k$ lati della triangolazione (per un qualche k), in modo tale che ogni coppia di lati consecutivi forma un angolo di ampiezza $\frac{\pi}{2}$. Eliminando uno di questi lati si avrebbe quindi un angolo di ampiezza π . Ma questo è assurdo perché gli angoli in f^* formati dai lati della tassellazione indotta da $(P^t)^*$ corrispondono agli angoli esterni della faccia f . \square

A questo punto, conoscendo anche la struttura combinatoria di $(P^t)^*$, possiamo descrivere in dettaglio questi poliedri quasi-ideali P^t .

Innanzitutto consideriamo le facce speciali. Una faccia speciale f^t corrisponde in Q^t ad un N -vertice, cioè al polo Nord di una qualche H^t , cioè la t -espansione di una 2-cella H in Q . Se l'equatore $E(H)$ è diviso in spigoli s_1, \dots, s_k di lunghezza rispettivamente $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ allora la faccia H^t è l'unione di k triangoli equatoriali di lato equatoriale lungo rispettivamente $(1+t)\alpha_1, \dots, (1+t)\alpha_k$. Inoltre un N -vertice ha angolo conico esattamente di $2(1+t)\pi$ ed è collegato a k Q -vertici con archi geodetici in Q^t di lunghezza $\frac{\pi}{2}$.

Allora la faccia speciale f^t ha esattamente k lati, ha angoli interni di ampiezza rispettivamente $\pi - (1+t)\alpha_1, \dots, \pi - (1+t)\alpha_k$ e ha area $2t\pi$. Quindi al tendere di t a 0 l'area di f^t tende a 0. Inoltre al tendere di t a 0 gli

angoli interni di f^t tendono rispettivamente agli angoli $\pi - \alpha_1, \dots, \pi - \alpha_k$, nessuno dei quali è pari a 0 o π . Questo ci consente di concludere che anche le lunghezze dei lati di f^t tendono a 0. Infine, le facce adiacenti a f sono tutte facce ordinarie e formano con f un angolo diedrale di $\frac{\pi}{2}$.

Sia ora f^t una faccia ordinaria di P^t . Questa corrisponde a un Q -vertice di Q^t . Un Q -vertice che sia posto all'intersezione di k celle del tipo H^t è collegato a k Q -vertici e a k N -vertici con $2k$ segmenti geodetici in modo tale che se un segmento collega il vertice dato ad un Q -vertice quello successivo lo collega ad un N -vertice e viceversa. Tra due segmenti successivi c'è sempre un angolo di $\frac{\pi}{2}$. Allora (vedi figura 6.1) la faccia ordinaria f^t ha $2k$ lati e angoli interni tutti retti. Inoltre la faccia f^t è adiacente a k facce ordinarie (attraverso lati che chiameremo *lati ordinari*) e k facce speciali (attraverso lati che chiameremo *lati speciali*) in modo alternato. Poiché i lati interni di f^t sono tutti retti, due lati ordinari consecutivi (cioè collegati da un lato speciale) sono iperparalleli. Eliminando i lati speciali e prolungando i lati ordinari otteniamo quindi un poligono iperbolico generalizzato f^t con k lati e k vertici iperinfiniti.

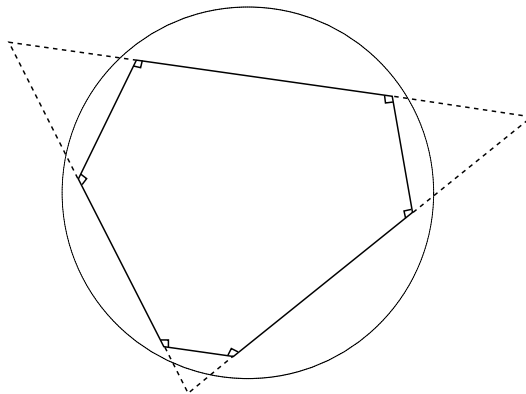


Figura 6.1: Un esempio di faccia ordinaria nel modello proiettivo.

Come abbiamo detto ogni faccia speciale di P^t è collegata a sole facce ordinarie ed è ortogonale a tutte queste. Grazie a quanto abbiamo detto nella sezione precedente possiamo quindi eliminare le facce speciali e prolungare le facce ordinarie, fino ad ottenere un poliedro iperbolico generalizzato \tilde{P}^t con soli vertici iperinfiniti. Inoltre le facce di \tilde{P}^t sono esattamente i poligoni iperbolici generalizzati \tilde{f}^t che abbiamo appena visto. Si vede facilmente che la struttura combinatoria dei poliedri P^t è duale rispetto alla struttura combinatoria della decomposizione in complesso di celle di Q : a ogni 2-cella di Q corrisponde un vertice iperinfinito di \tilde{P}^t e ad ogni punto conico di Q corrisponde una faccia di \tilde{P}^t .

Concludiamo questa sezione con un risultato molto importante, per la

cui dimostrazione, elementare ma tecnica, rimandiamo all'articolo originale di Rivin [17].

Teorema 6.5. *Con le notazioni precedenti esistono $\epsilon > 0$ e $R > 0$ tali che per ogni $0 < t < \epsilon$ esiste una palla chiusa B_R di raggio R che interseca tutte le facce ordinarie di P^t e tutti i lati ordinari di queste facce.*

Osservazione 6.3. Si noti che il teorema precedente si può riformulare in questo modo: esistono $\epsilon > 0$ e $R > 0$ tali che per ogni $0 < t < \epsilon$ esiste una palla chiusa B_R di raggio R che interseca tutte le facce e gli spigoli di \tilde{P}^t . Inoltre poiché abbiamo preso i poliedri P^t a meno di congruenza possiamo considerare la palla B_R come avente un centro fissato.

6.7 Note sul modello dell'iperboloide

Ricordiamo che nel primo capitolo abbiamo definito lo spazio \mathbb{E}_1^3 come lo spazio \mathbb{R}^4 con il prodotto scalare standard di segnatura $(n, 1)$, denotato con $\langle \cdot, \cdot \rangle$. In \mathbb{E}_1^3 abbiamo definito lo spazio iperbolico come la falda superiore dell'iperboloide di rotazione a due falde e la sfera di de Sitter come l'iperboloide di rotazione a una falda.

Riassumeremo nel prossimo teorema alcuni risultati delle note di Thurston (vedi [22]) che elencano alcune proprietà del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ricordiamo che un vettore v della sfera di de Sitter è ortogonale a un unico piano iperbolico, che denoteremo con v^\perp . Inoltre denoteremo con d_H la distanza iperbolica, intesa sia come distanza tra due punti che come distanza tra due sottoinsiemi.

Teorema 6.6. *Con le notazioni precedenti si ha:*

1. se v_1 e v_2 sono due punti dello spazio iperbolico vale l'uguaglianza $\langle v_1, v_2 \rangle = -\cosh d_H(v_1, v_2)$;
2. se $v_1 \in \mathbb{H}^3$ e $v_2 \in \mathbb{S}_1^2$ allora vale l'uguaglianza $|\langle v_1, v_2 \rangle| = \sinh d_H(v_1, v_2^\perp)$;
3. se v_1 e v_2 sono due punti della sfera di de Sitter allora i piani v_1^\perp e v_2^\perp si intersecano in una retta (formando un angolo diedrale α) se e solo se $|\langle v_1, v_2 \rangle| < 1$ e si ha $|\langle v_1, v_2 \rangle| = |\cos \alpha|$;
4. se v_1 e v_2 sono due punti della sfera di de Sitter allora i piani v_1^\perp e v_2^\perp sono asintoticamente paralleli se e solo se $|\langle v_1, v_2 \rangle| = 1$;
5. se v_1 e v_2 sono due punti della sfera di de Sitter allora i piani v_1^\perp e v_2^\perp sono iperparalleli se e solo se $|\langle v_1, v_2 \rangle| > 1$ e si ha $|\langle v_1, v_2 \rangle| = \cosh d_H(v_1^\perp, v_2^\perp)$.

Lemma 6.3. *Dato $v \in \mathbb{H}^3$ e $R > 0$, l'insieme $P_R(v) \subseteq \mathbb{S}_1^2$ dei vettori della sfera di de Sitter ortogonali ai piani iperbolici che intersecano la palla chiusa di centro v e raggio R è compatto.*

Dimostrazione. Possiamo supporre senza perdita di generalità che $v = (1, 0, 0, 0)$ (a meno di applicare una opportuna isometria di \mathbb{E}_1^3). Notiamo ora che, dato $u \in \mathbb{S}_1^2$, il piano iperbolico u^\perp interseca la palla chiusa di centro v e raggio R se e solo $d_H(u^\perp, v) \leq R$. Allora si ha, grazie al teorema precedente:

$$P_R(v) = \{u \in \mathbb{S}_1^2 \mid |\langle u, v \rangle| = \sinh d_H(u^\perp, v) \leq \sinh R\} .$$

Grazie all'ipotesi $v = (1, 0, 0, 0)$ si ha:

$$P_R(v) = \{u = (u_0, u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{S}_1^2 \mid |u_0| \leq \sinh R\}$$

e chiaramente l'ultimo insieme (vedi figura 6.2) è compatto. \square

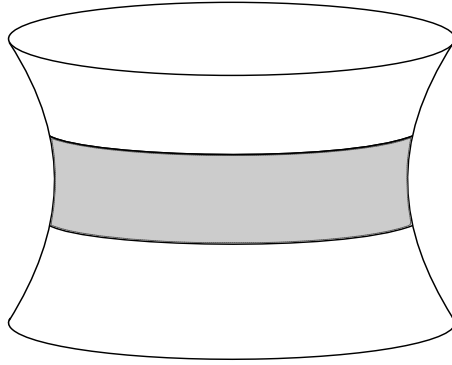


Figura 6.2: $P_R(v)$ è un compatto della sfera di de Sitter.

6.8 Dimostrazione del Teorema 6.2

Dato uno spazio idealmente ammissibile Q nelle sezioni precedenti abbiamo studiato la sua t -espansione Q^t e visto che è uno spazio ammissibile, quindi isometrico alla trasformata polare di opportuni poliedri P^t . Nella sezione 6.6 abbiamo studiato la struttura combinatoria e la geometria dei P^t e abbiamo visto che alcune facce, che abbiamo chiamato facce ordinarie, si possono prolungare fino a formare dei poliedri generalizzati \tilde{P}^t con soli vertici all'infinito e struttura combinatoria duale rispetto alla struttura combinatoria della decomposizione in complesso di celle di Q .

Siano ora f_1^t, \dots, f_k^t le facce di \tilde{P}^t e per $i = 1, \dots, k$ sia ν_i^t il vettore della sfera di de Sitter ortogonale uscente a f_i^t . Allora, grazie al Teorema 6.5 e al lemma 6.3 esiste una successione $\{t_j\}$ di numeri reali con $\lim t_j = 0$ tale che tutte le successioni $\{\nu_i^{t_j}\}$ abbiano un limite ν_i nella sfera di de Sitter.

Sia ora P il poliedro iperbolico generalizzato ottenuto come bordo del corpo convesso:

$$\bigcap_{i=1}^k \{v \in \mathbb{H}^3 \mid \langle v, \nu_i \rangle \leq 0\} .$$

Il resto di questa sezione sarà dedicato a dimostrare che Q è isometrico alla trasformata polare generalizzata \bar{P}^* di P .

Lemma 6.4. *Il poliedro generalizzato P ha la stessa struttura combinatoria di \tilde{P}^t .*

Dimostrazione. Immediata conseguenza dal fatto che la successione $\{\nu_i^{t_j}\}$ tende al punto ν_i nella sfera di de Sitter. \square

Grazie al lemma precedente c'è una corrispondenza tra le facce f_1, \dots, f_k di P (ortogonali ai vettori ν_1, \dots, ν_n) e i punti conici f_1^*, \dots, f_k^* di Q (così come c'è una corrispondenza tra vertici di P e 2-celle di Q). Denoteremo inoltre con $d_Q(f_i^*, f_j^*)$ la lunghezza del segmento dell'1-scheletro che congiunge i punti conici adiacenti f_i^* e f_j^* .

Lemma 6.5. *L'angolo diedrale esterno tra due facce adiacenti f_i e f_j di P è pari a $d_Q(f_i^*, f_j^*)$.*

Dimostrazione. Per come abbiamo costruito i poliedri \tilde{P}^t l'angolo diedrale esterno tra i piani $(\nu_i^t)^\perp$ e $(\nu_j^t)^\perp$ è pari a $(1+t)d_Q(f_i^*, f_j^*)$. Grazie al terzo punto del Teorema 6.6 passando al limite per t che tende a 0 si ha la tesi. \square

Dimostrazione del Teorema 6.2. Abbiamo visto fin qui che il poliedro generalizzato P ha la stessa struttura combinatoria di \tilde{P}^t (duale a quella indotta su Q dalla decomposizione in complesso di celle) e non ha vertici finiti. Inoltre l'angolo diedrale tra due facce adiacenti f_i e f_j di P è pari a $d_Q(f_i^*, f_j^*)$.

Nella sezione 4.2 abbiamo definito il link di un vertice v di un poliedro generalizzato come un opportuno poligono sferico, euclideo o iperbolico (rispettivamente nel caso in cui il vertice v sia finito, infinito o iperinfito) e abbiamo visto che gli angoli interni di $\text{link}(v)$ corrispondono agli angoli diedrali degli spigoli afferenti a v . Possiamo quindi "misurare" la natura del vertice v sommando gli angoli diedrali esterni degli spigoli che vi afferiscono: nel caso in cui v sia finito la somma è minore di 2π , nel caso infinito è pari a 2π , nel caso iperinfito maggiore.

Sia ora v un vertice di P . Come detto sopra, il vertice v corrisponde a una 2-cella v^* di Q e grazie ai lemmi precedenti la somma degli angoli diedrali esterni degli spigoli afferenti a v è pari alla somma delle lunghezze degli spigoli di v^* , quindi 2π . Quindi P è un poliedro ideale e questo conclude la dimostrazione. \square

6.9 Esistenza di poliedri ideali

Vogliamo concludere questo capitolo con una riformulazione in senso combinatorio del Teorema 6.2 (che è in realtà la formulazione originaria di Rivin), chiaramente equivalente grazie alla trattazione fatta nella prima sezione di questo capitolo.

Teorema 6.7. *Sia dato un poliedro combinatorio P^* e sia assegnato ad ogni spigolo s^* di P^* un numero reale (peso) $w(s^*)$. Allora P^* è il duale combinatorio di un poliedro iperbolico ideale P con angoli diedrali esterni in s pari a $W(s^*)$ (unico a meno di congruenza) se e solo se:*

1. per ogni spigolo s^* si ha $0 < w(s^*) < \pi$;
2. se gli spigoli s_1^*, \dots, s_k^* formano una curva chiusa semplice che sia il bordo di una faccia di P^* allora $w(s_1^*) + \dots + w(s_k^*) = 2\pi$;
3. se gli spigoli s_1^*, \dots, s_k^* formano una curva chiusa semplice che non sia il bordo di una faccia di P^* allora $w(s_1^*) + \dots + w(s_k^*) > 2\pi$.

z

Evidentemente con questa riformulazione il problema dell'esistenza di un poliedro ideale con una data struttura combinatoria e assegnati angoli diedrali si può affrontare dal punto di vista algoritmico. Si può notare subito che, dato un poliedro combinatorio P^* con assegnati pesi agli spigoli, esiste un algoritmo polinomiale nel numero di facce N di P^* (quindi nel numero di vertici di P) che verifichi le condizioni del teorema precedente.

Inoltre in [8] è brevemente esposto un algoritmo (basato su una variante del *metodo degli ellissoidi*) per decidere se un poliedro combinatorio P^* può essere il duale di un poliedro iperbolico complesso, cioè se esistono pesi $w(e^*)$ da assegnare agli spigoli di P^* che soddisfino le condizioni del Teorema precedente. Questo algoritmo ha complessità polinomiale nel numero N di facce di P^* . Infine in [6] è sviluppato un algoritmo *lineare* nel caso in cui P^* abbia facce tutte triangolari.

Capitolo 7

Conclusioni

In questo capitolo finale delinearemo dapprima uno schema di dimostrazione per il Teorema 3.1 (basato sostanzialmente sulle tecniche sviluppate nel capitolo precedente). Esporremo quindi brevemente una applicazione del Teorema 6.2 ai poliedri euclidei inscritti nella sfera. Infine, accenneremo a una interessante questione aperta: l'estensione della caratterizzazione di Rivin agli n -poliedri di dimensione più alta.

7.1 Teorema di Rivin: caso dei poliedri di volume finito

Iniziamo con una definizione:

Definizione 7.1. Una superficie con singolarità coniche M con un numero finito di punti conici è detta *spazio ammissibile generalizzato* se:

1. la superficie M è omeomorfa a \mathbb{S}^2 ;
2. fuori dai punti conici M ha curvatura sezionale costante 1;
3. gli angoli conici hanno tutti ampiezza strettamente maggiore di 2π ;
4. ogni geodetica chiusa ha lunghezza strettamente maggiore o uguale a 2π ;
5. l'insieme $G_{2\pi}$ delle geodetiche di lunghezza 2π è finito e se $\gamma \in G_{2\pi}$ allora esattamente una delle componenti di $M \setminus \gamma$ è isometrica a una semisfera aperta; denoteremo la semisfera corrispondente a γ con Γ .

Data la trattazione fatta nel Capitolo 3, è chiaro che la parte del Teorema 3.1 che rimane da dimostrare è che ogni spazio ammissibile generalizzato sia isometrico alla trasformata polare generalizzata di un poliedro di volume finito. I seguenti lemmi ci chiariscono meglio come sono fatti questi spazi. Consideriamo M un fissato spazio generalizzato.

Lemma 7.1. *Con le notazioni precedenti, se γ_1 e γ_2 sono due geodetiche distinte appartenenti a $G_{2\pi}$, allora $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.*

Dimostrazione. Se fosse $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$, allora ci sarebbero infinite geodetiche chiuse di lunghezza 2π . \square

Lemma 7.2. *Con le notazioni precedenti, ogni geodetica $\gamma \in G_{2\pi}$ passa per punti conici c_1, \dots, c_k che la dividono in tratti di lunghezza strettamente minore di π (quindi $k \geq 3$).*

Dimostrazione. Se così non fosse ci sarebbe in M un bigono sferico adiacente a Γ , e questo, come nel lemma precedente, determinerebbe la presenza di infinite geodetiche chiuse di lunghezza 2π . \square

Lemma 7.3. *Con le notazioni precedenti, se γ_1 e γ_2 sono due geodetiche distinte appartenenti a $G_{2\pi}$, allora $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$ oppure le due geodetiche si incontrano in un segmento di lunghezza minore di π che non contiene punti conici e che ha per vertici due punti conici.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \emptyset$. Supponiamo che $\gamma_1 \cap \gamma_2$ sia un segmento. In questo caso la sua lunghezza dev'essere strettamente minore di π (altrimenti come sopra ci sarebbero infinite geodetiche lunghe 2π) ed è banale vedere che non può contenere punti conici e che deve avere per vertici due punti conici.

Se invece $\gamma_1 \cap \gamma_2$ fosse sconnesso, allora si ricadrebbe o nel caso in cui esistono infinite geodetiche lunghe 2π , oppure esisterebbe una geodetica di lunghezza $\leq \pi$ che non è il bordo di una semisfera. \square

Teorema 7.1. *Uno spazio ammissibile generalizzato M è isometrico alla trasformata polare generalizzata di un poliedro di volume finito P .*

Dimostrazione. È sempre possibile tassellare lo spazio M con le semisfere chiuse Γ (corrispondenti alle geodetiche $\gamma \in G_{2\pi}$) e con triangoli sferici, in modo tale che l'insieme dei vertici di questa tassellazione contenga i punti conici.

Definiamo la t -espansione dello spazio M in modo analogo a quanto visto nel capitolo precedente. Per ogni semisfera Γ prendiamo la sua t -espansione come definita nel capitolo precedente. Per ogni triangolo T della triangolazione, la sua t -espansione è definita come un triangolo sferico T^t avente lati riscalati di un fattore $1+t$ (si vede facilmente che per $t > 0$ gli angoli interni di T^t sono strettamente maggiori degli angoli interni di T). Costruiamo M^t incollando la t -espansione delle facce della tassellazione di M , nello stesso modo in cui queste sono incollate in M .

A questo punto il resto della dimostrazione è del tutto analogo a quanto visto per il caso ideale: gli spazi M^t sono ammissibili quindi isometrici alle trasformate polari di poliedri compatti P^t e si ottiene il poliedro di volume

finito P della tesi attraverso il limite di una successione di poliedri P^{t_i} con $t_i \rightarrow 0$. \square

7.2 Poliedri inscritti nella sfera

Nel 1832 Jakob Steiner pose, al termine del suo libro [19] una serie di problemi aperti, uno dei quali era caratterizzare la struttura combinatoria dei poliedri euclidei che è possibile inscrivere nella sfera unitaria. Nel modello proiettivo dello spazio iperbolico, i poliedri euclidei inscritti nella sfera unitaria corrispondono precisamente ai poliedri iperbolici ideali, quindi il Teorema 6.2 è a tutti gli effetti la soluzione di questo problema.

Nel 1928 Ernst Steinitz (vedi [20]) scoprì una famiglia di poliedri che non è possibile inscrivere nella sfera unitaria. Attraverso il punto di vista dello spazio iperbolico è possibile dare una dimostrazione semplice di come questi poliedri non siano inscrivibili.

Consideriamo un poligono convesso di vertici v_1, \dots, v_k . Adesso aggiungiamo un vertice v_0 all'interno del poligono e triangoliamo. Questo processo è chiamato *stellazione*. Dato un poliedro combinatorio P , la stellazione di P è un poliedro combinatorio ottenuto prendendo la stellazione di tutte le sue facce.

Teorema 7.2. *Sia P un poliedro combinatorio tale che il numero V dei suoi vertici sia non maggiore del numero F delle sue facce. Allora la sua stellazione $s(P)$ non è combinatoriamente equivalente a nessun poliedro inscritto nella sfera.*

Dimostrazione. Sia V_P l'insieme dei vertici di $s(P)$ già contenuti in P e sia V_S l'insieme dei vertici di $s(P)$ creati dal processo di stellazione. Notiamo da subito che la cardinalità di V_P è V e la cardinalità di V_S è F .

Supponiamo che sia possibile inscrivere $s(P)$ nella sfera unitaria. Allora $s(P)$ è combinatoriamente equivalente a un poliedro iperbolico ideale. Per ogni spigolo e di $s(P)$ sia allora $w(e)$ l'angolo diedrale esterno in e e per ogni vertice v sia $w(v)$ la somma degli angoli diedrali esterni degli spigoli afferenti a v . Per quanto abbiamo visto $w(v) = 2\pi$ per ogni vertice.

Si vede immediatamente che:

$$\sum_{v \in V_S} w(v) < \sum_{v \in V_P} w(v)$$

giacché ogni spigolo contato nella prima somma è contato anche nella seconda somma ma non viceversa. Allora si ha $2\pi F < 2\pi V$. Ma questo è assurdo, dato che avevamo supposto $V \leq F$. \square

Osservazione 7.1. Grazie alla formula di Eulero, i poliedri con facce tutte triangolari soddisfano le ipotesi del teorema precedente.

7.3 Estensione del Teorema di Rivin alle dimensioni più alte

Come detto nell'introduzione, nelle sue note [22] Thurston costruisce una famiglia di varietà iperboliche incollando tra loro le facce di poliedri ideali. Uno dei motivi per cui i risultati esposti lungo la nostra trattazione sono importanti è appunto la loro utilità nella costruzioni di 3-varietà iperboliche con metodi analoghi a quelli di Thurston. D'altra parte il *Teorema di geometrizzazione* di recente dimostrazione fornisce un modo implicito di garantire l'esistenza di una metrica iperbolica su una data varietà differenziabile.

In dimensione più alta non esiste una appropriata versione del Teorema di geometrizzazione. D'altra parte in [14] e [10] sono forniti esempi di costruzione di 4-varietà iperboliche a partire da un 4-poliedro (si veda la sezione 2.2) ideale (cioè avente tutti i vertici su $\partial\mathbb{H}^4$) detto 24-celle, che ha proprietà peculiari della dimensione 4. Sarebbe quindi di sicura utilità una caratterizzazione degli n -poliedri iperboliche con $n \geq 4$.

Esponiamo di seguito brevemente alcune idee per la costruzione di una opportuna forma della trasformata polare nel caso dei 4-poliedri.

In via preliminare dobbiamo però esporre la forma della trasformata polare di un poliedro euclideo compatto, caso che avevamo in precedenza trascurato. Sia P un poliedro euclideo compatto. Come nei casi sferico e iperbolico, il link di ogni vertice di P è un poligono sferico (vedi sezione 2.2) e la trasformata polare è l'unione delle polari sferiche dei link dei vertici. In generale la superficie che risulta è sempre isometrica alla sfera, quindi inutile per una caratterizzazione dei poliedri euclidei.

Sia ora P un 4-poliedro iperbolico ideale. Il link di un vertice ideale v è l'intersezione di P con una piccola sfera centrata in v , quindi risulta essere un poliedro euclideo compatto. Come detto la sua trasformata polare è isometrica a una sfera, costituita dall'unione di poligoni sferici corrispondenti agli spigoli afferenti a v . La trasformata polare di P (che può essere immersa in modo canonico nella sfera di de Sitter \mathbb{S}_1^3) è quindi lo spazio costruito incollando tra loro le trasformate polari dei link dei vertici lungo i poligoni sferici corrispondenti agli spigoli.

La trasformata polare così ottenuta può essere "completata" a una 3-varietà con singolarità coniche riempiendo i buchi in questo modo: si incolla ad ogni sfera corrispondente alla trasformata polare del link di un vertice una 3-palla lungo il proprio bordo tramite un'isometria. Questo è l'analogo della trasformata polare generalizzata per i poliedri iperboliche ideali, e potrebbe costituire l'oggetto di uno studio analogo a quanto svolto lungo questa trattazione.

Bibliografia

- [1] R. Benedetti, C. Petronio, *Lectures on Hyperbolic Space*, Springer, (1992).
- [2] M. Berger, *Geometry II*, Springer, (1987).
- [3] W. M. Boothby, *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, Academic Press, (1975).
- [4] B. H. Bowditch, *Notes on locally CAT(1) spaces*, Preprint, (1992).
- [5] L. E. J. Brouwer, *Beweis der Invarianz des n -dimensionalen Gebiets*, Mathematische Annalen, **71**, 305–315, (1912).
- [6] M. B. Dillencourt, W. D. Smith, *A linear-time algorithm for testing the inscribability of trivalent polyhedra*, International Journal of Computational Geometry and Applications, **5**, 21–36, (1995).
- [7] M. Gromov, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, Springer, (2001).
- [8] C. D. Hodgson, I. Rivin, W. D. Smith, *A characterization of convex hyperbolic polyhedra and of convex polyhedra inscribed in the sphere*, Bulletin of the American Mathematical Society, **27**, 246–251, (1992).
- [9] W. Klingenberg, *Riemannian Geometry*, de Gruyter, (1995).
- [10] A. Kolpakov, B. Martelli, *Hyperbolic four-manifold with one cusp*, Geometric and Functional Analysis, **23**, 1903–1933, (2013).
- [11] J. L. Koszul, *Sur certains groupes de transformations de Lie*, Géométrie différentielle. Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, **52**, 137–141, (1952).
- [12] B. Martelli, *Hyperbolic geometry, surfaces, and 3-manifolds*, Dispense non pubblicata, (2013).
- [13] B. O’Neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, (1983).

- [14] G.J. Ratcliffe, S.T. Tschantz, *The volume spectrum of hyperbolic 4-manifolds*, *Experimental Math.*, **9**, 101–125, (2000).
- [15] I. Rivin, C. D. Hodgson, *A characterization of compact convex polyhedra in hyperbolic 3-space*, *Inventiones Mathematicae*, **111**, 77–111, (1993).
- [16] I. Rivin, *On topology of convex ideal polyhedra in hyperbolic 3-space*, *Topology*, **32**, 87–92, (1993).
- [17] I. Rivin, *A characterization of ideal polyhedra in hyperbolic 3-space*, *Annals of Mathematics, Second Series*, **143**, 51–70, (1996).
- [18] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, (1976).
- [19] J. Steiner, *Systematische Entwicklung Der Abhängigkeit Geometrischer Gestalten Von Einander*, Reimer, (1832).
- [20] E. Steinitz, *Über isoperimetrische Probleme bei konvexen Polyedern*, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **159**, 133–143, (1928).
- [21] J. J. Stoker, *Geometrical problems concerning polyhedra in the large*, *Communications on pure and applied mathematics*, **21**, 119–168, (1968).
- [22] W. P. Thurston, *Geometry and Topology of 3-manifolds*, *Dispense non pubblicate*, (1982).