



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

Présentée et soutenue le 24/06/2016 par :

Stéphane MOURAREAU

Gaussian geometry and tools for Compressed Sensing

JURY

JEAN-MARC AZAÏS
FRANCK BARTHE
YOHANN DE CASTRO
GUILLAUME LECUÉ

JOSÉ RAFAEL LEÓN

Université de Toulouse
Université de Toulouse
Université Paris-Sud
Centre de Recherche en
Économie et Statistiques
Universidad Central de
Venezuela

Directeur de Thèse
Examineur
Examineur
Rapporteur
Rapporteur

École doctorale et spécialité :

MITT : Domaine Mathématiques : Mathématiques appliquées

Unité de Recherche :

Institut de Mathématiques de Toulouse (UMR 5219)

Directeur de Thèse :

Jean-Marc AZAÏS

Rapporteurs :

Guillaume LECUÉ et José Rafael LEÓN

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Régression parcimonieuse	4
1.2	Modèle linéaire et parcimonie	7
1.3	Tests dans le cadre du lasso	10
1.4	Le problème de pénalisation de manière générale	17
1.5	Franchissement et formule de Kac-Rice	21
I	Gaussian matrices and sparse signal recovery	29
2	A Rice method proof of the Null Space Property over the Grassmannian	31
2.1	Introduction	31
2.2	Rice method bound for NSP with dilatation $C \geq 1$	37
2.3	Proof of Theorem 2.2.1	38
2.4	Influence of smaller spheres	45
2.5	Appendix	46
3	A Rice method proof of the Restricted Isometry Property for Gaussian matrices	49
3.1	Introduction	49
3.2	Bounds for smallest and largest eigenvalue	51
3.3	Joint density of ordered eigenvalues	53
II	Penalized least squares regression and global null testing	55
4	Power of the Spacing test for Least-Angle Regression	57
4.1	Introduction	57
4.2	Power of the Spacing test for LARS	62
4.3	Studentization of the Spacing test for LARS	68
4.4	The two dimensional case	70
4.5	Numerical experiments on the power	72
5	Spacing test on continuous processes and super-resolution	77
5.1	Introduction	77
5.2	Spacing test for Super-Resolution	79
5.3	Extension to continuous Gaussian processes ?	80
5.4	Appendix	82

III	Crossings and maxima for smooth Gaussian process	89
6	How sharp are classical approximations for statistical applications?	91
6.1	Introduction	91
6.2	Record method for differentiable processes and fields	94
6.3	Numerical tools	95
6.4	Random fields	98
6.5	Applications in statistics	98
7	Remarques sur le comportement asymptotique des franchissements d'un processus Gaussien	105
7.1	Introduction	105
7.2	Résultats préliminaires	106
7.3	Processus η -dépendant	108
7.4	Cas général	112
7.5	Annexes	118

Liste des figures

1	Trajectoires des coefficients évalués par le lasso	9
2	Comparaison des estimateurs Ridge et Lasso, extrait de [HTW15]	9
3	Différence entre le <i>covariance test</i> et le <i>spacing test</i> , cas orthogonal, extrait de [HTW15]	12
4	Illustration du <i>spacing test</i> et de la région conditionnelle $\{Ay \leq b\}$, extrait de [HTW15]	14
5	Intervalles de confiance pour les coefficients issus du lasso, extrait de [LSST13]	17
6	Transition de phase donnée par la méthode de Rice pour différents C	33
7	Comparaison avec la transition de phase de Donoho et Tanner	34
8	Comparaison avec la transition de phase de Donoho et Tanner pour $\delta > 0.39$	34
9	Transition de phase de Donoho et Tanner versus fonction de Lambert	37
10	Illustration numérique de la borne donnée par la méthode de Rice pour différents C	38
11	Construction du rectangle à partir du zonotope	43
12	Illustration de la transition donnée par les sphères de plus petite dimension	46
13	Comparison between S and T for random μ	60
14	Variation of the Gaussian measure on the square	67
15	Rejection zone for S in dimension two	70
16	Level sets of $\beta \mapsto k_{\alpha,\rho}(\beta)$ in dimension two	73
17	Comparison of level sets for S and P	74
18	Comparison between S and P for sparse μ	74
19	Comparison between S and P when $s = n = p$	75
20	Comparison between S and P for very sparse μ	75
21	Rice bound for the median	100
22	Poisson approximation for the median	100
23	Poisson approximation for $\alpha = 0.4, 0.6$ and 0.8	100
24	Pickands method for $\alpha = 0.05$	101
26	Rice bound for $\alpha = 0.05$	102
27	Rice bound for $\alpha = 0.01$	102
28	Euler characterstic in dimension two (1)	102
29	Euler characteristic in dimension two (2)	103
30	Euler characterstic on the diagonal for $\alpha = 0.2, 0.5$ and 0.8	103

Introduction générale

Chapitre 1

Introduction

Ce manuscrit est majoritairement dédié à l'utilisation d'outils issus de la théorie des processus Gaussiens dans le cadre du Compress Sensing (CS) ou Acquisition Comprimée (AC) en français. Plus précisément, considérons le modèle linéaire vectoriel usuel

$$y = X\beta^* + \epsilon \quad (1.1)$$

où

- $y \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur contenant n observations d'une variable réponse Y issues de l'observation d'un système physique par l'utilisateur,
- $X \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{R})$ est une matrice, souvent appelée matrice de design, contenant des observations de variables (X_1, \dots, X_p) dites explicatives,
- $\beta^* \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur d'intérêt du problème statistique (1.1) à savoir celui permettant la meilleure approximation linéaire de Y par (X_1, \dots, X_p) ,
- $\epsilon \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur de bruit lié à l'incertitude portant sur les n observations de Y . Dans la suite, nous nous placerons dans le cadre d'un bruit Gaussien i.e.

$$\epsilon \sim \mathcal{N}_n(0, \Sigma) \quad (1.2)$$

où $\mathcal{N}_n(0, \Sigma)$ désigne la distribution Gaussienne centrée de dimension n et de matrice de covariance Σ .

Dans le cas simple d'un système sur-déterminé, donné par $n \geq p$, l'estimateur le plus courant et vérifiant certaines conditions d'optimalité est celui des moindres carrés

$$\beta^{mc} \in \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \|y - X\beta\|_2^2 \quad (1.3)$$

où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme ℓ_2 dans \mathbb{R}^p . Dans le cas où la matrice de design X est injective, on a une formule explicite pour cet estimateur, donnée par

$$\beta^{mc} = (X^T X)^{-1} X^T y = Ry \sim \mathcal{N}_p(\beta^*, R\Sigma R^T), \quad (1.4)$$

ainsi qu'une batterie très complète d'outils de tests développés dans les années 1950 (intervalles de confiance pour les paramètres β_i , tests de nullité sur des combinaisons linéaires, etc). Malheureusement, lors de ces deux dernières décennies, l'évolution rapide des moyens technologiques et plus spécifiquement du stockage et du traitement de données a mis en avant de nouveaux défis statistiques. Les problématiques modernes du modèle linéaire traitent un nombre grandissant d'informations avec un nombre de variables explicatives souvent très supérieur au nombre d'observations de la variable réponse. Ainsi, dans de nombreux domaines, la problématique de

la grande dimension est devenue récurrente. Citons par exemple la médecine (décryptage du génome, imagerie médicale,...), l'astrophysique (détection de régions d'intérêt, observations de l'univers...), le monde de l'assurance et de la finance (évaluation de risque,...) ou encore plus proche de nous le marketing (initialement Netflix, Amazon, Alphabet,...) et les réseaux sociaux (analyse de liens entre individus via des graphes,...). Tout cela a amené la communauté scientifique à développer de nouveaux outils statistiques répondant aux problèmes de systèmes très fortement sous-déterminés, à savoir lorsque $n \ll p$.

1.1 Régression parcimonieuse

Commençons par considérer le système sans bruit

$$y = X\beta^* \tag{1.5}$$

où $y \in \mathbb{R}^n$, $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ et $\beta^* \in \mathbb{R}^p$ avec $n \ll p$. Il est évident que la reconstruction exacte du signal β est impossible. Pour pallier à cela, nous nous intéressons aux vecteurs dits parcimonieux de \mathbb{R}^p i.e. contenant un grand nombre de coefficients nuls. Cette motivation trouve lieu principalement dans la sélection de modèle. En effet, la manipulation de petits modèles permet d'éviter les phénomènes de sur apprentissage et offre surtout une meilleure stabilité numérique ainsi qu'une qualité d'interprétation du phénomène bien plus importante. Une autre motivation est à trouver dans l'acquisition et la compression d'images. Dans ce cas là, l'objectif est de représenter une image par un nombre minimal de pixels tout en gardant la possibilité de la reconstruire assez fidèlement. La représentation mathématique la plus communément associée à ce phénomène est la représentation en base d'ondelettes.

1.1.1 Premiers estimateurs

De manière évidente, l'estimateur ayant la solution la plus parcimonieuse est l'estimateur combinatoire donné par

$$\beta^c \in \arg \min_{X\beta=y} \|\beta\|_0 \tag{1.6}$$

où $\|\beta\|_0 = \#\{\beta_i \neq 0, 1 \leq i \leq p\}$ est la norme de comptage ou norme ℓ_0 dans \mathbb{R}^p et où $\#$ désigne le cardinal d'un ensemble. Cet estimateur vise à pénaliser par le nombre de coefficients présents dans le vecteur réponse β . Cependant, cette approche est numériquement très gourmande en calculs à tel point qu'elle s'avère inutilisable pour des valeurs de p dépassant quelques dizaines. En effet, il s'agit d'un problème NP-complet (voir [Dav94] ou [Nat95]). Pour contrer ce problème, Chen, Donoho et Saunders [CDS98] ont introduit la relaxation convexe du problème précédent. Pour cela, ils définissent le *basis pursuit* sous la forme

$$\beta^{bp} \in \arg \min_{X\beta=y} \|\beta\|_1 \tag{1.7}$$

où $\|\beta\|_1 = \sum_{i=1}^p |\beta_i|$ est la norme ℓ_1 dans \mathbb{R}^p . L'avantage de ce dernier est qu'il est équivalent à un programme linéaire sur un ensemble convexe qui se résout très efficacement à l'aide, par exemple, de l'algorithme du simplexe [Mur83]. Dans ce manuscrit, nous n'entrons pas plus dans les détails concernant les aspects algorithmiques mais préférons nous focaliser sur la reconstruction théorique du signal.

1.1.2 Conditions pour la reconstruction du signal

L'objectif de ce paragraphe est de balayer, assez succinctement, les résultats principaux sur la reconstruction du signal dans le cas du modèle (1.5). Dans leur article [CDD09], Cohen, Dahmen

et DeVore donnent une condition nécessaire et suffisante à la reconstruction du signal dans le cadre parcimonieux. Elle s'énonce de la manière suivante,

Null Space Property (NSP)

Definition 1. Soit $H_{n,p}$ un sous-espace vectoriel de dimension n de \mathbb{R}^p ($n \leq p$), on dit que $H_{n,p}$ satisfait la Null Space Property d'ordre s et de dilatation $c_0 \geq 1$, notée $NSP(s, c_0)$, si et seulement si pour tout $h \in H_{n,p}$ et pour tout sous-ensemble $\mathcal{S} \subset \{1, \dots, p\}$ contenant s indices, on a

$$c_0 \|h_{\mathcal{S}}\|_1 < \|h_{\mathcal{S}^c}\|_1.$$

Plus généralement, on dit qu'une matrice $X \in \mathcal{M}_{n \times p}$ satisfait $NSP(s, c_0)$ si son noyau $\text{Ker}(X)$ satisfait $NSP(s, c_0)$. Cette condition est vérifiée par les sous-espaces de \mathbb{R}^p dont les vecteurs ne concentrent pas leur masse sur un trop petit nombre d'indices. Elle apparait de manière assez naturelle dans le cadre de la reconstruction parcimonieuse, la matrice X devant distinguer les vecteurs parcimonieux, son noyau ne peut pas être trop concentré sur un sous-espace vectoriel particulier de \mathbb{R}^p . La proposition suivante formalise cette intuition pour le basis pursuit,

Proposition 1.1.1. Considérons le problème 1.5 et s tel que $s \leq p$, alors les deux assertions suivantes sont équivalentes

1. La matrice de design X satisfait la propriété NSP d'ordre s et de dilatation $c_0 = 1$,
2. Pour tout vecteur β^* tel que $\|\beta^*\|_0 = s$, le basis pursuit défini par (1.7) a pour unique solution β^* .

En particulier, on notera que les performances du basis pursuit sont uniquement basées sur le noyau de la matrice de design X . La Null Space Property, bien que nécessaire et suffisante, n'est pas toujours très exploitable, même dans un cadre théorique. Pour pallier à cela, plusieurs conditions suffisantes pour la reconstruction parcimonieuse sont apparues dans la très riche littérature du Compress Sensing (CS). La plus importante est sans doute la propriété d'isométrie restreinte introduite par Candès, Romberg et Tao [CRT06b].

Propriété d'isométrie restreinte (RIP)

Definition 2. Une matrice $X \in \mathcal{M}_{n \times p}$ satisfait la propriété d'isométrie restreinte (RIP) d'ordre s et de constante δ_s où $\delta_s \in]0, 1[$ si et seulement si

$$\forall \gamma \in \mathcal{C}(s, p), \quad (1 - \delta_s) \|\gamma\|_2^2 \leq \|X\gamma\|_2^2 \leq (1 + \delta_s) \|\gamma\|_2^2 \quad (1.8)$$

où $\mathcal{C}(s, p) = \{\gamma \in \mathbb{R}^p : \|\gamma\|_0 \leq s\}$.

Cette condition permet de quantifier l'écart entre le cas donné par le design X quelconque et le cas orthogonal $X = I_p$ pour tout sous-ensemble de dimension s de \mathbb{R}^p . En termes statistiques, cela implique que les prédicteurs ne doivent pas être trop fortement corrélés. Cette propriété a l'avantage d'être théoriquement assez bien exploitable et de permettre de démontrer, pour un bon choix de paramètres, l'efficacité des estimateurs (1.6) et (1.7), comme énoncé ci-dessous.

Proposition 1.1.2. Soit $s \in \mathbb{N}$ tel que $s \leq p$. Soit $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tel que X satisfait $RIP(2s, \theta_{2s})$ et $\beta^* \in \mathbb{R}^p$ tel que $\|\beta^*\|_0 = s$ alors

1. Si $\theta_{2s} < 1$ alors β^* est l'unique solution de l'estimateur combinatoire (1.6),
2. Si $\theta_{2s} < \sqrt{2} - 1$ alors la solution du basis pursuit (1.7) est unique et vaut β^* .

Enfin, si on quitte quelques instants l'hypothèse de parcimonie et qu'on cherche la meilleure approximation de $\beta^* \in \mathbb{R}^p$ par un vecteur parcimonieux à s coordonnées non nulles, on a

Theorem 1.1.3. Soit $s \in \mathbb{N}$ tel que $s \leq p$. Soit $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tel que X satisfait $\text{RIP}(2s, \theta_{2s})$ avec $\theta_{2s} < \sqrt{2} - 1$. Alors

$$\begin{aligned} \|\beta^{bp} - \beta^*\|_1 &\leq C \|\beta_{\mathcal{S}_*}^* - \beta^*\|_1 \\ \|\beta^{bp} - \beta^*\|_2 &\leq C \frac{\|\beta_{\mathcal{S}_*}^* - \beta^*\|_1}{\sqrt{s}} \end{aligned}$$

où $C > 0$ est une constante qui dépend uniquement de θ_{2s} et où \mathcal{S}_* est le sous-ensemble d'indices correspondant aux plus grandes coordonnées de β^* .

On constate que même dans un cadre non parcimonieux, le basis pursuit se compare favorablement à l'estimateur oracle $\beta_{\mathcal{S}_*}^*$, en offrant des contrôles tant en norme ℓ_1 que ℓ_2 . Pour terminer ce tour d'horizon des conditions de reconstruction du signal, citons une dernière condition, plus faible que RIP mais tout aussi centrale dans la littérature, introduite par Bickel, Ritov et Tsybakov [BRT09].

Propriété de valeur propre restreinte (REC)

Definition 3. Une matrice $X \in \mathcal{M}_{n \times p}$ satisfait la propriété de valeur propre restreinte (REC) de dimension s et de constante c_0 si et seulement si

$$\mathcal{K}(s, c_0) := \min_{\substack{\mathcal{S} \subseteq \{1, \dots, p\} \\ \|\mathcal{S}\|_0 \leq s}} \min_{\substack{\gamma \neq 0 \\ \|\gamma_{\mathcal{S}^c}\|_1 \leq c_0 \|\gamma_{\mathcal{S}}\|_1}} \frac{\|X\gamma\|_2}{\|\gamma_{\mathcal{S}}\|_2} > 0. \quad (1.9)$$

La constante $\mathcal{K}(s, c_0)$ est appelée la valeur propre (s, c_0) -restreinte.

La propriété de valeur propre restreinte exprime la façon dont la matrice X conserve l'information des sous-ensembles de petite taille, ici s . Comme nous le verrons plus tard, cette dernière permet de donner dans le cadre de l'estimateur lasso défini par (1.13), diverses inégalités oracles.

Contribution

Dans la partie II de cette thèse, nous nous plaçons dans le cas particulier du problème (1.5) où la matrice de design X a pour entrées des variables aléatoires Gaussiennes. Ce contexte a déjà été considéré de nombreuses fois par le passé [DT05, Don06b, DT09b, DT09a] et il a été prouvé que la reconstruction du signal est assurée dès lors que le nombre d'observations n satisfait

$$n \geq C_1 s \log(C_2 p/s) \quad (1.10)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes. L'objectif du chapitre 1 est de donner une preuve que $\text{Ker}(X)$ satisfait $\text{NSP}(s, 1)$ en utilisant des outils de la théorie des processus et plus particulièrement la formule de Kac-Rice dont plusieurs exemples sont donnés plus loin. Cette méthode, bien qu'elle ne permette pas d'aboutir à (1.10), propose une nouvelle approche comparable en certains points à la version exacte de Donoho et Tanner [DT05] et donne surtout des bornes explicites pour la probabilité que $\text{Ker}(X)$ satisfasse $\text{NSP}(s, c_0)$. Le chapitre 2, toujours dans le cas d'une matrice à entrées Gaussiennes, se concentre sur la condition RIP et sa démonstration par la méthode de Rice. Un rapide complément est donné pour expliquer comment retrouver simplement la densité jointe des valeurs propres d'une matrice de Wishart.

1.2 Modèle linéaire et parcimonie

Considérons maintenant le modèle donné en introduction par

$$y = X\beta^* + \epsilon$$

avec $n \ll p$. L'estimateur des moindres carrés défini par (1.3) est inutilisable en l'état ; la matrice X étant singulière, le problème de l'argmin a par conséquent une infinité de solutions. L'idée mise en place par la communauté fut alors de régulariser le problème des moindres carrés en le pénalisant. La forme la plus courante est la pénalisation par ajout de la norme ℓ_γ pour un certain $\gamma > 0$. Ce cadre très général inclut plusieurs types d'estimateurs dont les deux principaux sont la régression Ridge et l'estimateur lasso.

1.2.1 Régression Ridge

La première généralisation des moindres carrés est donnée en 1970 par Hoerl et Kennard [HK70]. Il s'agit de pénaliser par la norme ℓ_2 afin de rester dans le cadre de l'étude de formes quadratiques, où les calculs sont explicites. L'estimateur Ridge est défini par

$$\beta^r \in \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \{\|y - X\beta\|_2^2 + \lambda_r \|\beta\|_2^2\}, \quad (1.11)$$

où $\lambda_r > 0$ est un paramètre de régularisation. L'avantage de cet estimateur est qu'il régularise la matrice $X^T X$ donnant une solution unique

$$\beta^r = (X^T X + \lambda_r I_p)^{-1} X^T y =: J_{\lambda_r} X^T y, \quad (1.12)$$

ce qui donne le comportement en loi suivant,

$$\beta^r \sim \mathcal{N}_p \left(J_{\lambda_r} X^T X \beta^*, J_{\lambda_r} X^T \Sigma X J_{\lambda_r} \right).$$

De plus, son interprétation est assez aisée. En effet, considérons la décomposition en valeur singulière de X donnée par $X = UDV^T$ où $(U, V) \in (\mathcal{M}_{n \times n}, \mathcal{M}_{p \times p})$ sont orthogonales et D est diagonale contenant les valeurs singulières de X notées $d_1 \geq \dots \geq d_n \geq 0$. Ainsi, en décomposant dans la base des colonnes de $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$, on obtient

$$X\beta^r = X J_{\lambda_r} X^T y = \sum_{i=1}^n \frac{d_i^2}{d_i^2 + \lambda_r} u_i u_i^T y$$

ce qui signifie que la régression Ridge contracte les coordonnées de y dans la base (u_1, \dots, u_n) d'un rapport $d_i^2 / (d_i^2 + \lambda_r)$. En particulier, le cas $\lambda_r = 0$ correspond bien à l'estimateur des moindres carrés. Au contraire, lorsque λ_r est grand, les coefficients ont tendance à être écrasés vers 0 sans toutefois s'annuler. Concernant la mise en place numérique, le problème (1.11) est équivalent aux deux programmes suivant

$$\beta^r = \arg \min_{\|\beta\|_2^2 \leq \mu_r} \{\|y - X\beta\|_2^2\} = \arg \min_{\|y - X\beta\|_2^2 \leq \nu_r} \{\|\beta\|_2^2\}$$

où λ_r , μ_r et ν_r sont liés par des relations connues. Ces versions permettent une implémentation simple sous de nombreux logiciels, comme par exemple le package MASS du logiciel R. Dans la pratique, le choix du paramètre λ_r est complexe. La solution la plus souvent privilégiée est l'estimation par validation croisée.

1.2.2 Lasso

Comme nous venons de le voir, la régression Ridge est un seuillage doux du problème des moindres carrés. L'estimateur correspondant n'ayant a priori aucune raison de produire des solutions parcimonieuses, il ne s'adapte pas très bien à la problématique de la sélection de modèle. L'alternative donnée par Tibshirani [Tib96] au milieu des années 90 fut d'utiliser une pénalité qui conserve toujours les avantages de la régularisation des moindres carrés tout en créant un effet de seuil plus violent sur les coefficients. Cette méthode a par la suite connu un succès grandissant grâce à sa très bonne adaptabilité numérique aux problèmes de très grande dimension. En effet, l'estimateur lasso est défini par

$$\beta^l \in \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \left\{ \frac{1}{2} \|y - X\beta\|_2^2 + \lambda_l \|\beta\|_1 \right\} \quad (1.13)$$

où $\lambda_l > 0$ est un paramètre à régler. Même si sa solution n'est pas explicite, il possède de nombreuses propriétés intéressantes, dont certaines sont énoncées en fin de section. Tout d'abord, les conditions d'unicité pour la solution du problème (1.13) à λ fixé, largement traitées dans [Oal00, Fuc05, Wai09, CP09, Tib13], supposent que la matrice de design X vérifie $\text{Ker}(X_{\mathcal{E}}) = \{0\}$ où

$$\mathcal{E} = \{i \in \{1, \dots, p\}; |X_i^T(y - X\beta^l)| = \lambda\}. \quad (1.14)$$

De plus, on peut associer à l'estimateur lasso un chemin de régularisation décrit par une suite décroissante de nœuds décrivant l'ensemble des paramètres λ pour lesquels une nouvelle variable X_i entre dans le modèle. Ceci permet théoriquement de calibrer le lasso pour un nombre limité de variables. En effet, le problème (1.13) se réécrit

$$\arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \|y - X\beta\|_2^2 \text{ tels que } \|\beta\|_1 \leq c, \quad (1.15)$$

ce qui revient à minimiser une forme quadratique sur la boule unité ℓ_1 . Une illustration en dimension deux est donnée en figure 2, montrant que le lasso a tendance à se concentrer sur les sommets de la boule ℓ_1 , produisant ainsi des solutions parcimonieuses. Concernant la mise en œuvre algorithmique, Efron, Hastie, Johnstone et Tibshirani [Eal04] ont démontré l'efficacité de l'algorithme LARS (Least-Angle Regression Selection), donné par la solution du problème quadratique suivant

$$\begin{aligned} \beta^l &= \min\{\lambda\|\beta\|_1 + t; v = y - X\beta, \|v\|_2^2 \leq t\} \\ &= \min\{\lambda\|\beta\|_1 + t; v = y - X\beta, \|(v, (t-1)/2)\|_2 \leq (t+1)/2\} \end{aligned}$$

où la condition $\|(v, (t-1)/2)\|_2 \leq (t+1)/2$ définit une contrainte de second ordre sur le cône (SCO). En particulier, il est possible de calculer son chemin de régularisation $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$ pour tout design X et tout vecteur d'observation y . Une illustration de ce phénomène est donnée en figure 1.

Terminons cette introduction au lasso par une comparaison avec l'estimateur Ridge dans un cas simple. Supposons $n \geq p$, la matrice de design X orthogonale et notons β^{mc} l'estimateur des moindres carrés, alors les estimateurs Ridge et lasso s'expriment simplement

- $\beta_i^r = \frac{1}{1+\lambda} \beta_i^{mc}$
- $\beta_i^l = \beta_i^{mc} - \lambda$ si $\beta_i^{mc} > \lambda$, $\beta_i^l = \beta_i^{mc} - \lambda$ si $\beta_i^{mc} > \lambda$ et 0 sinon.

Ces expressions montrent bien l'aspect seuillage dur généré par le lasso, qui annule certaines coordonnées, au contraire de l'estimateur Ridge qui se contente de diminuer l'impact de chacune. Une autre illustration de ce phénomène est donnée dans un cas bi-dimensionnel pour un design X général sur la figure 2. En réalité, ce phénomène de seuillage dur est plus général, la structure de la boule unité ℓ_γ pour $0 < \gamma < 1$, composée de "piques" très marquées, s'adapte particulièrement bien au problème de la parcimonie.

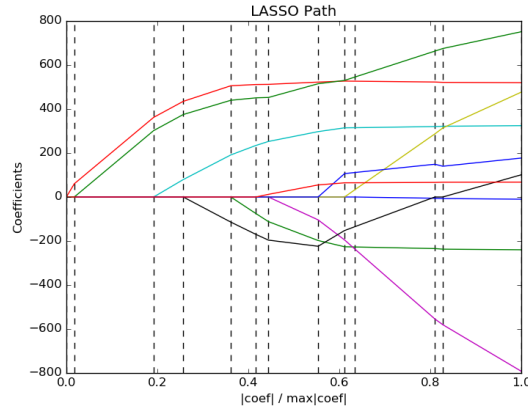


FIGURE 1 – Illustration des trajectoires données par le lasso pour chacun des coefficients. Les données sont issues d'un jeu de données standard sur le suivi de personnes diabétiques. Chaque intersection avec l'axe des abscisses indique l'entrée d'une nouvelle variable dans le modèle.

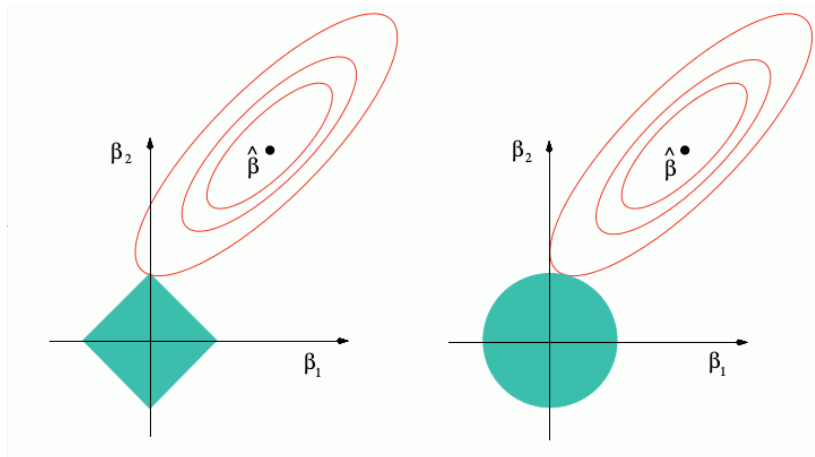


FIGURE 2 – Comparaison des estimateurs Ridge (à droite) et lasso (à gauche) en dimension 2, graphique considéré en β . Les zones en bleu représentent la pénalité considérée, à savoir la boule unité ℓ_1 pour le lasso et la boule unité ℓ_2 pour la régression Ridge, les ellipses représentant les ensembles de niveau croissants pour la somme des carrés des résidus. On constate que la géométrie de la boule ℓ_1 pousse le lasso à sélectionner des solutions parcimonieuses (intersection aux sommets) contrairement à la sélection Ridge.

Quelques propriétés du lasso

A l'instar du cadre non bruité, les travaux [BTW07, ZH08, VdG08, BRT09] ont montré que l'on peut déduire des inégalités oracle pour le lasso. Ces inégalités reposent sur le fait que la matrice de design satisfait les propriétés RIP ou REC, pour ne citer qu'elles. Les deux principales propriétés, issues de [BRT09], se focalisent sur le cas où les erreurs $(\epsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont indépendantes de distribution commune $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Elles donnent des contrôles sur l'erreur d'estimation et l'erreur de prédiction commises par le lasso. Leur énoncé est donné ci-dessous.

Proposition 1.2.1. Soit $\lambda = A\sigma \sqrt{\frac{\log(p)}{n}}$ où $A > 2\sqrt{2}$. Supposons que X satisfasse $REC(s, 3)$, alors

avec probabilité au moins $1 - p^{1-A^2/8}$, on a

$$\begin{aligned}\|\beta^l - \beta^*\|_1 &\leq \frac{16A}{\mathcal{K}(s,3)^2} \sigma s \sqrt{\frac{\log(p)}{n}}, \\ \|\beta^l - \beta^*\|_2^2 &\leq \frac{16A^2}{\mathcal{K}(s,3)} \sigma^2 s \log(p).\end{aligned}$$

Ces majorations, non asymptotiques, mais données avec grande probabilité, recourent celles du cadre non bruité, et démontrent une fois de plus la capacité de la pénalisation à récupérer des solutions parcimonieuses faiblement éloignées, dans un sens ℓ_1 et ℓ_2 , de β^* .

1.3 Tests dans le cadre du lasso

Après avoir défini et détaillé quelques propriétés de convergence de l'estimateur lasso, on peut se poser la question de la méthode de sélection de variable. Comme nous l'avons vu sur la figure 1, le choix du paramètre λ détermine le degré de parcimonie de l'estimateur lasso. Un problème majeur est de déterminer, selon des critères statistiques, la pertinence de l'entrée ou non d'une nouvelle variable dans notre modèle. C'est dans cette optique que Lockhart, Taylor, Tibshirani et Tibshirani ont introduit dans le récent article [LTTT14a] le *Covariance test*.

1.3.1 Covariance test

Le cadre considéré ici est celui du modèle (1.1) avec une suite d'erreurs indépendantes identiquement distribuées, à savoir

$$\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_n). \quad (1.16)$$

où σ^2 est supposé connu. L'objectif est de proposer une procédure assignant une p-valeur à chaque nouvelle variable ajoutée au modèle courant. Cette méthode se base sur les nœuds du LARS, l'algorithme découlant du lasso, notés précédemment $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$. Leur expression est issue des conditions d'optimalité KKT (Karush Kuhn Tucker [Kar39, KT51]), calculées pour le lasso dans [Eal04], aboutissant à la forme

$$\lambda_k = \frac{P_{\mathcal{A}_{k-1}}^\perp X_{j_k} y}{s_{j_k} - X_{j_k}^T X_{\mathcal{A}_{k-1}} (X_{\mathcal{A}_{k-1}}^T X_{\mathcal{A}_{k-1}})^{-1} s_{\mathcal{A}_{k-1}}} \quad (1.17)$$

où \mathcal{A}_{k-1} est le modèle à $k-1$ variables choisi par le LARS, X_{j_k} la colonne de X associée à la k -ième variable sélectionnée notée x_{j_k} , $X_{\mathcal{A}_{k-1}}$ est constitué des colonnes de X dont les indices sont dans \mathcal{A}_{k-1} et

$$P_{\mathcal{A}_{k-1}}^\perp = I_n - X_{\mathcal{A}_{k-1}} (X_{\mathcal{A}_{k-1}}^T X_{\mathcal{A}_{k-1}})^{-1} X_{\mathcal{A}_{k-1}}^T.$$

Revenons maintenant à notre problème de sélection. Une première approche est la sélection forward (FS) qui, à chaque étape, cherche le prédicteur x_{j_k} qui minimise la différence entre la somme des carrés des résidus du modèle courant notée RSS_{k-1} et celle du modèle courant auquel on ajoute la variable x_{j_k} , noté RSS_k . La statistique de test s'écrit

$$R_k = \frac{1}{\sigma^2} (RSS_{k-1} - RSS_k). \quad (1.18)$$

Sous l'hypothèse (1.16), lorsque la variable x_{j_k} est fixée, sa distribution est donnée par $R_k \sim \chi_1^2$, où χ_1 désigne la loi du chi-deux à 1 degré de liberté. Cette procédure, qui nécessite $p-k$ comparaisons à chaque étape, est assez simple à comprendre et à mettre en œuvre Malheureusement, comme

on peut le voir sur la figure 3, au fil des étapes, la statistique de test R_k se détériore, la méthode ne prenant pas bien en compte le caractère sélectif de la procédure. Pour pallier ce problème, Lockhart, Taylor, Tibshirani et Tibshirani [LTTT14a] proposent une nouvelle procédure testant la significativité de l'entrée d'une k -ième variable dans le modèle, basée sur la sélection lasso. Pour cela, ils définissent la statistique

$$T_k = \frac{1}{\sigma^2} \left(\langle y, X\beta^l(\lambda_{k+1}) \rangle - \langle y, X_{\mathcal{A}_{k-1}}\beta_{\mathcal{A}_{k-1}}^l(\lambda_{k+1}) \rangle \right), \quad (1.19)$$

où β^l désigne l'estimation du lasso dans le modèle complet (design X) et $\beta_{\mathcal{A}_{k-1}}^l$ désigne l'estimation du lasso dans le modèle restreint (design $X_{\mathcal{A}_{k-1}}$). La statistique T_k mesure la part de covariance (certes non centrée) imputable à la nouvelle variable choisie par le lasso. De part son expression, la première question qui apparait est pourquoi λ_{k+1} et pas λ_k ? En réalité, en écrivant les conditions d'optimalité KKT dans les deux modèles, il est assez rapide de vérifier que $X\beta^l(\lambda_k) = X_{\mathcal{A}_{k-1}}\beta_{\mathcal{A}_{k-1}}^l(\lambda_{k+1})$, ce qui rend la statistique T_k inutilisable au point λ_k . Le choix suivant de λ_{k+1} devient alors naturel car il permet d'évaluer complètement l'importance du k -ième coefficient dans le modèle juste avant l'entrée d'une nouvelle variable. Enfin, en choisissant d'évaluer une version de la covariance non centrée pour $X\beta^l(\lambda_{k+1}) - X_{\mathcal{A}_{k-1}}\beta_{\mathcal{A}_{k-1}}^l(\lambda_{k+1})$, on est capable d'évaluer la distribution asymptotique de T_k , donnée par

$$T_k \rightarrow \text{Exp}(1) \quad (1.20)$$

lorsque n et p tendent conjointement vers l'infini, ce qui la rend exploitable pour la sélection de modèle.

Dans le cas orthogonal, la démonstration repose sur le fait que les $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$ correspondent aux statistiques d'ordre du vecteur des corrélations $U = X^T y$. En appliquant des résultats standards sur les statistiques d'ordre Gaussiennes et en utilisant l'indépendance des restes des régressions dans ce cadre, on obtient (1.20).

Notons que cette preuve peut s'étendre au cas où la variance est inconnue, en supposant $n > p$. On estime alors la variance par $\hat{\sigma}^2 = \frac{\|y - X\beta^{mc}\|_2^2}{n-p}$ et pour de grandes valeurs de n et p , on compare

$$\tilde{T}_k := \frac{\sigma^2 T_k}{\hat{\sigma}^2} \quad (1.21)$$

à une loi de Fisher de paramètres $(2, n-p)$.

Même si cet article a emmené de nombreuses réponses dans la communauté [Bal13, BM13, VdGBR13, ZZ14], nous ne détaillerons pas plus cette procédure ici. En effet, comme nous le verrons dans la section suivante, elle a été supplantée depuis par le *spacing test* qui est une version non-asymptotique, plus générale, et dont la version asymptotique correspond au *covariance test*.

1.3.2 Spacing test

Dans cette section, nous décrivons la démarche statistique définie dans [LSST13]. Pour cela, nous considérons deux cas de figure. Dans un premier temps, nous expliquons comment mettre en place un test vectoriel de nullité globale des coefficients, i.e. tester

$$\mathbb{H}_0 : \mu = 0 \text{ contre } \mathbb{H}_1 : \mu \neq 0$$

où $\mu = X^T \beta^*$, en se basant sur les deux premiers nœuds de l'algorithme LARS. Dans un deuxième temps, nous décrivons une procédure de test pour la sélection de modèle, procédure conditionnelle au modèle sélectionné par le LARS à chaque étape.

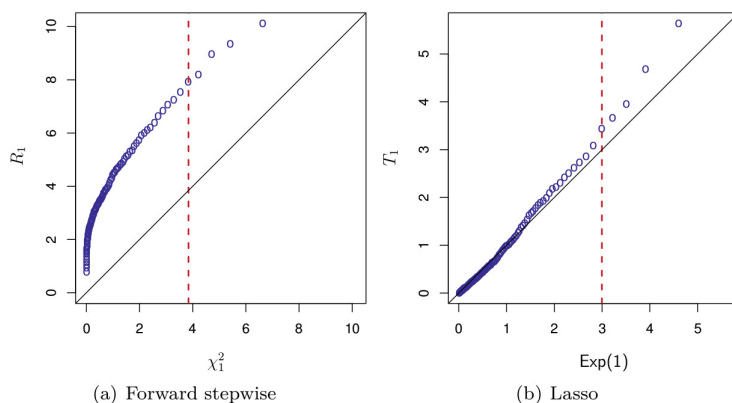


FIGURE 3 – Exemple pour $(s, n, p) = (3, 10, 100)$, X matrice de design orthogonale et σ^2 connu, fixé à 1. La figure de gauche montre un QQplot de R_4 contre une loi χ_1^2 (4ème étape de (1.18)) alors que la figure de droite montre un QQplot de T_4 contre une loi $\text{Exp}(1)$. A la différence du test basé sur la somme des carrés des résidus, le *covariance test* détecte très bien l'absence de 4ème variable dans le modèle.

Nullité globale

Supposons tout d'abord que nous voulions tester la nullité globale des paramètres. On considère le modèle

$$y = X\beta^* + \epsilon$$

où $\Sigma := \text{Cov}(\epsilon)$ et X sont connus, et on fait l'hypothèse que la matrice de variance-covariance du vecteur des corrélations $U = X^T y$ notée $R = X^T \Sigma X$ vérifie $\forall i \leq p$, $R_{ii} = 1$. Cela inclut, par exemple, le cas simple où $\Sigma = \sigma^2 I_n$ et où la matrice X est normalisée. L'idée du test est de comprendre le comportement du premier nœud du LARS, à savoir le premier paramètre λ pour lequel une variable entre dans le modèle, donné par

$$\lambda_1 = \sup_{\|\eta\|_1 \leq 1} \eta^T y = \max_{i \in \{1, \dots, p\}} |U_i| = \|U\|_\infty, \quad (1.22)$$

ce qui revient à maximiser un processus Gaussien simple (défini via un produit scalaire) sur la boule unité ℓ_1 , ou, de manière équivalente, à considérer le maximum en valeur absolue d'un vecteur Gaussien de \mathbb{R}^p . A partir de (1.22), on peut décrire l'évènement $\lambda_1 = \epsilon U_i$, i.e. l'algorithme LARS a sélectionné la variable i avec le signe ϵ , comme étant

$$\begin{aligned} \{\forall j \neq i, -\epsilon U_i < U_j < \epsilon U_i\} &= \{\forall j \neq i, -\epsilon U_i (1 + \epsilon R_{ji}) < U_j - R_{ji} U_i < \epsilon U_i (1 - \epsilon R_{ji})\}, \\ &= \left\{ \forall j \neq i, \left\{ \frac{U_j^i}{1 - \epsilon R_{ji}} \vee \frac{-U_j^i}{1 + \epsilon R_{ji}} \right\} < \epsilon U_i \right\}, \\ &= \left\{ \max_{j \neq i, s = \pm 1} \frac{s U_j^i}{1 - s \epsilon R_{ji}} < \epsilon U_i \right\}. \end{aligned}$$

; Ainsi, en remarquant que la dernière égalité correspond à la définition du deuxième nœud du LARS, on peut écrire

$$\{\lambda_1 = \epsilon U_i\} = \{\lambda_2^{i, \epsilon} < \epsilon U_i\}.$$

L'avantage de cette écriture est l'indépendance, pour tout choix (i, ϵ) , de $\lambda_2^{i, \epsilon}$ et ϵU_i . Enfin, en utilisant le fait que sous \mathbb{H}_0 , $\epsilon U_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$, on conclut

$$\frac{1 - \Phi(\epsilon U_i)}{1 - \Phi(\lambda_2^{i, \epsilon})} \Big|_{\{\lambda_1 = \epsilon U_i\}} = \frac{1 - \Phi(\lambda_1)}{1 - \Phi(\lambda_2)} \Big|_{\{\lambda_1 > \lambda_2\}} \sim \mathcal{U}([0, 1]). \quad (1.23)$$

Ceci donne un premier test conditionnel au modèle. En effet, conditionnellement au fait que le LARS ait choisi la variable U_i avec le signe ε , on dispose d'un test de nullité globale des coefficients. Autrement dit, on peut associer une p-valeur à la variable venant d'entrer dans le modèle. En vue de faire de la sélection de modèle, la question de l'itération à des étapes plus élevées est naturellement apparue. La réponse ainsi qu'une extension de cette méthode ont été apportées dans [LSST13].

Procédure de test

Dans la suite, nous cherchons à faire de l'inférence sur la nouvelle variable entrant dans le modèle à une étape k donnée, à savoir sur $\eta^T y$ pour un certain η dépendant du modèle. Avant d'aller plus en avant, il est essentiel de revenir sur le test précédent. Dans le cas de l'entrée d'une première variable, conditionnellement au fait que le lasso ait choisi εU_i , on a vu que $\frac{1-\Phi(\varepsilon \eta_{i,\varepsilon}^T y)}{1-\Phi(\lambda_2^{i,\varepsilon})} \Big| \{\lambda_1 = \varepsilon U_i\} \sim \mathcal{U}([0,1])$ où la i -ème coordonnée de $\eta_{i,\varepsilon}$ vaut ε et les autres sont fixées à 0. En reprenant la définition de l'évènement par lequel on conditionne, on remarque que $\{\lambda_2^{i,\varepsilon} \leq \lambda_1\}$ peut s'écrire sous la forme

$$\{Ay \leq b\} \quad (1.24)$$

où A et b gèrent la collection d'inégalité données par $\{\forall j \neq i, |U_j| < \varepsilon U_i\}$ et où la relation \leq est à prendre terme à terme entre les deux vecteurs. L'idée de Lee, Sun, Sun et Taylor est alors de généraliser le résultat donné pour les deux premiers nœuds du LARS à tout méthode de sélection se basant sur des contraintes linéaires. Pour cela, ils démontrent que le polyèdre convexe $\{y \in \mathbb{R}^n; Ay \leq b\}$ peut se réécrire, pour tout $\eta \in \mathbb{R}^p$, sous la forme

$$\{v_\eta^-(z) \leq \eta^T y \leq v_\eta^+(z), v_\eta^0(z) \leq 0\} \quad (1.25)$$

avec

$$\begin{aligned} v_\eta^-(z) &= \max_{j; \alpha_j < 0} \frac{b_j - (Az)_j + \alpha_j \eta^T y}{\alpha_j} \\ v_\eta^+(z) &= \min_{j; \alpha_j > 0} \frac{b_j - (Az)_j + \alpha_j \eta^T y}{\alpha_j} \\ v_\eta^0(z) &= \min_{j; \alpha_j = 0} b_j - (Az)_j \end{aligned}$$

où $\alpha = \frac{A\eta}{\|\eta\|_2}$ et $z = (I_n - \Sigma\eta(\eta^T\Sigma\eta)^{-1}\eta^T)y$. Cette représentation dans l'espace \mathbb{R}^n du polyèdre par lequel on conditionne nos observations présente l'intérêt majeur de retranscrire la condition (1.24) avec des variables aléatoires indépendantes, plus précisément, le triplet $(v_\eta^-(z), v_\eta^+(z), v_\eta^0(z))$ est indépendant de $\eta^T y$. Ce dernier fait permet d'énoncer le théorème énoncé dans [LSST13] et illustré par la figure 4.

Théorème 1.3.1. *Considérons $y \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ un vecteur Gaussien, alors, avec les notations ci-dessus*

$$\frac{\Phi\left(\frac{\eta^T y - \eta^T \mu}{\sqrt{\eta^T \Sigma \eta}}\right) - \Phi\left(\frac{v_\eta^+(z) - \eta^T \mu}{\sqrt{\eta^T \Sigma \eta}}\right)}{\Phi\left(\frac{v_\eta^-(z) - \eta^T \mu}{\sqrt{\eta^T \Sigma \eta}}\right) - \Phi\left(\frac{v_\eta^+(z) - \eta^T \mu}{\sqrt{\eta^T \Sigma \eta}}\right)} \Big| \{Ay \leq b\} \sim \mathcal{U}([0,1]) \quad (1.26)$$

A partir de cette affirmation, en définissant la fonction de répartition d'une loi normale tronquée sur un intervalle $[a, b]$ de moyenne μ et de variance σ^2 par

$$F_{\mu, \sigma^2}^{c,d}(x) = \frac{\Phi((x - \mu)/\sigma) - \Phi((c - \mu)/\sigma)}{\Phi((d - \mu)/\sigma) - \Phi((c - \mu)/\sigma)}, \quad (1.27)$$

on peut décrire un test simple pour

$$\mathbb{H}_0 : \eta^T \mu = 0 \text{ contre } \mathbb{H}_1 : \eta^T \mu \neq 0$$

basé sur la statistique

$$F_{0, \eta^T \Sigma \eta}^{v_\eta^-(z), v_\eta^+(z)}(\eta^T y) | \{Ay \leq b\} \quad (1.28)$$

qui, sous l'hypothèse nulle, suit une loi uniforme sur $[0, 1]$. Plus de détails concernant ce test sont donnés dans la sous-section suivante.

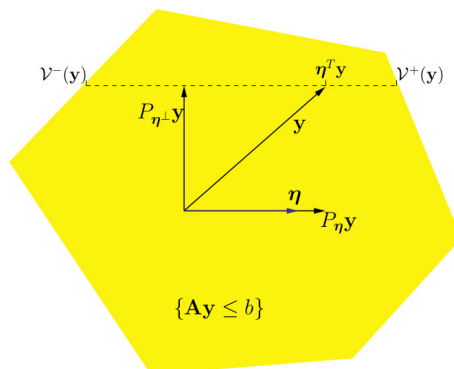


FIGURE 4 – Illustration en dimension 2 de (1.28). Conditionnellement au fait d'être tombé dans la région définie par $\{Ay \leq b\}$ (en jaune), la projection orthogonale sur η , au sens de la matrice Σ , du vecteur y , vit sur le segment $[v_\eta^-, v_\eta^+]$. En remarquant que (v_η^-, v_η^+) dépendent uniquement de $P_{\eta^+} y$, la formule (1.28) découle alors directement des relations d'indépendance, dues à l'orthogonalité, dans le cadre Gaussien.

Le résultat géométrique très général du théorème 1.3.1 s'applique à tout algorithme dont la sélection de modèle peut s'écrire comme un ensemble de conditions linéaires. Il s'applique en particulier à la sélection forward (FS) comme détaillé dans [TLTT14] et au lasso à travers la sélection induite par l'algorithme LARS. Plus précisément, supposons que le LARS ait choisi un modèle à $k - 1$ variables ($\lambda \in [\lambda_k, \lambda_{k-1}]$). En écrivant les conditions KKT (Karush Kuhn-Tucker, [Kar39, KT51]) d'optimalité pour le lasso avec le paramètre λ et en notant \hat{M} le modèle sélectionné par le LARS et \hat{s} les signes associés, on a l'égalité d'ensemble suivante

$$\{(\hat{M}, \hat{s}) = (\mathcal{A}_{k-1}, s_{k-1})\} = \{\text{sign}(w(\mathcal{A}_{k-1}, s_{k-1})) = s_{k-1}, \|u(\mathcal{A}_{k-1}, s_{k-1})\|_\infty < 1\} \quad (1.29)$$

où

$$\begin{aligned} u(\mathcal{A}_{k-1}, s_{k-1}) &= X_{\mathcal{A}_{k-1}}^T (X_{\mathcal{A}_{k-1}}^T)^+ s_{k-1} + \frac{1}{\lambda} X_{\mathcal{A}_{k-1}}^T (I - P_{\mathcal{A}_{k-1}}) y, \\ w(\mathcal{A}_{k-1}, s_{k-1}) &= (X_{\mathcal{A}_{k-1}}^T X_{\mathcal{A}_{k-1}})^{-1} (X_{\mathcal{A}_{k-1}}^T y - \lambda s_{k-1}). \end{aligned}$$

où $M^+ = M^T (MM^T)^{-1}$ désigne la pseudo-inverse de Moore-Penrose de la matrice M . Ainsi, la sélection par l'algorithme LARS entre dans le cadre décrit plus haut. De plus, en partant de l'expression du k -ième nœud du LARS, donnée par $\eta_k^T y$ où

$$\eta_k = \frac{P_{\mathcal{A}_{k-1}}^\perp X_{j_k}}{s_{j_k} - X_{j_k}^T X_{\mathcal{A}_{k-1}} (X_{\mathcal{A}_{k-1}}^T X_{\mathcal{A}_{k-1}})^{-1} s_{\mathcal{A}_{k-1}}}, \quad (1.30)$$

on peut associer une p-valeur à la nouvelle variable X_{j_k} conditionnellement au fait que le LARS ait choisi le modèle $\mathcal{A}_{k-1} \cup \{X_{j_k}\}$. La statistique de test $F_k := F_{0, \eta_k^T \Sigma \eta_k}^{v_{\eta_k}^-, v_{\eta_k}^+}$, dont la formulation prend

en compte la suite des $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq k}$ pour construire $v_{\eta_k}^-$ et $v_{\eta_k}^+$, est asymptotiquement équivalente à

$$G_k = \frac{\Phi\left(\frac{\lambda_{k-1}}{\sqrt{\eta_k^T \Sigma \eta_k}}\right) - \Phi\left(\frac{\lambda_k}{\sqrt{\eta_k^T \Sigma \eta_k}}\right)}{\Phi\left(\frac{\lambda_{k-1}}{\sqrt{\eta_k^T \Sigma \eta_k}}\right) - \Phi\left(\frac{\lambda_{k+1}}{\sqrt{\eta_k^T \Sigma \eta_k}}\right)}. \quad (1.31)$$

L'équivalence est asymptotique en (n, p) au sens où $G_k = F_k(1 + o_{\mathbb{P}}(1))$, $o_{\mathbb{P}}$ désignant une quantité tendant vers 0 en probabilité. Ainsi, sous l'hypothèse $\mathbb{H}_0 : \mu = 0$, lorsque $(n, p) \rightarrow (+\infty, +\infty)$, les nœuds du LARS vérifient la relation

$$\frac{\Phi(w_k \lambda_k) - \Phi(w_k \lambda_{k-1})}{\Phi(w_k \lambda_{k+1}) - \Phi(w_k \lambda_{k-1})} \sim \mathcal{U}([0, 1])$$

où les w_k sont des poids issus de la normalisation. Signalons enfin que cette procédure est aussi asymptotiquement équivalente au *covariance test*. Ce dernier, dont l'expression (1.19) se réécrit avec les notations de cette section

$$T_k = \frac{\lambda_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})}{\eta_k^T \Sigma \eta_k},$$

vérifie la relation

$$\exp(-T_k) = \exp\left(-\frac{\lambda_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})}{\eta_k^T \Sigma \eta_k}\right) = \left(\frac{\Phi\left(\frac{\lambda_{k-1}}{\sqrt{\eta_k^T \Sigma \eta_k}}\right) - \Phi\left(\frac{\lambda_k}{\sqrt{\eta_k^T \Sigma \eta_k}}\right)}{\Phi\left(\frac{\lambda_{k-1}}{\sqrt{\eta_k^T \Sigma \eta_k}}\right) - \Phi\left(\frac{\lambda_{k+1}}{\sqrt{\eta_k^T \Sigma \eta_k}}\right)}\right) (1 + o_{\mathbb{P}}) = G_k(1 + o_{\mathbb{P}}),$$

où le terme de gauche désigne la p-valeur du *covariance test*, découlant de la fonction de répartition inverse de la loi exponentielle. Le *spacing test* offre ainsi l'avantage de s'appliquer au cas d'une matrice de covariance Σ non-dégénérée, de fournir une p-valeur (non asymptotique) pour tout choix (n, p) et d'être asymptotiquement équivalent au *covariance test* dans le cas $\Sigma = \sigma^2 I_n$. De plus, la variable $F_{\eta^T y, \eta^T \Sigma \eta}^{v_{\eta}^-, v_{\eta}^+}$ étant pivotale en $\eta^T y$, et ce pour tout choix de η , on peut l'inverser pour obtenir un intervalle de confiance pour $\eta^T y$, comme décrit dans la sous-section suivante.

Intervalle de confiance

L'objectif ici est la construction des intervalles de confiance pour $\beta_j^{\hat{M}}$ où \hat{M} est le modèle choisi par le LARS. En réalité, plus que la construction elle-même, la question majeure est celle de la simultanéité des intervalles. Pour cela, plusieurs notions ont été introduites par Benjamini et Yekutieli [BY05], Storey [Sto03] et plus récemment Berk et al. [Bal13]. La plus classiquement utilisée est celle de *false control recovery* (FCR) qui contrôle la proportion d'erreur commise par la collection d'intervalles construits pour $(\beta_j^{\hat{M}})_{j \in \hat{M}}$. Plus précisément,

$$\begin{aligned} FCR &= \mathbb{E} \left[\frac{\#\{j \in \hat{M} : \beta_j^{\hat{M}} \notin C_j^{\hat{M}}\}}{\#\{\hat{M}\}} ; \#\{\hat{M}\} > 0 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{\#\{j \in \hat{M} : \beta_j^{\hat{M}} \notin C_j^{\hat{M}}\}}{\#\{\hat{M}\}} \mid \#\{\hat{M}\} > 0 \right] \times \mathbb{P}(\#\{\hat{M}\} > 0) =: pFCR \times \mathbb{P}(\#\{\hat{M}\} > 0). \end{aligned}$$

Dans leur article [LSST13], Lee, Sun, Sun et Taylor montrent que pour toute famille d'intervalles $\{C_j^{\hat{M}}\}_{j \in \hat{M}}$ qui satisfait

$$\mathbb{P}(\beta_j^{\hat{M}} \notin C_j^{\hat{M}} | \hat{M} = M) \leq \alpha, \quad (1.32)$$

pour tout choix de modèle M et d'indices $j \in M$, alors $FCR \leq pFCR \leq \alpha$. Ce résultat assure que l'on peut limiter notre attention à la construction d'intervalles de confiance conditionnels pour chacun des paramètres du modèle, la simultanéité étant en quelques sorte induite par le choix du modèle. Pour tout choix de paramètre, il suffit de remarquer que β_j^M vérifie

$$\beta_j^M = e_j^T X_M^+ \mu = \eta_{j,M}^T \mu, \quad \forall M, \quad \forall j \in M, \quad (1.33)$$

où e_j est le vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^p , X_M^+ est la pseudo inverse de Moore-Penrose de la matrice composée des colonnes de X dont les indices sont dans M et $\mu = X^T \beta$. De plus, la fonction de répartition d'une loi normale tronquée définie en (1.27) est monotone en μ pour tout quadruplet (σ^2, c, d, x) fixé. Ainsi, on peut définir les intervalles de confiances $C_j^{\hat{M}, \hat{s}}$ par

$$C_j^{\hat{M}, \hat{s}} = \left\{ \beta_j^{M, \hat{s}}; \frac{\alpha}{2} \leq F_{(\beta_j^{M, \hat{s}}, \|e_j^T X_M^+\|_2^2)}^{v_{s, \eta_{j,M}}^-(z), v_{s, \eta_{j,M}}^+(z)}(\eta_{j,M}^T \mathcal{Y}) \leq 1 - \frac{\alpha}{2} \right\} = [L, U] \quad (1.34)$$

où (L, U) vérifie

$$F_{(L, \|e_j^T X_M^+\|_2^2)}^{v_{s, \eta_{j,M}}^-(z), v_{s, \eta_{j,M}}^+(z)}(\eta_{j,M}^T \mathcal{Y}) = \frac{\alpha}{2}, \quad F_{(U, \|e_j^T X_M^+\|_2^2)}^{v_{s, \eta_{j,M}}^-(z), v_{s, \eta_{j,M}}^+(z)}(\eta_{j,M}^T \mathcal{Y}) = 1 - \frac{\alpha}{2}. \quad (1.35)$$

La notation $C_j^{\hat{M}, \hat{s}}$ n'est pas fortuite, la statistique considérée précédemment étant conditionnée par le modèle \hat{M} mais aussi par le signe \hat{s} à travers $v_{s, \eta_{j,M}}^-$ et $v_{s, \eta_{j,M}}^+$. Pour contourner cette dernière difficulté, Lee, Sun, Sun et Taylor [LSST13] démontrent que le conditionnement, jusque là considéré sur un seul polytope, peut s'effectuer sur une union de polytopes. Ainsi, en prenant l'union sur tous les signes possibles ($2^{\#\{\hat{M}\}}$), on aboutit à un intervalle de confiance et à un test conditionnel au modèle seul. On pose alors

$$C_j^{\hat{M}} = \left\{ \beta_j^M; \frac{\alpha}{2} \leq F_{(\beta_j^M, \|e_j^T X_M^+\|_2^2)}^{\cup_s [v_{s, \eta_{j,M}}^-(z), v_{s, \eta_{j,M}}^+(z)]}(\eta_{j,M}^T \mathcal{Y}) \leq 1 - \frac{\alpha}{2} \right\} = [L, U] \quad (1.36)$$

où (L, U) vérifient les conditions données au dessus pour $\cup_s [v_{\eta_{j,M,s}}^-(z), v_{\eta_{j,M,s}}^+(z)]$.

Après avoir défini nos intervalles, trois remarques s'imposent. La première concerne le choix fait pour $C_j^{\hat{M}}$, choix qui n'a pas de raison, a priori, de satisfaire une quelconque propriété d'optimalité. En particulier, si l'on cherche l'intervalle le plus court, on peut appliquer la procédure donnée dans Lehmann et Romano ([LR05], théorème 4.4.1) afin de construire un test uniformément plus puissant parmi les tests sans biais basés sur la statistique F_k et définir la région de rejet optimale

$$R(z) = (-\infty, C_1(z)) \cup (C_2(z), +\infty)$$

où $C_1(z)$ et $C_2(z)$ sont définis dans [LSST13].

La deuxième est d'ordre pratique. En effet, nous avons considéré deux cas dans cette section, d'un côté le conditionnement par le modèle, d'autre part le conditionnement par le modèle et le signe des variables entrées dans le modèle. Les deux procédures sont illustrées sur un jeu de données en figure 5. On observe que le conditionnement par le modèle, plus lourd numériquement, donne des intervalles plus précis. Néanmoins, dans certaines configurations, le conditionnement par le modèle et les signes s'avère presque aussi puissant que celui par le modèle seul. Tout ceci est plus amplement expliqué dans [LSST13].

Enfin, troisième point, la construction d'intervalles de confiance conditionnels permet directement de tester la significativité de toute nouvelle variable introduite dans le modèle et donc de construire une procédure de sélection de modèle en regardant si 0 est inclus ou non dans l'intervalle de confiance construit pour la nouvelle variable.

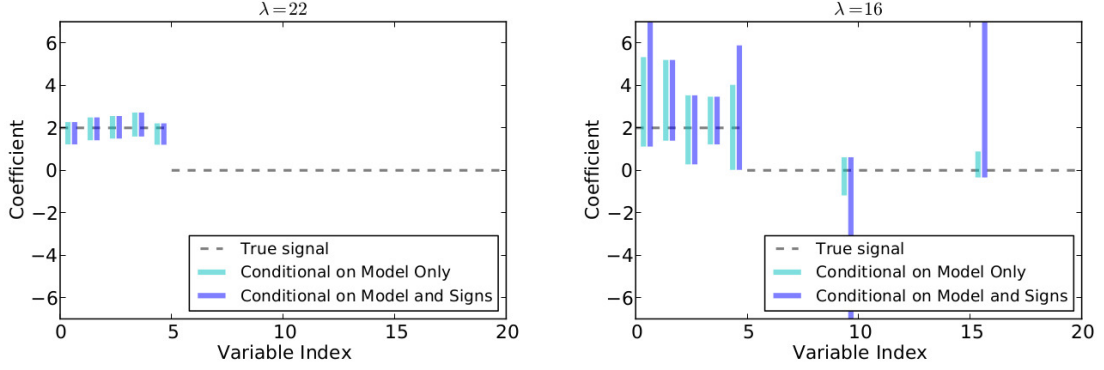


FIGURE 5 – Comparaison des intervalles de confiances pour les coefficients issus du lasso conditionnellement au modèle (bleu clair) et conditionnellement au modèle et aux signes (bleu foncé). Les simulations sont réalisées pour $(s, n, p) = (5, 25, 50)$. On observe que pour un λ grand (à gauche), il n’y a pas de réelle perte statistique à conditionner par le modèle et le signe. Par contre, pour un λ plus petit (à droite), on observe un décalage assez important entre les deux méthodes.

Contribution

Dans le chapitre 4 de la partie III, nous nous focalisons sur le *spacing test* non conditionnel construit pour l’hypothèse de nullité globale (vectorielle), dans le cadre de LARS, et cherchons à démontrer qu’il est sans biais. De plus, nous décrivons quelques propriétés de ce test dans le cas de prédicteurs orthogonaux. Nous donnons aussi une version dérivée de ce test pour le cas où les prédicteurs ont la même variance, mais où celle-ci n’est pas connue. Cette statistique de test, non plus basé sur une loi normale mais sur une loi de Fisher, suit aussi une loi uniforme sur $[0, 1]$. Enfin, une dernière partie est consacrée à une comparaison entre ces deux tests et le test du chi-deux de Pearson.

1.4 Le problème de pénalisation de manière générale

Dans cette partie, nous considérons le problème de pénalisation des moindres carrés pour une pénalité \mathcal{P} , où \mathcal{P} peut s’écrire sous la forme

$$\mathcal{P}(\beta) = \max_{u \in C} u^T \beta \tag{1.37}$$

pour un certain $C \subset \mathbb{R}^p$ convexe contenant 0 dans son intérieur relatif, i.e. dans son intérieur pour son espace affine. Cette représentation inclut en particulier le lasso, pour lequel C est la boule unité ℓ_∞ , mais comprend aussi un grand nombre de semi-normes sur \mathbb{R}^p . L’estimateur associé à ce problème est

$$\beta_\lambda^\mathcal{P} \in \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \frac{1}{2} \|y - X\beta\|_2^2 + \lambda \cdot \mathcal{P}(\beta) \tag{1.38}$$

et le premier nœud du chemin de régularisation est donné par

$$\lambda_1 = \min\{\lambda \geq 0; \mathcal{P}(\beta_\lambda^\mathcal{P}) = 0\} = \mathcal{Q}(X^T(I - P_{X C^\perp})y) = \max_{v \in C^0} v^T X^T(I - P_{X C^\perp})y \tag{1.39}$$

où \mathcal{Q} est la semi-norme duale de \mathcal{P} , C^0 est l'ensemble polaire de C , i.e. la boule unité de \mathcal{P} dans \mathbb{R}^p , et où l'ensemble XC^\perp est défini par

$$XC^\perp = X\{v \in \mathbb{R}^p; \forall u \in C, u^T v = 0\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Conformément aux sections précédentes, on suppose toujours que $y \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ où $\mu = X\beta^*$ et on cherche à tester

$$\mathbb{H}_0 : \mathcal{P}(\beta^*) = 0.$$

1.4.1 Test via la formule de Kac-Rice

La démarche proposée par Taylor, Loftus et Tibshirani [TLT14] est d'utiliser la formule de Kac-Rice, qui nécessite certaines conditions de différentiabilité, sur le processus

$$Y(v) = v^T X^T (I - P_{XC^\perp}) y, \quad (1.40)$$

défini pour $v \in C^0$ et dont le maximum est λ_1 . La statistique de test est décrite dans le théorème suivant.

Théorème 1.4.1. (*Kac-Rice test*) *Considérons le problème de pénalisation (1.38). On suppose que la boule unité de \mathcal{P} , notée C^0 , est stratifiable, à savoir*

$$C^0 = \bigcup_{j=0}^p \partial_j C^0, \quad (1.41)$$

où les $\partial_j C^0$ sont des variétés régulières et disjointes de dimension j . Si on suppose de plus que le processus Y est Morse pour presque tout $y \in \mathbb{R}^n$ (voir [Adl81]), alors sous \mathbb{H}_0 ,

$$\mathbb{S} = \frac{\int_{\lambda_1}^{v_{t^*}^+} \det(\Lambda_{t^*} + zI) \phi(z/\sigma_{t^*}) dz}{\int_{v_{t^*}^-}^{v_{t^*}^+} \det(\Lambda_{t^*} + zI) \phi(z/\sigma_{t^*}) dz} \sim \mathcal{U}(0, 1). \quad (1.42)$$

où t^* désigne l'argmax de Y sur C^0 et $(\Lambda_{t^*}, v_{t^*}^-, v_{t^*}^+, \sigma_{t^*})$ sont définis par (1.49), (1.44), (1.45) et (1.50).

L'hypothèse de fonction Morse est une hypothèse technique qui assure l'unicité du maximum alors que l'hypothèse stratifiable est là pour assurer l'utilisation d'une formule de Kac-Rice sur chaque espace de dimension j . Concernant la preuve de ce résultat, elle suit le principe de la section précédente, modulo quelques considérations techniques. La première d'entre elle est la géométrie particulière du problème. Pour créer les conditions nécessaires à l'utilisation de la formule de Kac-Rice, le processus doit satisfaire certaines conditions de régularité. Pour cela, la première étape est de considérer une version modifiée de Y , notée \tilde{Y}_t , qui est le reste de la régression de Y sur le gradient de Y restreint à l'espace tangent en t , noté $\nabla Y|_{T_t C^0}$. Ce nouveau processus, indépendant de $\nabla Y|_{T_t C^0}$, permet de réécrire la condition $\{t^* = t\}$ comme étant

$$\{\forall s \in C^0 / \{t\}, X(s) < X(t)\} = \{\nabla Y|_{T_t C^0} = 0\} \cap \{v_{t^*}^- \leq \tilde{X}_t(t) \leq v_{t^*}^+, v_{t^*}^0 \leq 0\} \quad (1.43)$$

où

$$v_t^- = \max_{s \in C^0; \text{Cov}(\tilde{Y}_t(s), \tilde{Y}_t(t)) < 1} \frac{\tilde{Z}_t(s)}{1 - \text{Cov}(\tilde{Y}_t(s), \tilde{Y}_t(t))} \quad (1.44)$$

$$v_t^+ = \min_{s \in C^0; \text{Cov}(\tilde{Y}_t(s), \tilde{Y}_t(t)) > 1} \frac{\tilde{Z}_t(s)}{1 - \text{Cov}(\tilde{Y}_t(s), \tilde{Y}_t(t))} \quad (1.45)$$

$$v_t^0 = \max_{s \in C^0; \text{Cov}(\tilde{Y}_t(s), \tilde{Y}_t(t)) = 1} \tilde{Z}_t(s) \quad (1.46)$$

dépendent uniquement de $\tilde{Z}_t(s) := \tilde{Y}_t(s) - \text{Cov}(\tilde{Y}_t(s), \tilde{Y}_t(t)) \tilde{Y}_t(t)$. Ceci découle encore d'un simple jeu de réécriture de la condition de gauche dans (1.43) visant à écrire la condition $\{\lambda_1 = Y(t)\}$ sous la forme de conditions indépendantes. A partir de cette affirmation, en appliquant une formule de Kac-Rice au couple $(t^*, Y(t^*))$ pour un borélien $A \times B \subset C^0 \times \mathbb{R}$, on trouve

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((t^*, Y(t^*)) \in A \times B) &= \mathbb{E}(\#\{t \in C^0 \cap A; \nabla Y|_{T_t C^0} = 0, \nu_t^- \leq \tilde{Y}_t^t \leq \nu_t^+, \nu_t^0 \leq 0, \tilde{Y}_t^t \in B\}) \\ &= \sum_{j=0}^p \int_{\partial_j C^0 \cap A} \mathbb{E} \left(\det(-\nabla^2 Y|_{T_t C^0}) \mathbb{1}_{\nu_t^- \leq \tilde{Y}_t^t \leq \nu_t^+, \nu_t^0 \leq 0, \tilde{Y}_t^t \in B} \middle| \nabla Y|_{T_t C^0} = 0 \right) p_{\nabla Y|_{T_t C^0}}(0) \sigma_j(dt) \end{aligned}$$

où σ_j est la mesure surfacique sur chaque $\partial_j C^0$. Plus de détails concernant la formule de Kac-Rice dans ce contexte sont donnés dans [Adl81, AW09]. A partir de cette expression, en remarquant que la construction de (\tilde{X}_t) implique son indépendance avec le gradient restreint à l'espace tangent et en calculant l'espérance conditionnelle de la Hessienne restreinte, on obtient

$$\mathbb{E} \left(\det(-\nabla^2 X|_{T_t M}) \mathbb{1}_{\nu_t^- \leq \tilde{X}_t^t \leq \nu_t^+, \nu_t^0 \leq 0, \tilde{X}_t^t \in B} \middle| \nabla X|_{T_t M} = 0 \right) = \mathbb{E} \left(\mathbb{M}_{\Lambda_t, \nu_t, \mu_t, \sigma_t}(\mathbb{1}_B) \mathbb{1}_{\nu_t^- \leq \nu_t^+, \nu_t^0 \leq 0} \right) \quad (1.47)$$

où

$$\mathbb{M}_{\Lambda_t, \nu_t, \mu_t, \sigma_t}(h) = \int_{\nu_t^-}^{\nu_t^+} h(z) \det(\Lambda_t + zI) \phi\left(\frac{z - \mu_t}{\sigma_t}\right) dz \quad (1.48)$$

et où

$$\Lambda_t = \left(\text{Cov}(\nabla^2 Y|_{T_t C^0}, \tilde{Y}_t(t)) \right)^{-1} P_{\nabla Y|_{T_t C^0}}^\perp \nabla^2 Y|_{T_t C^0} \quad (1.49)$$

$$\sigma_t = t^T X^T P_{\nabla Y|_{T_t C^0}}^\perp \Sigma P_{\nabla Y|_{T_t C^0}}^\perp X t, \quad \mu_t = t^T X^T P_{\nabla Y|_{T_t C^0}}^\perp X \beta^*. \quad (1.50)$$

La variable Λ_t est simplement le reste de la régression de la Hessienne sur le gradient restreint à l'espace tangent, renormalisé par la matrice de covariance avec \tilde{Y}_t^t . Pour conclure, il suffit alors de reconsidérer la démarche ci-dessus en partant d'une formule de Kac-Rice sur $(\Lambda_{t^*}, \nu_{t^*}^-, \nu_{t^*}^+, \nu_{t^*}^0, Y(t^*), t^*)$ sur des boréliens fixés puis d'utiliser un argument de localisation pour conclure. Enfin, en normalisant la mesure aléatoire \mathbb{M} , on obtient (1.42) sous \mathbb{H}_0 .

Ce test, dans sa forme générale, n'est plus seulement un test conditionnel à l'argmax t^* ainsi qu'à des variables dépendant des restes des régressions, notées $\nu_{t^*}^-, \nu_{t^*}^+$, mais aussi conditionnel au reste renormalisé de la régression de la Hessienne sur le gradient restreint à l'espace tangent au point du maximum, noté Λ_{t^*} .

Enfin, concernant le résultat en lui-même, non pas d'un point de vue statistique, mais du point de vue de la théorie des processus Gaussiens, toute cette démarche est simplement basée sur la densité du maximum d'un processus Gaussien satisfaisant les bonnes hypothèses de régularité décrites, par exemple, dans [AW05]. L'idée de Taylor, Loftus et Tibshirani est alors de créer de l'indépendance dans cette expression en régressant le processus Y sur le gradient restreint à l'espace tangent et sur le processus Y , tous les deux considérés au point réalisant le maximum, afin de faire apparaître les variables $(\Lambda_t, \nu_t^-, \nu_t^+)$ dans l'expression de la densité. Enfin, en conditionnant par ces mêmes variables au point réalisant le maximum, on conclut

$$\frac{\mathbb{G}_{\Lambda_{t^*}, \nu_{t^*}^-, \mu_{t^*}, \sigma_{t^*}}(\nu_{t^*}^+) - \mathbb{G}_{\Lambda_{t^*}, \nu_{t^*}^-, \mu_{t^*}, \sigma_{t^*}}(\lambda_1)}{\mathbb{G}_{\Lambda_{t^*}, \nu_{t^*}^-, \mu_{t^*}, \sigma_{t^*}}(\nu_{t^*}^+) - \mathbb{G}_{\Lambda_{t^*}, \nu_{t^*}^-, \mu_{t^*}, \sigma_{t^*}}(\nu_{t^*}^-)} \Big| \{\Lambda_{t^*}, \nu_{t^*}^-, \nu_{t^*}^+, t^*\} \sim \mathcal{U}([0, 1]) \quad (1.51)$$

où $\mathbb{G}_{\Lambda_{t^*}, \nu_{t^*}^-, \mu_{t^*}, \sigma_{t^*}}(\cdot) = \int_{-\infty}^{\cdot} \det(\Lambda_{t^*} + zI) \phi\left(\frac{z - \mu_{t^*}}{\sigma_{t^*}}\right) dz$.

1.4.2 Exemples d'application

Le test (1.42) a ouvert la porte aux travaux concernant l'inférence statistique après sélection de modèle, généralisant le test (1.23) à un cadre plus large que le lasso. En particulier, il s'applique à trois cas bien connus de la littérature du Compress Sensing que sont le lasso, le group lasso et la pénalisation par norme nucléaire. Dans le premier cas, les tests (1.23) et (1.42) sont identiques, l'espace tangent considéré dans le test précédent étant réduit à $\{0\}$, ce qui nous ramène à un cas trivial de formule de Kac-Rice sans déterminant. Les deux autres cas sont moins triviaux. Dans la suite, nous décrivons ce test seulement pour le cas de la norme nucléaire.

Norme nucléaire

Dans [CTT14], Choi, Taylor et Tibshirani considèrent le modèle de régression linéaire 1.1 dans un cadre matriciel avec un design $X = I_n \otimes I_p$ où $n \geq p$ et une pénalité

$$\mathcal{P}(\beta) = \|B\|_* = \max_{u \in C} \langle u, B \rangle$$

où C est la boule unité pour la norme opérateur sur $\mathcal{M}_{n \times p}$. Le problème d'optimisation correspondant est donné par

$$B^{Nn} \in \arg \min_{B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})} \frac{1}{2} \|Y - B\|_F^2 + \lambda \|B\|_* \quad (1.52)$$

où $\lambda > 0$, $\|\cdot\|_F$ est la norme de Frobenius et $\|\cdot\|_*$ est la norme nucléaire. Leurs travaux reprennent la démarche du Kac-Rice test. En partant de la décomposition en valeurs singulière des observations $Y = U_Y D_Y V_Y^T$ où

$$D_Y = \text{diag}(d_1, \dots, d_p),$$

ils construisent un test sur les valeurs singulières du signal B (notées $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_p)$) basé sur la loi jointe des valeurs propres d'une matrice de Wishart. L'objectif est alors de créer une suite de tests pour le rang du signal, i.e. pour les hypothèses

$$\begin{aligned} & \mathbb{H}_{0,k} : \Lambda_k = 0 \quad \text{contre} \quad \mathbb{H}_{1,k} : \Lambda_k > 0 \\ \iff & \mathbb{H}_{0,k} : \text{rang}(B) < k \quad \text{contre} \quad \mathbb{H}_{1,k} : \text{rang}(B) \geq k \end{aligned}$$

et d'inverser le pivot donné par la statistique du Kac-Rice test afin d'obtenir des intervalles de confiance (non simultanés) pour les valeurs singulières du modèle. La statistique correspondant à l'étape k est donnée par

$$S_{k,0} = \frac{\int_{d_k}^{d_{k-1}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} z^{n-p} \prod_{j \neq k}^p |z^2 - d_j^2| dz}{\int_{d_{k+1}}^{d_{k-1}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} z^{n-p} \prod_{j \neq k}^p |z^2 - d_j^2| dz}$$

où $\sigma > 0$ est le bruit des observations. Cette dernière est conditionnelle à l'ensemble des valeurs singulières $(d_i)_{1 \leq i \leq p}$ et vérifie $S_{k,0} \sim_{\mathbb{H}_0} \mathcal{U}([0, 1])$. Néanmoins, toujours dans [CTT14], Choi, Taylor et Tibshirani démontrent, par une approche directe et indépendante de la formule de Kac-Rice, qu'une version "moins conditionnelle" satisfaisait le même résultat sous \mathbb{H}_0 . Cette statistique, seulement conditionnelle à $(d_i)_{1 \leq i \leq k-1}$, s'écrit

$$V_{k,0} = \frac{\int_{d_k}^{d_{k-1}} g(y_k; d_1, \dots, d_{k-1}) dy_k}{\int_0^{d_{k-1}} g(y_k; d_1, \dots, d_{k-1}) dy_k}$$

où

$$g(y_k; d_1, \dots, d_{k-1}) = \int \dots \int \prod_{i=k}^p \left(e^{-\frac{y_i^2}{2\sigma^2}} y_i^{n-p} \right) \left(\prod_{i=k}^p \prod_{j>i} (y_i^2 - y_j^2) \right) \left(\prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=k}^p (d_i^2 - y_j^2) \right) \mathbb{1}_{0 \leq y_p \leq \dots \leq y_k \leq d_{k-1}} dy_{k+1} \dots dy_p,$$

et vérifie aussi $V_{k,0} \sim_{\mathbb{H}_0} \mathcal{U}([0, 1])$. Sa démonstration repose simplement sur l'expression de la loi jointe des valeurs propres d'une matrice de Wishart. Dans l'idée de conditionner moins pour obtenir une puissance plus importante, ce dernier test semble s'avérer, numériquement, plus efficace. Notons qu'à l'heure actuelle, très peu de résultats théoriques, en dehors du comportement sous \mathbb{H}_0 , sont démontrés. En particulier, les questions du non-biais à l'étape k ou des liens entre les p -valeurs issues d'étapes différentes n'ont pas encore été traitées. Enfin, signalons que dans le cas du group lasso, les résultats issus du Kac-Rice test tout comme la procédure de sélection en découlant, liée non plus à des contraintes linéaire comme pour le lasso mais à des contraintes quadratiques, ont été démontrées de manière directe (sans formule de Kac-Rice) et détaillées dans [LT15].

Contribution

Dans le chapitre 5, nous présentons une généralisation du test 1.23 à des problèmes plus complexes que le lasso, incluant le group lasso et la pénalisation par norme nucléaire. L'objectif, à terme, est de comparer l'efficacité du Kac-Rice test, donné par 1.42 et basé sur la formule du même nom, et celle de la version limite du test 1.23. Dans un deuxième temps, nous présentons brièvement la problématique de la super-résolution et de l'estimateur blasso et proposons un test pour la nullité globale. Une première généralisation de ces travaux serait d'étendre la procédure de sélection présentée précédemment au cas du blasso, la difficulté majeure provenant de l'aspect fonctionnel du blasso. En particulier, l'existence de la loi conditionnelle au choix du modèle doit être proprement justifiée.

1.5 Franchissement et formule de Kac-Rice

Nous quittons ici le domaine du modèle linéaire pour nous intéresser à celui des processus. L'objectif de cette section est de décrire, assez succinctement, quelques outils développés ou utilisés dans la partie IV de ce manuscrit. Considérons un processus Gaussien centré $\chi := \{X(t); t \in M\}$ à valeurs réelles défini sur M , où M sera le plus souvent compact dans \mathbb{R} ou \mathbb{R}^2 . On note $r(s, t) = \text{Cov}(X(s), X(t))$ sa fonction de covariance. L'objectif est de décrire au mieux le nombre de franchissements d'un niveau u donné par l'utilisateur ou plus généralement le nombre de points dans un ensemble de niveau u . Nous notons cette quantité $N_u(\chi, M)$. Nous n'entrons pas ici dans les détails de mesurabilité, mais il est évident qu'avant d'aller plus loin, la première propriété à vérifier est que N_u est bien une variable aléatoire, ce qui est vrai dans les cas que nous considérons dans ce manuscrit. Nous supposons que les trajectoires de χ sont p.s. continues ce qui exclut tout problème de mesurabilité. Tous ces détails de théorie de la mesure sont passés sous silence afin de réellement se focaliser sur les résultats statistiques. Pour terminer cette parenthèse, nous introduisons juste deux définitions et une condition simple pour décrire la régularité d'un processus Gaussien.

Définition 1.5.1. *Un processus χ est dit différentiable ou différentiable au sens quadratique si pour tout $t \in M$, la quantité*

$$\frac{X(t+h) - X(t)}{\|h\|_2}$$

converge en norme $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ lorsque $h \rightarrow 0$ vers une variable aléatoire notée $X'(t)$.

Cette notion, assez vague en l'état, se lit particulièrement bien pour un processus stationnaire, i.e. vérifiant $r(s, t) =: \rho(t-s)$, $\forall (s, t) \in M^2$. Dans ce cas, on peut directement déduire la régularité de χ de celle de ρ à travers l'implication

$$\rho \in \mathcal{C}^{2k}(M) \implies \chi \text{ est } k \text{ fois dérivable en moyenne quadratique sur } M, \quad (1.53)$$

où $\mathcal{C}^i(M)$ désigne l'ensemble des fonction i -fois dérivables dont la dérivée i -ième dérivée est continue. Enfin, signalons que dans le cas où ρ est continue, on peut définir la mesure spectrale ν associée à χ par

$$\forall h \in M, \rho(h) = \int_{\mathbb{R}^N} \exp(i\langle h, x \rangle) \nu(dx) \quad (1.54)$$

et, dans le cas où $E \subset \mathbb{R}$, les moments spectraux associés par

$$\gamma_k = \int_{\mathbb{R}} x^k \nu(dx). \quad (1.55)$$

A priori, rien n'assure que la définition précédente soit bien posée. Pour cela, le processus doit vérifier certaines conditions de régularité, qui seront données à chaque fois. Ces moments apparaissent souvent dans les normalisations du processus, par exemple, on notera que $\gamma_0 = \rho(0)$ correspond à la variance en tout point $t \in M$ et $\gamma_2 = -\rho''(0)$ correspond à la variance du processus dérivé en tout point $t \in M$.

1.5.1 Formule de Kac-Rice pour N_u

Commençons par considérer le cas où $E \subset \mathbb{R}$ et quittons quelques temps le monde de l'aléatoire. Soit $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, T]$ telle que

- $f(0) \neq u, f(T) \neq u,$
- $\{t \in [0, T]; f(t) = u, f'(t) = 0\} = \emptyset.$

Ces hypothèses sont là pour assurer que le niveau u ne peut pas être dépassé au bord du compact $[0, T]$. Dans ce cas, on dispose d'une formule de Kac ou formule de comptage,

Proposition 1.5.2. *Avec les notations données ci-dessus,*

$$N_u(f, [0, T]) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta} \int_0^T \mathbb{1}_{\{|f(t)-u|<\delta\}} |f'(t)| dt. \quad (1.56)$$

Sa preuve est assez simple. En effet, avec les hypothèses données sur f et la compacité de $[0, T]$, $N_u(f, [0, T])$ est fini, disons égal à l . Notons $(s_i)_{i \leq l}$ l'ensemble des points réalisant la condition définissant $N_u(f, [0, T])$. Un argument de localisation autour de chaque s_i et la compacité de $[0, T]$ permettent alors de définir pour un $\delta > 0$ assez petit une suite de difféomorphismes de J_i vers $]u - \delta, u + \delta[$, où les J_i sont disjoints deux à deux et où $\forall i, s_i \in J_i$. Ainsi, on peut écrire localement

$$\int_{J_i} |f'(t)| dt = 2\delta$$

et on conclut en sommant sur les intervalles

$$\frac{1}{2\delta} \int_0^T \mathbb{1}_{\{|f(t)-u|<\delta\}} |f'(t)| dt = \frac{1}{2\delta} \sum_{i=1}^l \int_{J_i} |f'(t)| dt = l.$$

Afin d'étendre cette proposition au nombre de franchissements pour χ , nous devons tout d'abord retranscrire les hypothèses demandées sur f dans le cadre aléatoire. Supposons que le processus Gaussien centré χ soit de classe \mathcal{C}^1 alors le théorème d'Ylvisaker [Ylv68] nous assure que si sa variance est strictement positive en tout point, ce qui est une hypothèse relativement faible, alors l'ensemble des points critiques égaux à un certain niveau donné est de mesure nulle. Ceci implique que la formule de Kac s'applique p.s. aux trajectoires de notre processus χ défini au dessus, on obtient alors

$$\mathbb{E}(N_u(\chi, [0, T])) = \int_0^T \mathbb{E}(|X'(t)| | X(t) = u) p_{X(t)}(u) dt \quad (1.57)$$

où $p_{X(t)}(\cdot)$ est la densité d'une loi normale centrée de variance $r(t, t)$. La preuve repose sur les égalités suivantes.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N_u(\chi, [0, T])) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E} \left(\frac{1}{2\delta} \int_0^T \mathbb{1}_{|X(t)-u| < \delta} |X'(t)| dt \right) \\ &= \int_0^T dt \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta} \int_{u-\delta}^{u+\delta} \mathbb{E}(|X'(t)| | X(t) = x) p_{X(t)}(x) dx \\ &= \int_0^T \mathbb{E}(|X'(t)| | X(t) = u) p_{X(t)}(u) dt. \end{aligned}$$

L'idée principale est d'utiliser la convergence uniforme (découlant de la compacité) de l'approximation polygonale dyadique (découpage de $[0, T]$ en 2^n intervalles et interpolation) notée $Y_n(t)$ vers $X(t)$. En raisonnant sur Y_n , la première égalité provient de la convergence dominée, le nombre de franchissements étant limité à 2^n par construction. Enfin, notons que toutes les formules ont un sens car l'espérance conditionnelle, dans le cadre Gaussien, est parfaitement définie par les formules de régression usuelles.

En ajoutant l'hypothèse de stationnarité, cette formule nous donne une expression très simple pour le premier moment du nombre de franchissements. Si l'on considère la fonction $r(s, t) = \text{Cov}(X(s), X(t))$, cette fonction est constante sur la diagonale principale $\Delta = \{(t, t); t \in [0, T]\}$. En écrivant ces conditions sur les dérivées partielles, on obtient

$$\frac{\partial r}{\partial s}(t, t) + \frac{\partial r}{\partial t}(t, t) = 0$$

ce qui implique que $\mathbb{E}(X'(t)X(t)) = 0$ pour tout $t \in [0, T]$. Les deux variables étant Gaussiennes, cela implique leur indépendance, simplifiant grandement l'expression (1.57). On trouve alors

$$\mathbb{E}(N_u(\chi, [0, T])) = \int_0^T \mathbb{E}(|X'(t)|) \phi(u) dt = \int_0^T \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\mathbb{V}(X'(t))} \phi(u) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\gamma_2} T \phi(u) \quad (1.58)$$

où γ_2 désigne le deuxième moment spectral de χ . Pour conclure, signalons que la formule (1.57) se généralise au k -ième moment factoriel, toujours sous l'hypothèse de trajectoire \mathcal{C}^1 , mais en ajoutant cette fois la condition de non-dégénérescence de la loi des k -uplets $(X(t_1), \dots, X(t_k))$ pour tout choix de (t_1, \dots, t_k) où les t_i sont deux à deux distincts. Elle prend la forme

$$\mathbb{E}(N_u^{[k]}(\chi, [0, T])) = \int_{[0, T]^k} \mathbb{E}(|X'(t_1) \dots X'(t_k)| | X(t_1) = \dots = X(t_k) = u) \times p_{(X(t_1), \dots, X(t_k))}(u, \dots, u) dt \quad (1.59)$$

où $N_u^{[k]} = N_u \times (N_u - 1) \times \dots \times (N_u - k + 1)$ et $p_{(X(t_1), \dots, X(t_k))}$ désigne la densité du vecteur Gaussien $(X(t_1), \dots, X(t_k))$.

1.5.2 Méthode des records pour la loi du maximum

Notre objectif ici est d'écrire une formule exacte pour la fonction de répartition du maximum d'un processus χ satisfaisant certaines conditions de non-dégénérescence de ses marginales et de régularité, sur un intervalle réel $[0, T]$ et sur le rectangle $R_{T_1, T_2} := [0, T_1] \times [0, T_2]$, en vue d'une implémentation numérique.

Dimension 1

Commençons par le cas d'un intervalle $[0, T]$. Pour cela, on part du découpage suivant

$$\mathbb{P}(M_T > u) = \mathbb{P}(X(0) > u) + \mathbb{P}(\exists t \in]0, T]; X(t) = u, X'(t) > 0) \quad (1.60)$$

où $M_T = \max_{t \in [0, T]} X(t)$. Le premier terme se calcule très bien car $X(0) \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Pour le deuxième, afin de ne pas majorer comme dans (1.62) mais bien de conserver l'égalité, on se limite à un sous-ensemble aléatoire de $[0, T]$ appelé l'ensemble des points de record, défini par

$$\mathcal{R}_T = \{t \in [0, T]; \forall s < t, X(s) < X(t)\}.$$

Restreinte à \mathcal{R}_T , la relation imposée pour $N_u(\chi, [0, T])$ sera réalisée 0 ou 1 fois, ce qui revient à considérer une variable de Bernoulli. L'espérance étant égale à la probabilité de succès dans ce cas là, on a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\exists t \in]0, T]; X(t) = u, X'(t) > 0) &= \mathbb{E}(\#\{t \in \mathcal{R}_T; X(t) = u, X'(t) > 0\}) \\ &= \int_0^T \mathbb{E}\left(X'^+(t) \mathbb{1}_{t \in \mathcal{R}_T} \middle| X(t) = u\right) p_{X(t)}(u) dt \end{aligned}$$

où la dernière formule découle d'une formule de Kac-Rice similaire à (1.57). Cette méthode unidimensionnelle a déjà été implémentée par Azaïs-Genz dans [AG13] et Mercadier dans [Mer05], la discrétisation de $[0, T]$ donnant une borne supérieure très proche du résultat. Un des objectifs de cette thèse a été la mise en place d'un programme similaire à [AG13] dans le cas bidimensionnel.

Dimension 2

Le cas de la dimension 2 est un peu plus complexe, mais ne présente pas d'écueil majeur. La première différence réside dans l'application de la méthode des records, qui nécessite une relation d'ordre. Pour cela, on utilise l'ordre lexicographique défini par la relation \triangleleft satisfaisant

$$(s_1, s_2) \triangleleft (t_1, t_2) \Leftrightarrow \{s_2 < t_2\} \text{ ou } \{s_2 = t_2, s_1 < t_1\}.$$

La deuxième différence est le nombre de termes à considérer. En effet, pour appliquer une formule de Kac-Rice, nous devons considérer l'intérieur du rectangle, les bords de dimensions 1 et enfin l'origine. Les deux derniers éléments de cette décomposition sont déjà traités par le cas unidimensionnel. Le cas de l'intérieur du rectangle est un peu plus complexe. Pour le traiter, nous devons généraliser la formule de Kac-Rice (1.57) au cadre d'un champ aléatoire. Pour cela, nous reprenons la démonstration de (1.57), le pendant du compteur de Kac sur $[0, T]$ étant donné par la formule des aires.

Proposition 1.5.3. *Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 définie sur $U \subset \mathbb{R}^d$ ouvert, alors pour toute fonction $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée, on a*

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(u) N_u(f, B) du = \int_B |\det(f'(t))| g(f(t)) dt,$$

pour tout borélien $B \subset U$ tel que l'intégrale de droite soit bien définie.

En appliquant ce résultat aux trajectoires de notre champ aléatoire Gaussien et en supposant certaines conditions de non-dégénérescence similaires au cas uni-dimensionnel, on aboutit au théorème suivant,

Théorème 1.5.1. *Soit $Z : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ un champ aléatoire Gaussien à trajectoire \mathcal{C}^1 , U un ouvert de \mathbb{R}^d et $u \in \mathbb{R}^d$ fixé. Supposons de plus que :*

- Pour tout $t \in U$, $\text{Var}(Z(t))$ est défini positive,
- $\mathbb{P}(\exists t \in U, Z(t) = u, \det(Z'(t)) = 0) = 0$.

Alors, pour tout borélien $B \subset U$, on a

$$\mathbb{E}(N_u(Z, B)) = \int_B \mathbb{E} \left(|\det(Z'(t))| \middle| Z(t) = u \right) p_{Z(t)}(u) dt \quad (1.61)$$

où les deux termes sont finis si B est compact.

Ainsi, en appliquant le théorème précédent au champ (X, X^{10}) où $X^{10} = \frac{\partial X}{\partial t_1}$ sur l'intérieur du rectangle et en se ramenant à la méthode de dimension 1 pour les autres termes, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_{T_1, T_2} > u) &= \mathbb{P}(X(0) > u) + \int_{\partial R_{T_1, T_2}} \mathbb{E} \left(|Y'(t)| \middle| Y(t) = u \right) p_{Y(t)}(u) dt \\ &+ \int_{R_{T_1, T_2}} \mathbb{E} \left(\left| \frac{\partial^2 X^-}{\partial t_1^2}(t) \frac{\partial X^+}{\partial t_1}(t) \right| \middle| X(t) = u, \frac{\partial X}{\partial t_1}(t) = 0 \right) p_{(X(t), \frac{\partial X}{\partial t_1}(t))}(u, 0) dt_1 dt_2 \end{aligned}$$

où $M_{T_1, T_2} = \max_{R_{T_1, T_2}} X(t)$, $Y(t) = X(\rho(t))$ et $\rho(\cdot)$ est une paramétrisation de classe \mathcal{C}^1 de chaque côté du rectangle. Signalons que cette dernière représentation a déjà été utilisée par Mercadier [Mer05, Mer06] dans le cadre d'un processus Gaussien centré stationnaire, sans toutefois apporter de grandes garanties numériques pour des niveaux u quelconques.

1.5.3 Approximation pour la loi du maximum

La méthode des records n'étant pas facilement implémentable, et pas forcément connue, plusieurs méthodes donnant une valeur asymptotique en u pour la fonction de répartition du maximum d'un processus Gaussien stationnaire ont été développées ces cinquante dernières années. Nous citons ici les trois principales. Dans tous les cas, la stationnarité est une hypothèse cruciale.

Méthode de Rice

La première méthode, dite méthode de Rice, détaillée dans [AW09], s'applique au cas d'un processus différentiable. Elle est basée sur l'égalité (1.60). Contrairement à la méthode des records, nous allons majorer le deuxième terme. Pour cela, on écrit

$$\mathbb{P}(\exists t \in]0, T]; X(t) = u, X'(t) > 0) = \mathbb{P}(U_u(\chi, [0, T]) \geq 1) \leq \mathbb{E}(U_u(\chi, [0, T])).$$

où $U_u(\chi, [0, T])$ est défini en (1.69). De plus, dans le cas stationnaire, en utilisant (1.58), on a la majoration finale

$$\mathbb{P}(M_T > u) \leq \bar{\Phi}(u) + \frac{\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{2\pi}} T \phi(u). \quad (1.62)$$

Notons que l'erreur commise par cette méthode est de l'ordre de $\phi(u)$ lorsque $u \rightarrow +\infty$ (voir chapitre 4 [AW09]).

Méthode de Pickands

La deuxième approximation a été donnée par Pickands [Pic69]. Cette fois, nous considérons le cas d'un β -processus, i.e. dont la fonction de covariance ρ vérifie

$$\rho(t) = 1 - C|t|^\beta + o(|t|^\beta) \text{ lorsque } t \rightarrow 0,$$

où C est une constante et $0 < \beta < 2$. Dans ce cadre, l'approximation de Pickands est donnée par

$$\mathbb{P}(M_T > u) \simeq TC^{1/\beta} u^{(2/\beta)-1} \phi(u) H_\beta \text{ lorsque } u \rightarrow +\infty \quad (1.63)$$

L'objet de nombreux articles [AC10, DY14, Har14, LLR89] a été d'essayer de déterminer cette constante H_β , dite constante de Pickands. Cette dernière a fait l'objet de conjectures, contredites par la suite, et n'est à cette heure connue explicitement que dans les cas $H_1 = 1$ et $H_2 = 1/\sqrt{\pi}$. Dans les autres cas, nous ne disposons que d'estimations numériques (voir [DY14]).

Méthode de la caractéristique d'Euler-Poincaré

A la différence des deux méthodes précédentes, la méthode de la caractéristique d'Euler ou Euler-Poincaré est une méthode très générale qui permet de caractériser certains objets géométriques en dimension N quelconque. Si on se place dans le cadre donné par [AT07], elle s'applique à des espaces stratifiés de Whitney. Plus précisément, elle s'applique à un espace

$$E = \bigcup_{k=0}^N \partial_k E, \quad (1.64)$$

où les $\partial_k E$ sont des variétés k -dimensionnelles disjointes satisfaisant certaines hypothèses de régularité et où $N = \dim(E)$. On définit alors sa caractéristique d'Euler par

$$\varphi(E) = \sum_{j=0}^N (-1)^{(N-j)} \alpha_j(\mathcal{S}_E) \quad (1.65)$$

où \mathcal{S}_E est le complexe simplicial généré par E , voir [Alex30], et où α_j est une fonction qui compte le nombre de facettes de dimension j de \mathcal{S}_E . On pourra se référer au chapitre 8 de [AT07] pour plus de détails.

L'idée générale de l'approximation est de calculer l'espérance de la caractéristique d'Euler de l'ensemble d'excursion

$$A_u := A_u(\chi, E) = \{t \in E; X(t) \geq u\} \quad (1.66)$$

en utilisant une formule de type Kac-Rice sur le processus χ supposé centré Gaussien stationnaire. Dans le cas particulier d'un rectangle de \mathbb{R}^N , i.e. $E = \prod_{i=1}^N [0, T_i]$, on obtient alors

$$\mathbb{E}(\varphi(A_u)) = \bar{\Phi}\left(\frac{u}{\gamma_0}\right) + e^{-u^2/2\sigma^2} \sum_{k=1}^N \sum_{J \in \mathcal{O}_k} \frac{\#\{J\} \sqrt{\det(\Gamma_J)}}{(2\pi)^{(k+1)/2} \gamma_0^k} H_{k-1}\left(\frac{u}{\gamma_0}\right) \quad (1.67)$$

où \mathcal{O}_k désigne les $\binom{N}{k}$ sous-faces de dimension $k \geq 1$ de E (le terme $\bar{\Phi}$ traitant l'origine), Γ_J est une matrice de taille $k \times k$ contenant les seconds moments spectraux de χ , i.e.

$$\gamma_{ij} = \int_{\mathbb{R}^N} x_i x_j \mu(dx),$$

tels que (i, j) sont des indices libres de la face J et H_k désigne les polynômes d'Hermite, définis par (7.3).

Dans la suite, nous nous limiterons au cas simple du rectangle R_{T_1, T_2} . En reprenant la formule (1.67), la partition \mathcal{O}_1 se limite aux 4 côtés du rectangle et \mathcal{O}_2 à la face de dimension 2, ce qui donne l'approximation

$$\mathbb{P}\left(\max_{t \in R_{T_1, T_2}} X(t) \geq u\right) \simeq \mathbb{E}(\varphi(A_u(\chi, R_{T_1, T_2}))) = e^{-u^2/2} \left[\frac{T_1 T_2 \gamma_2}{(2\pi)^{3/2}} u + \frac{(T_1 + T_2) \gamma_2^{1/2}}{2\pi} \right] + \bar{\Phi}(u) \quad (1.68)$$

où le processus χ a été normalisé par $\gamma_0 = 1$ et $\mathbb{V}(X') = I_n$.

Contribution

Le premier chapitre de la partie IV de ce manuscrit est consacré en premier lieu à la mise en place d'un programme basé sur la méthode des records permettant de juger de l'efficacité de la méthode de la caractéristique d'Euler sur un rectangle R_{T_1, T_2} pour un niveau u "élevé". Dans un deuxième temps, nous comparons les méthodes de Pickands et de Rice en dimension 1, toujours dans un cadre statistique où u est "élevé". Enfin, nous proposons une nouvelle approximation en dimension 1, simplement heuristique, mais efficace sur des niveaux u qui ne sont pas forcément hauts. Cette dernière permet, par exemple, de traiter des problèmes statistiques liés à la médiane.

1.5.4 Compléments sur le nombre de franchissements

Dans ce dernier paragraphe, nous revenons sur le nombre de franchissements $N_u(\chi, [0, T])$ d'un processus Gaussien stationnaire normalisé ($\gamma_0 = 1$) et non-dégénéré ($\rho(t) \neq \pm 1$ si $t \neq 0$). On considère plus particulièrement le nombre de "up-crossings", noté $U_u(\chi, [0, T])$, défini par

$$U_u(\chi, [0, T]) = \#\{t \in [0, T]; X(t) = u, X'(t) > 0\}, \quad (1.69)$$

et représente le nombre de points t où le processus χ passe au dessus du niveau u . Cette limitation, purement technique, consiste seulement à diviser N_u par 2 dans le cas stationnaire afin d'obtenir des limites plus classiques en probabilité. On rappelle alors la formule donnée pour l'espérance

$$\mathbb{E}(U_u(\chi, [0, T])) = \frac{\gamma_2}{\sqrt{2\pi}} T \phi(u),$$

la stationnarité impliquant $N_u(\chi, [0, T]) = 2U_u(\chi, [0, T])$. Une question qui peut se poser est celle du comportement asymptotique de $U_u(\chi, [0, T])$. Quelle limite en loi ? Pour quelle normalisation ? Pour quel niveau ? Une première réponse a été apportée par Volkonskii et Rozanov [Vol59, Roz61],

Théorème 1.5.2. Soit χ un processus Gaussien centré à trajectoires p.s. \mathcal{C}^1 normalisé et non dégénéré satisfaisant les conditions de Berman (H1) et de Geman (H2) donnée par

$$(H1) \quad \rho(t) \log(t) \longrightarrow 0 \text{ lorsque } t \longrightarrow +\infty,$$

$$(H2) \quad \int_0^t \frac{\theta'(s)}{s^2} ds \text{ converge en } 0^+ \text{ avec } \theta(s) = \rho(s) - 1 + \gamma_2 \frac{s^2}{2},$$

alors le processus défini par

$$R_u(t) = U_u\left(\chi, \left[0, \frac{2\pi}{\gamma_2} \exp\left(\frac{u^2}{2}\right)\right]\right)$$

converge en loi vers un processus de Poisson standard.

Ce théorème démontre que le nombre de up-crossings, pris sur un intervalle de longueur telle que l'espérance soit constante, converge en loi vers un processus de Poisson. Ce premier résultat a été complété plus tard par Kratz et León [KL97] dans le cadre d'un niveau u fixé et d'un intervalle de longueur T tendant vers l'infini. Ils démontrent que dans ce cas, après normalisation, le nombre de up-crossings converge vers une loi normale.

Théorème 1.5.3. *Soit χ un processus Gaussien centré à trajectoires p.s. \mathcal{C}^1 normalisé et non dégénéré satisfaisant la condition de Geman (H2) et la condition de mélange (H3) donnée par*

$$(H3) \int_0^\infty |\rho(t)|dt < \infty, \int_0^\infty |\rho'(t)|dt < \infty, \int_0^\infty |\rho''(t)|dt < \infty,$$

alors, pour un σ connu, on a le résultat de convergence en loi suivant

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \left(U_u(\chi, [0, T]) - T\gamma_2 \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{2\pi} \right) \Rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2) \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty.$$

Ces deux résultats, malgré la complexité de leurs preuves, sont en réalité assez intuitifs. Dans le premier cas, on est amené à considérer un processus χ sur $[0, T]$ que l'on compare à un niveau de l'ordre de $\sqrt{2 \log(T)}$. Si l'on décompose le nombre de up-crossings sur $[0, T]$ en sous-intervalles de longueur 1 par exemple, asymptotiquement, $U_u(\chi, [0, \sqrt{2 \log(T)}])$ est équivalent à une somme de variables de Bernoulli dont l'espérance tend vers 0 avec T mais dont l'espérance de la somme est constante. Le théorème (7.2.2) est donc assimilable à un théorème central limite Poissonien où les variables de Bernoulli ne sont pas indépendantes mais faiblement dépendantes. Au contraire, dans le deuxième cas, l'espérance de la somme tend vers l'infini, on entre alors dans le cadre d'un théorème central limite.

Contribution

Le deuxième chapitre de la partie IV de ce manuscrit est une contribution au comportement des up-crossings dans le cadre d'un niveau $u_T < \sqrt{2 \log(T)}$. D'après la motivation décrite précédemment, nous restons dans le cas où l'espérance du nombre de franchissements tend vers l'infini, ce qui nous place moralement dans le bassin d'attraction Gaussien. Cependant, nous n'avons pas réussi à démontrer pleinement ce dernier résultat. Nous donnons néanmoins plusieurs résultats sur la variance et le comportement des up-crossings dans ce cas, ainsi qu'un théorème central limite dans un cadre plus restrictif.

Collaboration

La suite de ce manuscrit est composée de 3 parties comprenant chacune 2 chapitres. Le chapitre 3 est issu de réflexions personnelles. Les chapitres 2, 4 et 5 sont issus de collaborations avec Jean-Marc Azaïs et Yohann de Castro. La dernière partie, contenant les chapitres 6 et 7, est basée sur des travaux réalisés avec Jean-Marc Azaïs.

Première partie

**Gaussian matrices and sparse signal
recovery**

Chapitre 2

A Rice method proof of the Null Space Property over the Grassmannian

2.1 Introduction

2.1.1 Null-Space Property

One of the simplest inverse problem can be described as follows : given a matrix $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ and $y \in \text{Im}(X)$, can we faithfully recover β^* such that the identity $y = X\beta^*$ holds? In the ideal case where $n \geq p$ and the matrix X is one to one (namely, the model is identifiable), this problem is elementary. However, in view of recent applications in genetics, signal processing, or medical imaging, the frame of high-dimensional statistics is governed by the opposite situation where $n < p$. To bypass the limitations due to the lack of identifiability, one usually assumes that the matrix X is at random and one considers the ℓ_1 -minimization procedure [CDS98] :

$$\Delta_X(\beta^*) \in \arg \min_{X\beta = X\beta^*} \|\beta\|_1, \quad (P_{\ell_1})$$

where $\beta^* \in \mathbb{R}^p$ is a “target” vector we aim to recover. Interestingly, Program (P_{ℓ_1}) can be solved efficiently using linear programming, e.g. [CT05]. Furthermore, the high-dimensional models often assume that the target vector β^* belongs to the space Σ_s of s -sparse vectors :

$$\Sigma_s := \{\beta \in \mathbb{R}^p, \|\beta\|_0 \leq s\},$$

where $\|\beta\|_0$ denotes the size of the support of β . Note that this framework is the baseline of the flourishing Compressed Sensing (CS), see [CRT06a, Don06a, CDD09, Cal12] and references therein. A breakthrough brought by CS states that if the matrix X is drawn at random (e.g. X has i.i.d. standard Gaussian entries) then, with overwhelming probability, one can faithfully recover $\beta^* \in \Sigma_s$ using (P_{ℓ_1}) . More precisely, the interplay between randomness and ℓ_1 -minimization shows that with only $n = \mathcal{O}(s \log(p/s))$, one can faithfully reconstruct any s -sparse vector β^* from the knowledge of X and $y := X\beta^*$. Notably, this striking fact is governed by the Null-Space Property (NSP).

Definition 4 (Null-Space Property of order s and dilatation C). *Let $0 < s < p$ be two integers and G be a sub-space of \mathbb{R}^p . One says that the sub-space G satisfies NSP(s, C), the Null-Space Property of order s and dilatation $C \geq 1$, if and only if :*

$$\forall \gamma \in G, \forall S \subset \{1, \dots, p\} \text{ s.t. } |S| \leq s, \quad C \|\gamma_S\|_1 \leq \|\gamma_{S^c}\|_1,$$

where S^c denotes the complement of S , the vector γ_S has entry equal to γ_i if $i \in S$ and 0 otherwise, and $|S|$ is the size of the set S .

As a matter of fact, one can prove [CDD09] that the operator Δ_X is the identity on Σ_s if and only if the kernel of X satisfies NSP(s, C) for some $C > 1$.

Theorem 2.1.1 ([CDD09]). *For all $\beta^* \in \Sigma_s$ there is a unique solution to (P_{ℓ_1}) and $\Delta_X(\beta^*) = \beta^*$ if and only if the null space $\text{Ker}(X)$ of the matrix X enjoys NSP(s, C) for some $C > 1$. Moreover, if $\text{Ker}(X)$ enjoys NSP(s, C) for some $C > 1$ then for all $\beta^* \in \mathbb{R}^p$,*

$$\|\beta^* - \Delta_X(\beta^*)\|_1 \leq \frac{2(C+1)}{C-1} \min_{|S| \leq s} \|\beta^* - \beta_S^*\|_1.$$

Additionally, NSP suffices to show that any solution to (P_{ℓ_1}) is comparable to the s -best approximation of the target vector β^* . Theorem 2.1.1 demonstrates that NSP is a natural property that should be required in CS and High-dimensional statistics. This analysis can be lead a step further considering Lasso [Tib96] or Dantzig selector [CT07]. Indeed, in the frame of noisy observations, ℓ_1 -minimization procedures are based on sufficient conditions like Restricted Isometry Property (RIP) [CT07], Restricted Eigenvalue Condition (REC) [BRT09], Compatibility Condition (CC) [VdGB09], Universal Distortion Property (UDP) [dC13], or $H_{s,1}$ condition [JN11]. Note that all of these properties imply that the kernel of the matrix X satisfies NSP. While there exists pleasingly ingenious and simple proofs of RIP, see [Cal12] for instance, a direct proof of NSP (without the use of RIP) remains a challenging issue.

2.1.2 Contribution

Given $(\rho, \delta) \in]0, 1[^2$, set $s_n = \lfloor \rho n \rfloor$ and $p_n = \lfloor \frac{n}{\delta} \rfloor$ where $\lfloor \cdot \rfloor$ denotes the integer part. Consider $G(n, p_n)$ be uniformly distributed on the Grassmannian $\text{Gr}_m(\mathbb{R}^{p_n})$ where $m = p_n - n$ or equivalently $G(n, p_n) = \text{Ker}(X(n, p_n))$ where $X(n, p_n) \in \mathbb{R}^{n \times p_n}$ denotes a matrix with i.i.d. centered Gaussian entries. In this paper, we describe a region of parameters (ρ, δ) such that the probability $\mathbb{P}[G(n, p_n) \text{ enjoys NSP}(s_n, C)]$ tends to one as n goes to infinity. Our result provides a new and simple description of such region of parameters (ρ, δ) .

Theorem 2.1.2. *Let $C \geq 1$. For all $n \geq 1$, set $s_n = \lfloor \rho n \rfloor$ and $p_n = \lfloor \frac{n}{\delta} \rfloor$. Let $G(n, p_n)$ be uniformly distributed on the Grassmannian $\text{Gr}_m(\mathbb{R}^{p_n})$ where $m = p_n - n$. If $\delta \geq (1 + \pi/2)^{-1} \simeq 0.389$ and*

$$\begin{aligned} & \rho \log \left(\sqrt{\frac{\pi}{2eC^2}} \frac{(1-\rho)^2}{\rho^2} \right) + \log \left(C e \frac{\sqrt{\rho(1-\delta)(1+(C^2-1)\rho)}}{(1-\rho)(1+(2C^2-1)\rho)\sqrt{\delta}} \right) \\ & + \frac{1}{\delta} \log \left(\sqrt{\frac{2}{e\pi}} \frac{1+(2C^2-1)\rho}{(1-\rho)\sqrt{\delta(1-\delta)(1+(C^2-1)\rho)}} \right) \leq 0 \end{aligned}$$

then $\mathbb{P}[G(n, p_n) \text{ enjoys NSP}(s_n, C)]$ tends exponentially to one as n goes to infinity.

In Figure 6, we display the lower bound on NSP given Theorem 2.1.2 for various choices of constant $C \geq 1$. We emphasize that the condition $\{\delta \geq (1 + \pi/2)^{-1}\}$ is due to technical considerations depicting an union bound on $\mathcal{O}(e^{1/\delta})$ spheres in our proof. Note that Theorem 2.2.1 gives a lower bound for any values of δ . Interestingly, we can compare our result with the strong phase transition on NSP of Donoho and Tanner [DT05]. Although both transitions are defined by implicit equations (which makes it difficult to give a comparison), they can be faithfully computed by standard solvers with prescribed precision. In Figure 7, we present this numerical comparison which unveils the following behaviors :

- As $\delta \rightarrow 0$ (depicting the $n \ll p$ framework), Donoho and Tanner [DT05] uncover a $(s \log(p/(\sqrt{\pi n})))$ -bound (see Page 305 in [FR13] for instance). In this regime, our bound compares unfavorably and we cannot obtain the standard $s \log(p/s)$ -bound of Compressed Sensing with our argument.

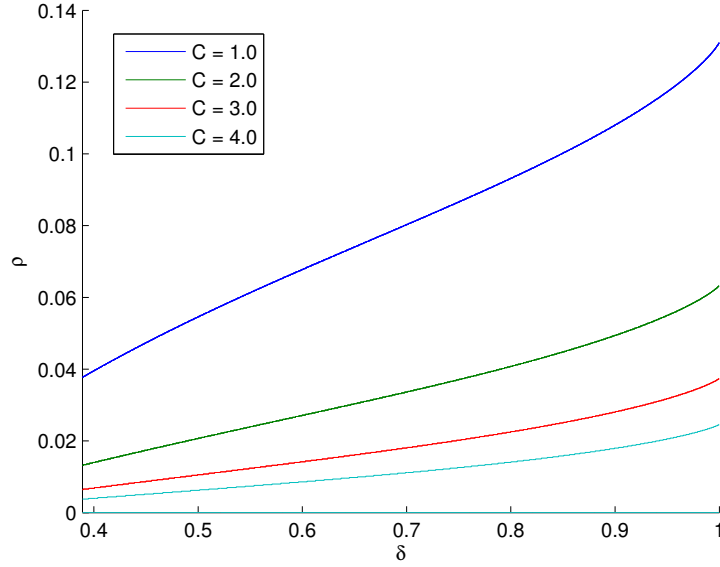


FIGURE 6 – The phase transition of Theorem 2.1.2. From top to bottom, $C = 1, 2, 3, 4$.

- In the regime $n \sim p$, our results compare favorably with the strong phase transition up to a multiplicative constant less than 1.8, see Figure 8 and the example below.

Example 1. In the case $C = 1$, we can compare our result (see Theorem 2.1.2) given by the set of $(\rho, \delta) \in]0, 1[^2$ such that $\delta \geq (1 + \pi/2)^{-1}$ and such that

$$\rho \log \left[\sqrt{\frac{\pi}{2e}} \frac{(1-\rho)^2}{\rho^2} \right] + \log \left[e \frac{\sqrt{\rho(1-\delta)}}{(1-\rho)(1+\rho)\sqrt{\delta}} \right] + \frac{1}{\delta} \log \left[\sqrt{\frac{2}{e\pi}} \frac{1+\rho}{(1-\rho)\sqrt{\delta(1-\delta)}} \right]$$

is non-positive to the work of Donoho and Tanner [DT05] (see Figure 8). Observe that, up to a constant bounded by 1.8, we recover the strong phase transition on NSP.

We outline that explicit expressions of lower bounds on the phase transition can be found in Section 2.2.

2.1.3 Direct proofs of NSP with dilatation $C = 1$

To the best of our knowledge, all the direct proofs of NSP with dilatation $C = 1$ are based either on integral convex geometry theory, Gaussian widths, the approximate kinematic formula, or empirical process theory. This section is devoted to a short review of some state-of-the-art results on direct proofs of NSP.

Grassmann angles

In a captivating series of papers [DT05, Don06b, DT09b, DT09a], Donoho and Tanner have proved that the kernel of a matrix $X(n, p_n) \in \mathbb{R}^{n \times p_n}$ with i.i.d. centered Gaussian entries enjoys a phase transition, i.e. there exists a function $\rho_S :]0, 1[\rightarrow]0, 1[$ such that for all $(\rho, \delta) \in]0, 1[^2$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}[\text{Ker}(X(n, p_n)) \text{ enjoys NSP}(s_n, 1)] = \begin{cases} 0 & \text{if } \rho > \rho_S(\delta), \\ 1 & \text{if } \rho < \rho_S(\delta), \end{cases}$$

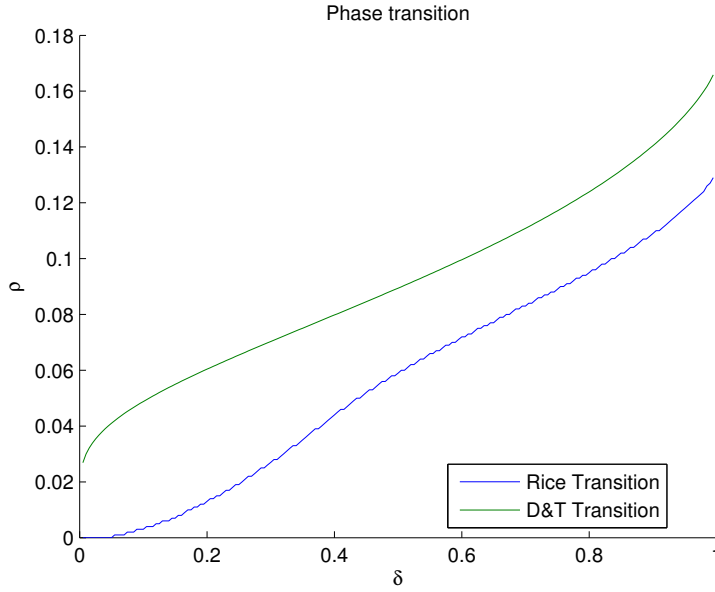


FIGURE 7 – The panel illustrates numerically the border of the region described by Theorem 2.2.1 (blue line) for which NSP holds ($\Pi \simeq 0$) and the strong phase transition of Donoho and Tanner (green line). Note that the region (ρ, δ) such that $\Pi \simeq 0$, i.e. $\text{NSP}(s, 1)$ holds, is located below the curve. Simulations have been performed with $n = 200.000$.

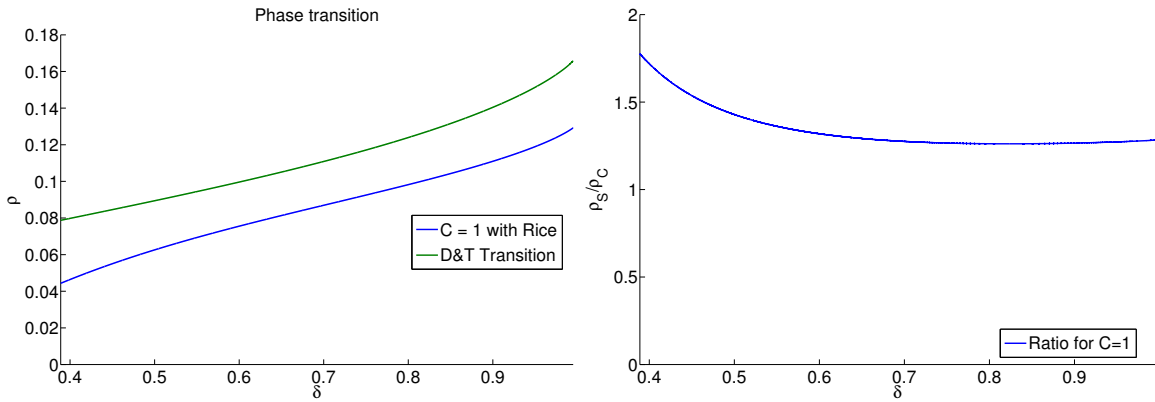


FIGURE 8 – On the left, comparison between the border of the region described by Theorem 2.1.2 (blue line) and the strong phase transition of Donoho and Tanner (green line) for $\delta \geq 0.39$. On the right, ratio between the green and the blue line.

where we recall that $s_n = \lfloor \rho n \rfloor$ and $p_n = \lfloor \frac{n}{\delta} \rfloor$. Moreover, they have characterized implicitly and computed numerically the function ρ_S (note that the subscript S stands for “Strong” since ρ_S is often named the “strong threshold”). Observe their approach is based on computation of Grassmann angles of a polytope due to Affentranger and Schneider [AS92] and Vershik and Sporyshev [VS92]. Furthermore, note their phase transition is characterized implicitly using an equation involving inverse Mills ratio of the standard normal density. However, they have derived a nice explicit expression of the phase transition for small values of δ , i.e. when $\delta \rightarrow 0$. Hence, they uncover that, in the regime $n \ll p$, $\text{NSP}(s, 1)$ holds when $n \geq Cs \log(\frac{p}{s})$ for n large enough.

Gaussian widths

In recent works [Sto09, Sto13], Stojnic has shown a simple characterization of the sign of the exponent appearing in the expression of the “weak threshold” given by Donoho and Tanner. Note the weak threshold governs the exact reconstruction by ℓ_1 -minimization of s -sparse vectors with prescribed support and signs, while NSP characterizes the exact reconstruction of all s -sparse vectors. In the paper [Sto09], using “Gordon’s escape through a mesh” theorem, Stojnic has derived a simpler implicit characterization of the strong threshold ρ_S . As in Donoho and Tanner’s work, observe this implicit characterization involves inverse Mill’s ratio of the normal distribution and no explicit formulation of ρ_S can be given.

Predating Stojnic’s work, Rudelson and Vershynin (Theorem 4.1 in [RV08]) were the first to use “Gordon’s escape through the mesh” theorem to derive a non-asymptotic bound on sparse recovery. A similar result can be found in the astonishing book of Foucart and Rauhut, see Theorem 9.29 in [FR13]. Observe that these results hold with a probability at least $1 - \alpha$ and their bounds depend on $\log(\alpha)$ so one needs one more step to derive a lower bound on the strong phase transition. We did not pursue in this direction.

Approximate kinematic formula

In the papers [MCT12, ALMT13], the authors present appealing and rigorous quantitative estimates of weak thresholds appearing in convex optimization, including the location and the width of the transition region. Recall that NSP is characterized by the strong threshold. Nevertheless, the weak threshold describes a region where NSP cannot be satisfied, i.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}[G(n, p_n) \text{ enjoys NSP}(s_n, 1)] = 0.$$

Based on the approximate kinematic formula, the authors have derived recent fine estimates of the weak threshold. Although their result has not been stated for the strong threshold, their work should provide, invoking a simple union bound argument, a direct proof of NSP with dilatation $C = 1$.

Empirical process theory

Using empirical process theory, Lecué and Mendelson [LM14] gives a direct proof of NSP for matrices X with sub-exponential rows. Although the authors do not pursue an expression of the strong threshold, their work shows that NSP with dilatation $C = 1$ holds, with overwhelming probability, when :

$$n \geq c_0 s \log\left(\frac{ep}{s}\right), \tag{2.1}$$

with $c_0 > 0$ a universal (unknown) constant.

A previous direct proof of NSP with dilatation $C \geq 1$

Using integral convex geometry theory as in Donoho and Tanner’s works [DT05, Don06b, DT09b, DT09a], Xu and Hassibi have investigated [XH08, XH11] the property $\text{NSP}(s, C)$ for values $C \geq 1$. Their result uses an implicit equation involving inverse Mill’s ratio of the normal distribution and no explicit formulation of their thresholds can be derived. To the best of our knowledge, this is the only proof of $\text{NSP}(s, C)$ for values $C > 1$ predating this paper.

2.1.4 Simple bounds on the phase transition

As mentioned in Proposition 2.2.17 of [Cal12], if NSP holds then

$$n \geq c_1 s \log\left(\frac{c_2 p}{s}\right), \quad (2.2)$$

with $c_1, c_2 > 0$ are universal (unknown) constants. The result of Section 2.1.3 shows that a similar bound is also sufficient to get NSP. What can be understood is that the true phase transition (as presented in [DT05, Don06b, DT09b, DT09a]) lies between the two bounds described by (2.1) (lower bound) and (2.2) (upper bound). Observe that these bounds can be equivalently expressed in terms of $\rho = s/n$ and $\delta = n/p$. Indeed, one has :

$$\{n \geq c_1 s \log\left(\frac{c_2 p}{s}\right)\} \Leftrightarrow \{A_* \rho \delta \log(A_* \rho \delta) \geq -B_* \delta\}, \quad (2.3)$$

where $A_* = c_2^{-1} > 0$ and $1/e \geq B_* = c_1^{-1} c_2^{-1} > 0$. Denote by W_0 (resp. W_{-1}) the first (resp. the second) Lambert W function, see [Cal96] for a definition. We deduce that (2.3) is equivalent to :

$$\rho \leq \frac{\exp(W_{-1}(-B_* \delta))}{A_* \delta} \quad \text{or} \quad \rho \geq \frac{\exp(W_0(-B_* \delta))}{A_* \delta}. \quad (2.4)$$

Furthermore, the papers [DT05, Don06b, DT09b, DT09a] show that NSP enjoys a phase transition that can be described as a region $\rho \leq \rho_S(\delta)$, see Section 2.1.3. In particular, one can check that the region described by the right hand term of (2.4) cannot be a region of solutions of the phase transition problem. We deduce from [Cal12, LM14] that ρ_S , the phase transition of Donoho and Tanner [DT05, Don06b, DT09b, DT09a], can be bounded by the left hand term of (2.4). Hence, it holds the following result.

Theorem 2.1.3. *The strong threshold ρ_S (phase transition of NSP) of Donoho and Tanner [DT05, Don06b, DT09b, DT09a] is bounded by :*

$$\forall \delta \in]0, 1[, \quad \frac{\exp(W_{-1}(-B_1 \delta))}{A_1 \delta} \leq \rho_S(\delta) \leq \frac{\exp(W_{-1}(-B_2 \delta))}{A_2 \delta} \quad (2.5)$$

where $A_1, A_2 > 0$ and $1/e \geq B_1, B_2 > 0$ are universal (unknown) constants.

Although bounds (2.1) (lower bound) and (2.2) (upper bound) are known, their expressions as exponential of second Lambert W functions remain overlooked in the literature. As a matter of fact, Figure 9 depicts a comparison between ρ_S and :

$$\delta \mapsto \frac{\exp(W_{-1}(-0.3394\delta))}{1.38\delta}, \quad (2.6)$$

where the strong threshold curve has been taken from [DT05, Don06b, DT09b, DT09a]. Roughly speaking, the curve (2.6) shows empirically that NSP holds when :

$$n \geq 4s \log(0.7p/s),$$

for large values of s, n, p . Recall that it is still an open problem to find a closed form for the weak and the strong thresholds. In the regime $\delta \rightarrow 0$, Donoho and Tanner [DT05, Don06b, DT09b, DT09a] have proved that the phase transition enjoys

$$n \geq 2es \log(p/(\sqrt{\pi}s)) \simeq 5.4s \log(0.6p/s),$$

in the asymptotic.

2.1.5 Outline of the paper

The main theorem (Theorem 2.2.1) is stated in the next section and Section 3 proves it. Section 4 is devoted to the proof of Theorem 2.1.2. All the numerical experiments can be reproduced using the codes available at [Mou15a].

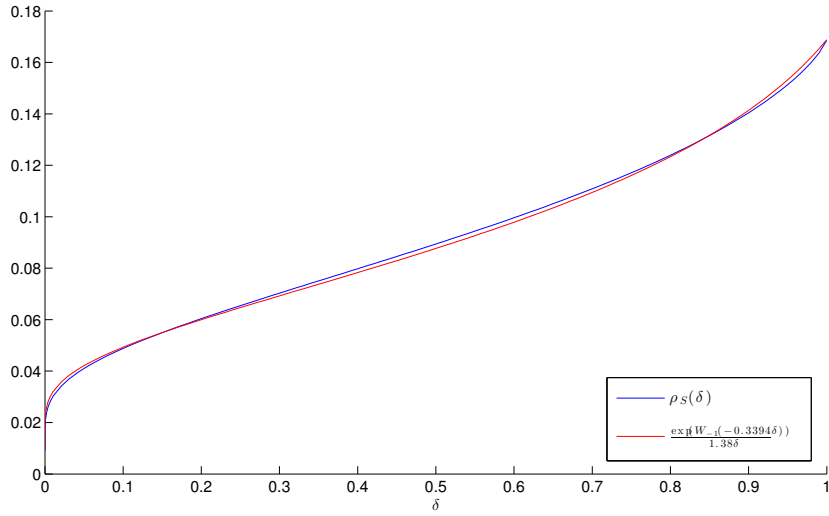


FIGURE 9 – The strong threshold ρ_s and the mapping $\delta \mapsto \frac{\exp(W_{-1}(-0.3394\delta))}{1.38\delta}$.

2.2 Rice method bound for NSP with dilatation $C \geq 1$

In this paper, we prove NSP following a new path based on stochastic processes theory and more precisely on the Rice method [AW05, AW09]. This latter is specially design to study the tail of the maximum of differentiable random processes or random fields. Similarly to the case of a deterministic function, it consists of studying the maximum through the zeros of the derivative. For the tail of a stationary Gaussian process defined on the real line, it is known from the work of Piterbarg [Pit81] that it is super-exponentially sharp.

However, the situation here is more involved than in the aforementioned papers since the considered process $X(t)$ is defined on the sphere (as in the recent work [ABA13] for example), non Gaussian and, last but not least, non differentiable. Note that the paper [CW03] studies the maximum of locally linear process by a smoothing argument. Contrary to this paper, we will use a partition of the sphere and directly the Rice method. This provides a short and direct proof of NSP(s, C) for any value $C \geq 1$. Our main result reads as follows.

Theorem 2.2.1 (Explicit lower bound). *Let $0 < s < n < p$ and $m = p - n$. Let $G(n, p)$ be the kernel of $X(n, p)$, a $(n \times p)$ random matrix with i.i.d. centered Gaussian entries, then for all $C \geq 1$, it holds :*

$$\mathbb{P}[G(n, p) \text{ enjoys NSP}(s, C)] = 1 - \Pi,$$

with Π satisfying

$$\Pi \leq \sqrt{\pi} \left[\sum_{k=0}^{p-n-1} \binom{p}{k} \left(\frac{C^2 s}{\tilde{p}_{C,k}} \right)^{\frac{p-n-1-k}{2}} \frac{\Gamma(\frac{2p-2k-n-1}{2})}{\Gamma(\frac{p-k}{2})\Gamma(\frac{p-n-k}{2})} \psi_{p-k}(C) \mathbf{Q}(k, \tilde{p}_{C,k}, m) \right], \quad (2.7)$$

where Γ denotes the Gamma function, $\psi_{p-k}(C)$ is defined by Lemma 2.5.2, $\mathbf{Q}(k, \tilde{p}_{C,k}, m)$ is defined by Lemma 2.3.2 and $\tilde{p}_{C,k} := (C^2 - 1)s + p - k$.

From this bound we can deduce a lower bound on the phase transition depending on ρ and δ as presented in Theorem 2.1.2. Recall that the case $C = 1$ has been compared to the strong phase transition below Theorem 2.1.2. We have seen that the bound of Theorem 2.2.1 is informative and almost sharp in the regime $n \sim p$. However, investigating the last term of the sum (2.7) (i.e. when $k = p - n - 1$) as $\delta \rightarrow 0$, one can check that the bound (2.7) is at least of the order of $\mathcal{O}((1/\delta)^n)$, which is not informative. The bound of Theorem 2.2.1 is illustrated in Figure 10 for various $C \geq 1$.

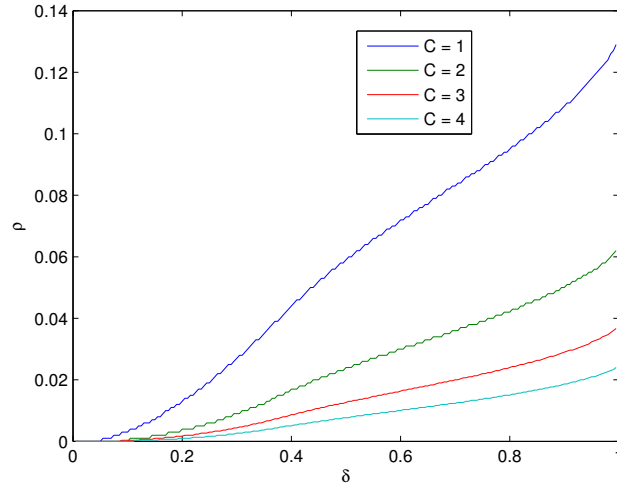


FIGURE 10 – The region $\Pi \simeq 0$ (NSP holds) for $C = 1, 2, 3, 4$ (from bottom to top) based on Theorem 2.2.1. Simulations have been performed with $n = 200.000$.

2.3 Proof of Theorem 2.2.1

2.3.1 Model and notation

Let $0 < s < n < p$, let $C > 1$ and set $m = p - n$. Let $G(n, p)$ be uniformly distributed on the Grassmannian $\text{Gr}_m(\mathbb{R}^p)$. Observe that it can be generated by m independent standard Gaussian vectors $g_i \in \mathbb{R}^p$ for $i = 1, \dots, m$. Define $\{Z(t); t \in \mathbb{S}^{m-1}\}$ the process with values in \mathbb{R}^p given by :

$$Z(t) := \sum_{i=1}^m t_i g_i.$$

Note this process spans $G(n, p)$ and it can be written as

$$\text{for } j = 1, \dots, p, \quad Z_j(t) = \langle t, g^j \rangle,$$

where $(g^j)_{j=1}^p$ are independent Gaussian random vectors with standard distribution in \mathbb{R}^m . Let O_p and O_m two orthogonal matrices of size, respectively, $(p \times p)$ and $(m \times m)$. Thanks to unitarily invariance of the Gaussian distribution, remark that :

$$\forall t \in \mathbb{S}^{m-1}, \quad O_p Z(t) O_m \sim Z(t).$$

Consider now the ordered statistics of the absolute values of the coordinates of $Z(t)$:

$$|Z_{(1)}(t)| \geq \dots \geq |Z_{(p)}(t)|,$$

where the ordering $((1), \dots, (p))$ is always uniquely defined if we adopt the convention of keeping the natural order in case of ties. Given a sparsity s , a degree of freedom m , and a degree of constraint p , consider the real valued process $\{X(t); t \in \mathbb{S}^{m-1}\}$ such that :

$$X(t) = C|Z_{(1)}(t)| + \dots + C|Z_{(s)}(t)| - [|Z_{(s+1)}(t)| + \dots + |Z_{(p)}(t)|]. \quad (2.8)$$

NSP is equivalent to the fact that this process is always non positive. We will prove that it happens with an overwhelming probability.

2.3.2 Cutting the sphere out

As we will see later, the process $X(\cdot)$ is locally linear over some subsets and to take benefit of that, we need to consider a particular partition of the sphere.

Let $A \subseteq \{1, \dots, p\}$, define the random subsets \mathbb{S}_A and $\dot{\mathbb{S}}_A$ of the unit sphere \mathbb{S}^{m-1} by :

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_A &= \{t \in \mathbb{S}^{m-1}; Z_A(t) = 0\}, \\ \dot{\mathbb{S}}_A &= \{t \in \mathbb{S}^{m-1}; Z_A(t) = 0 \text{ and } \forall j \notin A, Z_j(t) \neq 0\},\end{aligned}$$

where we denote $Z_A(t) = (Z_j(t))_{j \in A}$. One can check that \mathbb{S}_A is the unit sphere of the orthogonal of $V_A := \text{Span}\{g^j; j \in A\}$. This implies that a.s. \mathbb{S}_A is a random sphere of dimension $m - 1 - |A|$ if $|A| \leq m - 1$ and is almost surely empty if $|A| > m - 1$. It follows that the quantities $|Z_{(1)}(t)|, \dots, |Z_{(n+1)}(t)|$ are a.s. positive and that a.s.

$$\mathbb{S}^{m-1} = \bigcup_{|A| \leq m-1} \mathbb{S}_A,$$

giving a partition of the sphere. We define also, for later use, the random subset \mathcal{W} by :

$$\mathcal{W} := \{t \in \mathbb{S}^{m-1}; |Z_{(s)}(t)| = |Z_{(s+1)}(t)|\}.$$

Observe that, conditionally to g^j , the set \mathcal{W} is closed with empty interior.

2.3.3 Probability of failure

We consider the probability :

$$\Pi = \mathbb{P}\{\mathcal{M} > 0\} \leq \sum_{|A| \leq m-1} \mathbb{P}\{\mathcal{M}_{\dot{\mathbb{S}}_A} > 0\}, \quad (2.9)$$

where \mathcal{M} and $\mathcal{M}_{\dot{\mathbb{S}}_A}$ are respectively the number of positive local maximum of $X(\cdot)$ along \mathbb{S}^{m-1} and $\dot{\mathbb{S}}_A$. The baseline of our proof is to upper-bound each right hand side probabilities, using the expected number of positive local maximum above zero and Markov inequality. The first element is Lemma 2.5.2 proving that :

$$\forall t \in \dot{\mathbb{S}}_A, \quad \mathbb{P}\{X(t) > 0\} \leq \psi_{p-k}(C),$$

where $k := |A|$ and :

$$\psi_{p-k}(C) = \binom{p-k}{s} \left(\frac{C^2 4s}{\pi} \right)^{\frac{p-k-s}{2}} \frac{\Gamma((p-k)/2)}{\Gamma(s/2)\Gamma(p-k-s+1)},$$

where Γ denotes the Gamma function. The second element is that $X(t)$ admits a density $p_{X(t)}$. To check that, note that $|Z_{(1)}(t)|, \dots, |Z_{(p)}(t)|$ are the order statistics of the absolute values of i.i.d. Gaussian variables and thus they have a known joint density on the simplex $|Z_{(1)}| \geq \dots \geq |Z_{(p)}|$. Formula (2.8) implies the existence of a density for $X(t)$. Moreover, this density does not depend on t due to invariance of Gaussian distribution.

2.3.4 Initialization : local maxima on $\dot{\mathbb{S}}_\emptyset$

By considering the symmetry properties of the sphere $\dot{\mathbb{S}}_\emptyset$, we have :

$$\mathbb{P}\{\mathcal{M}_{\dot{\mathbb{S}}_\emptyset} > 0\} \leq \frac{1}{2} \mathbb{E}(\mathcal{M}_{\dot{\mathbb{S}}_\emptyset}).$$

In this part, our aim will be to give bound to the expectation using a Kac-Rice formula. One can check that if t belongs to $\dot{\mathbb{S}}_\emptyset$ and does not belong to \mathcal{W} , $X(\cdot)$ is locally the sum of the absolute values of some s coordinates multiplied by C minus the sum of the absolute values of the other coordinates. It can be written as :

$$X(u) = C\varepsilon_1 Z_{(1)}(u) + \cdots + C\varepsilon_s Z_{(s)}(u) + \varepsilon_{s+1} Z_{(s+1)}(u) + \cdots + \varepsilon_p Z_{(p)}(u),$$

where $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p$ are random variables taking values ± 1 .

Lemma 2.3.1. *Let $t \in \mathbb{S}^{m-1}$ then, almost surely, it holds $t \in \dot{\mathbb{S}}_\emptyset$ and $t \notin \mathcal{W}$. Furthermore, the spherical gradient $X'(t)$ and the spherical Hessian $X''(t)$ of $X(\cdot)$ along \mathbb{S}^{m-1} at t exist and :*

- $X''(t) = -X(t)I_{m-1}$.
- $(X(t), X''(t))$ and $X'(t)$ are independent.
- $X'(t)$ has a Gaussian centered isotropic distribution onto t^\perp with variance $\tilde{p}_{C,0} = (sC^2 + (p-s))$

Proof 1. *The fact that, with probability 1, $t \in \dot{\mathbb{S}}_\emptyset$ and $t \notin \mathcal{W}$ implies that the process $X(\cdot)$ is locally given by*

$$X(u) = C\varepsilon_1 Z_{(1)}(u) + \cdots + C\varepsilon_s Z_{(s)}(u) + \varepsilon_{s+1} Z_{(s+1)}(u) + \cdots + \varepsilon_p Z_{(p)}(u),$$

where the signs $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ and the ordering $(1), \dots, (p)$ are those of t . The process $X(\cdot)$ is locally linear and thus differentiable around t and its gradient in \mathbb{R}^m at t , denoted $\dot{X}(t)$, is given by

$$C\varepsilon_1 g^{(1)} + \cdots + C\varepsilon_s g^{(s)} + \varepsilon_{s+1} g^{(s+1)} + \cdots + \varepsilon_p g^{(p)}.$$

Moreover, note that its Hessian on \mathbb{R}^m vanishes.

Let us consider now the spherical gradient $X'(t)$ and the spherical Hessian $X''(t)$. It is well known that $X'(t) = P_{t^\perp} \dot{X}(t)$, where P_{t^\perp} is the orthogonal projection onto the orthogonal of t . As for the spherical Hessian, it is defined on the tangent space t^\perp and is equal to the projection of the Hessian in \mathbb{R}^m , which vanishes, minus the product of the normal derivative by the identity matrix. This is detailed in Lemma 2.5.3. In the case of the unit sphere, the vector normal to the sphere at t is t itself and

$$X''(t) = -\langle \dot{X}(t), t \rangle I_{m-1} = -X(t)I_{m-1}.$$

In the case of $X'(t)$, remark that $Z(t)$ and thus $X(t)$, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, (1), \dots, (p))$ are functions of $(P_t(g^1), \dots, P_t(g^p)) = (Z_1(t)t, \dots, Z_p(t)t)$ (with obvious notation). They are therefore independent of $X'(t)$ which is a function of $(P_{t^\perp}(g^1), \dots, P_{t^\perp}(g^p))$. Conditionally to $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, (1), \dots, (p))$, $X'(t)$ can be written as

$$X'(t) = (C\varepsilon_1 P_{t^\perp} g^{(1)} + \cdots + C\varepsilon_s P_{t^\perp} g^{(s)} + \varepsilon_{s+1} P_{t^\perp} g^{(s+1)} + \cdots + \varepsilon_p P_{t^\perp} g^{(p)}),$$

which implies that the conditional distribution of $X'(t)$ is Gaussian with variance-covariance matrix $(sC^2 + (p-s))\text{Id}_{t^\perp}$, where Id_{t^\perp} is the identity operator on t^\perp . Since $X'(t)$ is independent of $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, (1), \dots, (p))$ this conditional distribution is in fact equal to the unconditional distribution.

The next step is to prove that a.s. there is no local maximum on \mathcal{W} . The case where there are tied among the $|Z_i(t)|$ has to be considered (though it happens with probability 0 for a fixed t). Note that the order statistics and the ordering remain uniquely defined because of our convention. Suppose that $t \in \mathcal{W}$. Since all the possible ordering $((1), \dots, (p))$ and signs $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ play the same role by unitarily invariance of the distribution of $Z(t)$ for all t , we make the proof in the particular case where $((1), \dots, (p))$ is the identity and all the signs $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ are positive :

$$Z_1(t) \geq \dots \geq Z_{s-h-1}(t) > Z_{s-h}(t) = \dots = Z_{s+k}(t) > Z_{s+k+1}(t) \geq \dots \geq Z_p(t) > 0.$$

Then, for w in some neighborhood N of t (not included in \mathcal{W}), we have :

$$X(w) = CZ_1(w) + \cdots + CZ_{s-h-1}(w) + (1+C)\text{Max}_h(Z_{s-h}(w) + \cdots + Z_{s+k}(w)) - (Z_{s-h}(w) + \cdots + Z_p(w)),$$

where Max_h is the sum of the h largest element of its $(h+k+1)$ arguments. As being the maximum of $\binom{h}{(s+k)+1}$ linear forms the function Max_h is convex.

Let us consider in detail the vectors g^{s-h}, \dots, g^{s+k} . With probability 1, they are pairwise different. The point t is chosen such that their projection on t coincide. As a consequence the derivatives of the linear forms $Z_\ell(w) = \langle g^\ell, w \rangle$, $\ell = (s-h) \dots (s+k)$ on the tangent space t^\perp are pairwise different. This implies that the function Max_h has some direction in which it is strictly convex and as a consequence t cannot be a local maximum.

Suppose that $t \notin W$, and suppose that we limit our attention to points t such that $X(t) > 0$, then Lemma 2.3.1 implies that $X''(t)$ cannot be singular.

This last condition implies that we can apply Theorem 5.1.1 of [Adl81]. This lemma is a Kac type formula that shows that the zeros of the derivative $X'(t)$ are isolated and thus in finite number. In addition recalling that $\mathcal{M}_{\dot{S}_\emptyset}$ is the number of positive local maximum of $X(\cdot)$ and belonging to \dot{S}_\emptyset , this number satisfies

$$\mathcal{M}(\dot{S}_\emptyset) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{V(\delta)} \int_{\mathbb{S}^{m-1}} \mathbb{E}(|\det X''(t)| \mathbb{1}_{|X'(t)-0| < \delta} \mathbb{1}_{t \in \dot{S}_\emptyset} \mathbb{1}_{X(t) > 0}) \sigma(dt),$$

where σ is the surfacic measure on \mathbb{S}^{m-1} and $V(\delta)$ is the volume of the ball $B(\delta)$ with radius δ . Passing to the limit using the Fatou lemma gives :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathcal{M}(\dot{S}_\emptyset)) &\leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \int_0^\infty dx \int_{\dot{S}_\emptyset} dt p_{X(t)}(x) \\ &\quad \frac{1}{V(\delta)} \int_{B(\delta)} dx' p_{X'(t)}(x') \mathbb{E}(|\det(X''(t))| \mid X(t) = x, X'(t) = x') \\ &\leq (2\pi \tilde{p}_{C,0})^{\frac{1-m}{2}} 2 \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^\infty x^{m-1} p_{X(t)}(x) dx, \end{aligned}$$

where $p_{X(t)}(x)$ denotes the density of $X(t)$ at x and Γ denotes the Gamma function. Note that we have used :

- the fact that every point t is equivalent so we can replace the integral on the unit sphere by the volume of the unit sphere $2\pi^{\frac{m}{2}}/\Gamma(\frac{m}{2})$ and the value at a given point,
- $\mathbb{E}(|\det(X''(t))| \mid X(t) = x, X'(t) = x') = x^{m-1}$,
- the Gaussian density $p_{X'(t)}(x')$ is bounded by $(2\pi \tilde{p}_{C,0})^{\frac{1-m}{2}}$.

So it remains to bound $\mathbb{E}[(X(t)^+)^{m-1}]$. For that purpose we write $X(t)$ as the independent product $\|Z(t)\|_2 Y(t)$, where the process $Y(t)$ is constructed exactly as the process $X(t)$ but starting now from a uniform distribution U on the unit sphere \mathbb{S}^{p-1} instead of the standard Gaussian distribution of $Z(t)$. Using standard results on the moments of the χ^2 distribution we have :

$$\mathbb{E}((X(t)^+)^{m-1}) = 2^{\frac{m-1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{m-1+p}{2})}{\Gamma(\frac{p}{2})} \mathbb{E}((Y(t)^+)^{m-1}).$$

We use now the fact that $Y(t) \leq C\sqrt{s}$ to get that :

$$\mathbb{E}((Y(t)^+)^{m-1}) \leq (C\sqrt{s})^{m-1} \mathbb{P}\{Y(t) > 0\}.$$

Moreover, Lemma 2.5.2 shows that, with probability greater than $1 - \psi_p(C)$, a standard Gaussian vector g in \mathbb{R}^p enjoys :

$$C \|g_S\|_1 \leq \|g_{S^c}\|_1.$$

This implies that :

$$\mathbb{P}\{Y(t) > 0\} \leq \psi_p(C), \quad (2.10)$$

and consequently the probability of having a local maximum above 0 on \mathbb{S}_\emptyset is bounded by :

$$\sigma(\mathbb{S}_\emptyset) (2\pi\tilde{p}_0)^{\frac{1-m}{2}} 2^{\frac{m-1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{m-1+p}{2})}{\Gamma(\frac{p}{2})} (C\sqrt{s})^{m-1} \psi_p(C) \leq 2\sqrt{\pi} \left(\frac{C^2s}{\tilde{p}_{C,0}}\right)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{m-1+p}{2})}{\Gamma(\frac{p}{2})\Gamma(\frac{m}{2})} \psi_p(C) \quad (2.11)$$

Denote the right hand side of this last inequality by $h_C(s, m, p)$.

2.3.5 Maximum on smaller spheres

Let us now consider the case of a maximum on \mathbb{S}_A , $A \neq \emptyset$. A point $t \in \mathbb{S}_A \setminus \mathcal{W}$ is a local maximum on \mathbb{S}^{m-1} if it satisfies the following conditions :

- it is a local maximum along \mathbb{S}_A ,
- its super-gradient along the orthogonal space V_A contains zero,

where the super-gradient is defined as the opposite of the sub-gradient. One can easily check that the two conditions are independent. Indeed, recall that $k = |A|$ and $V_A = \text{Span}\{g^i; i \in A\}$ (see Section 2.3.2) and consider the process $X(\cdot)$ conditionally to V_A . In that case, \mathbb{S}_A becomes a deterministic sphere of dimension $m - k - 1$. Moreover, note that the behavior of $X(\cdot)$ on \mathbb{S}_A depends only on the $g^j, j \notin A$ and that for such j ,

$$Z_j(t) = \langle g^j, t \rangle = \langle \Pi_{V_A^\perp} g^j, t \rangle,$$

so, conditionally to V_A , the distribution of $X(t)$ corresponds to the case \mathbb{S}_\emptyset in the space of dimension $m - k$ instead of m and with $p - k$ vectors. In conclusion, the first condition leads to the same computations as the case \mathbb{S}_\emptyset and is bounded by

$$h_C(s, m - k, p - k) = 2\sqrt{\pi} \left(\frac{C^2s}{\tilde{p}_{C,k}}\right)^{\frac{p-n-1-k}{2}} \frac{\Gamma(\frac{2p-2k-n-1}{2})}{\Gamma(\frac{p-k}{2})\Gamma(\frac{p-n-k}{2})} \psi_{p-k}(C).$$

Let us look to the second one which depends only on the $g^j, j \in A$. Thus we have to compute the probability of the super-gradient to contain zero. Indeed, locally around t , the behavior of $X(w)$ along V_A is the sum of some linear forms (for $j \notin A$) and of absolute value of linear forms (for $j \in A$) thus it is locally concave and we can define its super-gradient. More precisely, for w in a neighborhood of $t \in \mathbb{S}_A \setminus \mathcal{W}$,

$$X(w) = X_A(w) + X_{A^c}(w),$$

where, because $k \leq p - s$:

$$X_A(w) = - \sum_{i \in A} |Z_i(w)|.$$

Around t , $X_{A^c}(w)$ is differentiable and, with a possible harmless change of sign (see Lemma 2.3.1), its gradient is given by :

$$\sum_{i \in A^c} C_i g^i,$$

where the coefficient C_i takes the value C for s of them and -1 for the others. This gradient is distributed as an isotropic normal variable $\xi \in V_A$ with variance :

$$\tilde{p}_{C,k} = (C^2 - 1)s + p - k.$$

By this we mean that the distribution of ξ , in a convenient basis, is $\mathcal{N}(0, \tilde{p}_{C,k} I_k)$. Let us now consider the case $i \in A$. Observe that the super-gradient along V_A of the concave function $-|Z_i(t)|$ at point t is the segment $[-g^i, g^i]$ and thus the super-gradient of $X_A(t)$ is the zonotope :

$$Zo = \sum_{i \in A} [-g^i, g^i], \quad (2.12)$$

where the sum denotes the Minkowsky addition. Recall that the distribution of $X(t)$ does not depend on t .

In conclusion, the probability of the super-gradient to contain zero is equal to $\mathbf{P}(k, \tilde{p}_{C,k}, m)$ the probability of the following event :

- draw k standard Gaussian variables g^1, \dots, g^k in \mathbb{R}^m and consider the zonotope Zo given by formula (2.12),
- draw in the space V_A generated by g^1, \dots, g^k an independent isotropic normal variable ξ of variance $\tilde{p}_{C,k}$,
- define $\mathbf{P}(k, \tilde{p}_{C,k}, m)$ as the probability of ξ to be in Zo .

Lemma 2.3.2. Define the orthonormal basis e^1, \dots, e^k obtained by Gram-Schmidt orthogonalization of the vectors g^1, \dots, g^k . Then :

- (a) $\mathbf{P}(k, \tilde{p}_{C,k}, m)$ is less than the probability $\mathbf{Q}(k, \tilde{p}_{C,k}, m)$ of ξ to be in the hyper-rectangle :

$$R = \sum_{i \in A} [-\langle e^i, g^i \rangle e^i, \langle e^i, g^i \rangle e^i],$$

- (b) this last probability satisfies :

$$(\mathbf{Q}(k, \tilde{p}_{C,k}, m))^2 \leq \left(\frac{2}{\pi \tilde{p}_{C,k}} \right)^{H_k + k - m} \frac{H_k!}{(m - k)!},$$

with $H_k = \lfloor (\frac{\pi}{2} \tilde{p}_{C,k}) \wedge m \rfloor$, where $\lfloor \cdot \rfloor$ is the integer part.

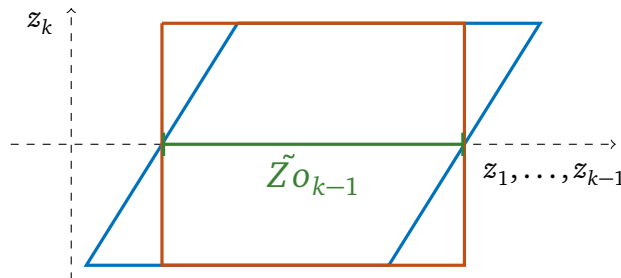


FIGURE 11 – The standard Gaussian measure of the zonotope (in blue) is smaller than that of the rectangle (in red) with basis Z^o_{k-1} (in green).

Proof 2. (a) We prove the result conditionally to the g^i 's and by induction on k . When $k = 1$ the result is trivial since the zonotope and the rectangle are simply the same segment.

Let φ_h be the standard Gaussian distribution on \mathbb{R}^h , $\mathbf{P}(k, \tilde{p}_{C,k}, m)$ is equal to :

$$\varphi_k((\tilde{p}_{C,k})^{-1/2} \cdot Z_0) =: \varphi_k(\widetilde{Z_0}).$$

Via Gram-Schmidt orthogonalization at step k , we can compute this probability using the Fubini theorem :

$$\mathbf{P}(k, \tilde{p}_{C,k}, m) = \int_{-\frac{\langle e^k, g^k \rangle}{\sqrt{\tilde{p}_{C,k}}}}^{\frac{\langle e^k, g^k \rangle}{\sqrt{\tilde{p}_{C,k}}}} \varphi_{k-1}(\widetilde{Z_0}_{k-1} + v z) \varphi(z) dz,$$

where φ is the standard Gaussian density on \mathbb{R} , $\widetilde{Z_0}_{k-1}$ is the zonotope generated by g^1, \dots, g^{k-1} and normalized by $(\tilde{p}_{C,k})^{-1/2}$ and v is some vector in \mathbb{R}^m . By use of the Anderson inequality [And55], the non-centered zonotope $(\widetilde{Z_0}_{k-1} + v z)$ has a smaller standard Gaussian measure than the centered one so

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k, \tilde{p}_{C,k}, m) &\leq \int_{-\frac{\langle e^k, g^k \rangle}{\sqrt{\tilde{p}_{C,k}}}}^{\frac{\langle e^k, g^k \rangle}{\sqrt{\tilde{p}_{C,k}}}} \varphi_{k-1}(\widetilde{Z_0}_{k-1}) \varphi(z) dz \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \varphi(z_1) \dots \varphi(z_k) dz_1 \dots dz_k =: \mathbf{Q}(k, \tilde{p}_{C,k}, m). \end{aligned}$$

The last inequality is due to the induction hypothesis. It achieves the proof.

(b) We use the relation above and deconditioning on the g^i . Note the dimension of the edges of the rectangle R are independent with distribution :

$$2\chi(m), 2\chi(m-1), \dots, 2\chi(m-k+1),$$

where the law $\chi(d)$ is defined as the square root of a $\chi^2(d)$. As a consequence, using the independence of the components of ξ in the basis e^1, \dots, e^k and the fact that a Student density T is uniformly bounded by $(2\pi)^{-1/2}$, we get that :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(k, \tilde{p}_{C,k}, m) &= \mathbb{P}(\xi \in R) = \prod_{\ell=0}^{k-1} \mathbb{P}\left[|T(m-\ell)| \leq \sqrt{\frac{m-\ell}{\tilde{p}_{C,k}}}\right] \\ &= \prod_{\ell=m-k+1}^m \mathbb{P}\left[|T(\ell)| \leq \sqrt{\frac{\ell}{\tilde{p}_{C,k}}}\right]. \end{aligned}$$

Suppose that $\pi\tilde{p}_{C,k} \geq 2m$, then a convenient bound is obtained by using the fact that a Student density is uniformly bounded by $(2\pi)^{-1/2}$:

$$(\mathbf{Q}(k, \tilde{p}_{C,k}, m))^2 \leq \left(\frac{2}{\pi\tilde{p}_{C,k}}\right)^k \frac{m!}{(m-k)!}.$$

In the other case, set $H_k = \lfloor (\pi\tilde{p}_{C,k})/2 \rfloor$, where $\lfloor \cdot \rfloor$ is the integer part. Observe that $H_k > m - k + 1$ for $k \geq 1$ to remove factors that are greater than 1 in the computation and obtain

$$(\mathbf{Q}(k, \tilde{p}_{C,k}, m))^2 \leq \left(\frac{2}{\pi\tilde{p}_{C,k}}\right)^{H_k+k-m} \frac{H_k!}{(m-k)!},$$

which conclude the proof.

Eventually, summing up over the $\binom{p}{k}$ sets of size k , we get Theorem 2.2.1.

2.4 Influence of smaller spheres

2.4.1 General bound on the sum

In this part, we simplify the general bound of Theorem 2.2.1 to derive a simpler one, exponentially decreasing in n , as presented in Theorem 2.1.2. Considering (2.7), we have :

$$\Pi \leq \sqrt{\pi} \sum_{k=1}^m B_k(s, n, p) \quad (2.13)$$

where :

$$\begin{aligned} B_k(s, n, p) &= \binom{p}{n+k} \binom{n+k}{s} \left(\frac{C^2 s}{\tilde{p}_{m-k}} \right)^{\frac{k+1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + k - \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+k}{2}) \Gamma(\frac{k}{2})} \\ &\quad \times \left(\frac{C^2 4s}{\pi} \right)^{\frac{n+k-s}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n+k}{2}) \sqrt{H_{m-k}!}}{\Gamma(\frac{s}{2}) (n+k-s)! \sqrt{k!}} \left(\frac{2}{\pi \tilde{p}_{C, m-k}} \right)^{\frac{H_{m-k}-k}{2}} \end{aligned}$$

In order to derive a lower bound (the aforementioned bound goes exponentially fast towards zero), we limit our attention to the case described by

- (H1) $\rho \leq 1/2$,
- (H2) $\frac{1}{\delta} \leq 1 + \pi/2(1 + \rho(C^2 - 1))$.

Observe that (H1) is not a restriction since we know that NSP does not hold for $\rho \geq 0.2$. Under (H2), note that $\forall k, H_k = m$, and hence

$$\begin{aligned} \Pi &\leq \mathbf{R}(s, n, p) \frac{p!}{s! \sqrt{m!} \Gamma(s/2)} \left(\frac{4C^2 s}{\pi} \right)^{\frac{n-s}{2}} \sum_{i=1}^m \binom{m}{k} \frac{(2C^2 s)^k \Gamma(\frac{n}{2} + k)}{(n-s+k)!^2} \left(\frac{2}{\pi \tilde{p}_{C, m-k}} \right)^{\frac{m}{2}} \\ &\leq \mathbf{R}(s, n, p) \frac{p!}{s! (n-s)! \sqrt{m!} \Gamma(s/2)} \left(\frac{4C^2 s}{\pi} \right)^{\frac{n-s}{2}} \\ &\quad \times \sum_{i=1}^m \binom{m}{k} \frac{(2C^2 s)^k \Gamma(\frac{n}{2} + k)}{(n-s)^k (n-s+k)!} \left(\frac{2}{\pi \tilde{p}_{C, m-k}} \right)^{\frac{m}{2}}, \end{aligned}$$

where $\mathbf{R}(s, n, p)$ is a polynomial term in (s, n, p) . Consider now the quantity

$$\alpha(k) := \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + k)}{(n-s+k)!}$$

which is a decreasing function of k under assumption (H1) and the fact that $\tilde{p}_{C, k}$ is an increasing function of k , then we obtain

$$\Pi \leq \mathbf{R}(s, n, p) \frac{p! \Gamma(n/2)}{s! (n-s)!^2 \sqrt{m!} \Gamma(s/2)} \left(\frac{4C^2 s}{\pi} \right)^{\frac{n-s}{2}} \sum_{i=1}^m \binom{m}{k} \frac{(2C^2 s)^k}{(n-s)^k} \left(\frac{2}{\pi \tilde{p}_{C, m-1}} \right)^{\frac{m}{2}}.$$

At last, using Stirling Formula (see Lemma 2.5.1), it yields

$$\Pi \leq \mathbf{R}(s, n, p) \frac{p! \Gamma(n/2)}{s! (n-s)!^2 \Gamma(s/2)} \left(\frac{4C^2 s}{\pi} \right)^{\frac{n-s}{2}} \left(\frac{2e}{\pi(n + (C^2 - 1)s)m} \right)^{\frac{m}{2}} \left(1 + \frac{2C^2 s}{n-s} \right)^m.$$

Gathering the piece, one has :

$$\Pi \leq \mathbf{R}(s, n, p) \left(\sqrt{\frac{\pi}{2eC^2} \frac{(n-s)^2}{s^2}} \right)^s \left(C e \frac{\sqrt{ns m(n + (C^2 - 1)s)}}{(n-s)(n + (2C^2 - 1)s)} \right)^n \times \left(\sqrt{\frac{2}{e\pi} \frac{p(n + (2C^2 - 1)s)}{(n-s)\sqrt{m(n + (C^2 - 1)s)}}} \right)^p,$$

which gives the result of Theorem 2.1.2.

Remark. The upper bound on $\alpha(k)$ and the lower bound on $\tilde{p}_{C,k}$ may seem weak but they do not change the result on the phase transition because first terms of the sum give the right order on ρ and δ . To ensure that, see figure 12, which compare the numerical bound with the one of Theorem 2.1.2.

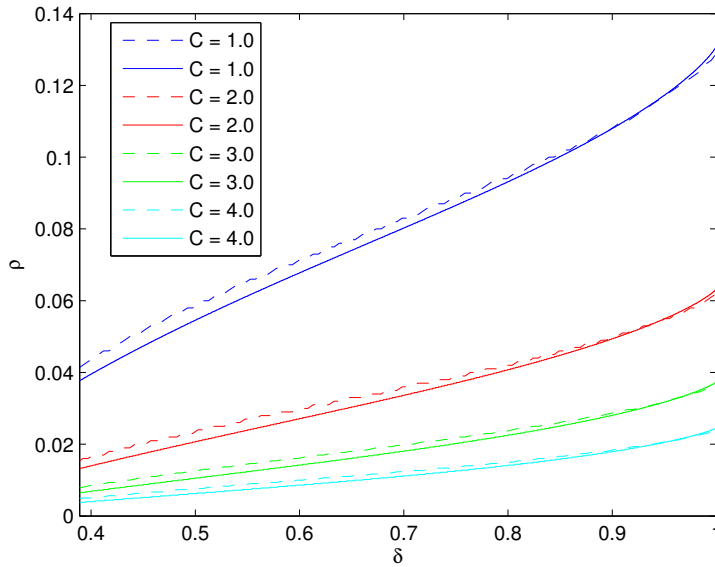


FIGURE 12 – Comparison between the phase transition of Theorem 2.1.2 and the numerical approximation given by Theorem 2.2.1 ($\Pi \simeq 0$ with $n = 200.000$, dashed line). From top to bottom, $C = 1, 2, 3, 4$.

2.5 Appendix

2.5.1 Stirling's formula

Lemma 2.5.1. *Let $z > 0$ then there exists $\theta \in (0, 1)$ such that :*

$$\Gamma(z + 1) = (2\pi z)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{z}{e}\right)^z \exp\left(\frac{\theta}{12z}\right).$$

In particular, if $z > 1/12$,

$$\left(\frac{z}{e}\right)^z \leq \Gamma(z + 1) \leq \sqrt{2\pi z} \left(\frac{z}{e}\right)^z$$

Proof 3. See [AS65] Eq. 6.1.38.

2.5.2 Concentration $\psi_l(C)$

Lemma 2.5.2. *Let $C \geq 1$, then, except with a probability smaller than :*

$$\psi_l(C) := \binom{l}{s} \left(\frac{C^2 4s}{\pi} \right)^{\frac{l-s}{2}} \frac{\Gamma(l/2)}{\Gamma(s/2)\Gamma(l-s+1)},$$

a standard Gaussian vector $g \in \mathbb{R}^l$ enjoys for all $S \subset \{1, \dots, l\}, |S| \leq s$,

$$C \|g_S\|_1 \leq \|g_{S^c}\|_1.$$

Proof 4. Let $\xi_C := \{v \in \mathbb{R}^l \text{ such that } \text{Span}(v) \text{ does not satisfy NSP}(s, C)\}$ and consider the joint law of standard Gaussian ordered statistics $(W_{(1)}, \dots, W_{(l)})$, then

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_C) &= 2^l l! \int_{\mathbb{R}^l} \mathbb{1}_{t \in \xi_C} \mathbb{1}_{t_1 \geq \dots \geq t_l} \varphi(t_1) \dots \varphi(t_l) dt_1 \dots dt_l \\ &= \frac{2^l l!}{(l-s)!} \int_{\mathbb{R}^{l-s} \times \mathbb{R}^s} \mathbb{1}_{t \in \xi_C} \mathbb{1}_{t_1 \geq \dots \geq t_s} \varphi(t_1) \dots \varphi(t_s) \varphi(t_{s+1}) \dots \varphi(t_l) dt_1 \dots dt_l \\ &\leq \frac{2^l l!}{(l-s)!} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{l-s}{2}} \int_{\mathbb{R}^s} \mathbb{1}_{t_1 \geq \dots \geq t_s} \frac{\lambda_{l-s}(B_1(C(t_1 + \dots + t_s)))}{2^{l-s}} \varphi(t_1) \dots \varphi(t_s) dt_1 \dots dt_s, \end{aligned}$$

where the last inequality relies on $\mathbb{P}(\mathcal{N}(0, I_{l-s}) \in B_1(t_1 + \dots + t_s))$ is bounded by the density function of $\mathcal{N}(0, I_{l-s})$ in 0 times the Lebesgue measure of the l_1 ball of radius $C(t_1 + \dots + t_s)$ in \mathbb{R}^{l-s} . Finally, as

$$\lambda_{l-s}(B_1(R)) = \frac{(2R)^{l-s}}{(l-s)!},$$

it implies,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_C) &\leq \left(\frac{2C^2}{\pi} \right)^{\frac{l-s}{2}} \frac{2^s l!}{(l-s)!^2} \int_{\mathbb{R}^s} (t_1 + \dots + t_s)^{l-s} \mathbb{1}_{t_1 \geq \dots \geq t_s} \varphi(t_1) \dots \varphi(t_s) dt_1 \dots dt_s \\ &= \left(\frac{2C^2}{\pi} \right)^{\frac{l-s}{2}} \frac{l!}{(l-s)! 2^s} \mathbb{E}((|W_1| + \dots + |W_s|)^{l-s}) \\ &= \left(\frac{2C^2}{\pi} \right)^{\frac{l-s}{2}} \binom{l}{s} \frac{1}{(l-s)!} \mathbb{E}(\|W\|_1^{l-s}), \end{aligned}$$

where W is a standard Gaussian vector in \mathbb{R}^s . At last, using bound on l_1 norm, it comes,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_C) &\leq \left(\frac{2C^2}{\pi} \right)^{\frac{l-s}{2}} \binom{l}{s} \frac{1}{(l-s)!} s^{\frac{l-s}{2}} \mathbb{E}(\|W\|_2^{l-s}) \\ &= \left(\frac{2C^2}{\pi} \right)^{\frac{l-s}{2}} \binom{l}{s} \frac{1}{(l-s)!} s^{\frac{l-s}{2}} 2^{\frac{l-s}{2}} \frac{\Gamma(l/2)}{\Gamma(s/2)}, \end{aligned}$$

where the last equality follows from classical results on the moment of the χ distribution.

2.5.3 Spherical Hessian

Lemma 2.5.3. *Denote $X''(\cdot)$ the Hessian of $X(\cdot)$ along the sphere \mathbb{S}^{m-1} then*

$$X''(t) = -X(t)I_{m-1}.$$

Proof 5. To compute the spherical Hessian, since every point plays the same role, we can compute it at the "east pole" $t = e_1$, the first vector of the canonical basis. Consider a basis (w_2, \dots, w_n) of the tangent space at $t = e_1$ and use, as a chart of the sphere, the orthogonal projection on this space.

Let $Y(t_2, \dots, t_m)$ be the process $X(\cdot)$ written in this chart in some neighborhood of e_1 . By the Pythagorean theorem,

$$Y(t_2, \dots, t_m) = X(\sqrt{1 - t_2^2 - \dots - t_m^2}, t_2, \dots, t_m).$$

Plugging this into the order two Taylor expansion of the process $X(\cdot)$ at $t = e_1$ gives

$$\begin{aligned} Y(t_2, \dots, t_m) = & X(e_1) + t_2 X'_2(e_1) + \dots + t_m X'_m(e_1) + \sum_{2 \leq i, j \leq m} \frac{t_i t_j}{2} X''_{ij}(e_1) \\ & - X'_1(e_1) \frac{t_2^2 + \dots + t_m^2}{2} + o(t_2^2 + \dots + t_m^2), \end{aligned}$$

where $X'_k(e_1) = \frac{\partial X}{\partial w_k}(e_1)$ and $X''_{ij}(e_1) = \frac{\partial^2 X}{\partial w_i \partial w_j}(e_1)$. As the process is locally linear, in a small enough neighborhood of e_1 , X''_{ij} is equal to zero and, by identification,

$$X''(e_1) = -X'_1(e_1)I_{m-1} = -X(e_1)I_{m-1}$$

giving the desired result.

Chapitre 3

A Rice method proof of the Restricted Isometry Property for Gaussian matrices

3.1 Introduction

Consider the under determined problem,

$$y = X\beta$$

where $\beta \in \mathbb{R}^p$, $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ is deterministic or random and $y \in \mathbb{R}^n$ is observed. This problem is obviously ill-posed in the general case, but if you suppose β sparse (with s -nonzero coefficients), Candès and Tao [CT05] introduced a sufficient condition, called the Restricted Isometry Property (RIP) to the reconstruction of β with l^1 minimization algorithm.

Suppose now your design matrix X is random drawn from Gaussian independent entries. We call it Gaussian ensemble. It has been proven that X satisfies this property (see [BCT11] for instance) with overwhelming probability. Our aim here is to provide a new proof using Rice method for Gaussian processes. More precisely, our purpose is to compute, using Rice formula, the sharpest bound on the density of the smallest and largest eigenvalue of a Wishart matrix (see definition below) which is the main tool in the proof of [BCT11].

3.1.1 Restricted Isometry Property

Let s, n, p be such that $2 < s < n < p$. Let $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ be a Gaussian matrix with entries $X_{i,j}$ satisfying

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}, \quad X_{i,j} \stackrel{i.i.d}{\sim} \mathcal{N}(0, 1).$$

Denote by Σ_s the set of s -sparse vectors of the Euclidean sphere \mathbb{S}^{p-1}

$$\Sigma_s = \{\gamma \in \mathbb{S}^{p-1}; \quad \|\gamma\|_0 \leq s\},$$

where $\|\gamma\|_0 = \#\{\gamma_i \neq 0\}$. The Restricted Isometry Property (RIP) has been introduced in the frame of Compressed Sensing. It reads as :

$$\forall \gamma \in \Sigma_s, \quad n(1 - \delta_0) \leq \|X\gamma\|_2^2 \leq n(1 + \delta_0),$$

where $0 < \delta_0 < \sqrt{2} - 1$ is a constant called the restricted isometry constant. So, for each $S \subseteq \{1, \dots, p\}$ such that $\dim(S) \leq s$,

$$n(1 - \delta_0) \leq d_s(B_S) \leq d_1(B_S) \leq n(1 + \delta_0) \tag{3.1}$$

where $d_1(B_S) \geq \dots \geq d_s(B_S)$ denote the ordered eigenvalues of $B_S := A^T A = X_S^T X_S$. Observe that you can limit your attention to sets S of size exactly s . The goal is to prove that RIP occurs with high probability or equivalently

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{RIP does not occur}) &\leq \sum_{S \subseteq \{1, \dots, p\}} \mathbb{P}\{d_s(B_S) < n(1 - \delta_0)\} + \mathbb{P}\{d_1(B_S) > n(1 - \delta_0)\} \\ &= \binom{p}{s} (\mathbb{P}\{d_s(B) < n(1 - \delta_0)\} + \mathbb{P}\{d_1(B) > n(1 - \delta_0)\}) \end{aligned}$$

where $B := B_{\{1, \dots, s\}}$ without loss of generality.

3.1.2 Previous works

In the paper [BCT11], Blanchard-Cartis-Tanner observed an asymmetry between the largest and the smallest eigenvalue and introduced the asymmetric RIP constants $L(s, n, p; X)$ and $U(s, n, p; X)$ defined as

$$L(s, n, p; X) := \min_{c \geq 0} c \text{ subject to } (1 - c)\|\gamma\|_2^2 \leq \|X\gamma\|_2^2 \text{ for all } \gamma \in \Gamma_s \quad (3.2)$$

$$U(s, n, p; X) := \min_{c \geq 0} c \text{ subject to } (1 + c)\|\gamma\|_2^2 \geq \|X\gamma\|_2^2 \text{ for all } \gamma \in \Gamma_s. \quad (3.3)$$

Moreover, they derive implicit solutions of differential equations (called $\mathcal{L}(\rho, \delta)$ and $\mathcal{U}(\rho, \delta)$) such that,

Theorem 3.1.1. *Fix $\epsilon > 0$. Under the proportional-growth asymptotic, sample each $n \times p$ matrix X from the Gaussian ensemble. Then*

$$\mathbb{P}(L(s, n, p; X) < \mathcal{L}(\delta, \rho) + \epsilon) \longrightarrow 1 \text{ and } \mathbb{P}(U(s, n, p; X) < \mathcal{U}(\delta, \rho) + \epsilon) \longrightarrow 1 \quad (3.4)$$

exponentially in n .

where proportional-growth asymptotic means a sequence of problem sizes (s, n, p) is said to grow proportionally if, for $(\delta, \rho) \in [0, 1]^2$, $\frac{n}{p} \longrightarrow \delta$ and $\frac{s}{n} \longrightarrow \rho$ as $n \longrightarrow \infty$. This theorem leads to phase transition results (for ρ and δ) and to the classical condition $n \geq C_1 s \log(C_2 p/s)$ which ensure the reconstruction of the s -sparse vector β . To prove theorem 3.1.1, Blanchard-Carter-Tanner use the sharpest known bound on the probability density function of d_1 and d_s .

Proposition 3.1.2. (Edelman [Ede88]) *Let d_1 and d_s be, respectively, the largest and the smallest eigenvalue of $W_{s, n}$, a $n \times s$ Wishart matrix, then*

$$f_{d_s}(x) \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x}{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n-s-1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{n-s+1}{2})\Gamma(\frac{n-s+2}{2})} =: v(x), \quad (3.5)$$

$$f_{d_1}(x) \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x}{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n+s-3}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} =: w(x), \quad (3.6)$$

where f_{d_i} is the density of d_i with respect to the Lebesgue measure on \mathbb{R} .

The purpose of the next section is to prove these two bounds using Rice formula.

3.2 Bounds for smallest and largest eigenvalue

Proposition 3.2.1. *With the notation of Proposition 3.1.2,*

$$f_{d_s}(x) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})} \int_0^u \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \times \left(\frac{1}{8\pi x}\right)^{\frac{s-1}{2}} \mathbb{E}\left(\det(W_{s-1,n-1} - xI_{s-1}) \mathbb{1}_{W_{s-1,n-1} \geq xI_{s-1}}\right) \leq v(x),$$

where $W_{s-1,n-1}$ is a Wishart matrix associated to a $(n-1) \times (s-1)$ Gaussian matrix and $\forall U, V$ square matrices, $U \geq V \iff U - V$ is a positive semi-definite matrix.

Let us focus on the proof of Proposition 3.2.1. Let $Z(\cdot)$ be a random process defined by

$$\forall t \in \mathbb{S}^{s-1}, \quad Z(t) := t^T B t.$$

Our aim is to compute the cumulative distribution function of the smallest eigenvalue of B , namely $d_s(B)$, with the Rice formula. As χ is a quadratic form, it reaches its minimum a.s. at exactly two points, v_s and $-v_s$, so

$$\mathbb{P}(d_s < u) = \frac{1}{2} \mathbb{E}(\#\{\text{local minima of } Z(\cdot) \text{ taking value in } [0, u]\}).$$

Thanks to the Rice formula on the sphere (see [AW09], p171, (6.18)), we compute the expectation of the number of local minima for a chi-square process

$$\mathbb{P}(d_s < u) = \frac{1}{2} \int_0^u \int_{\mathbb{S}^{s-1}} \mathbb{E}(\det(Z''(t)) \mathbb{1}_{Z''(t) \geq 0} | Z(t) = x, Z'(t) = 0) p_{Z(t), Z'(t)}(x, 0) dx dt,$$

where Z' and Z'' denote the gradient and the Hessian along the sphere both expressed in a convenient orthonormal basis of the tangent space t^\perp . Using invariance by isometry,

$$\mathbb{P}(d_s < u) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})} \int_0^u \mathbb{E}(\det(Z''(e_1)) \mathbb{1}_{Z''(e_1) \geq 0} | Z(e_1) = x, Z'(e_1) = 0) p_{Z(e_1), Z'(e_1)}(x, 0) dx. \quad (3.7)$$

In order to compute this expression, we compute first the joint density of $(Z(e_1), Z'(e_1))$. Since $Z'(e_1)$ is the tangential part of the gradient $2Be_1$, it holds

$$Z'(e_1) = \Pi_{e_1^\perp} 2Be_1 = 2 \Pi_{e_1^\perp} B e_1 = (2B_{21}, \dots, 2B_{s1})^T,$$

where $\Pi_{e_1^\perp}$ denotes the orthogonal projection onto e_1^\perp . Note that the definition of B implies

$$B_{j1} = \sum_{k=1}^n A_{kj} A_{k1},$$

so conditionally to $(A_{k1})_{1 \leq k \leq n}$, the components of $Z'(e_1)$ are independent and satisfies

$$B_{j1} \sim \mathcal{N}(0, \sum A_{k1}^2) \sim \mathcal{N}(0, B_{11}) \quad \text{so} \quad Z'(e_1) | (A_{k1})_k \sim \mathcal{N}(0, 4B_{11} I_{s-1}).$$

Moreover, as the conditional law only depends on the norm of $(A_{k1})_k$, it comes

$$Z'(e_1) | B_{11} \sim \mathcal{N}(0, 4B_{11} I_{s-1}).$$

Finally,

$$p_{Z(e_1), Z'(e_1)}(x, 0) = p_{\chi_n^2}(x) \times p_{\mathcal{N}(0, 4xI_{s-1})}(0) = \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \times \left(\frac{1}{8\pi x}\right)^{\frac{s-1}{2}}. \quad (3.8)$$

Now, if we consider the Hessian along \mathbb{S}^{s-1} ,

$$Z''(e_1) = \Pi_{e_1^\perp}(2B)\Pi_{e_1^\perp}^T - Z'_N(e_1)\Pi_{e_1^\perp}^T,$$

where $Z'_N(e_1)$ denotes the normal derivative in the direction e_1 . So, in the orthonormal basis (e_2, \dots, e_s)

$$Z''(e_1) = \Pi_{e_1^\perp}(2B)^t \Pi_{e_1^\perp} - 2B_{11}I_{s-1} = 2(B_{-1,-1} - B_{11}I_{s-1}) \quad (3.9)$$

where $B_{-1,-1} = (B_{ij})_{2 \leq i, j \leq n}$ and B_{11} are independent. Conditionally to $Z'(e_1) = 0$,

$$\forall j \neq 1, \langle A^j, A^1 \rangle = 0$$

where A^j is the j -th column of A so that the $\{A^j, j \neq 1\}$ are standard normal variable in the orthogonal space of A^1 which is a space of dimension $n - 1$. This implies that the distribution of $B_{-1,-1}$ conditionally to $Z(e_1) = x$, $Z'(e_1) = 0$ is a Wishart matrix associated to a $(n - 1) \times (s - 1)$ Gaussian matrix (see section 3.3 for more details). Then, the conclusion follows from

$$2^{1-s} \mathbb{E}(\det(Z''(e_1)) \mathbb{1}_{Z''(e_1) > 0} | A_{e_1}) = \mathbb{E}(\det(W_{s-1, n-1} - xI_{s-1}) \mathbb{1}_{W_{s-1, n-1} \geq xI_{s-1}}) \quad (3.10)$$

$$\leq \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{s-1} (d'_i - x) \mathbb{1}_{\{d'_i \geq x\}}\right) \leq \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{s-1} d'_i\right) = \frac{(n-1)!}{(n-s)!}, \quad (3.11)$$

where (d'_1, \dots, d'_{s-1}) denote the eigenvalues of $W_{s-1, n-1}$ and where the last inequality is an application of

Lemma 3.2.2. (Lemma 13.6, [AW09]) Let ξ_1, \dots, ξ_s be i.i.d. random vectors in \mathbb{R}^n , $n \geq s$, their common distribution being Gaussian centered with variance I_n . Denote by $W_{s,n}$ the matrix

$$W_{s,n} = (\langle \xi_i, \xi_j \rangle)_{(i,j) \in \{1, \dots, s\}^2}$$

then

$$\mathbb{E}(\det(W_{s,n})) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^s d_i\right) = \frac{n!}{(n-s)!}. \quad (3.12)$$

In the end,

$$\begin{aligned} f_{d_s}(x) &= \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})} \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \times \left(\frac{1}{8\pi x}\right)^{\frac{s-1}{2}} 2^{s-1} \mathbb{E}((W_{s-1, n-1} - xI_{s-1})^+) \\ &\leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n-s-1}{2}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) 2^{1-s} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-s+1)\Gamma(n/2)\Gamma(s/2)} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n-s-1}{2}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \frac{2^{1-s}\Gamma(n/2)\Gamma(\frac{n+1}{2})2^{n-1}}{\Gamma(\frac{n-s+1}{2})\Gamma(\frac{n-s+2}{2})2^{n-s}\Gamma(n/2)\Gamma(s/2)} = v(x), \end{aligned}$$

where the last equality is an application of duplication formula $\Gamma(x)\Gamma(x + \frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}2^{1-2x}\Gamma(2x)$.

In a similar way, one prove for the largest eigenvalue

$$\mathbb{P}(d_1 > u) = \frac{1}{2} \mathbb{E}(\#\{\text{local maxima of } \chi_t \text{ taking value in } (u, +\infty)\})$$

and Rice formula leads to

Proposition 3.2.3. With the notation of proposition 3.1.2,

$$f_{d_1}(x) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})} \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \times \left(\frac{1}{8\pi x}\right)^{\frac{s-1}{2}} 2^{s-1} \mathbb{E}(\det(W_{s-1, n-1} - xI_{s-1}) \mathbb{1}_{W_{s-1, n-1} \leq xI_{s-1}}) \leq w(x)$$

where the last inequality comes from

$$\mathbb{E}\left(\det(W_{s-1,n-1} - xI_{s-1})\mathbb{1}_{W_{s-1,n-1} \leq xI_{s-1}}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{s-1}(d'_i - x)\mathbb{1}_{d'_i \leq x}\right) \leq \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{s-1}x\right) = x^{s-1}.$$

Remark. In fact, to prove that RIP occurs, one may derive the $n \geq C_1 s \log(C_2 p/s)$ condition directly from concentration arguments on χ^2 distribution. Indeed,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(d_1 > n(1 + \delta_0)) &\leq \frac{\Gamma(\frac{n+s-1}{2})}{\Gamma(s/2)\Gamma(n/2)} \times \mathbb{P}(\chi_{n+s-1}^2 > n(1 + \delta_0)) \\ \mathbb{P}(d_s < n(1 - \delta_0)) &\leq 2^s \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(s/2)\Gamma(\frac{n-s+1}{2})} \times \mathbb{P}(\chi_{n-s+1}^2 < n(1 - \delta_0)) \end{aligned}$$

and $\binom{p}{s} \leq e^{s \log(ep/s)}$. We don't focus on this step because it involves no novelty. Our aim here was to prove that Rice method can be a tool in high dimensional statistics (see [AdCM15a]).

3.3 Joint density of ordered eigenvalues

The proof of proposition 3.1.2 by Edelman relies on the joint density of the ordered eigenvalues of $W_{s,n}$. This formula is proved thanks to results on the Haar measure on the orthogonal group and the Weyl integration formula. In this part, we provide an other proof using tools from Gaussian processes theory.

Set (d_1, \dots, d_s) the ordered eigenvalues of $W_{s,n}$. Let $I = I_1 \times \dots \times I_s$ be a product of increasing intervals of \mathbb{R} in the sense $\forall j \in \{1, \dots, s-1\}, \max(I_j) \leq \min(I_{j+1})$. Remark that these family of sets is a monotone class which describe the set $\{x_1 \leq \dots \leq x_s\}$ of \mathbb{R}^s . Following the computation of section 2, we know from equation (3.9) that $2(d_2 - Z(e_1), \dots, d_s - Z(e_1))$ are the eigenvalues of $Z''(e_1)$. Moreover, as $(I_i)_{1 \leq i \leq s}$ is an increasing family of intervals,

$$\forall i \geq 2, d_i \in I_i \implies d_i \geq Z(e_1),$$

so by the Rice formula (see Azais-Wschebor [AW09] or Adler-Taylor [AT07]), we found

$$\mathbb{P}((d_1, \dots, d_s) \in I) = \mathbb{E}(\#\{t \in \mathbb{S}^s; Z(t) \in I_1, Z'(t) = 0, (d_2, \dots, d_s) \in I_2 \times \dots \times I_s\}) \quad (3.13)$$

$$= \int_{I_1} \mathbb{E}(\det(Z''(e_1))\mathbb{1}_{Z''(e_1) \geq 0}\mathbb{1}_{(d_2, \dots, d_s) \in I_2 \times \dots \times I_s} | Z(e_1) = l_1, Z'(e_1) = 0) g_{(n,s)}(l_1) dl_1 \quad (3.14)$$

$$= \int_{I_1} \mathbb{E}\left(2^{s-1} \left(\prod_{i=2}^s (l_1 - d_i)\right) \mathbb{1}_{(d_2, \dots, d_s) \in I_2 \times \dots \times I_s} | Z(e_1) = l_1, Z'(e_1) = 0\right) g_{(n,s)}(l_1) dl_1 \quad (3.15)$$

where $g_{(n,s)}(l_1) = \frac{1}{2} \text{Vol}(\mathbb{S}^s) \times p_{\chi_n^2}(l_1) \times p_{\mathcal{N}(0, 4l_1 I_{s-1})}(0)$.

To compute the joint density of (d_1, \dots, d_s) from the formula above, we need to consider the law of (d_2, \dots, d_s) conditionally to $\{Z'(e_1) = 0, Z(e_1) = l_1\}$. The first condition implies that $\forall j \neq 1, \langle A^j, A^1 \rangle = 0$ so the family of vectors $\{A_j, 2 \leq j \leq n\}$ live in A_1^\perp . Now, set (v_1, \dots, v_s) the eigenvectors associated to (d_1, \dots, d_s) , then conditionally to $\{v_1 = e_1\}$, (d_2, \dots, d_s) are always ordered eigenvalues but on the set $e_1^\perp = \{t \in \mathbb{S}^s | \langle t, e_1 \rangle = 0\}$ which is a sphere of dimension $s-1$. Indeed, for each $i \geq 2$, d_i can be recursively defined as the maximum of $Z(\cdot)$ on the fixed set $\text{Vect}(v_1, \dots, v_{i-1})^\perp$. Finally, it holds

$$(d_2, \dots, d_s) | (Z'(e_1) = 0, Z(e_1) = x)$$

as the same law than (d'_1, \dots, d'_{s-1}) where (d'_1, \dots, d'_{s-1}) are the ordered eigenvalues of a $(n-1) \times (s-1)$ Wishart matrix satisfying $\cap_{i \geq 1} \{d'_i \leq l_1\}$ which contain, by definition of I , $\cap_{i \geq 1} \{d'_i \in I_{i+1}\}$.

Suppose now that (d_1, \dots, d_s) admits a joint density with respect to the Lebesgue measure for all choice of $(n, s) \in \mathbb{N}^2$ such that $n \geq s$, by induction on (3.15), it comes

$$\begin{aligned}
 f_{(d_1, \dots, d_s)}(l_1, \dots, l_s) &= \prod_{i=1}^s \left[2^{s-i} \left(\prod_{j>i} (l_i - l_j) \right) \times \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}^{s-i})}{2} \times p_{\chi_{n-i+1}}(l_i) \times p_{\mathcal{N}(0, 4l_i I_{s-i})}(l_1) \right] \\
 &= \prod_{i=1}^s \left[2^{s-i} \left(\prod_{j>i} (l_i - l_j) \right) \times \frac{\pi^{\frac{s-i+1}{2}}}{\Gamma(\frac{s-i+1}{2})} \times \frac{l_i^{\frac{n-i-1}{2}} e^{-\frac{l_i}{2}}}{2^{\frac{n-i+1}{2}} \Gamma(\frac{n-i+1}{2})} \times \left(\frac{1}{8\pi l_i} \right)^{\frac{s-i}{2}} \right] \\
 &= \left(\frac{\pi}{2^n} \right)^{\frac{s}{2}} \prod_{i=1}^s 2^{i-\frac{s+1}{2}} \left(\prod_{i<j} (l_i - l_j) \right) \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^s l_i\right) \prod_{i=1}^s \frac{l_i^{\frac{n-i-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-i+1}{2}) \Gamma(\frac{s-i+1}{2})} \\
 &= \left(\frac{\pi}{2^n} \right)^{\frac{s}{2}} \left(\prod_{i<j} (l_i - l_j) \right) \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^s l_i\right) \prod_{i=1}^s \frac{l_i^{\frac{n-i-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-i+1}{2}) \Gamma(\frac{s-i+1}{2})}
 \end{aligned}$$

where $\text{Vol}(\mathbb{S}^{s-i})/2$ comes from the invariance by rotation and the identification $\chi(\cdot) = \chi(-\cdot)$ at each step and $p_{\chi_{n-i+1}}^2(l_i) \times p_{\mathcal{N}(0, 4l_i I_{s-i})}$ from (3.8) in the $(n-i) \times (s-i)$ case. To conclude, note that we can now construct the joint density with respect to the Lebesgue measure, so we don't need the assumption on the existence. Indeed, if we reverse the induction, we only need to prove that the density exists for a $(n-s+1) \times 1$ Wishart matrix, which is obviously true.

Deuxième partie

**Penalized least squares regression and
global null testing**

Chapitre 4

Power of the Spacing test for Least-Angle Regression

4.1 Introduction

A major development in modern statistics has been brought by the idea that one can recover a high-dimensional target β^* from few linear observations Y by ℓ_1 -minimization as soon as the target vector is “sparse” in a well-chosen basis. Undoubtedly, the notion of “sparsity” has encountered a large echo among the statistical community and many successful applications rely on ℓ_1 -minimization, the reader may consult [CDS98, Tib96, Fuc05, CT06, CT07] for some seminal works, [HTF09, BvdG11] for a review and references therein. More precisely, some of the most popular estimators in high-dimensional statistics remain the lasso [Tib96] and the Dantzig selector [CT07]. A large amount of interest has been dedicated to the estimation, prediction or support recovery problems using these estimators. This body of work has been developed around sufficient conditions on the design matrix X (such that *Restricted Isometry Property* [CT06], *Restricted Eigenvalue* [BRT09], *Compatibility* [VdGB09, BvdG11], *Universal Distortion* [dC13, BLPR11], $\mathbf{H}_{s,1}$ [JN11], or *Irrepresentability* [Fuc05], to name but a few) that enclose the spectral properties of the design matrix on the set of (almost) sparse vectors. Using one of these properties, one can exploits the Karush-Kuhn-Tucker conditions to get oracle inequalities or a control on the support recovery error.

Aside from those issues some recent works have been focused on hypothesis testing using penalized problems, see for instance [LSST13, LTTT14a, TLT14, TLTT14] and references therein. Compared to the sparse recovery problems, very little work has been done in statistical testing in high dimensions. As a matter of fact, one of the main difficulty is that there is no tractable distribution of sparse estimators (even under the aforementioned standard conditions of high-dimensional statistics). A successful approach is then to take into account the influence of each predictor in the regression problem. More precisely, some recent works in Post-Selection Inference have shown that the selection events can be explicitly expressed as closed convex polytopes depending simply on the signs and the indices of the nonzero coefficients of the solutions of standard procedures in high-dimensional statistics (typically the solutions of the lasso). Furthermore, an important advance has been brought by a useful parametrization of these convex polytopes under the Gaussian linear model, see for instance the book [HTW15]. In detection testing, this is done by the first two “knots” of the *least-angle regression algorithm* (LARS for short) which is intimately related to the dual program of the ℓ_1 -minimization problem, see [Eal04] for example.

4.1.1 Hypothesis testing using LARS

The usual frame of the regression problems in high-dimensions is the following. Given an outcome vector $Y \in \mathbb{R}^n$, a matrix of predictor variables (or design matrix) $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ and a variance-covariance matrix Σ such that

$$Y = X\beta^* + \xi \quad \text{with} \quad \xi \sim \mathcal{N}_n(0, \Sigma),$$

we are concerned with testing whether β^* is equal to some known β_0^* or not. Notice that the response variable Y does not depend directly on β^* but rather on $X\beta^*$. We understand that a detection test may be interested in discerning between two hypothesis on the target vector, namely

$$\mathbb{H}_0 : “\beta^* \in \beta_0^* + \text{Ker}(X)” \quad \text{against} \quad \mathbb{H}_1 : “\beta^* \notin \beta_0^* + \text{Ker}(X)” ,$$

where $\text{Ker}(X)$ denotes the kernel of the design matrix X . It can be equivalently formulated (subtracting $X\beta_0^*$) as a detection test whose null hypothesis is given by

$$\mathbb{H}_0 : “\beta^* \in \text{Ker}(X)” \quad \text{against} \quad \mathbb{H}_1 : “\beta^* \notin \text{Ker}(X)” .$$

To this end, we consider the vector of correlations

$$U := X^\top Y \sim \mathcal{N}_p(\mu^*, R),$$

where $\mu^* := X^\top X\beta^*$ and $R := X^\top \Sigma X$. Observe that the hypotheses \mathbb{H}_0 and \mathbb{H}_1 can be equivalently written as

$$\mathbb{H}_0 : “\mu^* = 0” \quad \text{against} \quad \mathbb{H}_1 : “\mu^* \neq 0” , \quad (\star)$$

and remark that the knowledge of the noise variance-covariance matrix Σ is equivalent to the knowledge of the correlations variance-covariance matrix R .

4.1.2 The Spacing test for LARS

The test statistic we are considering was introduced in a larger context of penalization problems by the pioneering works in [TLTT14, TLT14]. As mentioned by the authors of [TLT14], the general test statistic “may seem complicated”. However, it can be greatly simplified in the frame of the standard regression problems under a very mild assumption, namely

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad R_{ii} := X_i^\top \Sigma X_i = 1. \quad (\text{H})$$

Note that this assumption is not very restrictive because the columns X_i of X can always be scaled to get (H). In this case, the entries of β^* are scaled but nor \mathbb{H}_0 neither \mathbb{H}_1 are changed. Hence, without loss of generality, we admit to invoke an innocuous normalization on the columns of the design matrix. Remark also that (H) is satisfied under the stronger assumption

$$\Sigma = \text{Id}_n \quad \text{and} \quad \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \|X_i\|_2^2 = 1. \quad (\text{H Lasso})$$

Moreover, observe that, almost surely, there exists a unique couple $(i, \hat{\varepsilon}) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \{\pm 1\}$ such that $\hat{\varepsilon}U_i = \|U\|_\infty$. Under Assumption (H), the test statistic, referred to as *Spacing test for LARS*, simplifies to

$$S := \frac{\bar{\Phi}(\lambda_1)}{\bar{\Phi}(\lambda_2)}, \quad (\text{Pivot})$$

with we denote by Φ the cumulative distribution function of the standard normal distribution, $\bar{\Phi} = 1 - \Phi$ its complement, $\lambda_1 := \hat{\varepsilon}U_i$ the largest knot in the *lasso path* [Eal04] and

$$\lambda_2 := \bigvee_{1 \leq j \neq i \leq p} \left\{ \frac{U_j - R_{ji}U_i}{1 - \hat{\varepsilon}R_{ji}} \vee \frac{-U_j + R_{ji}U_i}{1 + \hat{\varepsilon}R_{ji}} \right\},$$

where $a \vee b := \max(a, b)$ and U_i denotes the i -th entry of the vector U . Under Assumption (H Lasso), one has $R = X^\top X$ and λ_2 simplifies to the second largest knot in the *lasso path*. Interestingly, the authors of [TLT14] have shown that the test statistic S is uniformly distributed on $[0, 1]$ under the null hypothesis \mathbb{H}_0 ,

$$S \sim \text{Unif}([0, 1]).$$

Moreover, they derived the following rejection region

$$\text{Reject}_\alpha := \{S \leq \alpha\},$$

for all $\alpha \in (0, 1)$. In other words, the observed value of the test statistic S is the p -value of the Spacing test for LARS.

Remark that the statistic $1-S$ is uniformly distributed on $[0, 1]$, as well as many other transformations of the test statistic S . It may appear that the choice of rejection region Reject_α is somehow arbitrary. Nevertheless, one can empirically witness (see Figure 13 for instance) that the *Spacing test for LARS* is an interesting test statistic that may take smaller values under the alternative hypothesis. However, no theoretical guarantees have been shown regarding its power. Furthermore, the *Spacing test for LARS* relies on the assumption that the variance-covariance matrix Σ of the noise is known and it should be interesting to bypass this limitation. To the best of our knowledge, this paper is the first to address these issues.

4.1.3 Power of the Spacing test for LARS

Recall that the Spacing test for LARS rejects \mathbb{H}_0 in favor of \mathbb{H}_1 when $\{S \leq \alpha\}$ occurs, where S is defined by (Pivot). We assume that the noise variance-covariance matrix Σ is known. We also assume that the columns $(X_i)_{i=1}^p$ of the design matrix X are pairwise different and normalized with respect to Assumption (H). The first result shows that the Spacing test for LARS is unbiased.

Theorem 4.1.1. *Let $\alpha \in (0, 1)$ be a significance level. Assume that the variance-covariance matrix Σ of the noise is known and assume that Assumption (H) holds. Then, the Spacing test for LARS is unbiased : its power under the alternative is always greater or equal to the significance level α .*

Under mild assumptions, this theorem ensures that the probability of getting a *true positive* is greater or equal to the probability of a *false positive*. Moreover, in the limit case when the significance level α goes to zero, this result is refined by Theorem 4.2.5 : the probability of a *true positive* is much greater than the probability of getting a *false positive*. As a matter of fact, we prove that the cumulative distribution function of S has a vertical tangent at the origin under the alternative hypothesis. The reader may consult Figure 13 which represents the empirical distribution function of S that exactly describes the uniform law.

A proof of Theorem 4.1.1 can be found in Section 4.2.3. Interestingly, our proof is based on Anderson's inequality [And55] for symmetric convex sets. Moreover, we derive a simple and short proof of the distribution of the test statistic (Pivot) under the null, see Corollary 4.2.4 of Proposition 4.2.3.

Theorem 4.1.1 has a stronger version in the case of orthogonal designs, e.g. when the variance-covariance matrix Σ is Id_n and $X^\top X = \text{Id}_p$ (which implies that $n \geq p$).

Theorem 4.1.2 (Orthogonal design). *Assume that $R = \text{Id}_n$ then, under any alternative in \mathbb{H}_1 , the density function of S is decreasing. Hence, for all significance level $\alpha \in (0, 1)$, the region $\text{Reject}_\alpha = \{S \leq \alpha\}$ is the most powerful region among all possible regions.*

This theorem may be seen as an evidence in favor of the choice of the rejection region as $\text{Reject}_\alpha = \{S \leq \alpha\}$. A proof of Theorem 4.1.2 can be found in Section 4.2.4.

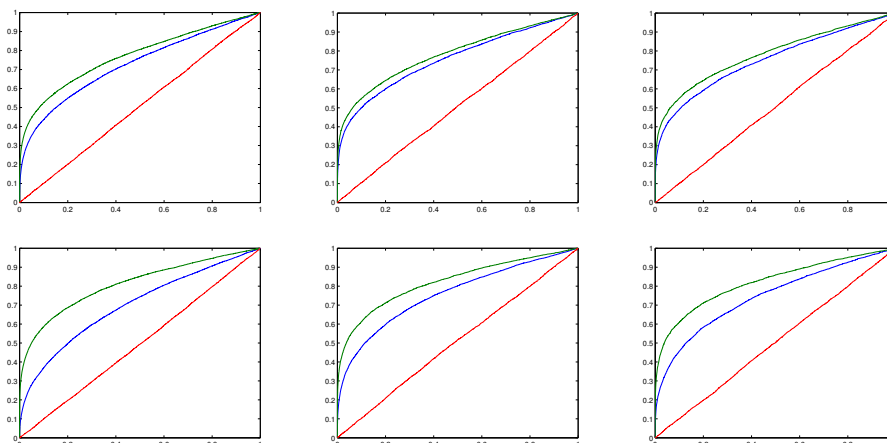


FIGURE 13 – On each figure, empirical distribution function of 15,000 p-values coming from various scenarios. 5,000 p-values drawn under the null (red), 5,000 p-values of S under the alternative (green) and 5,000 p-values of T under the alternative (blue). At the top, the level of sparsity s is equal to 2. At the bottom, s is 5. In both cases, from left to right, $(n, p) = (50, 100)$, $(100, 200)$ and $(100, 500)$.

4.1.4 Extension to unknown variance

Interestingly, we can derive from our analysis a *studentization* of the test statistic (Pivot). Indeed, we consider the test statistic

$$T := \frac{1 - \mathbb{F}_{n-1}(T_1)}{1 - \mathbb{F}_{n-1}(T_2)}, \quad (\text{t-Pivot})$$

where \mathbb{F}_{n-1} denote the cumulative distribution function of the t -distribution with $n - 1$ degrees of freedom and T_1, T_2 are statistics that can be computed in cubic time (cost of one Singular Value Decomposition (SVD) of the design matrix) from the first knots of the LARS algorithm, see Algorithm 1. In the sequel, for each $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, we may denote by $X_{-i} \in \mathbb{R}^{n \times (p-1)}$ the sub-matrix of X where the i -th column X_i has been deleted and we may assume that it has rank n . Observe that this is a mild assumption in a high-dimensional context.

Theorem 4.1.3 (t-Spacing test for LARS). *Assume that the variance-covariance matrix Σ is $\sigma^2 \Sigma_1$ where $\sigma > 0$ is unknown and Σ_1 is a correlation matrix. In addition, assume that for all $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ satisfying $i \neq j$, one has*

- $\langle X_i, \Sigma_1 X_i \rangle = 1$,
- $X_i \neq X_j$,
- X_{-i} has rank n ,

then under the null \mathbb{H}_0 , the statistic T described by Algorithm 1 is uniformly distributed on $[0, 1]$.

In particular, we derive a detection test of significance level α considering the rejection region $\text{Reject}_\alpha = \{T \leq \alpha\}$. A proof of Theorem 4.1.3 can be found in Section 4.3. One can empirically witness (see Figure 13 for instance) that the *t-Spacing test for LARS* is an interesting test statistic that may take smaller values under the alternative hypothesis.

Observe that Algorithm 1 requires the computation of one SVD at step 6. We deduce that its computational cost is $\mathcal{O}(p^3)$ which is reasonable in high-dimensional statistics.

Algorithm 1: t-Spacing test

Data: An observation $Y \in \mathbb{R}^n$, a design matrix $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$, a correlation matrix Σ_1 .

Result: A p -value $T \in (0, 1)$.

Compute the first LARS knot λ_1 ;

1. Set $U := X^\top Y$;
2. Find $(\hat{i}, \hat{\varepsilon}) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \{\pm 1\}$ such that $\hat{\varepsilon}U_{\hat{i}} = \|U\|_\infty$ and set $\lambda_1 := \hat{\varepsilon}U_{\hat{i}}$;

Compute the second LARS knot λ_2 ;

3. Set $R := X^\top \Sigma_1 X$;
4. Set

$$\lambda_2 := \bigvee_{1 \leq j \neq \hat{i} \leq p} \left\{ \frac{U_j - R_{j\hat{i}}U_{\hat{i}}}{1 - \hat{\varepsilon}R_{j\hat{i}}} \vee \frac{-U_j + R_{j\hat{i}}U_{\hat{i}}}{1 + \hat{\varepsilon}R_{j\hat{i}}} \right\};$$

Compute the variance estimator $\hat{\sigma}$;

5. Set $R_{-\hat{i}} := X_{-\hat{i}}^\top (\text{Id}_n - X_{\hat{i}}X_{\hat{i}}^\top) X_{-\hat{i}}$;
6. Compute $R_{-\hat{i}}^{-1/2}$ the square root of the pseudo inverse of $R_{-\hat{i}}$;
7. Set

$$\hat{\sigma} := \frac{\|R_{-\hat{i}}^{-1/2} V_{-\hat{i}}\|_2}{\sqrt{n-1}},$$

where

$$V_{-\hat{i}} := (U_1 - R_{1\hat{i}}U_{\hat{i}}, \dots, U_{\hat{i}-1} - R_{(\hat{i}-1)\hat{i}}U_{\hat{i}}, U_{\hat{i}+1} - R_{(\hat{i}+1)\hat{i}}U_{\hat{i}}, \dots, U_p - R_{p\hat{i}}U_{\hat{i}});$$

Compute the p -value T ;

8. Set $T_1 := \lambda_1/\hat{\sigma}$ and $T_2 := \lambda_2/\hat{\sigma}$;
9. Set

$$T := \frac{1 - \mathbb{F}_{n-1}(T_1)}{1 - \mathbb{F}_{n-1}(T_2)},$$

where we denote by \mathbb{F}_{n-1} the cumulative distribution function of the t -distribution with $n-1$ degree(s) of freedom.

4.1.5 Empirical distributions of the p-values

Figure 13 shows the empirical distribution of a sample of 15,000 p-values constructed from standard regression problems under the global null and under the alternative for the pivots S and T . Design matrices X and the mean (under the alternative) have been drawn uniformly at random from the following cases

- X is a design matrix of size 50×100 , 100×200 or 100×500 with i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$ entries.
- β is a vector with i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$ (small mean), $\mathcal{N}(0, 4)$ (medium mean) or $\mathcal{N}(\sqrt{2 \log p}, 1)$ (high mean) entries.

Under the null, the agreement with uniform is very strong. Moreover, the Spacing test for LARS is empirically more powerful than the *t*-Spacing test for LARS and both seem to be unbiased. However, in a context of very high-dimensional regression, the *t*-Spacing test for LARS is very similar to the Spacing test for LARS due to standard results on Student and chi-squared distribution.

4.1.6 Previous works

Our test can be also referred to as the *Kac-Rice test* as introduced in the broader frame of penalization problems in the seminal paper [TLT14]. The interested reader may consult Theorem 1 in [TLT14] where the general “*Kac-Rice pivot*” is defined. Note that various important results on this subject have been obtained recently and we do not pursue on a comprehensive study here. The interested reader may consult Chapter 6 of the captivating book [HTW15].

The statistic *Kac-Rice pivot* given in [TLT14] has been used for model selection and confidence intervals on the target entries. In the frame of lasso, the optimality of these approaches is discussed in [LSST13, TLTT14]. Interestingly, the Spacing test is a non asymptotic version of the covariance test [LTTT14a, TLTT14], and is asymptotically equivalent to it. Note they have been intensively commented among the literature, see [LTTT14c, LTTT14b, BMvdG14] for instance.

4.1.7 Organization of the paper

The next section is devoted to the proof of the main results on the power. In particular, the reader may find the exact formulation of Theorem 4.2.5 mentioned in the introduction. Section 4.3 addresses the issue of extending the Spacing test for LARS to the unknown variance frame. Section 4.4 presents a fine description of the Spacing test for LARS’ power in the case of two predictors. The last section gives a numerical comparison with the Pearson’s chi-squared test (goodness of fit).

4.2 Power of the Spacing test for LARS

4.2.1 Model and notation

Recall that the vector of correlations $U = X^\top Y$ enjoys

$$U = (U_1, \dots, U_p) \sim \begin{cases} \mathcal{N}_p(0, R) & \text{under the null hypothesis,} \\ \mathcal{N}_p(\mu^*, R) & \text{under the alternative hypothesis,} \end{cases}$$

where $R = X^\top \Sigma X$ and $\mu^* = X^\top X \beta^*$. Indeed, observe that

$$\{\mu^* = 0\} \Leftrightarrow \{\mathbb{H}_0 : \beta^* \in \text{Ker}(X)\}.$$

It is well known (see for instance the book [HTW15]) that the first knot λ_1 of the LARS algorithm enjoys $\lambda_1 = \|U\|_\infty$. Assume that the columns of X are pairwise different. It implies that, with probability one, there exists a unique pair $(\hat{i}, \hat{\varepsilon})$ with $\hat{i} \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\hat{\varepsilon} = \pm 1$ and such that

$$\hat{\varepsilon}U_{\hat{i}} = \|U\|_\infty. \quad (4.1)$$

Observe that the events $\mathcal{E}_{i,\varepsilon} := \{\varepsilon U_i = \|U\|_\infty\}$ are almost surely disjoint, and note that

$$\lambda_1 = \sum_{i=1}^p \sum_{\varepsilon=\pm 1} \varepsilon U_i \mathbb{1}_{\mathcal{E}_{i,\varepsilon}},$$

where $\mathbb{1}$ denotes the indicator function. Write, for all $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, $U_j = R_{ji}U_i + U_j^i$, the regression of U_j onto U_i . Recall that the residuals U_j^i are independent of U_i . Denote, for all $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ and $\varepsilon = \pm 1$,

$$\lambda_2^{i,\varepsilon} = \bigvee_{1 \leq j \neq i \leq p} \left\{ \frac{U_j^i}{1 - \varepsilon R_{ji}} \vee \frac{-U_j^i}{1 + \varepsilon R_{ji}} \right\}.$$

Furthermore, remark that $\mathcal{E}_{i,\varepsilon} = \{\lambda_2^{i,\varepsilon} < \varepsilon U_i\}$. Indeed, for all $i \neq j \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \{-\varepsilon U_i < U_j < \varepsilon U_i\} &= \{-\varepsilon U_i(1 + \varepsilon R_{ji}) < U_j - R_{ji}U_i < \varepsilon U_i(1 - \varepsilon R_{ji})\}, \\ &= \left\{ \left\{ \frac{U_j^i}{1 - \varepsilon R_{ji}} \vee \frac{-U_j^i}{1 + \varepsilon R_{ji}} \right\} < \varepsilon U_i \right\}. \end{aligned}$$

Hence, define the random variable λ_2 as

$$\lambda_2 = \sum_{i=1}^p \sum_{\varepsilon=\pm 1} \lambda_2^{i,\varepsilon} \mathbb{1}_{\mathcal{E}_{i,\varepsilon}}.$$

We deduce that

$$(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{i=1}^p \sum_{\varepsilon=\pm 1} (\varepsilon U_i, \lambda_2^{i,\varepsilon}) \mathbb{1}_{\{\varepsilon U_i > \lambda_2^{i,\varepsilon}\}}. \quad (4.2)$$

Denote by φ the probability density function of the standard normal distribution.

Lemma 4.2.1. *For each $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ and $\varepsilon = \pm 1$, the random variable $\lambda_2^{i,\varepsilon}$ has a density $p_{\lambda_2^{i,\varepsilon}}^{\mu^*}$. The joint density of (λ_1, λ_2) is given by*

$$\forall (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2, \quad p_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{\mu^*}(\ell_1, \ell_2) = \sum_{i=1}^p \sum_{\varepsilon=\pm 1} \varphi(\ell_1 - \varepsilon \mu_i^*) p_{\lambda_2^{i,\varepsilon}}^{\mu^*}(\ell_2) \mathbb{1}_{\{0 \leq \ell_2 \leq \ell_1\}}. \quad (4.3)$$

Proof 6. *One can check that $\lambda_2^{i,\varepsilon}$ has a density, the reader may also consult Ylvisaker's theorem, see Theorem 1.22 in [AW09] for example.*

Observe that for all $(i, \varepsilon) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \{\pm 1\}$, the random variable $\lambda_2^{i,\varepsilon}$ is a deterministic function of the random variables U_j^i for $j \neq i$ and hence it is independent of εU_i . We get that the density function $p_{(\varepsilon U_i, \lambda_2^{i,\varepsilon})}^{\mu^}$ of $(\varepsilon U_i, \lambda_2^{i,\varepsilon})$ with respect to Lebesgue measure is given by*

$$\forall (i, \varepsilon) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \{\pm 1\}, \quad \forall (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2, \quad p_{(\varepsilon U_i, \lambda_2^{i,\varepsilon})}^{\mu^*}(\ell_1, \ell_2) = \varphi(\ell_1 - \varepsilon \mu_i^*) p_{\lambda_2^{i,\varepsilon}}^{\mu^*}(\ell_2).$$

Invoke (4.2) to complete the proof.

Lemma 4.2.2. *For the study the distribution of S , we can assume, without loss of generality, that the expectations μ_i^* are non-negative.*

Proof 7. *Let $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ and consider the linear map $T : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ that changes the signs of the coordinates of U with negative expectation. Set*

$$\bar{U} := T(U) = \{t_i U_i : i \in \llbracket 1, p \rrbracket\},$$

where for all $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, t_i is the sign of μ_i^ . Each coordinate of \bar{U} has non-negative expectation and the variance-covariance matrix of \bar{U} is now \bar{R} with $\bar{R}_{i,j} = t_i t_j R_{i,j}$.*

Let us check, with obvious notation, that the test statistic S enjoys $S(\bar{U}) = S(U)$. Indeed, it holds that the first knot λ_1 satisfies $\lambda_1(\bar{U}) = \lambda_1(U)$, $\mathcal{E}_{i,\varepsilon}(\bar{U}) = \mathcal{E}_{i,t_i\varepsilon}(U)$ and one can note that

$$\bar{U}_j^i = t_j U_j - \bar{R}_{ij} t_i U_i = t_j U_j - t_i t_j R_{ij} t_i U_i = t_j U_j^i,$$

and

$$\lambda_2^{i,\varepsilon}(\bar{U}) = \bigvee_{j \neq i} W_{i,\varepsilon,j}(\bar{U}) \quad \text{with} \quad W_{i,\varepsilon,j}(\bar{U}) := \frac{\varepsilon t_j U_j^i}{1 - t_i t_j R_{ij}} \vee \frac{-\varepsilon t_j U_j^i}{1 + t_i t_j R_{ij}}.$$

One may check that, whatever the signs t_i, t_j are, it holds $W_{i,\varepsilon,j}(\bar{U}) = W_{i,(t_i\varepsilon),j}(U)$. Thus $\lambda_2^{i,\varepsilon}(\bar{U}) = \lambda_2^{i,(t_i\varepsilon)}(U)$ implying $\lambda_2(\bar{U}) = \lambda_2(U)$.

4.2.2 Piecewise calculus of the power

We have the following useful proposition giving an exact expression of the power of Spacing test for LARS as weighted sum of Gaussian measures of disjoint cones. Denote by $\mathcal{C}_{i,\varepsilon}$ the cone

$$\mathcal{C}_{i,\varepsilon} := \{(u_1, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^p \text{ such that } \forall j \neq i, |u_j| < \varepsilon u_i\},$$

recall that $\bar{\Phi} = 1 - \Phi$ is the complement of the standard normal cumulative distribution function and define by $\bar{\Phi}^{-1}$ its inverse function.

Proposition 4.2.3. *For all $\alpha \in (0, 1)$, define*

$$h_\alpha(\ell) := \bar{\Phi}^{-1}(\alpha \bar{\Phi}(\ell)) - \ell, \tag{4.4}$$

Then it holds,

$$\mathbb{P}_{\mu^*} \{S \leq \alpha\} = \alpha \mathbb{E}_{\mu^*} \left\{ \sum_{i=1}^p \sum_{\varepsilon=\pm 1} \exp[\varepsilon \mu_i^* h_\alpha(\varepsilon U_i)] \mathbb{1}_{\{U \in \mathcal{C}_{i,\varepsilon}\}} \right\}, \tag{4.5}$$

where \mathbb{E}_{μ^} denotes the expectation under the Gaussian distribution $\mathcal{N}_p(\mu^*, R)$.*

Proof 8. *Let $\alpha \in (0, 1)$. Note that*

$$\{S \leq \alpha\} = \{\lambda_1 \geq \bar{\Phi}^{-1}(\alpha/2)\} \cap \{\lambda_2 \leq \bar{\Phi}^{-1}(\bar{\Phi}(\lambda_1)/\alpha)\}. \tag{4.6}$$

Using (4.2), the change of variable $q_1 = \bar{\Phi}^{-1}(\bar{\Phi}(\ell_1)/\alpha)$ and (4.3), it holds

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_{\mu^*}\{S \leq \alpha\} &= \sum_{i=1}^p \sum_{\varepsilon=\pm 1} \int_{\bar{\Phi}^{-1}(\frac{\alpha}{2})}^{+\infty} d\ell_1 \varphi(\ell_1 - \varepsilon\mu_i^*) \int_0^{\bar{\Phi}^{-1}(\bar{\Phi}(\ell_1)/\alpha)} d\ell_2 p_{\lambda_2^{\mu^*}}^{\mu^*}(\ell_2), \\
 &= \alpha \sum_{i=1}^p \sum_{\varepsilon=\pm 1} \int_0^{+\infty} dq_1 \frac{\varphi(q_1)}{\varphi(\ell_1)} \varphi(\ell_1 - \varepsilon\mu_i^*) \int_0^{q_1} d\ell_2 p_{\lambda_2^{\mu^*}}^{\mu^*}(\ell_2), \\
 &= \alpha \sum_{i=1}^p \sum_{\varepsilon=\pm 1} \int_0^{+\infty} dq_1 e^{\varepsilon\mu_i^*(\ell_1 - q_1)} \varphi(q_1 - \varepsilon\mu_i^*) \int_0^{q_1} d\ell_2 p_{\lambda_2^{\mu^*}}^{\mu^*}(\ell_2), \\
 &= \alpha \sum_{i=1}^p \sum_{\varepsilon=\pm 1} \int_0^{+\infty} dq_1 e^{\varepsilon\mu_i^*(\ell_1 - q_1)} \int_0^{q_1} d\ell_2 p_{(\varepsilon U_i, \lambda_2^{\mu^*})}^{\mu^*}(q_1, \ell_2), \\
 &= \alpha \sum_{i=1}^p \sum_{\varepsilon=\pm 1} \mathbb{E}_{\mu^*} \left[\exp[\varepsilon\mu_i^*(\bar{\Phi}^{-1}(\alpha\bar{\Phi}(\varepsilon U_i)) - \varepsilon U_i)] \mathbb{1}_{\{\varepsilon U_i > \lambda_2^{i,\varepsilon}\}} \right], \\
 &= \alpha \sum_{i=1}^p \sum_{\varepsilon=\pm 1} \mathbb{E}_{\mu^*} \left[\exp[\varepsilon\mu_i^*(\bar{\Phi}^{-1}(\alpha\bar{\Phi}(\varepsilon U_i)) - \varepsilon U_i)] \mathbb{1}_{\{U \in \mathcal{C}_{i,\varepsilon}\}} \right].
 \end{aligned}$$

as claimed.

Remark. Note the numerical evaluation of (4.5) can be performed using a n -dimensional integral, see Section 4.5.

Corollary 4.2.4. Under \mathbb{H}_0 , the statistics S defined by (Pivot) follows a uniform distribution on $[0, 1]$.

Proof 9. The null hypothesis is equivalent to $\mu^* = 0$ and, from (4.5), we recover that

$$\mathbb{P}_0\{S \leq \alpha\} = \alpha \sum_{i=1}^p \sum_{\varepsilon=\pm 1} \mathbb{E}_0(\mathcal{C}_{i,\varepsilon}) = \alpha,$$

i.e. the level of Spacing test for LARS is α . This proves that, under \mathbb{H}_0 , the test statistics S satisfies

$$S \sim \text{Unif}([0, 1]),$$

as claimed.

4.2.3 Distribution under the alternative

This section is devoted to the proof of Theorem 4.1.1.

Step 1 : By a standard approximation argument, one may assume that R is a regular matrix. Indeed, if R is singular we can approximate it by a sequence $(R_m)_{m \geq 0}$ of regular matrices with bounded variance. If for each of these matrices we have $\mathbb{P}_{\mu^*}\{S \leq \alpha\} \geq \alpha$ then the result will pass to R by dominated convergence in (4.5). Furthermore, using Lemma 4.2.2, we may also assume that $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\mu_i^* \geq 0$.

Recall that $\mathcal{C}_{i,\varepsilon}$ is the cone

$$\mathcal{C}_{i,\varepsilon} := \{(u_1, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^p \text{ such that } \forall j \neq i, |u_j| < \varepsilon u_i\}.$$

and denote by γ the non-degenerate Gaussian measure associated with the multivariate normal distribution $\mathcal{N}_p(0, R)$.

Step 2 : We start from (4.5) to get that

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \mathbb{P}_{\mu^*} \{S \leq \alpha\} &= \mathbb{E}_{\mu^*} \left\{ \sum_{i=1}^p \sum_{\varepsilon=\pm 1} \exp[\varepsilon \mu_i^* h_\alpha(\varepsilon U_i)] \mathbb{1}_{\mathcal{C}_{i,\varepsilon}} \right\}, \\ &\geq 1 + \mathbb{E}_{\mu^*} \left\{ \sum_{i=1}^p \sum_{\varepsilon=\pm 1} [\varepsilon \mu_i^* h_\alpha(\varepsilon U_i)] \mathbb{1}_{\mathcal{C}_{i,\varepsilon}} \right\}. \end{aligned}$$

Perform an integration using the fibers $F_{\ell,i,\varepsilon} := \{u_i = \varepsilon \ell\} \cap \mathcal{C}_{i,\varepsilon}$ to obtain that

$$\frac{1}{\alpha} \mathbb{P}_{\mu^*} \{S \leq \alpha\} \geq 1 + \int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^p \sum_{\varepsilon=\pm 1} \varepsilon \mu_i^* h_\alpha(\ell) \sigma_{\mu^*}(\ell, i, \varepsilon) d\ell,$$

where $\sigma_{\mu^*}(\ell, i, \varepsilon)$ is the integral of the density function φ_{μ^*} of the multivariate normal distribution $\mathcal{N}_p(\mu^*, R)$ on the fiber $F_{\ell,i,\varepsilon}$.

Step 3 : Let $\ell > 0$ and $a \geq 0$. Consider the hypercube $H_\ell := [-\ell, \ell]^p$ and denote by $H_\ell - a\mu^*$ its translation by vector $-a\mu^*$. Invoke Anderson's inequality (see Lemma 4.5.1) to get that

$$a \mapsto \gamma(H_\ell - a\mu^*) := \mathbb{P}\{\mathcal{N}_p(0, R) \in H_\ell - a\mu^*\},$$

is a non-increasing function on the domain $a \geq 0$. In particular, its derivative at point $a = 1$ is non-positive. It reads as

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\eta} (\gamma(H_\ell - (1 + \eta)\mu^*) - \gamma(H_\ell - \mu^*)) \leq 0,$$

and this quantity is simply, by **Step 4**,

$$\sum_{i=1}^p \mu_i^* \sigma_{\mu^*}(\ell, i, -1) - \sum_{i=1}^p \mu_i^* \sigma_{\mu^*}(\ell, i, +1) \leq 0. \quad (4.7)$$

Finally, the positivity of $h_\alpha(\ell)$ (see Lemma 4.5.2) completes the proof.

Step 4 : In the context of **Step 3**, computation on $\gamma(H_\ell - a\mu^*)$ gives that

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} \gamma(H_\ell - a\mu^*) &= \int_{H_\ell} \frac{\partial}{\partial a} \varphi_{a\mu^*}(z) dz = \sum_{i=1}^p -\mu_i \int_{H_\ell} \frac{\partial}{\partial z_i} \varphi_{a\mu^*}(z) dz \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{\varepsilon=\pm 1} -\varepsilon \mu_i^* \sigma_{a\mu^*}(\ell, i, \varepsilon). \end{aligned}$$

where, for all $a > 0$, we denote by $\sigma_{a\mu^*}(\ell, i, \varepsilon)$ the integral of the density function $\varphi_{a\mu^*}$ of the multivariate normal distribution $\mathcal{N}_p(a\mu^*, R)$ on the fiber $F_{\ell,i,\varepsilon}$.

This computation might also be illustrated via finite difference method, one may see Figure 14 for instance.

4.2.4 Orthogonal case

In this section, we give the proof of Theorem 4.1.2.

Invoke (4.3) to get that, under \mathbb{H}_1 ,

$$\forall (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2, \quad p_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{\mu^*}(\ell_1, \ell_2) = \sum_{i=1}^p \sum_{\varepsilon=\pm 1} \varphi(\ell_1 - \varepsilon \mu_i^*) p_{\lambda_2}^{\mu^*}(\ell_2) \mathbb{1}_{\{0 \leq \ell_2 \leq \ell_1\}}.$$

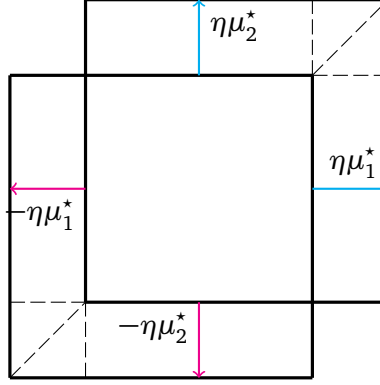


FIGURE 14 – Illustration of (4.7) in dimension 2. Passing to the limit, contribution of triangles (dashed lines) vanish and the derivative in $a = 1$ is equal to the sum of each face with a weight $\varepsilon\mu_i^*$ corresponding to its orientation.

Recall that $\hat{i} \in \llbracket 1, p \rrbracket$ is defined by (4.1). Since $R = \text{Id}_p$, remark that

$$\lambda_2 = \max_{j \neq i} |U_j|,$$

Furthermore, observe that $\lambda_2^{i+1} = \lambda_2^{i-1}$ almost surely. It implies that for all $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$p_{\lambda_2^{i+1}}^{\mu^*} = p_{\lambda_2^{i-1}}^{\mu^*}.$$

Denote by $p_{\lambda_2^i}^{\mu^*}$ their common value. As a consequence, it holds

$$\forall (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2, \quad p_{(\lambda_1, \lambda_2)}^{\mu^*}(\ell_1, \ell_2) = \sum_{i=1}^p (\varphi(\ell_1 - \mu_i) + \varphi(\ell_1 + \mu_i)) p_{\lambda_2^i}^{\mu^*}(\ell_2) \mathbb{1}_{\{0 \leq \ell_2 \leq \ell_1\}}.$$

It implies that, conditionally to $\lambda_2 = \ell_2$, the random variable $\bar{\Phi}(\lambda_1)$ admits the density

$$p_{(\bar{\Phi}(\lambda_1)|\lambda_2=\ell_2)}(v) = (\text{const}) \sum_{i=1}^p \cosh(\bar{\Phi}^{-1}(v)\mu_i^*) \mathbb{1}_{\{\bar{\Phi}^{-1}(v) \geq \ell_2\}}. \quad (4.8)$$

Since $\bar{\Phi}^{-1}(v)$ remains in the positive domain, the functions into the sum above are non-increasing and strictly decreasing for the index i such that $\mu_i^* > 0$. We have clearly the same result for the expression equivalent to (4.8) given the conditional density of S .

Deconditionning we obtain that the density of S is a mixture of non-increasing functions, thus non-increasing. In addition the deconditioning formula gives positive weights to decreasing functions thus, in fact, the density is decreasing.

4.2.5 Asymptotic case

Theorem 4.2.5. *Under \mathbb{H}_1 , it holds*

$$\alpha^{-1} \mathbb{P}_{\mu^*} \{S \leq \alpha\} \rightarrow +\infty,$$

as α goes to zero, where $\mu^* = (X^\top X)\beta^*$ and \mathbb{P}_{μ^*} denotes the law of $X^\top Y \sim \mathcal{N}_p(\mu^*, R)$.

Proof 10. Recall that \mathbb{H}_1 is equivalent to $\mu^* \neq 0$. Without loss of generality, assume $\mu_1^* > 0$ and note that

$$\begin{aligned} \alpha^{-1} \mathbb{P}_{\mu^*} \{S \leq \alpha\} &= \mathbb{E}_{\mu^*} \left\{ \sum_{i=1}^p \sum_{\varepsilon=\pm 1} \exp[\mu_i^* h_\alpha(\varepsilon U_i)] \mathbb{1}_{\{U \in \mathcal{C}_{i,\varepsilon}\}} \right\} \\ &\geq \mathbb{E}_{\mu^*} \left\{ \exp[\mu_1^* h_\alpha(U_1)] \mathbb{1}_{\{U \in \mathcal{C}_{1,1}\}} \right\} =: \Lambda_{1,1}(\alpha). \end{aligned}$$

Moreover, observe that

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h_\alpha(x) \rightarrow +\infty,$$

as $\alpha > 0$ goes to zero. In particular, it yields

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp[\mu_1^* h_\alpha(x)] \rightarrow +\infty,$$

as $\alpha > 0$ goes to zero. Eventually, let $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be any sequence of positive reals that goes to zero as n tends to ∞ . Invoke Fatou's lemma to get that

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{-1} \mathbb{P}_{\mu^*} \{S \leq \alpha_n\} &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_{1,1}(\alpha_n) \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mu^*} \left\{ \exp[\mu_1^* h_\alpha(U_1)] \mathbb{1}_{\{U \in \mathcal{C}_{1,1}\}} \right\} \\ &\geq \mathbb{E}_{\mu^*} \left\{ \liminf_{\alpha_n \rightarrow 0} \exp[\mu_1^* h_\alpha(U_1)] \mathbb{1}_{\{U \in \mathcal{C}_{1,1}\}} \right\} \end{aligned}$$

which concludes the proof.

4.3 Studentization of the Spacing test for LARS

In this section, we give the proof of Theorem 4.1.3.

4.3.1 Model and notation

Assume that the variance-covariance matrix Σ of the Gaussian noise ξ is $\sigma^2 \Sigma_1$ where $\sigma > 0$ is unknown and Σ_1 is a correlation matrix. Assume also that the columns $(X_i)_{i=1}^p$ of the design matrix X enjoy $\langle X_i, \Sigma_1 X_i \rangle = 1$ and denote by $U := X^\top Y$ the correlation vector satisfying

$$U = (U_1, \dots, U_p) \sim \begin{cases} \mathcal{N}_p(0, \sigma^2 R) & \text{under the null hypothesis,} \\ \mathcal{N}_p(\mu^*, \sigma^2 R) & \text{under the alternative hypothesis,} \end{cases}$$

where $R = X^\top \Sigma_1 X$ and $\mu^* = R\beta^*$. Observe that the knots of the LARS algorithm are given by

$$(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{i=1}^p \sum_{\varepsilon=\pm 1} (\varepsilon U_i, \lambda_2^{i,\varepsilon}) \mathbb{1}_{\{\varepsilon U_i > \lambda_2^{i,\varepsilon}\}}.$$

For each $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, we denote by $X_{-i} \in \mathbb{R}^{n \times (p-1)}$ the sub-matrix of X where the i -th column X_i has been deleted. Also, we denote by $U_{-i} \in \mathbb{R}^{p-1}$ (resp. μ_{-i}^*) the sub-vector of U (resp. μ^*) where the i -th entry has been deleted. Observe that the regression of U_{-i} onto U_i reads

$$U_{-i} = (R_i)_{-i} U_i + V_{-i},$$

where $(R_i)_{-i} \in \mathbb{R}^{p-1}$ denotes the sub-vector of the i -th column R_i of the matrix R where the i -th entry has been deleted. Observe that the vector $V_{-i} \in \mathbb{R}^{p-1}$ is a Gaussian vector independent of U_i such that

$$V_{-i} \sim \mathcal{N}_{p-1}(\mu_{-i}^* - (R_i)_{-i} \mu_i^*, \sigma^2 R_{-i}), \quad (4.9)$$

where $R_{-i} := X_{-i}^\top (\text{Id}_n - X_i X_i^\top) X_{-i}$ denotes its variance-covariance matrix. Notice that if X_{-i} has full rank (namely n) then R_{-i} has rank $n - 1$. Denote $R_{-i}^{-1/2}$ the only symmetric matrix such that $R_{-i}^{-1/2} R_{-i} R_{-i}^{-1/2}$ is the orthogonal projection onto the range of R_{-i} (observe that $R_{-i}^{-1/2}$ is the square root of the Moore-Penrose pseudo inverse of R_{-i}).

4.3.2 Estimation of the variance

An estimation of the variance σ is given by

$$\hat{\sigma}_i := \frac{\|R_{-i}^{-1/2} V_{-i}\|_2}{\sqrt{n-1}}.$$

Indeed, Eq. (4.9) gives that, under \mathbb{H}_0 , it holds

$$\frac{\|R_{-i}^{-1/2} V_{-i}\|_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

where $\chi^2(n-1)$ is the chi-squared distribution with $n-1$ degree(s) of freedom. Since V_{-i} is independent of U_i , note that εU_i and $\hat{\sigma}_i$ are independent. Furthermore, since V_{-i} is Gaussian, remark that its norm and its direction are independent so that $V_{-i}/\hat{\sigma}_i$ and $\hat{\sigma}_i$ are independent. Recall that

$$\lambda_2^{i,\varepsilon} := \bigvee_{1 \leq j \neq i \leq p} \left\{ \frac{U_j - R_{ji} U_i}{1 - \varepsilon R_{ji}} \vee \frac{-U_j + R_{ji} U_i}{1 + \varepsilon R_{ji}} \right\},$$

and $V_{-i} := (U_1 - R_{1i} U_i, \dots, U_{i-1} - R_{(i-1)i} U_i, U_{i+1} - R_{(i+1)i} U_i, \dots, U_p - R_{pi} U_i)$. Eventually, remark that

$$\varepsilon U_i, \frac{\lambda_2^{i,\varepsilon}}{\hat{\sigma}_i} \text{ and } \hat{\sigma}_i \text{ are mutually independent.} \quad (4.10)$$

4.3.3 Distribution of the test statistic

Let (i, ε) be in $\llbracket 1, p \rrbracket \times \{\pm 1\}$. Recall that εU_i and $\lambda_2^{i,\varepsilon}$ are independent. In view of (4.10), observe that

$$T_1^{i,\varepsilon} := \frac{\varepsilon U_i}{\hat{\sigma}_i} \quad \text{and} \quad T_2^{i,\varepsilon} := \frac{\lambda_2^{i,\varepsilon}}{\hat{\sigma}_i},$$

are independent and, under \mathbb{H}_0 , the random variable $T_1^{i,\varepsilon}$ a Student random variable with $n-1$ degree(s) of freedom. Define (T_1, T_2) as

$$(T_1, T_2) = \sum_{i=1}^p \sum_{\varepsilon=\pm 1} \left(\frac{\varepsilon U_i}{\hat{\sigma}_i}, \frac{\lambda_2^{i,\varepsilon}}{\hat{\sigma}_i} \right) \mathbb{1}_{\{\varepsilon U_i > \lambda_2^{i,\varepsilon}\}}, \quad (4.11)$$

and recall that the events $\{\varepsilon U_i = \|U\|_\infty\} = \{\varepsilon U_i > \lambda_2^{i,\varepsilon}\}$ are almost surely disjoint.

Lemma 4.3.1. *Under \mathbb{H}_0 , for each $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ and $\varepsilon = \pm 1$, the random variable $T_2^{i,\varepsilon} = \lambda_2^{i,\varepsilon} / \hat{\sigma}_i$ has a density $p_{T_2^{i,\varepsilon}}^0$. Under \mathbb{H}_0 , the joint density of (T_1, T_2) is given by*

$$\forall (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2, \quad p_{(T_1, T_2)}^0(t_1, t_2) = \mathbb{1}_{\{0 \leq t_2 \leq t_1\}} t_{n-1}(t_1) \sum_{i=1}^p \sum_{\varepsilon=\pm 1} p_{T_2^{i,\varepsilon}}^0(t_2), \quad (4.12)$$

where t_{n-1} denotes the probability density function of the t -distribution with $n-1$ degree(s) of freedom.

Proof 11. One can check that $T_2^{i,\varepsilon}$ has a density, the reader may also consult Ylvisaker's theorem, see Theorem 1.22 in [AW09] for example. Observe that for all $(i, \varepsilon) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \{\pm 1\}$, the random variable $T_2^{i,\varepsilon}$ is independent of the random variable $T_1^{i,\varepsilon}$. The result follows by (4.11).

Recall that

$$T := \frac{1 - \mathbb{F}_{n-1}(T_1)}{1 - \mathbb{F}_{n-1}(T_2)},$$

where \mathbb{F}_{n-1} denote the cumulative distribution function of the t -distribution with $n - 1$ degrees of freedom. The expression of the joint density (4.12) shows that, conditionally to T_2 , the random variable T_1 is distributed as a Student distribution conditioned to be greater than T_2 . As a consequence, the conditional distribution of T is uniformly distributed on $[0, 1]$. We deduce that T is uniformly distributed on $[0, 1]$, as claimed.

4.4 The two dimensional case

In this section we assume that $p = 2$ and $\Sigma = \text{Id}_2$. Define

$$R = R(\rho) = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

with $\rho = \text{Cov}(U_1, U_2) \in [-1, 1]$. Define the rejection region \mathcal{R}_α by

$$\mathbb{P}\{S \leq \alpha\} =: \mathbb{P}\{U = (U_1, U_2) \in \mathcal{R}_\alpha\}.$$

Note \mathcal{R}_α is symmetric about the origin and it is the non-convex disjoint union of four convex regions, namely

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\alpha^{+,1} &= \{U_1 \geq \bar{\Phi}^{-1}(\alpha/2)\} \cap \{-g_\alpha(U_1)(1 + \rho) + \rho U_1 \leq U_2 \leq g_\alpha(U_1)(1 - \rho) + \rho U_1\}, \\ \mathcal{R}_\alpha^{+,2} &= \{U_2 \geq \bar{\Phi}^{-1}(\alpha/2)\} \cap \{-g_\alpha(U_2)(1 + \rho) + \rho U_2 \leq U_1 \leq g_\alpha(U_2)(1 - \rho) + \rho U_2\}, \\ \mathcal{R}_\alpha^{-,1} &= \{-U_1 \geq \bar{\Phi}^{-1}(\alpha/2)\} \cap \{-g_\alpha(-U_1)(1 - \rho) + \rho U_1 \leq U_2 \leq g_\alpha(-U_1)(1 + \rho) + \rho U_1\}, \\ \mathcal{R}_\alpha^{-,2} &= \{-U_2 \geq \bar{\Phi}^{-1}(\alpha/2)\} \cap \{-g_\alpha(-U_2)(1 - \rho) + \rho U_2 \leq U_1 \leq g_\alpha(-U_2)(1 + \rho) + \rho U_2\}. \end{aligned}$$

where $g_\alpha(x) := \bar{\Phi}^{-1}(\bar{\Phi}(x)/\alpha) = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{1 - \bar{\Phi}(x)}{\alpha}\right)$, for all $x \in \mathbb{R}$.

Remark. Observe this decomposition holds in any dimension p . The region \mathcal{R}_α given by $\mathbb{P}(S \leq \alpha) = \mathbb{P}(U \in \mathcal{R}_\alpha)$ is symmetric about the origin and is the non-convex disjoint union of 2^p convex regions of \mathbb{R}^p .

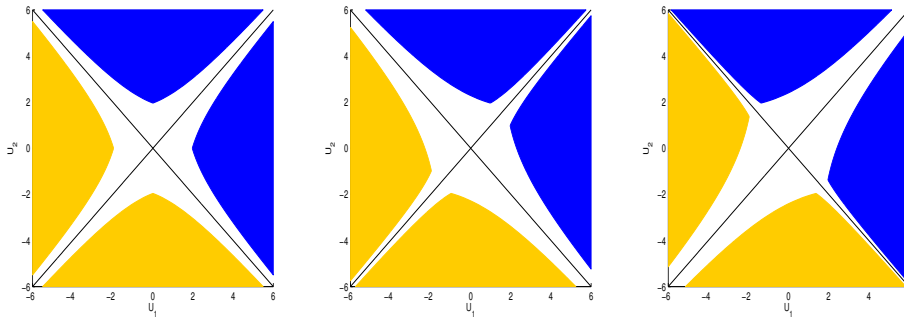


FIGURE 15 – An illustration of region $\mathcal{R}_{0.05}^{+,1} \cup \mathcal{R}_{0.05}^{+,2}$ in (dark) blue and region $\mathcal{R}_{0.05}^{-,1} \cup \mathcal{R}_{0.05}^{-,2}$ in (bright) yellow for $\rho = 0$, $\rho = 0.5$ and $\rho = -0.7$ (from left to right).

Note Anderson's inequality (see Lemma 4.5.1) is sufficient to establish the monotony of the Gaussian measure of symmetric convex set. Unfortunately, the region \mathcal{R}_α^c is not convex. However, when $p = 2$, using an appropriate fibration, one may find a collection of sets (more general than \mathcal{R}_α^c) satisfying a kind of generalization of Anderson's inequality. This is the object of the following proposition.

Proposition 4.4.1. *For $u \in \mathbb{R}$ and $\varepsilon = \pm 1$, define the non-centered diagonals :*

$$\Delta_u^\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y = \varepsilon x + u\}.$$

Let \mathcal{T} be a set of \mathbb{R}^2 which is symmetric with respect to the two diagonals Δ_0^{+1} and Δ_0^{-1} and satisfies for all u and ε :

$$\mathcal{T} \cap \Delta_u^\varepsilon \text{ is an interval.} \quad (4.14)$$

Set

$$\Psi(\mu_1, \mu_2) = \mathbb{P}\{\mathcal{N}((\mu_1, \mu_2), R(\rho)) \in \mathcal{T}\}.$$

Then the function $\Psi(u, v)$, which is obviously symmetric with respect to centered diagonals Δ_0^{+1} and Δ_0^{-1} , is non-increasing along every half diagonal. More precisely, for every $u \in \mathbb{R}$ and $z \geq 0$, the two functions

$$z \mapsto \Psi(u/2 - z, u/2 + z) = \Psi(u/2 + z, u/2 - z), \quad (4.15)$$

$$z \mapsto \Psi(u/2 + z, -u/2 + z) = \Psi(u/2 - z, -u/2 - z), \quad (4.16)$$

are non-increasing.

Remark. Note the result remains true if we multiply the matrix $R(\rho)$ by a scalar.

Proof 12. Set $R = R(\rho)$ for short. The proof relies on the fact that the eigenvectors of a two dimensional correlation matrix (such a R) are fixed and coincide with the diagonals of \mathbb{R}^2 . Symmetry of \mathcal{T} with respect to these diagonals is a key point in the proof.

First, we can use a $\pi/4$ rotation and consider a variance-covariance matrix \bar{R} which is diagonal and a set $\tilde{\mathcal{T}}$ which is symmetric with respect to the two axes and whose intersections with a line parallel to one axis is an interval.

Let $\bar{\Psi}$ the expression of the function Ψ after this rotation. We have to prove that $\bar{\Psi}$ is non-increasing along the relevant half-axes. Fix, for example, μ_1 and consider, for $\mu_2 > 0$ the function

$$\mu_2 \mapsto \bar{\Psi}(\mu) = \mathbb{P}(\mathcal{N}(\mu, \bar{R}) \in \tilde{\mathcal{T}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\frac{u - \mu_1}{\sigma_1}\right) \mathbb{P}(\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2) \in I_u) du,$$

where σ_1^2, σ_2^2 are the diagonal elements of \bar{R} , $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ and

$$I_u = \{v \in \mathbb{R} : (u, v) \in \tilde{\mathcal{T}}\}.$$

Our hypotheses imply that for all u , I_u is an interval that is symmetrical with respect to zero. Anderson's inequality (Lemma 4.5.1) implies directly that the Gaussian measure of I_u is non-increasing as a function of μ_2 so the function $\mu_2 \mapsto \bar{\Psi}(\mu_1, \mu_2)$ is non-increasing. This gives half of the statement, the other statement is obtained exactly in the same fashion by exchanging the roles of μ_1 and μ_2 .

Corollary 4.4.2. $\forall \alpha \in (0, 1)$, \mathcal{R}_α^c satisfies the hypothesis of Proposition 4.4.1 so the power of the Spacing test for LARS is non-decreasing along the diagonals Δ_u^ε in the sense that it has exactly the same properties as those of the function Ψ given by (4.15) and (4.16). In particular :

— Spacing test for LARS is unbiased,

— For each $\mu \in \mathbb{R}^2$, the function $t \mapsto \mathbb{P}_{t\mu}(S \leq \alpha)$ is non-increasing for $t \geq 0$.

Proof 13. Step 1 : If (U_1, U_2) has distribution $\mathcal{N}(0, R)$ then it is also the case of $(U_1, -U_2)$, $(-U_1, U_2)$ or $(-U_1, -U_2)$. This implies that \mathcal{R}_α^c , which is computed under the null hypothesis, has the two required symmetry properties of Proposition 4.4.1.

Step 2 : We consider now hypothesis (4.14). Consider $(u_1, u_2) \in \mathcal{R}_\alpha^{+,1}$. By definition of this region, it holds

$$u_1 \geq \bar{\Phi}^{-1}(\alpha/2) \quad \text{and} \quad g_\alpha(u_1)(1 - \rho) + \rho u_1 \geq u_2 \geq -g_\alpha(u_1)(1 + \rho) + \rho u_1.$$

Let $r > 0$ and consider the points $(u_1 + r, u_2 + r)$ and $(u_1 + r, u_2 - r)$. It is proven in Lemma 4.5.3 in the appendix that

$$g_\alpha(u_1 + r) \geq g_\alpha(u_1) + r.$$

As a consequence, for example, $g_\alpha(u_1 + r)(1 - \rho) + \rho(u_1 + r) \geq g_\alpha(u_1)(1 - \rho) + \rho(u_1) + r$ and this implies directly that $(u_1 + r, u_2 + r)$ and $(u_1 + r, u_2 - r)$ belong to $\mathcal{R}_\alpha^{+,1}$. The intersections of $\mathcal{R}_\alpha^{+,1}$ with the diagonals Δ_μ^ε are half lines or empty sets. We have the same results for the three other regions in the same fashion and this implies that the intersections of \mathcal{R}_α^c with the diagonals Δ_μ^ε are intervals. Finally, this result is true in β because R preserves symmetry properties along the diagonals.

Remark. In dimension two, note

$$\Delta_0^1 \cup \Delta_0^{-1} = \{(U_1, U_2) ; S(U_1, U_2) = 1\}.$$

In higher dimension, one has

$$\{(U_1, \dots, U_p) ; S(U_1, \dots, U_p) = 1\} = \bigcup_{i=1}^p \bigcup_{\varepsilon=\pm 1} \{\lambda_1 = \varepsilon U_i = \max_{j \neq i} |U_j|\}.$$

Observe the aforementioned set is not a hyperplane and so no orthogonal symmetry appears. The proof given in this section cannot be generalized to higher dimensions.

4.5 Numerical experiments on the power

4.5.1 A Matlab Toolbox

To compute the power of Spacing test for LARS using (4.5), we need to perform integration in high dimension. First, observe that (4.5) can be expressed as n -dimensional Gaussian integral (recall that n is the rank of X). Indeed,

$$\mathbb{P}_{\mu^*}\{S \leq \alpha\} = \alpha \mathbb{E}_{\mu^*}(W(U_1, \dots, U_n)) \quad (4.17)$$

where

$$W(U_1, \dots, U_n) = \sum_{i=1}^p \sum_{\varepsilon=\pm 1} \exp(\varepsilon \mu_i h_\alpha(\varepsilon U_i)) \mathbb{1}_{\mathcal{C}_{i,\varepsilon}}. \quad (4.18)$$

The aforementioned formula is a high dimensional Gaussian integral and we use a very efficient algorithm from A. Genz [Gen92, AG13], based on a reduction of the integral on the hypercube $[0, 1]^n$ and Monte-Carlo Quasi Monte-Carlo (MCQMC) integration. In this fashion, Matlab programs *qsimvn* and *qsimvnef* provide powerful and robust numerical integration algorithms. The MCQMC routine is based on Kronecker or lattice sequences to compute integrals. In a second step, a Monte-Carlo (MC) layer is added to ensure unbiasedness and to compute the precision. Eventually, the QMC step is nested in the MC step in order to improve the speed of convergence, see [NC06] for example. A Matlab toolbox computing the power of Spacing test for LARS and based on Genz' routines is available on S. Mourareau's website [Mou15b]. In addition, some practical examples are given.

4.5.2 The two-dimensional case

In dimension two, the power of Spacing test for LARS can be easily computed using numerical integration from (4.5). Consider the power function

$$k_{\alpha,\rho}(\beta) = \mathbb{P}(\mathcal{N}(R\beta, R) \in \mathcal{R}_\alpha),$$

where $R = R(\rho)$ is given by (4.13) and the region \mathcal{R}_α is defined in Section 4.4. The aforementioned power function is monotone in β along the directions defined in Section 4.4 and it can be seen on Figure 16 that the variation of the power is minimal along the diagonal associated to the minimal eigenvalue of $R(\rho)$, see also Corollary 4.4.2.

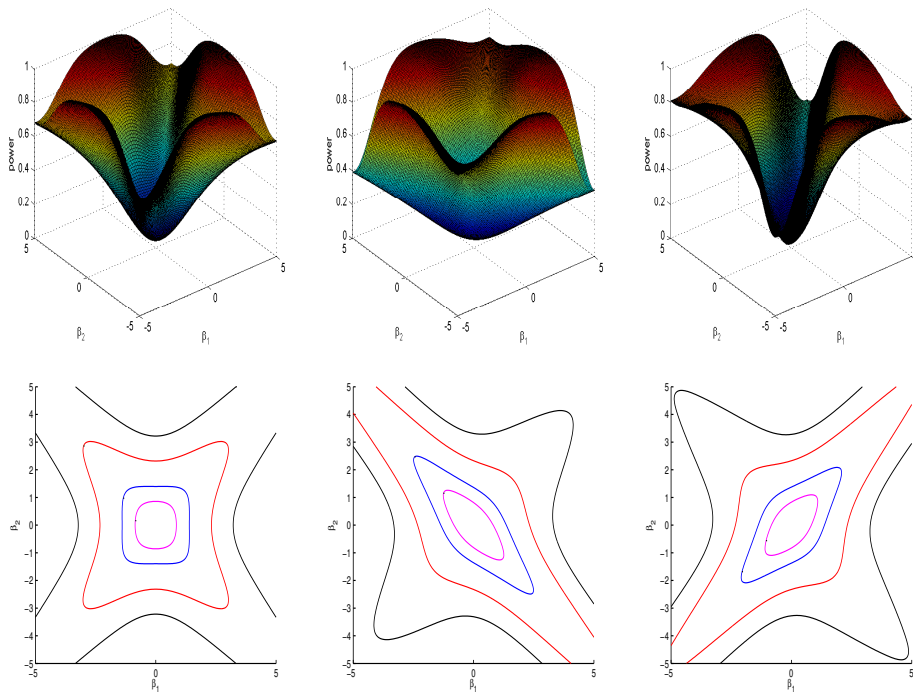


FIGURE 16 – At the top, from left to right, power function $\beta \mapsto k_{\alpha,\rho}(\beta)$ for a significance level $\alpha = 0.05$ and correlations $\rho = 0, \rho = 0.5$ and $\rho = -0.4$. At the bottom, corresponding level sets of the power function, $k_{\alpha,\rho}(\cdot) = 0.10, 0.20, 0.40$ and 0.70 .

4.5.3 Pearson's chi-squared test versus the Spacing test for LARS

We consider the standard goodness of fit test of the hypothesis

$$\mathbb{H}_0 : “\beta^* \in \text{Ker}(X)” \quad \text{against} \quad \mathbb{H}_1 : “\beta^* \notin \text{Ker}(X)”.$$

This test is defined by the statistic

$$P = \|Y\|_2^2$$

that follows a $\chi^2(n, \|X\beta\|_2^2)$ distribution where $\chi^2(a, b)$ denotes the χ^2 distribution with a degrees of freedom and non-centrality parameter b . Our aim is to compare this standard test with the Spacing test for LARS in different cases.

The two-dimensional case

In dimension two, considering the full model $(s,n,p) = (2,2,2)$, we present a comparison of level sets of power functions for Spacing test for LARS and Pearson’s chi-squared test, see Figure 17. It may suggest, from the comparison of level sets, that Pearson’s chi-squared test is uniformly more powerful than Spacing test for LARS in the two-dimensional case.

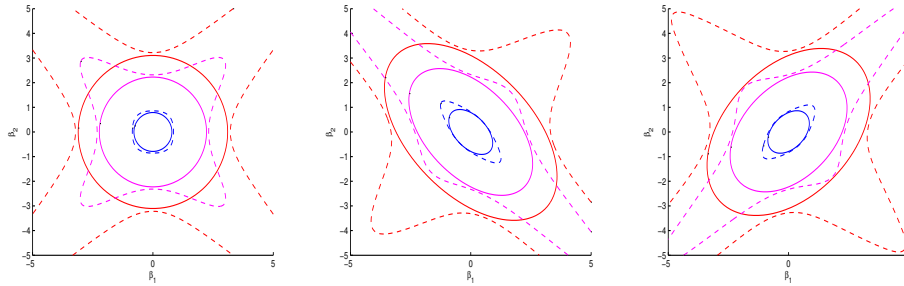


FIGURE 17 – From left to right, level sets of the power functions of S (dashed lines) and P (plain line) for $\alpha = 0.05$ and $\rho = 0, \rho = 0.5$ and $\rho = -0.4$. We observe that the hypograph of the power function of S is included in the corresponding one of P .

Higher dimensions

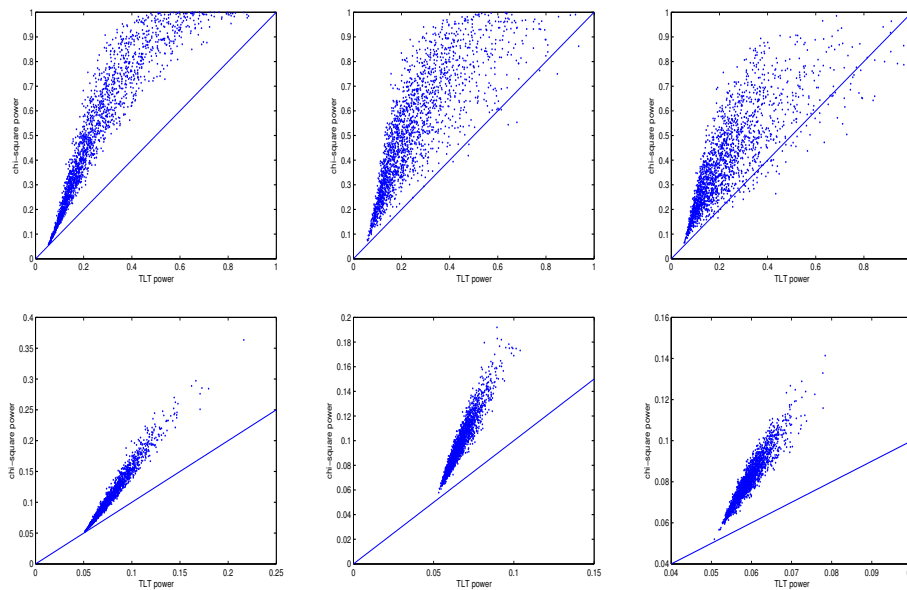


FIGURE 18 – From left to right, 2,000 simulations of Spacing test for LARS’s power versus χ^2 power in various sparse cases $(s, n, p) = (5, 10, 50), (10, 50, 100)$ and $(10, 100, 200)$. At the top, the mean β is “large”, while, at the bottom, the mean is “small” (see Section 4.5.3 for a definition). In both case, Pearson’s chi-squared test seems more powerful in respectively 95, 94 and 99% of cases (large mean) and 91, 98 and 99% of cases.

In higher dimension, our experiments have the following frame. The design matrix X is drawn from $n \times p$ independent standard Gaussian distribution. The target β^* has s non zero entries independently and identically drawn from centered Gaussian distribution having variance 2 (“large mean case”), or variance 1 (“medium mean case”) or from uniform random distribution on $[0, 1]$

("small mean case"). The choice of s , n and p concerns "full" models ($s = n = p$, see Figure 19), "sparse" models (see Figure 18) or "very sparse" models ($s \ll p$, see Figure 20).

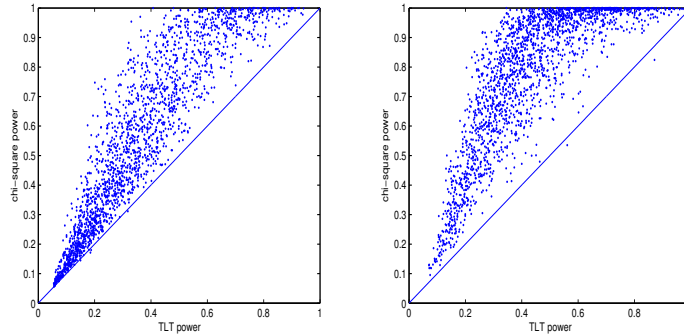


FIGURE 19 – From left to right, 2000 simulations of Spacing test for LARS's power versus χ^2 power in the "full" case $(s, n, p) = (5, 5, 5)$ and $(10, 10, 10)$ for a mixture of small, medium and high mean. As in dimension two, the χ^2 test seems to give an improvement with respect to the Spacing test for LARS.

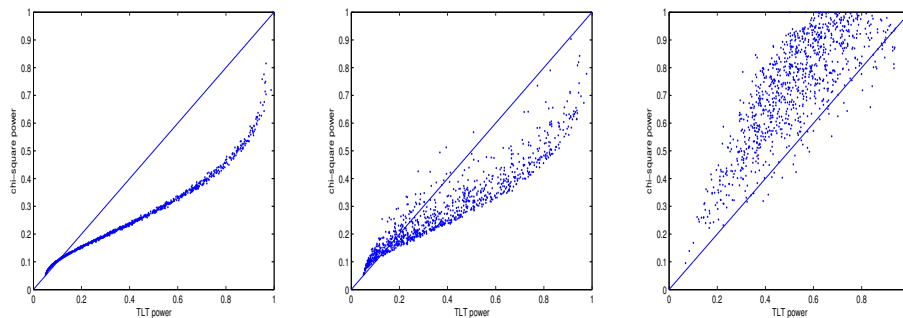


FIGURE 20 – In the first instance (left), $(s, n, p) = (1, 100, 400)$ and the mean is drawn from $\mathcal{N}(\sqrt{2\log(p)}, 1)$. In the second one (center), one mean is drawn from $\mathcal{N}(\sqrt{2\log(p)}, 1)$ and others from $\mathcal{N}(0, 1)$. In the third one (right), $(s, n, p) = (3, 100, 400)$ and all means are drawn from $\mathcal{N}(\sqrt{2\log(p)}, 1)$. When one mean is dominant, as in the first two cases, the Spacing test for LARS seems to be more efficient. However, when the difference between the two dominant means isn't large enough, the χ^2 test seems to be more efficient.

Conclusions

Figure 17 suggests, from the comparison of level sets, that the χ^2 test is uniformly more powerful than the Spacing test for LARS in the two dimensional case. Results from Figure 19 seem to confirm the interest of χ^2 test in full models. However, Spacing test for LARS seems much more efficient in very high dimension cases when the signal presents a major gap between the dominant component and the rest (see Figure 20). When β_i are of the same order of magnitude (meaning drawn from the same law), even in case of sparsity, χ^2 test seems to be more powerful with respect to Spacing test for LARS (see Figure 18).

Simulations have been conducted with $\alpha = 0.05$ which is a classical choice. Other simulations with $\alpha = 0.01$ gave similar results. Finally, simulations involving higher level of α gave less marked results.

Acknowledgment

We thank Pr. Franck Barthe for valuable discussions.

Appendix

Lemma 4.5.1 (Anderson's inequality for Gaussian measure [And55]). *Let E be a convex set in \mathbb{R}^p , symmetric around the origin, and let $Z \sim \mathcal{N}_p(0, V)$. For all $t \geq 0$ and $\mu \in \mathbb{R}^p$ define*

$$\gamma_{E,\mu}(t) := \mathbb{P}(Z + t\mu \in E).$$

Then $t \mapsto \gamma_{E,\mu}(t)$ is a non-increasing function.

Lemma 4.5.2. *For all $\alpha \in [0, 1]$ and for all $u \in \mathbb{R}$ such that $u \geq \bar{\Phi}(\alpha/2)$, it holds that the function h_α defined by (4.4) enjoys $h_\alpha \geq 0$, h_α is non-increasing, and h_α goes to zero at infinity.*

Proof 14. *First, note $\alpha\bar{\Phi}(u) \leq \bar{\Phi}(u)$ and $\bar{\Phi}$ is non-increasing, to get that $h_\alpha \geq 0$. Compute the derivative and use that $h_\alpha \geq 0$ to show that $h'_\alpha(u) \leq \alpha - 1 \leq 0$. Eventually, we get that*

$$\forall \alpha \in]0, 1], \forall u \geq u_0, \quad \bar{\Phi}(u + a) \leq \alpha\bar{\Phi}(u)$$

As $\bar{\Phi}$ is non-increasing, it implies that $u + a \geq \bar{\Phi}^{-1}(\alpha\bar{\Phi}(u))$ so that $a \geq h_\alpha(u) \geq 0$ which concludes the proof.

Lemma 4.5.3. $\forall \alpha \in [0, 1], \forall u \geq \bar{\Phi}^{-1}(\alpha/2), \forall v \geq 0$, it holds

$$g_\alpha(u + v) \geq g_\alpha(u) + v, \tag{4.19}$$

where $g_\alpha(u) = \bar{\Phi}^{-1}\left(1 - \frac{1 - \bar{\Phi}(u)}{\alpha}\right) = \bar{\Phi}^{-1}(\bar{\Phi}(u)/\alpha)$.

Proof 15. *To prove (4.19), we show*

$$\frac{\partial g_\alpha}{\partial u}(u, \alpha) = \frac{\varphi(u)}{\alpha\varphi(g_\alpha(u))} =: \frac{\varphi(u)}{j(u, \alpha)} \geq 1.$$

Use the fact that $\forall u \in \mathbb{R}, \varphi(u) \geq u\bar{\Phi}(u)$ to compute

$$\frac{\partial j}{\partial \alpha}(u, \alpha) = \varphi(g_\alpha(u)) - \frac{\bar{\Phi}(u)}{\alpha}g_\alpha(u) \geq 0$$

so

$$\frac{\partial g_\alpha}{\partial u}(u, \alpha) \geq \frac{\varphi(u)}{j(u, 1)} = 1,$$

as claimed.

Chapitre 5

Spacing test on continuous processes and super-resolution

5.1 Introduction

5.1.1 The Super-Resolution problem

Deconvolution over the space of complex-valued Radon measure has recently attracted a lot of attention in the “Super-Resolution” community (and its companion formulation in “Line spectral estimation”). A standard aim is to recover fine scale details of an image from few low frequency measurements (ideally the observation is given by a low-pass filter). The novelty in this body of work relies on new theoretical guarantees of the ℓ_1 -minimization over the space of Radon measures with finite support. Some recent works on this topic can be found in the papers [dCG12, BP13, Tal13, CFG14, AdCG15, FG13, BDF14, DP15] and references therein.

An important example throughout this paper is given by the Super-Resolution problem which can be stated as follows. Let $\nu^0 \in (\mathcal{M}(\mathbb{T}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_1)$ a complex-valued Radon measure on the one dimensional torus \mathbb{T} identified to $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$ equipped with the natural circlewise metric. Let $n = 2f_c + 1$ where $f_c \geq 1$ and denote by \mathbf{D}_n the following Dirichlet kernel,

$$\forall x \in \mathbb{T}, \quad \mathbf{D}_n(x) = \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}.$$

Consider the linear operator $\mathcal{F}_n : \mathcal{M}(\mathbb{T}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^n$ that maps any complex-valued Radon measure ν onto its Fourier coefficients $c_k(\nu)$ where

$$c_k(\nu) = \int_{\mathbb{T}} \exp(ikx) \nu(dx)$$

for integers k such that $|k| \leq f_c$. Consider $\zeta_k = \zeta_k^{(1)} + i\zeta_k^{(2)}$ where $\zeta_k^{(\ell)}$ are i.i.d. standard Gaussian random variables for $|k| \leq f_c$ and $\ell = 1, 2$. In the Super-Resolution frame, we observe a perturbed version of the Fourier coefficients, namely

$$y = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathcal{F}_n(\nu^0) + \sigma \zeta. \quad (5.1)$$

Equivalently, we observe the trigonometric polynomial $Z := \frac{1}{\sqrt{n}} \mathcal{F}_n^*(y)$ which reads as

$$\forall x \in \mathbb{T}, \quad Z(x) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}} \mathbf{D}_n(x-z) \nu^0(dz) + \sigma \sum_{k=-f_c}^{f_c} \frac{1}{\sqrt{n}} \zeta_k \exp(ikx).$$

In super-resolution, one observes Z and infers on ν^0 assuming that it has finite support.

5.1.2 The general model

Denote by (\mathbb{K}, d) a compact metric set and consider the Banach space $\mathbf{E} := (\mathcal{C}(\mathbb{K}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ of real-valued continuous functions over \mathbb{K} endowed with the supremum norm. Recall that its dual

$$\mathbf{E}^* := (\mathcal{M}(\mathbb{K}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$$

is the Banach space of real-valued Radon measures endowed with the total variation norm. Denote by \mathcal{H} a separable Hilbert space and consider X a bounded linear operator from \mathbf{E}^* onto \mathcal{H} . Looking at continuous functions, we may assume that

$$\text{The range of the adjoint operator } X^* : \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{E}^{**} \text{ is included in } \mathbf{E}. \quad (\mathbf{A}_X)$$

Remark that Assumption \mathbf{A}_X is always satisfied when the range of X^* is finite dimensional. In this paper, we aim at inferring on a target real-valued Radon measure $\mu^0 \in \mathbf{E}^*$ given an observation

$$y = X(\mu^0) + \sigma \zeta$$

where $\sigma > 0$ denotes a standard deviation parameter and $\zeta \in \mathcal{H}$ is a centered Gaussian random vector with covariance operator Σ . In particular, recall that Σ is a positive symmetric trace class operator on \mathcal{H} . Assume that the closure of the range of X is included in the range of Σ depicting that the random vector ζ perturbs the whole vector $X(\mu^0)$ (otherwise the problem is simpler and we do not pursue in this direction). When it is possible (actually when $y = \{Y(t); t \in \mathbb{K}\}$ admits a finite Karhunen-Loeve expansion), denote Σ^\dagger the Moore-Penrose pseudo inverse of Σ and note that

$$X^* \Sigma^\dagger y = X^* \Sigma^\dagger X(\mu^0) + \sigma X^* \Sigma^\dagger \zeta. \quad (5.2)$$

Invoke Assumption \mathbf{A}_X to show that $X^* h \in \mathbf{E}$ for any $h \in \mathcal{H}$. Moreover, using the canonical injection from \mathbf{E} onto \mathbf{E}^{**} and recalling standard duality equality, one has

$$\forall (t, h) \in \mathbb{K} \times \mathcal{H}, \quad X^*(h)(t) = \langle \delta_t, X^* h \rangle_{\mathbf{E}^*, \mathbf{E}} = \langle X^* h, \delta_t \rangle_{\mathbf{E}^{**}, \mathbf{E}^*} = \langle h, X \delta_t \rangle_{\mathcal{H}}$$

where δ_t denotes the Dirac measure at point t and, for instance, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{E}^*, \mathbf{E}}$ denotes the scalar product for the duality \mathbf{E}^*, \mathbf{E} . We deduce that (5.2) reads

$$\forall t \in \mathbb{K}, \quad Y(t) = \int_{\mathbb{K}} \text{Cov}(t, s) \mu^0(ds) + \sigma \xi(t), \quad (\mathbf{GM})$$

where $Y(t) = X^*(\Sigma^\dagger y)(t) = \langle \Sigma^\dagger X \delta_t, y \rangle_{\mathcal{H}}$ and $\{\xi(t), t \in \mathbb{K}\}$ is a centered Gaussian process with continuous trajectories and continuous covariance function

$$\forall t, s \in \mathbb{K}, \quad \text{Cov}(t, s) := \text{Cov}(Y(t), Y(s)) = X^*(\Sigma^\dagger X(\delta_s))(t) = \langle \Sigma^\dagger X \delta_t, X \delta_s \rangle_{\mathcal{H}}.$$

In particular, remark that the variance $\text{Cov}(t, t) = \langle \Sigma^\dagger X \delta_t, X \delta_t \rangle_{\mathcal{H}}$ is positive and we may divide by $\text{Cov}(t, t)$ to assume that

$$\forall t \neq s \in \mathbb{K}, \quad r(t, t) = 1 \quad \text{and} \quad |r(t, s)| < 1. \quad (\mathbf{A}_r)$$

In a general way, as the pseudo-inverse of a continuous operator on a Hilbert space has no reason to be properly defined, we limit our attention to the specific case $\mathbb{V}(Y(t)) = C, \forall t \in \mathbb{K}$, for some $C \in \mathbb{R}_+^*$. In the sequel, we focus on Formulation **(GM)** (referred to as the general model) and we present testing procedures on the target μ^0 . The Gaussian process $\{Y(t), t \in \mathbb{K}\}$ may be interpreted as a *correlation* function that may take larger absolute values on the support of the target μ^0 . That case is a generalization of the super-resolution based on the process Y defined by

$$\forall (x, \theta) \in \mathbb{T}^2, \quad Y(x, \theta) := \cos(\theta/2) \mathbf{Re}(Z(x)) + \sin(\theta/2) \mathbf{Im}(Z(x)),$$

where \mathbf{Re} and \mathbf{Im} denote the real and imaginary part of a complex number. Remark that $\sup_{\theta} Y(x, \theta) = |Z(x)|$ and one can see Y as a correlation process. An elementary calculus shows that Y satisfies (GM) with

$$\begin{aligned} \mathbb{K} &= \mathbb{T}^2 \\ \mu^0(dt) &= \delta_0(d\theta) \mathbf{Re}(v^0)(dx) + \delta_{\pi}(d\theta) \mathbf{Im}(v^0)(dx) \\ r(t, s) &= \cos(\theta/2 - \alpha/2) \mathbf{D}_n(x - z)/n \end{aligned}$$

where $t = (x, \theta)$ and $s = (z, \alpha)$. Note that assumptions \mathbf{A}_X and \mathbf{A}_r hold true.

5.2 Spacing test for Super-Resolution

In [TLT14], Taylor, Loftus and Tibshirani consider the class of regularized least squares problems

$$\hat{\beta} \in \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \frac{1}{2} \|y - X\beta\|_2^2 + \lambda \cdot \mathcal{P}(\beta) \quad (5.3)$$

where $y \in \mathbb{R}^n$ is the outcome, $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ the design matrix and $\lambda \geq 0$ the regularization parameter. Moreover, they assume that the penalty function \mathcal{P} satisfies

$$\mathcal{P}(\beta) = \max_{u \in C} u^T \beta$$

where C is a convex set of \mathbb{R}^p so that \mathcal{P} is the support function of C . Using the dual penalization of \mathcal{P} , one compute the first knot of the regression as

$$\lambda_1 = \min\{\lambda \geq 0 ; \mathcal{P}(\hat{\beta}_\lambda) = 0\} = \mathcal{Q}(X^T(I - P_{XC^\perp})y) = \max_{v \in \mathcal{X}} v^T X^T(I - P_{XC^\perp}),$$

where $\mathcal{X} = \{v ; \mathcal{P}(v) \leq 1\}$, and derive, under some conditions on \mathcal{X} , the Kac-Rice test

$$S = \frac{\int_{\lambda_1}^{+\infty} \det(\Lambda_{\hat{t}} + zI) \phi(z/\sigma_{\hat{t}}) dz}{\int_{\lambda_2^{\hat{t}, \hat{\epsilon}}}^{+\infty} \det(\Lambda_{\hat{t}} + zI) \phi(z/\sigma_{\hat{t}}) dz} \sim \mathcal{U}(0, 1), \quad (5.4)$$

for $(\Lambda_{\hat{t}}, \sigma_{\hat{t}}, \lambda_2^{\hat{t}, \hat{\epsilon}})$ as in (1.49) and (1.50). We refer to section 1.4.1 or [TLT14] for more details. In fact, this method is maybe more general and could be applied in the context of the Super-Resolution. Indeed, the corresponding penalization procedure is given by

$$\hat{\beta} \in \arg \max_{v \in \mathcal{M}(\mathbb{T}, \mathbb{C})} \frac{1}{2} \left\| y - \frac{1}{\sqrt{n}} \mathcal{F}_n(v) \right\|_2^2 + \lambda \|v\|_1 \quad (5.5)$$

and is deeply linked with the lasso procedure. From general results on the blasso, we know that the corresponding first knot λ_1 is given by

$$\lambda_1 = \hat{\epsilon} Z(\hat{t}) = \int_{\mathcal{X}} Z(x) \hat{\epsilon} \delta_{\hat{t}}(dx) \quad (5.6)$$

so that $\hat{v}_1(\cdot) = \hat{\epsilon} \delta_{\hat{t}}(\cdot)$. Furthermore, following the proof of [TLT14] and using a hypothetical functional version of the Kac-Rice formula on the regular set \mathcal{X} , we deduce a result similar to (5.4) with

$$\lambda_2 = \lambda_2^{\hat{t}, \hat{\epsilon}} = \sup_{s \neq \hat{t}, \eta = \pm 1} \frac{\eta \left(Z(s) - \frac{\mathbf{D}_n(\hat{t}-s)}{n} Z(\hat{t}) \right)}{1 - \hat{\epsilon} \eta \frac{\mathbf{D}_n(\hat{t}-s)}{n}}. \quad (5.7)$$

Finally, we define the normal cone of \mathcal{K} at point $\delta_{\hat{t}}$ as

$$N_{\hat{t}\delta_{\hat{t}}}\mathcal{K} = \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C}); \|f\|_{\infty} = \int_{\mathcal{X}} f(x) \hat{\varepsilon} \delta_{\hat{t}}(dx) \right\}.$$

As it is a full-dimensional set in \mathcal{C} , the tangent space to \mathcal{K} is restricted to the null function so that the corresponding Kac-Rice statistic satisfies

Theorem 5.2.1. *Consider the penalization problem (5.5) and the hypothesis*

$$\mathbb{H}_0 : "v^0 = 0" \quad \text{against} \quad \mathbb{H}_1 : "v^0 \neq 0", \quad (5.8)$$

then

$$S \sim_{\mathbb{H}_0} \mathcal{U}([0, 1])$$

where $S = \frac{1-\Phi(\lambda_1)}{1-\Phi(\lambda_2)}$ and (λ_1, λ_2) as in (5.6,5.7).

Another statistic involving Kac-Rice formula may be derived to test (5.8). Recall that

$$Y(x, \theta) = \cos(\theta/2)A_1(x) + \sin(\theta/2)A_2(x)$$

where $A_1 = \mathbf{Re}(Z)$ and $A_2 = \mathbf{Im}(Z)$, then this new test reads as follow.

Theorem 5.2.2. *With the notation above,*

$$V := \frac{1 - G_{R^{(t^*, \theta^*)}, \lambda_2}(\lambda_1)}{1 - G_{R^{(t^*, \theta^*)}, \lambda_2}(\lambda_2)} \Big|_{(R^{(t^*, \theta^*)}, \lambda_2) \sim_{\mathbb{H}_0} \mathcal{U}([0, 1])}, \quad (5.9)$$

where (t^*, θ^*) denote the arg max of Y on \mathbb{T}^2 and G is defined by (5.18).

We will focus on numerical and theoretical comparisons between these two tests in future works.

5.3 Extension to continuous Gaussian processes ?

In this section, we try to explain how to extend the finite dimensional results of Azaïs, de Castro, Mourareau (see [AdCM15b]) to continuous Gaussian processes. As we detail below, these results are, by now, incomplete but provide a first approach for possible extensions.

5.3.1 The known variance case

Consider the model (GM) and assume that the standard deviation parameter $\sigma > 0$ is known and that Assumption \mathbf{A}_r holds true. Fix $t \in \mathbb{K}$ and $\varepsilon, \eta \in \{\pm 1\}$ and define

$$\forall s \in \mathbb{K} \setminus \{t\}, \quad Y_{\eta}^{t, \varepsilon}(s) := \frac{\eta(Y(s) - \text{Cov}(t, s)Y(t))}{1 - \eta\varepsilon \text{Cov}(t, s)},$$

and

$$\lambda_2^{t, \varepsilon} := \max_{\eta=\pm 1} \sup_{s \in \mathbb{K} \setminus \{t\}} Y_{\eta}^{t, \varepsilon}(s) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Define

$$\lambda_1 := \hat{\varepsilon}Y(\hat{t}) \quad \text{and} \quad \lambda_2 := \lambda_2^{\hat{t}, \hat{\varepsilon}}$$

where $(\hat{t}, \hat{\varepsilon}) \in \mathbb{K} \times \{\pm 1\}$ is the unique couple such that $\hat{\varepsilon}Y(\hat{t}) = \|Y\|_{\infty}$.

In practice, a statistician consider a grid of \mathbb{K} and apply the finite dimensional theorem of chapter 4 or theorem 2 of [AdCM15b]. Going to the limit, it comes

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\bar{\Phi}(\lambda_1^n)}{\bar{\Phi}(\lambda_2^n)} \sim \mathcal{U}([0, 1]),$$

where $(\lambda_1^n, \lambda_2^n)$ are the finite dimensional versions of (λ_1, λ_2) on the grid. The question that arises is what is the link between $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda_1^n, \lambda_2^n)$ and (λ_1, λ_2) ?

Consider the test statistic and rejection region for any $\alpha \in (0, 1)$ given by

$$T := \frac{1 - \Phi(\lambda_1/\sigma)}{1 - \Phi(\lambda_2/\sigma)} \quad \text{and} \quad \mathcal{R}_\alpha := \{S \leq \alpha\}. \quad (\mathbf{T}_1)$$

We wish to prove that, considering Y given by (GM) and the following hypothesis

$$\mathbb{H}_0 : \mu^0 = 0 \quad \text{against} \quad \mathbb{H}_1 : \mu^0 \neq 0,$$

then for any $\alpha \in (0, 1)$, Test \mathbf{T}_1 has significance level α and is unbiased. Furthermore, the error of the first kind is much smaller than the power as α goes to 0. However, due to technical conditions on λ_2^n , by now, we can only prove the following theorem.

Theorem 5.3.1. *With the notation above,*

$$\mathbb{P}_{\mathbb{H}_0}(T \leq \alpha) \geq \alpha, \quad \forall \alpha \in [0, 1]. \quad (5.10)$$

Remark. In the lasso case, statistics S and T are equals, but this is not true in the general case. See, for instance, [CTT14] for the group lasso or [LT15] for the nuclear norm. If the more general result $T \sim_{\mathbb{H}_0} \mathcal{U}([0, 1])$ holds true, it would provide a new and simplest test for these cases.

5.3.2 The unknown variance case

When the variance σ^2 is unknown, we can proceed as follows. Let $m \geq 1$ and assume that it holds

$$\xi \text{ has Karhunen – Loeve. development of order } m \quad (\mathbf{A}_{\text{KL}(m)})$$

and

$$\forall t_1, \dots, t_m \in \mathbb{K} \text{ pairwise distinct } (\xi(t_1), \dots, \xi(t_m)) \text{ is nondegenerated.} \quad (\mathbf{A}_{\text{ND}(m)})$$

Similarly to the previous section, we wish to prove that, considering Y given by (GM) where σ is unknown and assuming $(\mathbf{A}_{\text{KL}(m)})$ and $(\mathbf{A}_{\text{ND}(m)})$ for some m in \mathbb{N} , then under \mathbb{H}_0 ,

$$U = \frac{1 - \mathbb{F}_{m-1}(\lambda_1/\hat{\sigma})}{1 - \mathbb{F}_{m-1}(\lambda_2/\hat{\sigma})} \sim \mathcal{U}([0, 1]), \quad (5.11)$$

where \mathbb{F}_{m-1} denote the t -distribution with $m - 1$ degrees of freedom and $\hat{\sigma}$ is defined by (5.15). However, by now, we limit our proof to one side.

Theorem 5.3.2. *With the notation above,*

$$\mathbb{P}_{\mathbb{H}_0}(U \leq \alpha) \geq \alpha, \quad \forall \alpha \in [0, 1]. \quad (5.12)$$

Remark. If the process $Y(\cdot)$ satisfies $(\mathbf{A}_{\text{KL}(m)})$ and $(\mathbf{A}_{\text{ND}(m)})$ for $m = +\infty$, from every blue of p and the observation of $(X(t_1), \dots, X(t_p))$ for pairwise disjoint (t_1, \dots, t_p) , we can construct an estimator of σ^2 with distribution $\sigma^2 \chi^2(p)/p$. Using concentration bounds for $\chi^2(p)$ distribution and Borel-Cantelli lemma we get that these estimators converge almost surely as p tend to infinity. This proves that in fact σ^2 is directly observable from the entire path. We still denote $\hat{\sigma}_{\text{KL}}^2$ this observation. In this case the Student distribution has to be replaced by a standard normal distribution in (5.11).

5.4 Appendix

5.4.1 Proof of theorem 5.3.1

Let $\{X(t), t \in \mathbb{K}\}$ be a real-valued Gaussian centered process with continuous path. Denote by $r(s, t) = \mathbb{E}(X_s X_t)$ its covariance function. We suppose

- \mathbb{K} is a compact metric space,
- $\forall t \in \mathbb{K}, \mathbb{V}(X_t) = 1$,
- $\hat{t} = \arg \max_{t \in \mathbb{K}} |X(t)|$ is a.s. unique.

Set

$$\lambda_1 = \max_{t \in \mathbb{K}} |X(t)| =: \hat{e}X(\hat{t})$$

and consider the standard regression

$$\forall (t, t+h) \in \mathbb{K}^2, \quad X(t+h) = \gamma(t, h)X(t) + X^t(h)$$

where $\gamma(t, h) = r(t, t+h)$. Moreover, denote

$$Z^{t, \epsilon}(h, \eta) := \frac{\eta X^t(h)}{1 - \eta \epsilon \gamma(t, h)}$$

and

$$\lambda_2^{\hat{t}, \hat{e}} := \sup_{|\gamma(\hat{t}, h)| < 1, s = \pm 1} Z^{\hat{t}, \hat{e}}(h, \eta). \quad (5.13)$$

Our aim is to prove that

$$\forall \alpha \in [0, 1], \quad \mathbb{P}_{\mathbb{H}_0}(S \leq \alpha) \geq \alpha \quad (5.14)$$

where hypothesis \mathbb{H}_0 suppose $\mu^0 = 0$. To do so, let G_n be a monotonic grid of \mathbb{K} ($G_n \subset G_m$ if $n \leq m$), set $\delta > 0$ and

$$\lambda_{2, \delta}^{\hat{t}_n, \hat{e}_n} = \max_{(h, \eta): \hat{t}_n + h \in G_n, |\gamma(\hat{t}_n, h)| < 1 - \delta, \eta = \pm 1} Z^{\hat{t}_n, \hat{e}_n}(h, \eta),$$

where $\hat{t}_n := \arg \max_{t \in G_n} X(t)$. By theorem 1 of [AdCM15b],

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S^{n, \delta} := \frac{\bar{\Phi}(\lambda_1^n)}{\bar{\Phi}(\lambda_{2, \delta}^{\hat{t}_n, \hat{e}_n})} \sim_{\mathbb{H}_0} \mathcal{U}([0, 1])$$

where $\lambda_1^n := \max_{t \in G_n} X(t)$. Because of non-stationarity and by definition of λ_2 , we need to pay attention to h such that $|\gamma(\hat{t}, h)|$ is near 1. In this way, set

$$\lambda_{2, \delta}^{\hat{t}, \hat{e}} = \max_{(h, \eta): \hat{t} + h \in \mathbb{K}, |\gamma(\hat{t}, h)| < 1 - \delta, \eta = \pm 1} Z^{\hat{t}, \hat{e}}(h, \eta)$$

then

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_{2, \delta}^{\hat{t}_n, \hat{e}_n} = \lambda_{2, \delta}^{\hat{t}, \hat{e}} = \lambda_2.$$

Indeed, by lemma 5.4.1, $Z^{\hat{t}_n, \hat{e}_n}(\cdot, \cdot)$ converges uniformly in n to $Z^{\hat{t}, \hat{e}}(\cdot, \cdot)$. Moreover, thanks to uniform continuity of γ on the set $O_\beta := \{(t, h) : |\gamma(t, h)| < 1 - \beta\}, \forall \beta \in]0, 1]$, for n large enough,

$$|\gamma(\hat{t}, h) - \gamma(\hat{t}_n, h)| < \beta/2$$

so

$$(\hat{t}_n, h) \in O_{\beta/2} \implies (\hat{t}, h) \in O_\beta.$$

Denote w_β the modulus of continuity of $\gamma(\hat{t}, h)$ in h and $\Delta_n := \max_{t \in \mathbb{K}} d(t, G_n)$ then

$$|\lambda_{2,\delta}^{\hat{t}_n, \hat{\epsilon}_n} - \lambda_{2,\delta}^{\hat{t}, \hat{\epsilon}}| \leq C w_\delta(\Delta_n) \rightarrow 0$$

as n goes to infinity.

Finally, it holds

$$\forall \delta > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S^{n,\delta} = S^\delta \sim \mathcal{U}([0, 1]),$$

and, by monotonicity of S^δ ,

$$S = \lim_{\delta \rightarrow 0} S^\delta = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} S^{n,\delta} \sim \mathcal{U}([0, 1]).$$

The result of theorem 5.3.1 is then a consequence of

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \delta > 0, \quad \lambda_{2,\delta}^{\hat{t}_n, \hat{\epsilon}_n} \leq \lambda_{2,\delta}^{\hat{t}_n, \hat{\epsilon}_n}.$$

Lemma 5.4.1. *Using the notation above,*

$$Z^{\hat{t}_n, \hat{\epsilon}_n}(h, \eta) \xrightarrow[\|\gamma(\hat{t}_n, h) - 1\| > \epsilon]{\text{unif}} Z^{\hat{t}, \hat{\epsilon}}(h, \eta).$$

Proof 16. *Comes from the uniform continuity of γ and X w.r.t. $(\hat{t}_n, \hat{\epsilon}_n)$.*

Lemma 5.4.2. *Recall that $\hat{t}_n = \arg \max_{t \in G_n} |X(t)|$ and $\hat{t} = \arg \max_{t \in \mathbb{K}} |X(t)|$ then*

$$\hat{t}_n \rightarrow \hat{t} \quad \text{and} \quad \hat{\epsilon}_n = \text{sign}(\hat{t}_n) \rightarrow \text{sign}(\hat{t}) = \hat{\epsilon}$$

as n goes to infinity.

Proof 17. *Let $B \subset \mathbb{K}$ an open neighborhood of \hat{t} , let us prove that $\hat{t}_n \in B$ for n sufficiently large. Consider*

$$\lambda_1^{B^c} = \max_{t \in B^c \cap \mathbb{K}} X(t)$$

By compactness of $B^c \cap \mathbb{K}$, there exists $\delta > 0$ such that

$$\lambda_1^{B^c} = X(\hat{t}) - \delta.$$

Denote

$$\mathcal{C} = \{t \in B : X(t) > X(\hat{t}) - \delta\}$$

which is an open set. For n large enough, there exists $\tilde{t} \in G_n \cap \mathcal{C}$ so

$$X(\hat{t}_n) \geq X(\tilde{t}) > X(\hat{t}) - \delta$$

so $\hat{t}_n \in \mathcal{C} \subset B$.

5.4.2 Proof of theorem 5.3.2

Let $Y(t), t \in T$ be a continuous Gaussian Process with real values and defined on a compact metric space \mathbb{K} . We assume that it satisfies the assumptions $(\mathbf{A}_{\text{KL}(m)})$ and $(\mathbf{A}_{\text{ND}(m)})$ for some integer m , i.e.

$$Y(t) = \mu(t) + \sum_{i=1}^m \xi_i f_i(t)$$

where $\mu(t)$ is the expectation, the ξ_i 's are i.i.d. $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ and for all $t : \sum_{i=1}^m f_i^2(t) = 1$ (this last equation implies that $\text{Var}(X(t)) \equiv \sigma^2$).

Definition 5. Let $Y(\cdot)$ be a process as above, the quantity

$$\hat{\sigma}_{\text{KL}}^2(X) := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \xi_i^2, \quad (5.15)$$

is called the Karhunen-Loeve estimator of the variance σ^2 .

Remark. An explicit estimation of $\hat{\sigma}_{\text{KL}}^2$ is possible from an arbitrary set of pairwise disjoint $(t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{K}^m$. Moreover, sufficiency consideration imply that $\hat{\sigma}_{\text{KL}}^2$ is an optimal unbiased estimator.

The proof of Theorem 5.3.2 uses the following lemma

Lemma 5.4.3. Let $Y(\cdot)$ satisfying $(\mathbf{A}_{\text{KL}(m)})$ and $(\mathbf{A}_{\text{ND}(m)})$. For every $t \in \mathbb{K}$, define the process $Z^t(\cdot)$ as

$$\forall s \in \mathbb{K}/\{t\}, \quad Z^t(s) := X(s) - r(t, s)X(t), \quad (5.16)$$

then $Z^t(\cdot)$ satisfy $(\mathbf{A}_{\text{KL}(m)})$ and $(\mathbf{A}_{\text{ND}(m)})$ for $m - 1$.

Proof of Lemma 5.4.3

Recall

$$Y(t) = \langle \xi, f(t) \rangle$$

where $f(t)$ consists of the m entries $f_i(t)$ and the same for ξ . Then, for all $t \in \mathbb{K}$,

$$Z^t(s) = \langle \xi, f(s) - \langle f(s), f(t) \rangle f(t) \rangle = \langle \xi, \pi_{f(t)^\perp}(f(s)) \rangle = \langle \pi_{f(t)^\perp}(\xi), \pi_{f(t)^\perp}(f(s)) \rangle.$$

As the projections $\pi_{f(t)^\perp}(\xi)$ and $\pi_{f(t)^\perp}(f(s))$ live in a space of dimension $m - 1$, we can represent them using a vector $\bar{\xi}$ of dimension $m - 1$ with i.i.d. $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ components and a vector $\bar{f}(t)$. Eventually,

$$Z^t(s) = \langle \bar{\xi}, \bar{f}(t) \rangle,$$

this last formula corresponding to hypothesis $(\mathbf{A}_{\text{KL}(m)})$ for $m - 1$. The second hypothesis is a direct consequence of the independence of $X(t)$ and $(Z^t(s_1), \dots, Z^t(s_{m-1}))$ so that the distribution of $(Z^t(s_1), \dots, Z^t(s_{m-1}))$ is not degenerated for all distinct (s_1, \dots, s_{m-1}) .

Proof of Theorem 5.3.2

Since \mathbb{K} is a compact metric space, then \mathbb{K} is separable. Let $G_n, n \in \mathbb{N}$ a dense sequence of grid. By this we mean that for every open set O of the countable basis of the topology of \mathbb{K} and for n sufficiently large, $G_n \cap \mathbb{K} \neq \emptyset$.

We perform a discrete spacing test as in Theorem 3 in Azais, de Castro, Mourareau [AdCM15b] on the grids that satisfy $\#G_n \geq m$. Because of $(\mathbf{A}_{\text{KL}(m)})$ and $(\mathbf{A}_{\text{ND}(m)})$, the rank of the variance-covariance matrix of the vector $Y(G_n)$ (with obvious notation) is m and by this last theorem

$$U = \frac{1 - \mathbb{F}_{m-1}(\lambda_1^n / \hat{\sigma})}{1 - \mathbb{F}_{m-1}(\lambda_2^n / \hat{\sigma}^n)},$$

follows a uniform distribution. The end of the proof remains on the same tools than the one of theorem 5.3.1.

5.4.3 Proof of theorem 5.2.2
Blasso knots

We begin with the construction of the statistics λ_1 and λ_2 . Denote A_1 and A_2 the two real valued Gaussian processes indexed by \mathbb{T}^2 such that

$$A_1(t) + \iota A_2(t) := \mathcal{F}_n^*(y)$$

The first knot λ_1 is defined as $\lambda_1 := \|\mathcal{F}_n^*(y)\|_\infty$. Consider the real valued Gaussian process Y indexed by \mathbb{T}^2 and defined as

$$Y(t, \theta) := \cos(\theta/2)A_1(t) + \sin(\theta/2)A_2(t).$$

In particular,

$$\lambda_1 = \sup_{(t, \theta) \in \mathbb{T}^2} Y(t, \theta) = Y(t^*, \theta^*) \quad (5.17)$$

where the couple (t^*, θ^*) is almost surely unique (see lemma 5.4.4). This last equality shows that λ_1 can be constructed from Y . Moreover, the covariance function of the process Y is given by $\text{Cov}(Y(t, \theta), Y(s, \beta)) = \Gamma(t-s, \theta-\beta)$ where

$$\Gamma(x, y) := \sigma^2 \cos(y/2) \mathbf{D}_{f_c}(x)$$

and \mathbf{D}_{f_c} is the Dirichlet kernel of order f_c . Given two points $(t, \theta), (s, \beta)$ in \mathbb{T}^2 , we can perform a regression of $Y(s, \beta)$ on $Y(t, \theta)$ and $Y'(t, \theta) := \nabla Y(t, \theta)$,

$$Y^{(t, \theta)}(s, \beta) := Y(s, \beta) - \frac{\Gamma(t-s, \theta-\beta)}{n\sigma^2} X(t, \theta) - \frac{\Gamma'_1((t-s), (\theta-\beta)) Y'_1(t, \theta)}{n\sigma^2} - \frac{\Gamma'_2((t-s), (\theta-\beta)) Y'_2(t, \theta)}{\frac{4n\sigma^2}{3} f_c(f_c+1)}.$$

where $\Gamma'_1 = \frac{\partial}{\partial t} \Gamma$ and $\Gamma'_2 = \frac{\partial}{\partial \theta} \Gamma$. Moreover, as Y is Gaussian, $Y^{(t, \theta)}$ is independent of $(Y(t, \theta), Y'(t, \theta))$. Eventually, define

$$\lambda_2^{(t, \theta)} = \sup_{(s, \beta) \neq (t, \theta)} \frac{Y^{(t, \theta)}(s, \beta)}{1 - \frac{\Gamma(t-s, \theta-\beta)}{n\sigma^2}}.$$

It is easy to check that the event

$$A^{t, \theta} := \{Y(t, \theta) = \max_{(s, \beta) \in \mathbb{T}^2} Y(s, \beta)\} = \{Y'(t, \theta) = 0\} \cap \{\lambda_2^{(t, \theta)} \leq Y(t, \theta)\}.$$

Law of λ_1

Applying theorem 3 of Azais-Wschebor (see [AW08]), it comes

$$\begin{aligned} p_{\lambda_1}(u) &= \int_{\mathbb{T}^2} \mathbb{E}(\det(\nabla^2 Y(t, \theta)) \mathbb{1}_{A_u^{t, \theta}} | Y(t, \theta) = u, \nabla Y(t, \theta) = 0) p_{(Y, \nabla Y)(t, \theta)}(u, 0) d\theta dt, \\ &= (2\pi)^2 \mathbb{E}(\det(\nabla^2 Y(0, 0)) \mathbb{1}_{A_u^{(0, 0)}} | Y(0, 0) = u, \nabla Y(0, 0) = 0) p_{(Y, \nabla Y)(0, 0)}(u, 0) \end{aligned}$$

because of stationarity and since the covariance matrix of $(Y, \nabla Y)$ is $n\sigma^2 \text{diag}(1, 1, 4f_c(f_c + 1)/3)$. Define

$$\Sigma = n\sigma^2 \text{diag}(1, 4f_c(f_c + 1)/3).$$

A standard regression argument gives

$$\mathbb{E}(Y''(0, 0) | Y(0, 0) = u, Y'(0, 0) = 0) = -\Sigma u + R^{(0, 0)}$$

where $R^{(0, 0)}$ is independent of $(Y(0, 0), Y'(0, 0))$ and $Y''(\cdot)$ denote the Hessian of Y in \mathbb{R}^2 . Moreover,

$$p_{(Y, \nabla Y)(0, 0)}(u, 0) = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \frac{\phi(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}})}{\sigma^3 n^{3/2} \sqrt{f_c(f_c + 1)}},$$

so, at last,

$$p_{\lambda_1}(u) = (2\pi)^2 \mathbb{E}(\det(-\Sigma u + R^{(0, 0)}) \mathbb{1}_{\lambda_2^{(0, 0)} \leq u}) \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{\phi(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}})}{\sigma^3 n^{3/2} \sqrt{f_c(f_c + 1)}}.$$

Joint law of $(\lambda_1, \lambda_2^{(t^*, \theta^*)}, R^{(t^*, \theta^*)})$

Consider $(O_1, O_2) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)^2$ and $O_3 \in \mathcal{B}(\mathcal{M}(2, 2))$ and apply a Kac-Rice formula for the joint law to find

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\lambda_1 \in O_1, \lambda_2^{(t^*, \theta^*)} \in O_2, R^{(t^*, \theta^*)} \in O_3) &= \int_{\mathbb{T}^2 \times O_1} d\theta dt du p_{(Y, \nabla Y)(t, \theta)}(u, 0) \times \\ &\quad \mathbb{E}(\det(\nabla^2 Y(t, \theta)) \mathbb{1}_{A_u^{t, \theta}} \mathbb{1}_{(\lambda_2^{(t, \theta)}, R^{(t, \theta)}) \in O_2 \times O_3} | Y(t, \theta) = u, \nabla Y(t, \theta) = 0). \end{aligned}$$

Let O_1 be an ϵ -neighborhood of l_1 , O_2 an ϵ -neighborhood of l_2 and O_3 an ϵ -neighborhood of R_0 , we get that the joint density of $(\lambda_1, \lambda_2^{(t^*, \theta^*)}, R^{(t^*, \theta^*)})$ at point (l_1, l_2, R_0) is proportional to

$$(2\pi)^2 \det(-\Sigma l_1 + R_0) \mathbb{1}_{l_2 \leq l_1} \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \frac{\phi(\frac{l_1}{\sigma\sqrt{n}})}{\sigma^3 n^{3/2} \sqrt{f_c(f_c + 1)}} =: g_{(R_0, l_2)}(l_1) \mathbb{1}_{l_2 \leq l_1}$$

which allow us to define the conditional density of λ_1 as

$$p_{\lambda_1 | R^{(t^*, \theta^*)} = R_0, \lambda_2^{(t^*, \theta^*)} = l_2}(l_1) = \frac{g_{(R_0, l_2)}(l_1) \mathbb{1}_{l_2 \leq l_1}}{\int_{l_2}^{+\infty} g_{(R_0, l_2)}(u) du},$$

the conclusion follows from the change of variable

$$G(l_1) = \int_{-\infty}^{l_1} p_{\lambda_1 | R^{(t^*, \theta^*)}, \lambda_2^{(t^*, \theta^*)}}(u) du. \quad (5.18)$$

5.4.4 Unicity of argmax

We recall the following result (see Tsirel'son [Tsi76] and Lifshits [Lif83])

Lemma 5.4.4. *Let (\mathbb{K}, d) be a metric compact space and $\{Y(t), t \in \mathbb{K}\}$ be a Gaussian process defined on \mathbb{K} with continuous sample paths. Assume that ¹*

$$\{(t, s) \in \mathbb{K}^2 \mid s \neq t \text{ and } Y(s) = Y(t) \text{ a.s.}\} = \emptyset. \quad (\mathbf{A}_0)$$

Then, almost surely, there exists a unique $(\hat{t}, \hat{\epsilon}) \in \mathbb{K} \times \{\pm 1\}$ such that $\hat{\epsilon}Y(\hat{t}) = \|Y\|_\infty$.

5.4.5 Localisation of argmax

Proposition 5.4.5. *Let $\chi := \{X(t); t \in T \subset \mathbb{R}^d\}$ a stationary Gaussian field with \mathcal{C}^3 sample paths and well normalized in the sense that*

$$\mathbb{E}(X(t)) = 0 \quad , \quad \text{Var}(X(t)) = 1 \quad , \quad \text{Var}(X'(t)) = I_d,$$

and such that its argmax is a.s. unique (see lemma 5.4.4). Suppose in addition that $\forall t \in T$, the distribution of $(X'(t), X'''(t))$ does not degenerate, then

$$\hat{t} \neq \hat{s} \quad \text{a.s.} \quad (5.19)$$

where $\hat{\epsilon}X(\hat{t}) = \|X\|_\infty$ and $(\hat{s}, \hat{\eta}) = \arg \max \lambda_{2, \hat{\epsilon}}^{\hat{s}}(s, \eta)$.

Proof 18. First, to simplify the computation and without loss of generality, assume that $d = 1$, that the process is periodic (see lemma 5.4.4) to reduce the problem to the interval $[0, 1]$ and that $\hat{\epsilon} = \hat{\eta} = 1$.

For $t \in [0, 1]$ and $h \in (-1/2, 1/2]$, we write the regression of $X(t+h)$ on $(X(t), X'(t))$ as

$$X(t+h) = \Gamma(h)X(t) - \Gamma'(h)X'(t) + X^t(h).$$

and define

$$Y^t(h) = \frac{X^t(h)}{1 - \Gamma(h)} = \frac{N(h)}{D(h)}. \quad (5.20)$$

From the equality $\{t = \hat{t}\} = \{X'(t) = 0; \max_h Y^t(h) \leq X(t)\}$, we deduce

$$\{t = \hat{t}, s = \hat{s}\} = \{X'(t) = 0, \max_h Y^t(h) = Y^t(0) \leq X(t)\},$$

so that a sufficient condition for (5.19) is $Y^t(\cdot)$ to be differentiable at zero with a non zero derivative. The function $Y^t(\cdot)$ is obviously differentiable outside zero so we focus on the study of $Y^t(\cdot)$ in a neighborhood of zero. In that way, we use the following expansions around 0 :

$$\begin{aligned} \Gamma(h) &= 1 - \frac{h^2}{2} + O(h^4), \\ \Gamma'(h) &= -h + O(h^3), \\ N(h) &= \frac{h^2}{2}(X''(t) + X(t)) + \frac{h^3}{6}X'''(t) + O(h^4), \\ N'(h) &= h(X''(t) + X(t)) + \frac{h^2}{2}X'''(t) + O(h^3), \\ D(h) &= \frac{h^2}{2} + O(h^4), \\ D'(h) &= h + O(h^3). \end{aligned}$$

1. Note that Assumption (\mathbf{A}_0) can always be achieved by identifying point $s, t \in \mathbb{K}$ such that $Y(s) = Y(t)$ a.s. holds true. We deduce that, quotienting \mathbb{K} , the only assumption is the continuity of Y .

So, around zero,

$$(Y^t)'(h) = \frac{N'D - ND'}{D^2} \simeq \frac{X'''(t)}{6}.$$

Finally, Bulinskaya lemma implies (under the assumption of non degeneracy of (X', X''')), that almost surely there exists no $t \in [0, 1]$ such that $X'(t) = 0, X'''(t) = 0$ and consequently that $\hat{s} \neq \hat{t}$.

Troisième partie

**Crossings and maxima for smooth
Gaussian process**

Chapitre 6

How sharp are classical approximations for statistical applications ?

6.1 Introduction

The distribution of the maximum of a Gaussian vector, Gaussian process or a Gaussian field has many applications in Statistics and Spatial Modeling. Unfortunately it is a largely unsolved problem. Some exact closed formulas exist only in some particular cases. In other cases, some asymptotic expansions have been constructed starting from the pioneering work of Rice [Ric44] then Pickands [Pic69] and Adler [Adl81], see section 6.1.3 for more details. On the other hand, some numerical tricks exist now using the methodology of Genz [Gen92] or others, see section 6.1.1.

The main contribution of this paper is twofold.

1. In section 6.3.1 and 6.3.2, we present an extension of the **MGP** program of Genz (see [AG13]), firstly to non-stationary case, secondly to random fields.
2. In section 6.5, we use these programs and **MGP** to address the quality of the above-mentioned expansions for two precise problems.
 - Computing a critical value at level α for statistical purpose.
 - Computing the median of the distribution of the maximum.

As far as we know, it is the first time that such a numerical experiment is conducted.

6.1.1 Existing programs

- (Gaussian vector) The first program **QSIMVN** written by Genz [Gen92] deals with Gaussian vectors over hyper-rectangles. The function **QSIMVNEF** computes an expectation of a function with respect to the Gaussian density. In particular, considering an hyper rectangle in \mathbb{R}^n which is the product n times of $(-\infty, u)$, it permits to compute numerically the distribution of the maximum of a Gaussian vector.

- (Dimension two) **MAGP** by Mercadier [Mer06] is another version included in the **WAFO** toolbox and that does not give an estimation of the error. As far as we can tell, **MAGP** is the only program that concerns two-dimensional stationary Gaussian fields.

- (Some specific cases) Among the few classical cases where an explicit formula exists, see [ALC13], some are rather easy to compute and have been incorporated to the **MAXGBBOX** toolbox. More precisely, the following cases are covered :

- The Brownian motion or Wiener process : functions `pbm`, `qbm`, `pnbm` and `qnbm`.

- The Brownian bridge : pbb, qbb, pnbb, qnbb.
- The sine-cosine process : psc, qsc, pnsc and qnsc.
- The Ornstein-Uhlenbeck process : pou, qou, pnou, qnou.
- The Bessel process : pbp, qbp, pnbp, qnbp.

The prefix p is for the cumulative distribution, q is for the inverse distribution function or fractile function and n is for the norm or the absolute value.

- (Differentiable process) **MGP** written by Genz [AG13] computes the maximum of a differentiable stationary process defined on a bounded interval. Be careful that **MGP** assumes the process is centered, with variance equal to 1, which is always possible by scaling. Note that in case of discrepancy between the upper-bound and the lower bound, the first one is, in general, more precise.

6.1.2 Notations and conventions

We use the following notation.

- $X(t)$ is a (almost every time Gaussian) process defined on $[0, T]$ or a Gaussian field defined on the rectangle $[0, T_1] \times [0, T_2]$. Its expectation is $m(t)$, its covariance is $r(s, t)$ in the general case and $\rho(h) = r(t, t + h)$ if X is stationary.
- $r_{ij}(s, t) = \frac{\partial^{i+j} r}{\partial s^i \partial t^j}(s, t)$ is the covariance function of the $(i + j)$ -derivative in quadratic mean of X , denoted $X^{ij}(s, t)$. In case of stationarity, we denote $\gamma_0 = \rho(0)$ the variance of $X(t)$ for every t and $\gamma_2 = -\rho''(0)$ the variance of $X'(t)$ for every t .
- M_T and M_{T_1, T_2} are respectively the maximum of $X(t)$ on $[0, T]$ and $[0, T_1] \times [0, T_2]$.
- ϕ and Φ denote respectively the probability density function and the cumulative distribution function of a standard normal variable. Moreover, $\bar{\Phi} = 1 - \Phi$.
- In case of stationarity, we suppose that $\chi = \{X(t); t \in M\}$ is centered and reduced, i.e. $\gamma(0) = 1$.
- In case of stationarity and differentiability, we suppose that χ is centered, reduced with unit speed, i.e. $\gamma_2 = 1$.

6.1.3 Description of approximations

We provide here a brief summary of approximation methods for $\mathbb{P}(M > u)$ where M is the maximum of a Gaussian process or random field on sets detailed below.

Pickands method.

Let $0 < \beta \leq 2$ and $X(t)$ be a β -process i.e. stationary Gaussian process with covariance function ρ satisfying

$$\rho(t) = 1 - C|t|^\beta + o(|t|^\beta) \text{ as } t \rightarrow 0, \quad (6.1)$$

then the Pickands approximations [Pic69, Pit96], as u tends to infinity, are given by

$$\mathbb{P}\{M_T > u\} \simeq TC^{1/\beta} u^{(2/\beta)-1} \phi(u) H_\beta \quad (6.2)$$

or

$$\mathbb{P}\{M_T > u\} \simeq TC^{1/\beta} u^{(2/\beta)} \bar{\Phi}(u) H_\beta \quad (6.3)$$

where the H_β are the Pickands constants and $T \in \mathbb{R}^+$. The main drawback of the method is that the constants H_β are known explicitly only in the cases $H_1 = 1$ and $H_2 = (\pi)^{-1/2}$ (see Leadbetter, Lindgren and Rootzén [LLR89] or Albin and Choi [AC10]). In other cases, some numerical approximation must be used as in Dieker and Yakir [DY14] where the conjecture

$$H_\alpha = (\Gamma(\alpha^{-1}))^{-1},$$

with Γ the Gamma function, is discussed. Indeed, this conjecture has been proved to be false by Harper [Har14] recently.

Rice method.

Let $X(t)$ be a Gaussian differentiable process, the Rice bound is given by

$$\mathbb{P}\{M_T > u\} \leq \bar{\Phi}(u) + T \frac{\phi(u)}{\sqrt{2\pi}}. \quad (6.4)$$

Note that both Rice and Pickands apply when $\beta = 2$ in (6.1). In that case, Rice is asymptotically more precise as $u \rightarrow +\infty$ (see Azaïs and Wschebor [AW09], chapter 4). Moreover, the Rice bound, under some regularity conditions, is super-exponentially sharp in the sense that the error is bounded by

$$C_\delta \exp\left(-\left(1 + 1/Z\right) \frac{u^2(1-\delta)}{2}\right),$$

where C_δ is a constant depending on the choice of $\delta > 0$ and Z is finite and depends on some regression coefficients of X and its derivatives (see [AW09]). Finally, there exists a non stationary version of formula (6.4) given by

$$\mathbb{P}(M_T > u) \leq \mathbb{P}(X(0) > u) + \int_0^T \mathbb{E}(X'(t)^+ | X(t) = u) p_{X(t)}(u) dt.$$

Euler characteristic method.

Let $X(t)$ be a Gaussian centered differentiable isotropic random field on the rectangle $[0, T_1] \times [0, T_2]$. Denote $\rho(\|t - s\|) = \text{Cov}(X(s), X(t))$ and suppose that $X(\cdot)$ satisfy $\mathbb{E}(X(t)) = 0$ and $\rho(0) = 1$, the Euler characteristic is given by

$$\mathbb{P}\{M_{T_1, T_2} > u\} \simeq \bar{\Phi}(u) + (T_1 + T_2) \frac{\phi(u)}{\sqrt{2\pi}} + T_1 T_2 u \frac{\phi(u)}{2\pi}.$$

In particular, the one dimensional version of the Euler characteristic is the Rice bound described above. See Adler and Taylor [AT07] or Azaïs and Delmas [AD02] for more details on this method.

6.1.4 A new approximation

Let us focus on stationary differentiable Gaussian processes. In that case, we already know that the Rice method, see Azaïs-Wschebor [AW09], gives the following bound

$$\mathbb{P}\{M_T > u\} \leq \bar{\Phi}(u) + \mathbb{E}(U_u(\chi, [0, T])) = \bar{\Phi}(u) + \frac{T \phi(u)}{\sqrt{2\pi}}, \quad (6.5)$$

where $U_u(\chi, [0, T])$ is the number of up-crossings of the level u on $[0, T]$. This bound is a good approximation for small intervals and rather high level. Of course this bound cannot be very accurate if u is fixed and T is very large, as it can be even larger than 1, so a almost every

time better approximation is given by using the Poisson Clamping heuristic of Aldous [Ald89]. Basically, it assumes that the number of up-crossings of the level u follows a Poisson distribution so that the probability of having at least one crossing is approximately $1 - \exp(-\mathbb{E}(U_u(\chi, [0, T])))$. Taking into account the fact that the limit as $T \rightarrow 0$ must be $\bar{\Phi}(u)$, we are conducted to use the approximation

$$\mathbb{P}\{M_T > u\} \simeq \bar{\Phi}(u) + \Phi(u) \left(1 - \exp\left(-\frac{T\phi(u)}{\sqrt{2\pi}\bar{\Phi}(u)}\right) \right),$$

Theoretically, a Taylor expansion show that the bound from the Rice method and the Poisson approximation are equivalent when $u \rightarrow +\infty$. A discussion concerning it's numerical validity and performance is given in section 6.4.

Finally, the Poisson approximation is illustrated by functions `pPOISSON` and `qPOISSON`. An example of utilization is given by

$$p = \text{qPoisson}(0.05, 10, 1)$$

where $\alpha = 0.05$ is the level fixed by the user, $T = 10$ is the length of the interval and $\gamma_2 = 1$.

6.1.5 Organization of the paper

Section 2 and 3 are dedicated to theoretical and numerical computations for the distribution of the maximum of one dimensional Gaussian processes and to two dimensional Gaussian random fields. In both cases, we explain the record method and its implementation on **Matlab**. In the last section, we present numerical experiments on Pickands, Rice, Euler and Poisson approximations.

6.2 Record method for differentiable processes and fields

In this part, we consider a differentiable Gaussian process defined on $[0, T]$ or a differentiable Gaussian field defined on $[0, T_1] \times [0, T_2]$. We aim to compute $\mathbb{P}(M_T > u)$ for some $u \in \mathbb{R}$.

6.2.1 Record method in dimension 1

In order to compute the cumulative distribution function of M_T , the record method uses a Kac-Rice formula on a random set of $[0, T]$. More precisely, define the set of record times of X as

$$\mathcal{R} := \{t \in [0, T]; X(s) < X(t), \forall s < t\},$$

then it holds

$$\mathbb{P}(M_T \geq u) = \mathbb{P}(X(0) \geq u) + \mathbb{P}(\exists t \in \mathcal{R}; X(t) = u). \quad (6.6)$$

By definition of \mathcal{R} , the number of record times t such that $X(t) = u$ is equal to 0 or 1 so that

$$\mathbb{P}(\exists t \in \mathcal{R}; X(t) = u) = \mathbb{E}(\#\{t \in \mathcal{R}; X(t) = u\}),$$

where the second term can be computed by a Kac-Rice formula or via the more general Richlik's theorem.

Theorem 6.2.1. *Let $\chi = \{X(t), t \in [0, T]\}$ be a real-valued stochastic process with a.s. absolutely continuous sample paths such that for almost all $t \in [0, T]$, $X(t)$ admits a density $p_{X(t)}$ and $\mathbb{E}(|X'(t)|) < \infty$. Then for every $u \in \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{P}(M_T > u) = \mathbb{P}\{X(0) > u\} + \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_u^{u+\delta} dx \times \int_0^T \mathbb{E}\left(X'(t)^+ \mathbb{1}_{t \in \mathcal{R}} \mid X(t) = x\right) p_{X(t)}(x) dt \quad (6.7)$$

where a^+ denote the positive part of a , $a^+ = \max(0, a)$.

In the Gaussian case, we obtain the following expression.

Corollary 6.2.2. *Suppose that in addition to the conditions of Theorem 6.2.1, the process χ is Gaussian with \mathcal{C}^1 paths and satisfies :*

- $\forall (s, t) \in [0, T]^2$, $s < t$, the distribution of $(X(s), X(t))$ does not degenerate,
- $\forall t \in [0, T]$, the distribution of $(X(t), X'(t))$ does not degenerate,

then

$$\mathbb{P}(M_T > u) = \mathbb{P}(X(0) > u) + \int_0^T \mathbb{E} \left(X'(t)^+ \mathbb{1}_{t \in \mathcal{R}} \mid X(t) = u \right) p_{X(t)}(u) dt. \quad (6.8)$$

6.2.2 Record method in dimension 2

In dimension two, the record method is adapted to compact, convex subsets having a.s. \mathcal{C}^1 parametrization of the boundary. This hypothesis is trivially verified in our case. Moreover, to apply the record method, we need an order relation on \mathbb{R}^2 . In that way, we consider the lexicographic order as

$$s = (s_1, s_2) \triangleleft t = (t_1, t_2) \iff \{s_2 < t_2\} \text{ or } \{s_2 = t_2; s_1 < t_1\}$$

and define the record set similarly to the one dimensional case with the relation \triangleleft instead of $<$. Our aim is to apply a Kac-Rice formula on the rectangle, which imply the application of Kac-Rice formula in dimension higher than 1. To do so, define the following hypothesis for χ :

- (A1) The sample paths of the random field $Z = (X, X^{10})$ are a.s. \mathcal{C}^1 .
- (A2) The distribution of $Z(t)$ does not degenerate.
- (A3) For every $t \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{P}(\exists s \in S; Z(s) = t, \det(Z'(s)) = 0) = 0$.

Then, in that case,

Theorem 6.2.3. *Let χ be a real-valued Gaussian process defined on R_{T_1, T_2} and satisfying assumptions (A1), (A2) and (A3). Then for every $u \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_{T_1, T_2} > u) &= \mathbb{P}(X(0) > u) + \sum_{i=1}^3 \int_{B_i} \mathbb{E} \left(|Y_i'(t)| \mathbb{1}_{Y_i(s) < Y_i(t), \forall s < t} \mid Y_i(t) = u \right) p_{Y_i(t)}(u) dt \\ &+ \int_{R_{T_1, T_2}} \mathbb{E} \left((X^{20})^-(t) (X^{01})^+(t) \mathbb{1}_{X(s) < X(t), \forall s < t} \mid X(t) = u, X^{10}(t) = 0 \right) p_{(X(t), X^{10}(t))}(u, 0) dt \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$(6.10)$$

where $B_1 = [(0, 0), (T_1, 0)]$, $B_2 = [(0, 0), (0, T_2)]$, $B_3 = [(T_1, 0), (T_1, T_2)]$ and $Y_i(\cdot) = X(\rho_i(\cdot))$ with ρ_i parametrization of B_i . In our case, $Y_1'(\cdot) = X^{10}(\cdot, 0)$, $Y_2'(\cdot) = X^{01}(0, \cdot)$ and $Y_3'(\cdot) = X^{10}(T_1, \cdot)$.

6.3 Numerical tools

6.3.1 Numerical implementation in dimension 1

The record method, represented by formula (6.8), is in fact an implicit formula of limited theoretical interest but it can be turned into a numerical upper-bound by discretizing the time interval $[0, T]$. This method has already been implemented by Mercadier in **MAGP** (see [Mer06]) and Azaïs-Genz in **MGP** (see [AG13]). We present here a generalization of **MGP** called **MAXNSGP**.

At cost of being rather slower, it is adapted to non-centered non-stationary differentiable Gaussian processes.

This program provides an upper bound and a lower bound for the tail of the maximum. More precisely, the upper bound is given by

$$\mathbb{P}(M_T > u) \leq \mathbb{P}(X(0) > u) + \int_0^T \mathbb{E}(X'(t)^+ \mathbb{1}_{X(s) \leq u \forall s < t \in D_n(T)} | X(t) = u) p_{X(t)}(u) dt, \quad (6.11)$$

where $D_n(T) := \{t_0 = 0, t_1 = T/n, \dots, t_n = T\}$ is some grid of $[0, T]$ and

$$\mathcal{R}_n := \{t_i \in D_n(T); \forall t_j < t_i, X(t_j) < X(t_i)\}$$

denote the corresponding record set. In other words, we compute the number of maxima living in \mathcal{R}_n , which is a less restrictive condition than the original. The procedure reads as follow :

1. Consider a trapezoidal rule on the domain $D_n(T)$ to restrict your attention to integrals over $[0, t_i]$ for $i \leq n$.
2. For each $t_i \in D_n(T)$, set $Y = (X'(t_i), X(t_0), \dots, X(t_{i-1})) = (Y_1, \dots, Y_i)$. The quantity

$$\mathbb{E}(X'(t_i)^+ \mathbb{1}_{X(s) \leq u \forall s < t \in D_n(T)} | X(t_i) = u)$$

appearing in (6.11) can be viewed as the expectation of Y_1^+ , with respect to the Gaussian distribution of Y conditionally to $X(t_i) = u$, over some hyper-rectangle.

3. Use the change of variable $Y = \Sigma^{1/2}Z$ where $\Sigma^{1/2}$ is obtained the Cholesky decomposition of Σ the conditional variance-covariance matrix of Y .
4. Use the change of variable $U_j = \Phi(Z_j)$ that follows a uniform distribution for all choice of j .
5. Reduce the problem to the hypercube $[0, 1]^i$.
6. Finally use MCQMC (Monte-Carlo Quasi Monte-Carlo) integration method on $[0, 1]^i$.

In [AG13], thanks to the stationarity, the **MGP** program uses a recursive way to construct the different variance-covariance matrices Σ as i varies. Our new program **MAXNSGP** cannot use this trick and is by consequence slower but more general. Concerning the lower bound, as far as we can tell, the better numerical approximation, used in **MGP**, **MAGP** and **MAXNSGP** is

$$\mathbb{P}(M_T > u) \geq 1 - \mathbb{P}((X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_n))) \leq (u, \dots, u)). \quad (6.12)$$

It can be computed via MCQMC programs as **QSIMVN** on the Gaussian vector $(X(t_0), \dots, X(t_n))$.

The syntax of **MGP** and **MAXNSGP** are very similar. For instance, to compute the probability that the maximum of the Gaussian process satisfying $m(t) = 4$ and $r(s, t) = \frac{e^{st}-1}{\sqrt{e^{s^2}-1}\sqrt{e^{t^2}-1}}$ exceed the level $u = 1$ on the set $[1, 3]$, it reads as

$$r = @(t,s) (exp(s.*t) - 1) ./sqrt(exp(s.^2)-1) ./sqrt(exp(t.^2)-1)$$

$$[p_low, p_upp, e_low, e_upp] = MAXNSGP(12, 60, 2000, 1, @(t) 4, @(t,s) r(t,s), 1, 3)$$

where

- 12 is the typical value for the number of Monte-Carlo (MC) replications in the MCQMC integration ;
- 60 is the number of discretization point of the interval $[1, 3]$;
- 2000 is the number of points used for the QMC routine ;
- 1 is the level of comparison ;
- @(t) 4 is the mean function of the process ;
- @(t,s) $r(t,s)$ is the covariance function of the process ;
- 0 is the beginning of the interval ;
- 1 is the beginning of the interval ;
- 3 is the end of the interval.

Note that this kind of processes appear in the asymptotic theory of Likelihood Ratio Test in the case of a mixture, see [Del03] for more details.

6.3.2 Numerical implementation in dimension 2

From formula (6.9) and (6.10), we can derive a numerical routine to bound $\mathbb{P}(M_{T_1, T_2} > u)$ for non-stationary non-centered differentiable Gaussian fields. This program uses the same tricks than **MAXNSGP**, the only main difference is that we don't consider the same grids to compute the two dimensional integral over R_{T_1, T_2} and to discretize the condition $\mathbb{1}_{X(s) < X(t), \forall s \in \mathcal{R}(t)}$. As a matter of fact, this last discretization is time consuming and can be performed on a coarser grid without impacting the precision.

More precisely, let

$$G_{n', m'}(T_1, T_2) = \left\{ \left(\frac{k}{n'} T_1, \frac{l}{m'} T_2 \right); 0 \leq k \leq n, 0 \leq l \leq m \right\}$$

be the grid for the trapezoidal rule and

$$D_{n, m}(T_1, T_2) = \left\{ \left(\frac{k}{n} T_1, \frac{l}{m} T_2 \right); 0 \leq k \leq n, 0 \leq l \leq m \right\} \subset G_{n', m'}(T_1, T_2)$$

be the one for the discretization of the record set

$$\mathcal{R}_{n, m} = \{(t_i, t_j) \in D_{n, m}(T_1, T_2); \forall (t_k, t_l) \triangleleft (t_i, t_j), X(t_k, t_l) < X(t_i, t_j)\}.$$

Besides, note that **MAXNSGP2** remains on 4 programs using the same algorithm than **MAXNSGP** on the vectors $(X^{10}(0, t_j), X(0, 0), \dots, X(0, t_j))$, $(X^{01}(0, t_j), X(0, T_2), \dots, X(t_j, T_2))$ and $(X^{01}(T_1, t_j), X(T_1, 0), \dots, X(T_1, t_j))$ respectively for B_1, B_2 and B_3 while the computation of the interior is based on a trapezoidal rule on the grid $G_{n', m'}(T_1, T_2)$. Indeed, for each $(i, j) \in \{0, \dots, n\} \times \{0, \dots, m\}$, we apply the preceding routine on the vector

$$(P(X(t_i, t_j)), X^{10}(t_i, t_j), X^{01}(t_i, t_j), X^{20}(t_i, t_j))$$

where (X^{01}, X^{10}, X^{20}) are the partial derivative of X and where $P(X(t_i, t_j))$ contains the information on the past of $X(t_i, t_j)$, i.e. for points in

$$\mathcal{R}_{n, m} \cap \{(s_i, s_j); (s_i, s_j) \triangleleft (t_i, t_j)\}.$$

Again, the syntax is very similar to the one of **MGP** and **MAXNSGP**. For instance, to compute the probability that the maximum of the Gaussian field satisfying $m(t) = 0$ and $\forall (s, t) \in (\mathbb{R}^2)^2$, $r(s, t) = \exp(-\|t - s\|_2^2)$ exceed the level $u = 2$ on $[0, 5] \times [0, 10]$, it reads as

$$r = @(a,b,c,d) \exp(-(a-c).^2/2 - (b-d).^2/2)$$

$$[p_low,p_upp,e_low,e_upp] = \text{MAXNSGP2}(12,20,40,4,4,500,2,@(t,s) 0,r,5,10)$$

where

- 12 is the typical value for the number of Monte-Carlo (MC) replications in the MCQMC integration ;
- 20 is the number of discretization points for trapezoidal rule on the x-axis ;
- 40 is the number of discretization points for trapezoidal rule on the y-axis ;
- 4 is the number of points used for the record set on the x-axis ;
- 4 is the number of points used for the record set on the y-axis ;
- 500 is the number of points used for the QMC routine ;
- 2 is the level of comparison ;
- $@(t,s) 0$ is the mean function of the process ;
- $r 0$ is the covariance function of the process ;
- 5 and 10 denote the length of each side of the rectangle, here $[0, 5] \times [0, 10]$;

Note again that in case of discrepancy, the upper-bound is, in general, more precise.

6.4 Random fields

6.5 Applications in statistics

In this section we want to consider the three classical approximations given in introduction and the Poisson approximation of section 6.1.4. Our aim is to compare these tools in various scenarii.

6.5.1 Simulation procedure

Following what is done for example for the approximation of the Pearson statistics by a chi-square distribution in the classical chi-square test, we will consider that an approximation is relevant to compute a critical value in statistics if the actual level $\bar{\alpha}$ differs from the nominal level α^* by less than 20 %. In other words, for a nominal level α^* of 5% (resp 1%) we demand the actual level to be in (4%, 6%) (resp. (0.8%, 1.2%)).

Our computation scheme is the following : for a given size of interval (or rectangle), we use the relevant approximation above to compute a α^* approximate threshold and then we use the relevant program of the **MAXIE** toolbox to compute the actual level $\bar{\alpha}$. We consider the following processes,

1. For the Pickands approximation,
 - the stationary Gaussian process with covariance $\rho(t) = \exp(-t^2/2)$ for which the result is known from the MGP program,
 - the stationary Gaussian process with covariance $\rho(t) = \exp(-t^{1.95})$ for which the result is approximatively known from the lower bound of the MGP program.
 - the Ornstein-Uhlenbeck process with covariance $\rho(t) = \exp(-|t|)$ for which the result is exactly known from the **pou** function.

2. For the Rice and the Poisson approximation, we consider three stationary processes with covariance
 - $\rho(t) = \exp(-t^2/2)$,
 - $\rho(t) = 1/\cosh(t)$,
 - $\rho(t) = \text{sinc}(\sqrt{3}t) = \frac{\sin(\sqrt{3}t)}{\sqrt{3}t}$.
3. For the Euler characteristic, we consider isotropic and stationary Gaussian fields with covariances
 - $\rho(t) = \exp(-\|t\|^2/2)$,
 - $\rho(t) = (1 + \|t\|)\exp(-\|t\|)$ which is a Matern covariance with parameter 3/2.

To give a precise meaning to the interpretation, we will always normalize our processes with $\gamma_0 = 1$ and "unit speed transformation" $\gamma_2 = 1$.

6.5.2 Results and comments

First, note that all approximations (Poisson, Pickands, Rice and Euler) seem unappropriate for small values of T . Indeed, small values of T lead to small values of u or, at least, insufficiently large values of u . As every method is based on the hypothesis " u goes to infinity", this result was predictable.

In the details,

- Simulations suggest that the Rice method is very conservative and further from reality for the three processes (see figure 21), contrary to the Poisson approximation which seems very efficient (see figure 22), even for rather high nominal level α^* (see figure 23). Moreover, for the Poisson approximation, the actual level $\bar{\alpha}$ differs from the nominal level α^* by less than 5% if $T > 20$ and $\alpha^* < 0.5$ and by less of 5% if $T > 40$ and $\alpha^* > 0.5$ (see figure 22,23).
- Considering now the significance levels $\alpha^* = 0.01$ and $\alpha^* = 0.05$ in dimension 1, figures (26,27) suggest that in the three cases considered, the Rice method is very appropriated. Indeed, even if the precision of the lower bound from **MGP** routine isn't sufficient to conclude on figures (26,27), when we increase the discretization parameter n , simulations show that the gap between the upper and the lower bound is very weak. For instance, for an actual level $\alpha^* = 0.05$, the upper bound is around 5% and the lower bound around 4.8%.
- When the process isn't differentiable, Pickands approximations, which are anti-conservative for small intervals, seem efficient for rather small nominal levels ($\alpha^* = 0.05$ and 0.01 on figure 24). Note that both approximations ((6.2) and (6.3)) are conservative when $T > 10$ and that the second approximation is the most efficient in that context. Simulations conducted for higher nominal levels underline the slow rate of convergence of these approximations (see figure 25). In particular, Pickands approximations seem to escape from the nominal level as α^* grows.
- In dimension 2, the Euler approximation fluctuate and is mainly anti-conservative for small values of T_1 and T_2 . However, this phenomenon does not persist when T_1 and T_2 increase and the Euler approximation seem to converge to the nominal level α^* , even for rather high values of α^* . A focus on the diagonal (see figure (30)) show the link between the convergence of the Euler approximation and the computed level u . Finally, independently of α^* , the error of the Euler approximation is numerically smaller than 5% while $u > 3.5$.

More precise simulations and more examples will be available in a future version.

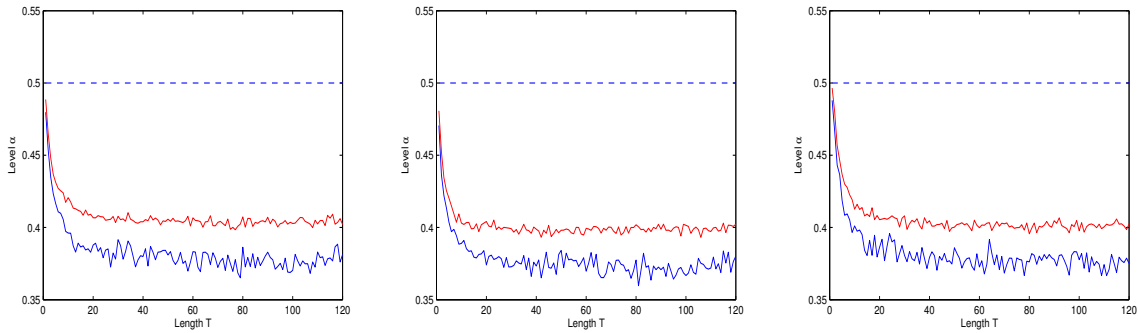


FIGURE 21 – From left to right, upper bound (in red) and lower bound (in blue) given by **MGP** for the function $T \mapsto \mathbb{P}(M_T > u)$ where u comes from the Rice (similarly Euler) method for $\alpha = 0.5$. The processes considered satisfy, respectively, $\rho(t) = \exp(-t^2/2)$, $\rho(t) = 1/\cosh(t)$ and $\rho(t) = \text{sinc}(\sqrt{3}t)$.

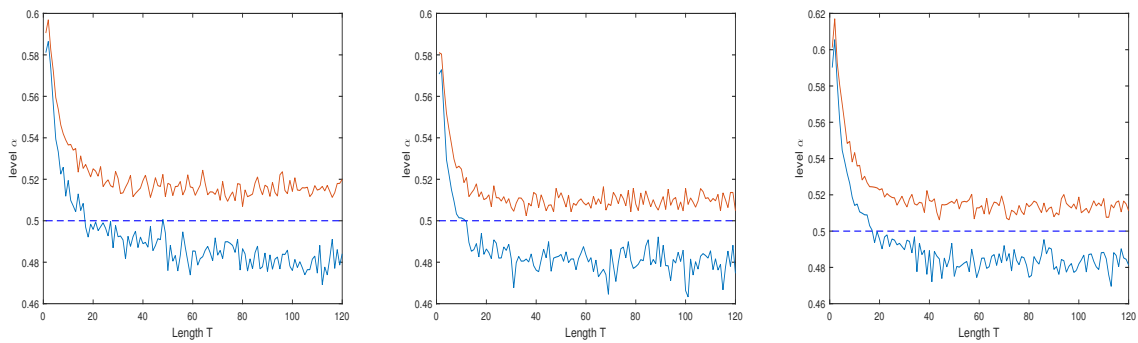


FIGURE 22 – From left to right, upper bound (in red) and lower bound (in blue) given by **MGP** for the function $T \mapsto \mathbb{P}(M_T > u)$ where u comes from the Poisson method for $\alpha = 0.5$. The processes considered satisfy, respectively, $\rho(t) = \exp(-t^2/2)$, $\rho(t) = 1/\cosh(t)$ and $\rho(t) = \text{sinc}(\sqrt{3}t)$.

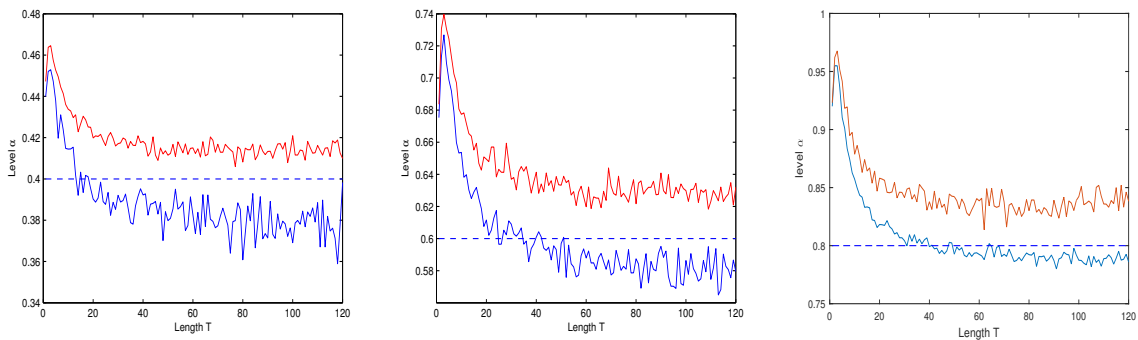


FIGURE 23 – Illustration of upper bound (in red) and lower bound (in blue) given by **MGP** for the function $T \mapsto \mathbb{P}(M_T > u)$ where u comes from the Poisson method and the process χ satisfies $\rho(t) = \exp(-t^2/2)$. From left to right, α equals 0.4, 0.6 and 0.8.

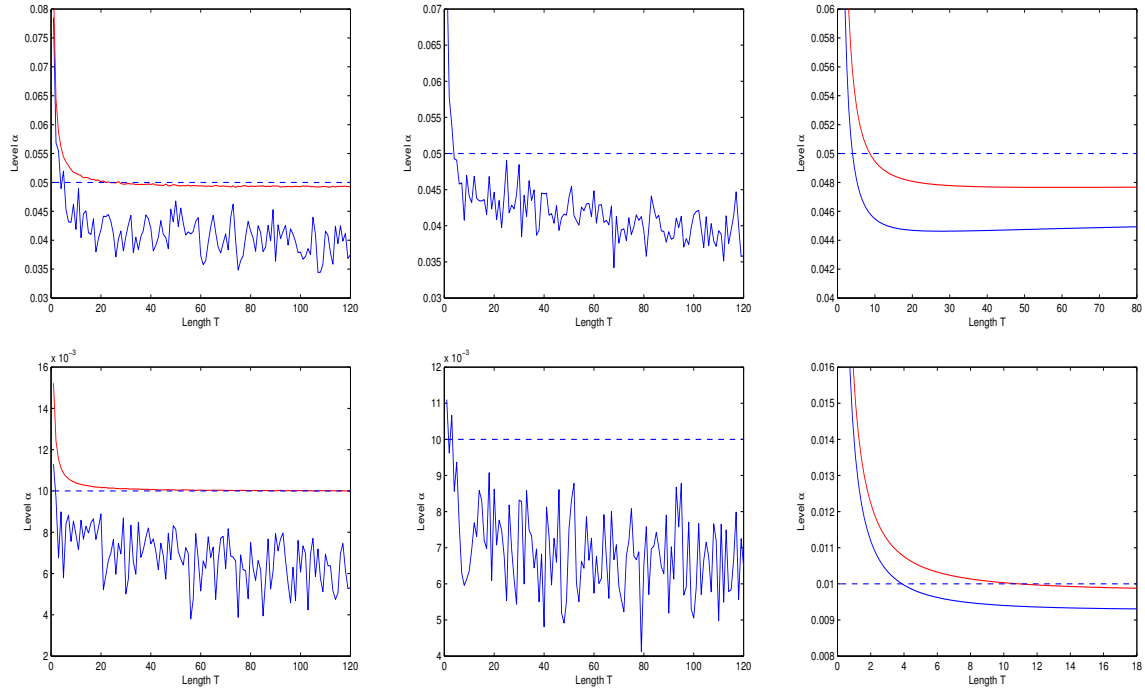


FIGURE 24 – On the left, upper bound (in green) and lower bound (in blue) given by **MGP** for the function $T \mapsto \mathbb{P}(M_T > u)$ where u comes from the Pickands method for $\alpha = 0.05$ (top) and $\alpha = 0.01$ (bottom) and where the process χ satisfies $\rho(t) = \exp(-t^2/2)$. In the middle, similar case for $\rho(t) = \exp(-t^{1.95})$ with only the lower bound of **MGP**. On the right, exact bound given by **pou** for the Pickands approximation (6.2 in blue and 6.3 in red) applied to the Ornstein-Uhlenbeck process for $\alpha = 0.05$ and $\alpha = 0.01$.

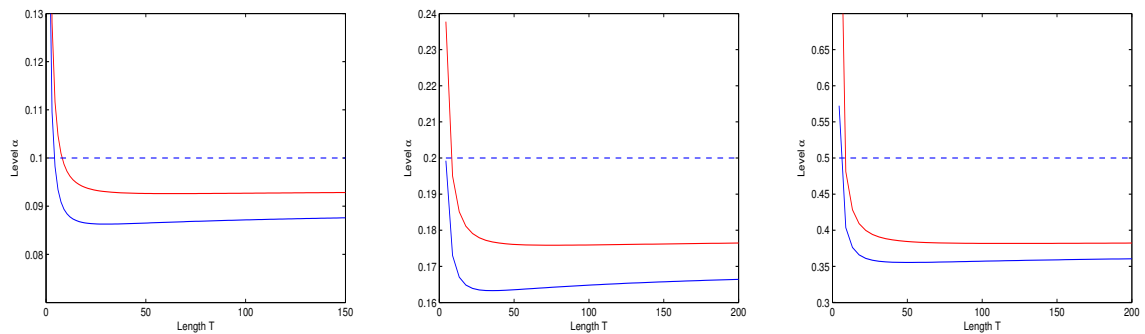


FIGURE 25 – Illustration of the function $T \mapsto \mathbb{P}(M_T > u)$ where u comes from the Pickands approximation (6.2 in blue and 6.3 in red) in the Ornstein-Uhlenbeck case. Simulation have been performed with the **pou** function. From left to right, α equals 0.1, 0.2 and 0.5.

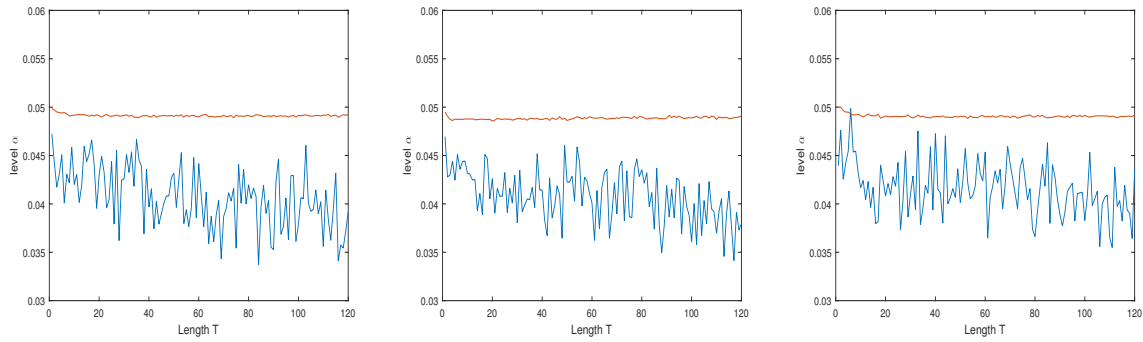


FIGURE 26 – From left to right, upper bound (in red) and lower bound (in blue) given by **MGP** for the function $T \mapsto \mathbb{P}(M_T > u)$ where u comes from the Rice (similarly Euler) method for $\alpha = 0.05$. The processes considered satisfy, respectively, $\rho(t) = \exp(-t^2/2)$, $\rho(t) = 1/\cosh(t)$ and $\rho(t) = \text{sinc}(\sqrt{3}t)$.

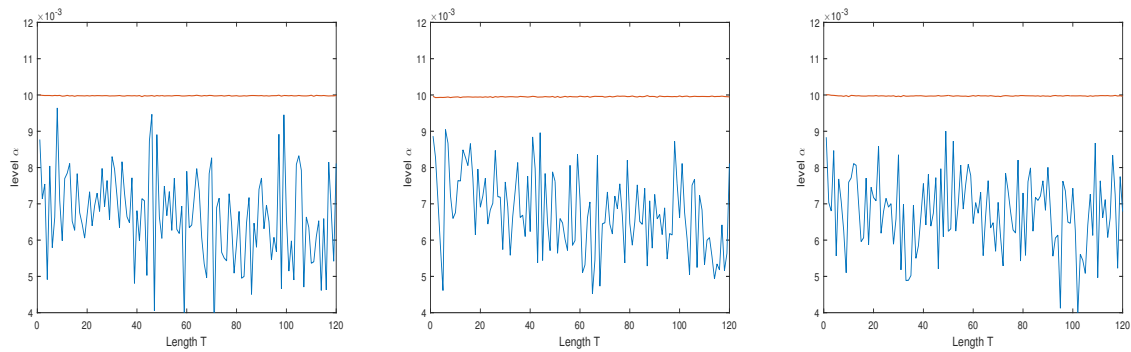


FIGURE 27 – From left to right, upper bound (in red) and lower bound (in blue) given by **MGP** for the function $T \mapsto \mathbb{P}(M_T > u)$ where u comes from the Rice (similarly Euler) method for $\alpha = 0.01$. The processes considered satisfy, respectively, $\rho(t) = \exp(-t^2/2)$, $\rho(t) = 1/\cosh(t)$ and $\rho(t) = \text{sinc}(\sqrt{3}t)$.

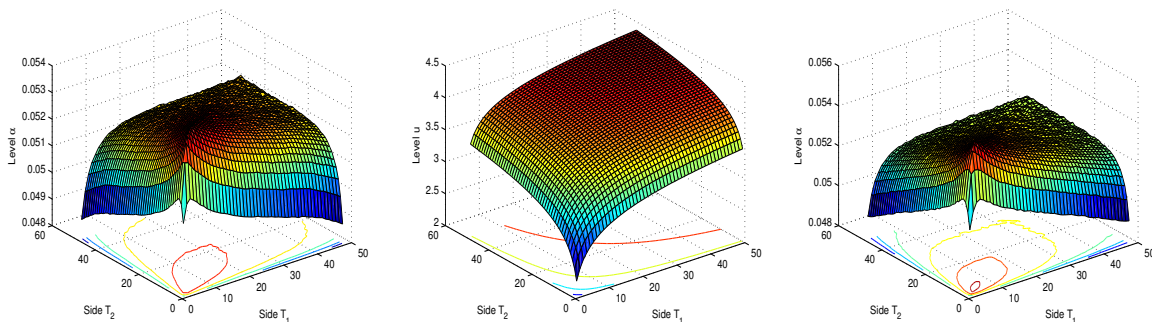


FIGURE 28 – Upper bounds given by **MAXNSGP2** for the function $(T_1, T_2) \mapsto \mathbb{P}(M_{T_1, T_2} > u)$ where u comes from the Euler characteristic method for $\alpha = 0.05$. On the first picture, we consider a Gaussian covariance and on the third, a Matern covariance. The second picture show the corresponding level u .

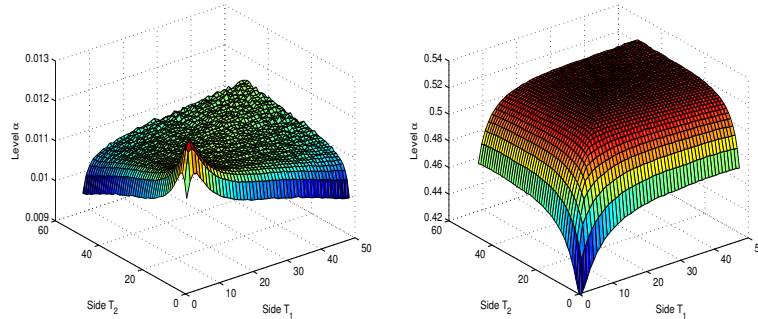


FIGURE 29 – Upper bounds given by **MAXNSGP2** for the function $(T_1, T_2) \mapsto \mathbb{P}(M_{T_1, T_2} > u)$ where u comes from the Euler characteristic method for $\alpha = 0.01$ (left) and $\alpha = 0.50$ (right). The process considered satisfies $\rho(t) = \exp(-\|t\|_2^2/2)$.

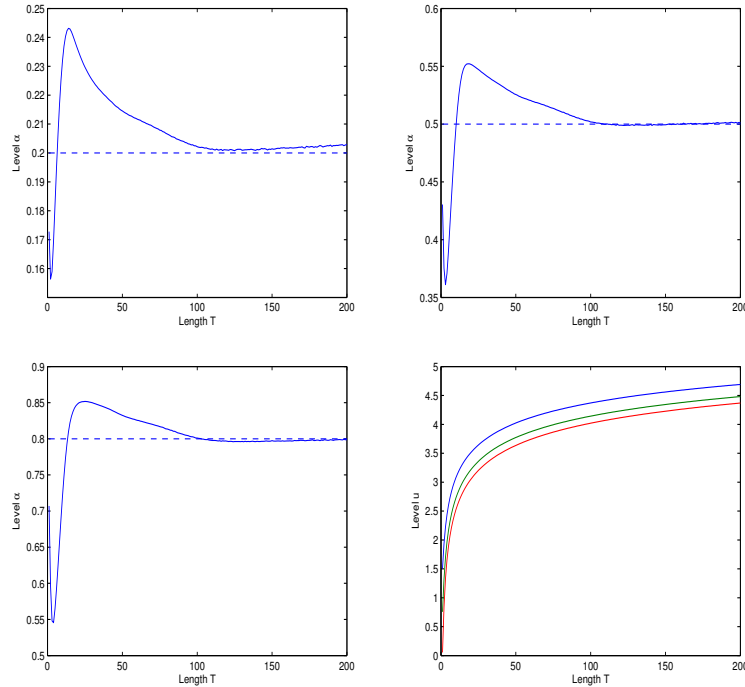


FIGURE 30 – Computation of the upper-bound by **MAXNSGP2** for the function $T \mapsto \mathbb{P}(M_T > u)$ where u comes from the Euler characteristic method for $\alpha = 0.2$ (top left), $\alpha = 0.5$ (top right) and $\alpha = 0.8$ (bottom left). In the bottom right plot, corresponding level u for $\alpha = 0.2$ (blue), $\alpha = 0.5$ (green) and $\alpha = 0.8$ (red).

Chapitre 7

Remarques sur le comportement asymptotique des franchissements d'un processus Gaussien

7.1 Introduction

Dans cette dernière partie, nous nous intéressons au nombre de franchissements d'un niveau u_T par un processus Gaussien centré stationnaire à trajectoire p.s. \mathcal{C}^1 noté $\chi = \{X(t); t \in [0, T]\}$. Plus précisément, nous considérons la variable

$$U_{u_T}(\chi, [0, T]) = \text{Card}(\{t \in [0, T]; X(t) = u_T, X'(t) > 0\}). \quad (7.1)$$

où U_{u_T} est appelé nombre de up-crossings. Sans perte de généralité, nous supposons toujours que les processus considérés sont normalisés par $\gamma_0 = \rho(0) = \text{Var}(X(t)) = 1$ et $\gamma_2 = -\rho''(0) = \text{Var}(X'(t)) = 1$ où ρ est la fonction de covariance de χ . De plus, on supposera que $\rho(t) \neq \pm 1$ si $t \neq 0$ (condition de non-dégénérescence). Enfin, on redonne les trois conditions énoncées dans l'introduction générale,

- (H1) $\rho(t) \log(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$,
- (H2) $\int_0^t \frac{\theta'(s)}{s^2} ds$ converge en 0^+ avec $\theta(s) = \rho(s) - 1 + \frac{s^2}{2}$,
- (H3) $\int_0^\infty |\rho(t)| dt < \infty$, $\int_0^\infty |\rho'(t)| dt < \infty$ et $\int_0^\infty |\rho''(t)| dt < \infty$.

Rappelons tout d'abord le contexte. La stationnarité du processus χ nous donne une expression simple pour l'espérance du nombre de up-crossings, à savoir

$$\mathbb{E}(U_{u_T}(\chi, [0, T])) = \frac{1}{2\pi} T \exp(-u_T^2/2). \quad (7.2)$$

Au vu de ce résultat, lorsque $T \rightarrow +\infty$, on est amené à considérer 3 régimes,

1. $u_T > \sqrt{2 \log(T)}$,
2. $u_T = \sqrt{2 \log(T)}$,
3. $u_T < \sqrt{2 \log(T)}$.

Dans le premier cas, le niveau est trop haut et l'espérance tend vers 0. On se retrouve donc avec un nombre de up-crossings asymptotiquement nul, ce qui ne présente pas d'intérêt particulier. Le deuxième cas, qui apparaît comme un cas limite, a été traité par Volkonskii dans [Vol59] et Rozanov dans [Roz61]. Il met en avant un caractère Poissonien des up-crossings correctement renormalisés. Le résultat s'énonce de la manière suivante

Théorème 7.1.1. *Soit χ un processus Gaussien centré à trajectoire p.s. \mathcal{C}^1 normalisé et non dégénéré, satisfaisant les conditions de Berman (H1) et de Geman (H2), alors le processus défini par*

$$R_u(t) = U_u \left(\chi, \left[0, 2\pi \exp\left(\frac{u^2}{2}\right) \right] \right)$$

converge en loi vers un processus de Poisson standard.

Le troisième cas est lui beaucoup plus complexe. Un premier résultat, énoncé dans le théorème 7.2.2, est donné par Kratz et León dans [KL97]. Il traite le cas d'un niveau u fixe lorsque $T \rightarrow +\infty$ et démontre l'existence d'un théorème central limite. Cette différence de limite pousse à s'interroger sur le comportement des up-crossings entre le cas u fixe et le cas $u_T < \sqrt{2 \log(T)}$. Est-on toujours dans le domaine d'attraction Gaussien ou observe-t-on un résultat proche du cadre Poissonien ? Dans la suite, notre objectif a tout d'abord été d'étendre le résultat de Kratz et León au cas $u_T < \sqrt{2 \log(T)}$ en s'inspirant de leur méthode, rapidement résumée dans la section suivante. Malheureusement, de nombreux obstacles apparaissent, comme nous le détaillons en section 4. Cependant, sans atteindre le résultat escompté, à savoir l'existence d'un théorème de la limite centrale dans ce cas, nous démontrons d'un côté que la variance et l'espérance de $U_{u_T}(\chi, [0, T])$ sont du même ordre l'ordre de $\mathbb{E}(U_{u_T}([0, T]))$ et d'un autre côté, nous soulignons la faible importance des interactions en temps long pour le processus χ sur la variable $U_{u_T}(\chi, [0, T])$ dans \mathbb{L}^2 .

7.2 Résultats préliminaires

Dans cette section, nous énonçons quelques résultats connus mais centraux pour la démonstration des propositions 7.4.2 et 7.4.3.

7.2.1 Décomposition d'Hermite et crossings

Principe de la décomposition Dans la suite, nous serons amenés à travailler dans $L^2(\phi)$ où $\phi(x) = \exp(-x^2/2)$ est la densité Gaussienne centrée réduite. Pour cela, nous utiliserons la base hermitienne donnée par les polynômes d'Hermite pour décomposer nos variables. On notera ainsi

$$\exp(tx - t^2/2) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (7.3)$$

Il s'agit en fait, à un facteur $\exp(-x^2/2)$ près, de la décomposition en série de Taylor de la fonction $\exp(-(x-t)^2/2)$. Alors, toute fonction F appartenant à $L^2(\phi)$ se décompose de la manière suivante

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x),$$

où les a_n sont donnés par

$$a_n = \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) H_n(x) \phi(x) dx,$$

la normalisation en $n!$ découlant du fait que la famille ainsi définie n'est pas orthonormale mais simplement orthogonale. On en déduit directement la décomposition de la norme L^2 ,

$$\|F\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 n!.$$

Cas des crossings Dans la suite, nous considérerons les up-crossings d'un processus. Ceci implique, par définition, l'apparition de la partie positive de X' ou plus généralement le calcul des coefficients associés à la partie positive d'une fonction dans $L^2(\phi)$. Un calcul rapide donne

$$x^+ = \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x)$$

où les a_n sont donnés par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{2k+1} = 0, \quad a_{2k} = \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2\pi} 2^k k! (2k-1)},$$

sauf pour $a_1 = 1/2$. A partir de cette expression, on peut déduire l'expression générale de U_u donnée par le théorème ci-dessous.

Théorème 7.2.1. *Soit χ un processus Gaussien centré à trajectoire p.s. \mathcal{C}^1 normalisé et non dégénéré satisfaisant la condition de Geman (H2) alors*

$$U_u(\chi, [0, T]) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} d_j(u) a_k \int_0^T H_j(X(s)) H_k(X'(s)) ds$$

où $d_j(u) = \frac{1}{j!} \phi(u) H_j(u)$ et les a_k sont donnés par la décomposition de x^+ dans $L^2(\phi)$.

Ce résultat ainsi que sa preuve sont détaillés dans le théorème 10.10 de [AW09]. Plus généralement, on peut calculer de manière similaire la décomposition du nombre de crossings N_{u_T} et du nombre de down-crossings D_{u_T} en considérant la décomposition de la partie négative x^- et de la valeur absolue $|x|$.

7.2.2 Théorème central limite (TCL) pour u fixe

Théorème 7.2.2. *Soit χ un processus Gaussien centré à trajectoire p.s. \mathcal{C}^1 normalisé et non dégénéré satisfaisant la condition de Geman (H2) et la condition de mélange (H3), alors, pour un σ connu, on a le résultat de convergence en loi suivant*

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \left(U_u(\chi, [0, t]) - t \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{2\pi} \right) \Rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

lorsque $t \rightarrow +\infty$.

La preuve se décompose en 3 étapes majeures. Dans un premier temps, en utilisant la décomposition de U_u donnée par le théorème 7.2.1, on montre que la série des chaos de Wiener

$$\frac{1}{T} \mathbb{E}(U_u(\chi, [0, T])^2) = \frac{1}{T} \sum_{q=0}^Q \mathbb{E}(U_u^q(\chi, [0, T])^2)$$

où

$$U_u^q(\chi, [0, T]) = \sum_{k=0}^q d_{q-k}(u) a_k \int_0^T H_{q-k}(X(s)) H_k(X'(s)) ds$$

est dominée par une série positive convergente indépendante de T mais dépendante de la vitesse de décroissance de ρ , ρ' et ρ'' . En particulier, on montre qu'au moins un terme de la variance de $U_u(\chi, [0, T])$ est non nul pour assurer $\sigma^2 > 0$.

Dans un deuxième temps, on montre que l'on peut approcher $U_u(\chi, [0, T])$ dans \mathbb{L}^2 par $U_u(\chi^\eta, [0, T])$ où χ^η est une version η -dépendante de χ construite en (7.16). En effet, la domination normale de la série des chaos de Wiener permet de se ramener à l'étude d'un nombre fini de termes pour lesquels on utilise simplement la convergence des fonctions de covariance $\rho_\eta = \text{Cov}(X^\eta, X^\eta)$ et $\rho^\eta = \text{Cov}(X, X^\eta)$ vers ρ ainsi que de leurs dérivées premières et secondes vers ρ' et ρ'' lorsque $\eta \rightarrow 0$.

Enfin, une fois ce résultat démontré, on conclut en appliquant un théorème de Hoeffding et Robins ([HR48]) qui assure l'existence d'un théorème central limite dans le cadre d'un processus η -dépendant.

7.2.3 Second moment factoriel

On énonce un dernier résultat concernant le second moment factoriel ($\mathbb{E}(X(X-1))$) pour $U_u(\chi, [0, T])$ où χ est un processus Gaussien centré stationnaire à trajectoire p.s. \mathcal{C}^1 normalisé et non dégénéré. Par la formule de Kac-Rice, on obtient

$$v_2(T) := \mathbb{E}(U_u(\chi, [0, T])(U_u(\chi, [0, T]) - 1)) \quad (7.4)$$

$$= \int_0^T \int_0^T A_{s,t}^+(u, u) p_{X(s), X(t)}(u, u) ds dt \quad (7.5)$$

où $A_{s,t}^+(u, u) := \mathbb{E}(X'^+(s)X'^+(t) | X(s) = X(t) = u)$ et $p_{X(s), X(t)}(u, u) := \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2(t-s)}} e^{-\frac{u^2}{1+\rho(t-s)}}$.

On remarquera que cette formule ne donne pas directement l'expression du moment d'ordre 2 mais du moment dit factoriel d'ordre 2. En effet, la formule de Kac-Rice étant une formule de comptage sur un certain ensemble, l'expression du moment d'ordre 2 ferait intervenir la loi jointe de $(X(t), X(t))$ qui n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur l'ensemble considéré, à savoir $[0, T] \times [0, T] \subset \mathbb{R}^2$. Comme nous le verrons plus loin, ce point clé, qui disparaît quand on considère des quantités du type

$$\mathbb{E}(U_u(\chi_1, [0, T])U_u(\chi_2, [0, T]))$$

où la fonction de covariance entre χ_1 et χ_2 est strictement maximale sur la diagonale $\{(t, t) \in [0, T]^2; t \in [0, T]\}$ ne nous permet pas de conclure à l'existence d'un théorème central limite pour $U_{u_T}(\chi, [0, T])$ en passant par le cas η -dépendant (voir proposition 7.4.3).

7.3 Processus η -dépendant

L'objectif de cette partie est de prouver l'existence d'un théorème central limite dans le cadre simple d'un processus η -dépendant, à savoir

Théorème 7.3.1. *Soit χ supposé η -dépendant vérifiant (H0) et la condition de Geman (H2). Considérons un niveau u_T tel que*

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow +\infty} u_T &= +\infty \\ \lim_{T \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(U_{u_T}(\chi, [0, T])) &= +\infty \end{aligned}$$

alors on a le résultat de convergence en loi suivant

$$A(T) := \frac{U_{u_T}(T) - \mathbb{E}(U_{u_T}(T))}{\sqrt{\mathbb{V}(U_{u_T}(T))}} \implies \mathcal{N}(0, 1),$$

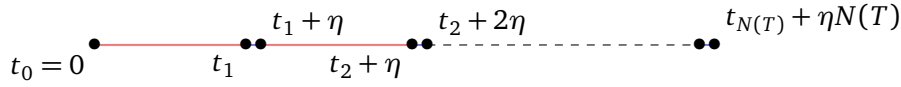
où $U_{u_T}(T) = U_{u_T}(\chi, [0, T])$.

7.3.1 Mise en place du problème

On va utiliser un argument de "shortening". Le processus considéré étant η -dépendant, on va découper l'intervalle $[0, T]$ en isolant certains morceaux de longueur η afin d'utiliser les propriétés d'indépendance de processus. Pour cela, à tout T , on associe un découpage en N_T morceaux de taille $t_1 := t_1(T)$ et N_T de taille η tels que

$$\begin{aligned} N_T \times (t_1 + \eta) &= T, \\ t_1(T) &\xrightarrow{T \rightarrow +\infty} +\infty. \end{aligned}$$

Une illustration est donnée ci-dessous



Ainsi, on est amené à découper notre quantité $A(T)$ en deux, correspondant aux morceaux de longueur η , en bleu sur le schéma ci-dessus, et à ceux de longueur $t_1(T)$, en rouge. Formellement, on pose

$$A_T = B(T)X_{N(T)} + C(T)Z_{N(T)}$$

$$\text{où } B(T) = \frac{\sqrt{N_T \mathbb{V}(U_{u_T}(t_1(T)))}}{\sqrt{\mathbb{V}(U_{u_T}(T))}}, \quad C(T) = \frac{\sqrt{N_T \mathbb{V}(U_{u_T}(\eta))}}{\sqrt{\mathbb{V}(U_{u_T}(T))}},$$

$$\begin{aligned} X_{N_T} &= \frac{\sum_{i=1}^{N_T} U_{u_T}(t_{i-1} + (i-1)\eta, t_i + (i-1)\eta) - \mathbb{E}(U_{u_T}(t_1))}{\sqrt{N_T \mathbb{V}(U_{u_T}(t_1))}}, \\ Z_{N_T} &= \frac{\sum_{i=1}^{N_T} U_{u_T}(t_i + (i-1)\eta, t_i + i\eta) - \mathbb{E}(U_{u_T}(\eta))}{\sqrt{N_T \mathbb{V}(U_{u_T}(\eta))}}. \end{aligned}$$

L'objectif est tout d'abord de montrer la contribution négligeable des morceaux de taille η . Pour cela, on montre que le rapport de variance devant Z_{N_T} tend vers 0 lorsque T tend vers l'infini. La suite Z_{N_T} étant tendue, on aura alors la convergence en probabilité

$$C(T)Z_{N_T} \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0.$$

Ensuite, on montrera que les variables aléatoires $U_{u_T}(t_1)$ et $\mathbb{1}_{U_{u_T}(t_1) \geq 1}$, une fois centrées et réduites, sont comparables dans L^2 , à savoir

$$\frac{U_{u_T}(t_1) - \mathbb{E}(U_{u_T}(t_1))}{\sqrt{\mathbb{V}(U_{u_T}(t_1))}} - \frac{\mathbb{1}_{U_{u_T}(t_1) \geq 1} - \mathbb{P}(U_{u_T}(t_1) \geq 1)}{\sqrt{\mathbb{P}(U_{u_T}(t_1) \geq 1)(1 - \mathbb{P}(U_{u_T}(t_1) \geq 1))}} \xrightarrow[L^2]{T \rightarrow +\infty} 0$$

lorsque t_1 tend vers l'infini avec T . Enfin, on conclura en utilisant le TCL présenté en section 2.5.

7.3.2 Contrôle des rapports de variance

Lemme 7.3.1. *Dans le cadre des hypothèses du théorème 7.3.1, on considère un intervalle de longueur S_T tel que $S_T \phi(u_T) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0$, alors*

$$\mathbb{V}(U_{u_T}(S_T)) \sim \mathbb{E}(U_{u_T}(S_T)) \text{ lorsque } T \rightarrow +\infty$$

où $a \sim b$ signifie $\frac{a}{b} \rightarrow 1$ lorsque $T \rightarrow +\infty$.

Démonstration. Considérons notre processus χ sur un intervalle de taille S_T . Par la formule donnée pour le deuxième moment factoriel en section 2.4, on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(U_{u_T}(S_T)) &= v_2(S_T) + S_T \phi(u_T) \sqrt{\frac{1}{2\pi}} - S_T^2 \phi(u_T)^2 \frac{1}{2\pi} \\ &\geq (S_T - \eta)^2 \phi(u_T)^2 \frac{1}{2\pi} + S_T \phi(u_T) \sqrt{\frac{1}{2\pi}} - S_T^2 \phi(u_T)^2 \frac{1}{2\pi} \\ &= (\eta^2 - 2\eta S_T) \phi(u_T)^2 \frac{1}{2\pi} + S_T \phi(u_T) \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \\ &\geq S_T \phi(u_T) \left(\sqrt{\frac{1}{2\pi}} - \frac{\eta}{\pi} \phi(u_T) \right) \sim \mathbb{E}(U_{u_T}(S_T)), \end{aligned}$$

où la première inégalité découle du fait que S_T tend vers l'infini donc dépasse le niveau η à partir d'un certain rang. Inversement, en faisant le changement de variable $\tau = s - t$ dans (7.5) et en utilisant les propriétés d'indépendance du processus, on trouve pour un $C > 0$,

$$\begin{aligned} v_2(S_T) &= 2 \int_0^T (S_T - \tau) A_{0,\tau}^+(u_T, u_T) p_{X(0), X(\tau)}(u_T, u_T) d\tau \\ &= 2 \int_0^\eta (S_T - \tau) A_{0,\tau}^+(u_T, u_T) p_{X(0), X(\tau)}(u_T, u_T) d\tau + (S_T - \eta)^2 \phi(u_T)^2 \frac{1}{2\pi} \\ &\leq CS_T \int_0^T \frac{\theta'(\tau)}{\tau^2} \exp\left(-\frac{u_T^2}{1 + \rho(\tau)}\right) d\tau + (S_T - \eta)^2 \phi(u_T)^2 \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle de la démonstration de la proposition 4.2 de [AW09]. Plus précisément, il s'agit d'une conséquence de

$$\frac{A_{0,\tau}^+(u_T, u_T)}{\sqrt{1 - \rho^2(\tau)}} \leq \frac{\mathbb{V}(X'(0) | X(0) = X(\tau) = u_T)}{\sqrt{1 - \rho^2(\tau)}} \leq \frac{\theta'(\tau)}{\tau^2}.$$

Enfin, en utilisant la condition de Geman (H2), on conclut

$$v_2(t_1) \leq CS_T \phi(u_T) \left(\int_0^\delta \frac{\theta'(\tau)}{\tau^2} d\tau + \int_\delta^\eta \sqrt{2\pi} \frac{\theta'(\tau)}{\tau^2} e^{\frac{u_T^2(\rho(\tau)-1)}{2(1+\rho(\tau))}} d\tau + \frac{S_T \phi(u_T)}{2\pi C} \right) \quad (7.6)$$

$$\leq CS_T \phi(u_T) \left(\frac{\gamma}{C} + \int_\delta^\eta \sqrt{2\pi} \frac{\theta'(\tau)}{\tau^2} e^{\frac{u_T^2(\rho(\tau)-1)}{2(1+\rho(\tau))}} d\tau + \frac{S_T \phi(u_T)}{2\pi C} \right) \quad (7.7)$$

où γ est arbitraire strictement positif et $\delta = \delta(\gamma)$. En utilisant le fait que $|\rho(\tau) - 1|$ est minoré sur $[\delta, \eta]$, on obtient alors pour la variance

$$\mathbb{V}(U_{u_T}(S_T)) \leq S_T \phi(u_T) \left(\gamma + \sqrt{\frac{1}{2\pi}} + C \sqrt{2\pi} \int_\delta^\eta \frac{\theta'(\tau)}{\tau^2} e^{\frac{u_T^2(\rho(\tau)-1)}{2(1+\rho(\tau))}} d\tau \right) \sim S_T \phi(u_T) \left(\gamma + \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \right)$$

ce qui conclut la preuve. \square

Conséquence

En appliquant directement le lemme 7.3.1 pour $S_T = \eta$ et $S_T = t_1(T)$, on obtient

$$\frac{N_T \mathbb{V}(U_{u_T}(\eta))}{\mathbb{V}(U_{u_T}(T))} \sim \frac{T}{t_1(T) + \eta} \times \frac{\eta}{T} \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0.$$

7.3.3 Proximité L^2 avec des variables de Bernoulli

Après avoir montré que la somme sur les intervalles de longueur t_1 porte toute l'information, on cherche maintenant à établir le TCL sur ce tableau triangulaire. Afin d'éviter de fastidieux calculs, on va se ramener aux cadres de variables de Bernoulli. L'idée est de régler la taille des intervalles (t_1) pour n'avoir, avec grande probabilité, qu'un seul ou zéro franchissement. Le comportement de $U_{u_T}(t_1)$ dans L^2 sera alors similaire à celui de $\mathbb{1}_{U_{u_T}(t_1) \geq 1}$. Pour obtenir ce résultat, on va considérer un temps $t_1(T)$ tel que

$$\mathbb{E}(U_{u_T}(t_1)) = \frac{t_1(T)}{2\pi} e^{-\frac{u_T^2}{2}} \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0. \quad (7.8)$$

On peut alors énoncer notre résultat

Lemme 7.3.2. *Dans le cadre des hypothèses du théorème 7.3.1, on a*

$$\frac{U_{u_T}(t_1) - \mathbb{E}(U_{u_T}(t_1))}{\sqrt{\mathbb{V}(U_{u_T}(t_1))}} - \frac{\mathbb{1}_{U_{u_T}(t_1) \geq 1} - \mathbb{P}(U_{u_T}(t_1) \geq 1)}{\sqrt{\mathbb{P}(U_{u_T}(t_1) \geq 1)(1 - \mathbb{P}(U_{u_T}(t_1) \geq 1))}} \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0$$

où la convergence considérée est celle dans L^2 .

Démonstration. En développant, on se rend compte que cette condition est équivalente à la convergence vers 1 de la corrélation entre les variables aléatoires $U_{u_T}(t_1)$ et $\mathbb{1}_{U_{u_T}(t_1) \geq 1}$ recentrées. Soit

$$D(T) := \mathbb{E} \left(\frac{(U_{u_T}(t_1) - \mathbb{E}(U_{u_T}(t_1)))(\mathbb{1}_{U_{u_T}(t_1) \geq 1} - \mathbb{P}(U_{u_T}(t_1) \geq 1))}{\sqrt{\mathbb{V}(U_{u_T}(t_1))} \sqrt{\mathbb{P}(U_{u_T}(t_1) \geq 1)(1 - \mathbb{P}(U_{u_T}(t_1) \geq 1))}} \right) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 1.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, cette quantité est toujours plus petite que 1. Inversement,

$$\begin{aligned} D(T) &= \frac{\mathbb{E}(U_{u_T}(t_1) \mathbb{1}_{U_{u_T}(t_1) \geq 1}) - \mathbb{P}(U_{u_T}(t_1) \geq 1) \mathbb{E}(U_{u_T}(t_1))}{\sqrt{\mathbb{V}(U_{u_T}(t_1))} \sqrt{\mathbb{P}(U_{u_T}(t_1) \geq 1)(1 - \mathbb{P}(U_{u_T}(t_1) \geq 1))}} \\ &\geq \frac{\mathbb{P}(U_{u_T}(t_1) \geq 1)(1 - \mathbb{E}(U_{u_T}(t_1)))}{\sqrt{\mathbb{V}(U_{u_T}(t_1))} \sqrt{\mathbb{P}(U_{u_T}(t_1) \geq 1)(1 - \mathbb{P}(U_{u_T}(t_1) \geq 1))}} \\ &\sim \sqrt{\frac{\mathbb{P}(U_{u_T}(t_1) \geq 1)}{\mathbb{V}(U_{u_T}(t_1))} \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbb{P}(U_{u_T}(t_1) \geq 1)}}} \\ &\geq \sqrt{\frac{\mathbb{E}(U_{u_T}(t_1)) - \nu_2(t_1)/2}{\mathbb{V}(U_{u_T}(t_1))}} =: E(T) \end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle du fait que pour X variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} ,

$$\mathbb{E}(X) - \frac{\nu_2(X)}{2} \leq \mathbb{P}(X \geq 1).$$

Or, par (7.7) et le résultat du lemme 7.3.1, on a

$$D(T) \geq E(T) \sim \sqrt{1 - \gamma}$$

où γ est arbitraire strictement positif, ce qui conclut la preuve du lemme. \square

7.3.4 Application du TCL pour $\mathbb{1}_{U_{u_T}(t_1) \geq 1}$

On va simplement vérifier que notre tableau triangulaire de variables de Bernoulli indépendantes

$$(\mathbb{1}_{U_{u_T}(t_{i-1}+(i-1)\eta, t_i+(i-1)\eta) \geq 1})_{1 \leq i \leq N_T}$$

est dans le cadre d'application du lemme 7.5.2, à savoir

$$N_T p_T := N_T \mathbb{P}(U_{u_T}(t_1) \geq 1) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Pour T assez grand, on a

$$\begin{aligned} N_T p_T &\geq N_T \left(\mathbb{E}(U_{u_T}(t_1)) - \frac{\nu_2(t_1)}{2} \right) \\ &= N_T \left(t_1 \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \phi(u_T) - \frac{\nu_2(t_1)}{2} \right) \geq C_1 T e^{-\frac{u_T^2}{2}} \left(1 - C_2 \frac{\nu_2(t_1) e^{\frac{u_T^2}{2}}}{t_1} \right) \end{aligned}$$

ce qui nous amène à reconsidérer le deuxième moment factoriel. En reprenant la formule (7.7), il vient

$$\frac{\nu_2(t_1) e^{\frac{u_T^2}{2}}}{t_1} \leq C_3 \left(\frac{\gamma}{C_3} + \int_{\delta}^{\eta} \sqrt{2\pi} \frac{\theta'(\tau)}{\tau^2} e^{\frac{u_T^2(\rho(\tau)-1)}{2(1+\rho(\tau))}} d\tau + \frac{S_T \phi(u_T)}{2\pi C} \right)$$

où le premier terme est égal à γ choisi arbitrairement petit et où les deuxièmes et troisièmes termes tendent vers 0 lorsque $T \rightarrow +\infty$. Ceci conclut donc la preuve de

$$N_T \mathbb{P}(U_{u_T}(t_1) \geq 1) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} +\infty.$$

On peut ainsi appliquer le lemme 7.5.2 à toute sous suite convergente pour terminer la preuve du théorème 7.3.1.

7.4 Cas général

7.4.1 Variance dans le cas général

Dans cette partie, nous considérons un processus χ Gaussien centré stationnaire à trajectoire p.s. \mathcal{C}^1 normalisé et non-dégénéré. On suppose de plus qu'il satisfait la condition de Geman (H2). Afin de remplacer l'hypothèse (H3) du cadre u fixe, nous définissons

$$(H4) \quad \rho(t), \rho'(t) \text{ et } \rho''(t) \text{ tendent vers } 0 \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty.$$

$$(H5) \quad \exists \delta > 2 \text{ tel que } \limsup_{T \rightarrow \infty} \left(\int_0^T |\rho^{(i)}(t)| dt \right) e^{-u_T^2/\delta} < \infty \text{ pour } i = 0, 1, 2.$$

qui sont moins restrictives que (H3). Une discussion sur ces hypothèses est proposée à la fin de la section.

Theorem 7.4.1. *Soit χ un processus Gaussien centré stationnaire à trajectoire p.s. \mathcal{C}^1 normalisé et non-dégénéré satisfaisant les hypothèses (H4) et (H5). Considérons un niveau u_T tel que*

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow +\infty} u_T &= +\infty \\ \lim_{T \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(U_{u_T}(\chi, [0, T])) &= +\infty \end{aligned}$$

alors on a le résultat asymptotique suivant

$$\frac{1}{\sqrt{T\phi(u_T)}} \left(U_{u_T}(T) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} T\phi(u_T) \right) \Longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2\pi}\right)$$

où \Longrightarrow désigne la convergence en loi.

Comme décrit en introduction, le résultat espéré, donné par le théorème 7.4.1, ne nous est pas accessible en l'état. Malgré tout, nous proposons 2 résultats intermédiaires. Le premier donne l'ordre de grandeur de la variance du nombre de crossings dans le cadre du théorème 7.4.1 (à la différence du cas u fixe où la variance est exprimée par une somme de chaos). Le deuxième démontre l'impossibilité de retrouver le TCL dans le cas général à partir du TCL dans le cas η -dépendant pour une copie η -dépendante construite selon la formule 7.16. Les deux propositions s'énoncent ainsi

Proposition 7.4.2. Avec les notations du théorème 7.4.1, on a

$$\mathbb{V}(U_{u_T}(\chi, [0, T])) \sim \mathbb{E}(U_{u_T}(\chi, [0, T])) \text{ lorsque } T \rightarrow +\infty$$

où $a \sim b$ signifie $\frac{a}{b} \rightarrow 1$ lorsque $T \rightarrow +\infty$. De manière équivalente,

$$\mathbb{V}(U_{u_T}(\chi, [0, T])) = \frac{1}{2\pi} T \exp(-u_T^2/2) + o(T \exp(-u_T^2/2)),$$

où o est défini au sens des notations de Landau.

Proposition 7.4.3. Avec les notations du théorème 7.4.1 et la construction donnée par 7.16, on a

$$\forall \eta > 0, \text{Cov}(U_{u_T}(\chi, [0, T]), U_{u_T}(\chi_\eta, [0, T])) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0. \quad (7.9)$$

Avant de passer aux démonstrations des deux propositions, commençons par quelques remarques

Remarque L'hypothèse (H4) est nécessaire dans le nouveau théorème car l'hypothèse (H5) n'assure pas la convergence vers 0 de la covariance ainsi que de ses dérivées premières et secondes. Elle est néanmoins standard, le contrôle asymptotique des up-crossings étant fortement lié à la faible dépendance en temps long.

Remarque On se rapproche ici de la condition de Berman, hypothèse (H1), donnée dans le cas Poissonien, cas limite de notre étude. En effet, si on considère une fonction de covariance telle que

$$\forall T \geq T_0, \quad \rho(T) \leq \frac{\epsilon}{\log(T)}$$

où ϵ est arbitrairement petit et un niveau u_T de l'ordre de $\sqrt{\delta \log(T)}$, alors un simple calcul donne

$$\left(\int_0^T \rho(t) dt \right) \exp(-u_T^2/\delta) \sim \frac{\epsilon T}{\log(T)} \exp(-u_T^2/\delta) \sim \frac{\epsilon}{\log(T)} < +\infty.$$

En particulier, en faisant tendre δ vers 2, on retrouve l'hypothèse (H1).

Exemple Considérons un processus gaussien dont la covariance satisfait $\rho(T) \sim_{+\infty} T^{-\alpha}$ où $0 < \alpha < 1$. Un tel processus ne satisfait l'hypothèse (H3) du cas u fixe. On peut se demander

à partir de quel niveau u_T on peut espérer être dans le cadre de la proposition 7.4.2. Pour répondre à cela, soit $u_T = \sqrt{\delta(1-\alpha)\log(T)}$ qui satisfait les hypothèses sur u_T , alors

$$\left(\int_0^T \rho(t) dt \right) \exp(-u_T^2/\delta) \leq C + T^{1-\alpha} T^{\alpha-1} < +\infty$$

ce qui nous assure la convergence par le théorème 7. δ étant aussi proche de 2 que nécessaire, on aurait alors un comportement limite pour $u_T \sim \sqrt{2(1-\alpha)\log(T)}$.

Remarque Supposons maintenant que nous n'ayons plus l'hypothèse (H3) mais seulement

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left(\int_0^T |\rho^{(i)}(t)| dt \right) \phi(u_T) < \infty \quad \text{pour } i = 1, 2 \text{ et } 3.$$

Alors, dans ce cas, on peut montrer assez rapidement que la variance est d'ordre supérieur à $T\phi(u_T)$. En effet, en se limitant à la simple étude des premiers chaos, on est amené à considérer des quantités de l'ordre (en T) de

$$\phi(u_T) \bar{H}_{q-k}(u_T) \bar{H}_{q-k'}(u_T) \int_0^T \bar{\rho}(s) ds.$$

Si on dispose seulement de l'hypothèse ci-dessus, on se retrouve avec les deux polynômes de Hermite $H_{q-k}(u_T)$ et $H_{q-k'}(u_T)$ qui tendent vers l'infini avec T , ce qui contredit la domination. Il nous faut donc garder une quantité exponentielle qui contrôle uniformément les polynômes d'Hermite. Le fait que δ soit strictement plus grand que 2 est donc indispensable.

7.4.2 Preuve des propositions 7.4.2 et 7.4.3

On commence par la preuve de la proposition 7.4.2

Démonstration. Pour arriver au résultat voulu, nous commençons par considérer la décomposition donnée en section 7.2.1. Rappelons les notations

$$d_j(u_T) := \frac{1}{j!} \phi(u_T) H_j(u_T),$$

$$\xi_{jk} := \int_0^T H_j(X(s)) H_k(X'(s)) ds,$$

ce qui donne pour $U_{u_T}(T) := U_{u_T}(\chi, [0, T])$,

$$U_{u_T}(T) := \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{j+k=q} d_j(u_T) a_k \xi_{jk} = \sum_{q=0}^{\infty} U_{u_T}^q.$$

Par orthogonalité de la décomposition, on écrit

$$\mathbb{E}(U_{u_T}^2) = \sum_{q=0}^{\infty} \mathbb{E}((U_{u_T}^q)^2)$$

et en particulier

$$\mathbb{V}(U_{u_T}^2) = \sum_{q=1}^{\infty} \mathbb{E}((U_{u_T}^q)^2). \tag{7.10}$$

L'objectif est de montrer la domination de cette série renormalisée par $T\phi(u_T)$ et de déterminer sa limite. Pour cela, on fixe $q \in \mathbb{N}^*$ et on développe,

$$\mathbb{E}((U_{u_T}^q)^2) = \sum_{k,k'=0}^q d_{q-k}(u_T)a_k d_{q-k'}(u_T)a_{k'} \mathbb{E}(\xi_{q-k,k} \xi_{q-k',k'}).$$

En utilisant le théorème de Fubini sur le produit d'intégrales convergentes, on obtient

$$\begin{aligned} I_q := \mathbb{E}((U_{u_T}^q)^2) &= \sum_{k,k'=0}^q d_{q-k}(u_T)a_k d_{q-k'}(u_T)a_{k'} \int_0^T dt_1 \\ &\times \int_0^T \mathbb{E}(H_{q-k}(X(t_1))H_k(X'(t_1))H_{q-k'}(X(t_2))H_{k'}(X'(t_2))) dt_2. \end{aligned}$$

Par (H4), pour tout $\beta > 0$, il existe un certain $T_0(\beta)$ tel que

$$\forall t \geq T_0(\beta), \bar{\rho}(t) = \sup\{|\rho(t)|, |\rho'(t)|, |\rho''(t)|\} \leq \beta.$$

On considère maintenant un temps $T \geq T_0$ et on note $I_q = I_q^1 + I_q^2$ où I_q^1 désigne l'intégrale sur les couples $(t_1, t_2) \in [0, T]^2$ tels que $|t_1 - t_2| \leq T_0$ et I_q^2 l'intégrale sur les termes en dehors de cette bande. On commence par majorer I_q^2 par

$$\begin{aligned} &\leq C_1 T \sum_{k,k'=0}^q |d_{q-k}(u_T)||a_k||d_{q-k'}(u_T)||a_{k'}| \int_{T_0}^T \sum_{(d_1, d_2, d_3, d_4) \in \mathbb{Z}} \frac{k!(q-k)!k'!(q-k')!}{d_1!d_2!d_3!d_4!} \\ &\quad |\rho(s)|^{d_1} |\rho'(s)|^{d_2+d_3} |\rho''(s)|^{d_4} ds \\ &\leq C_1 T \sum_{k,k'=0}^q |d_{q-k}(u_T)||a_k||d_{q-k'}(u_T)||a_{k'}| \int_{T_0}^T \sum_{(d_1, d_2, d_3, d_4) \in \mathbb{Z}} \frac{k!(q-k)!k'!(q-k')!}{d_1!d_2!d_3!d_4!} \\ &\quad \beta^{q-1} \bar{\rho}(s) ds, \end{aligned}$$

où l'ensemble Z défini dans la formule de Mehler généralisée (voir formule (7.14)) est de cardinal plus petit que $r_1 + r_2 = r_3 + r_4$ ici égal à q . Ainsi, en remarquant que la majoration $\sup_d \frac{1}{d!(k-d)!} \leq \frac{2^k}{k!}$ est valable pour k et k' , on trouve

$$\leq C_2 T \sum_{k,k'=0}^q |d_{q-k}(u_T)||a_k||d_{q-k'}(u_T)||a_{k'}| q(2\beta)^q \sqrt{k!(q-k)!k'!(q-k')!} \int_{T_0}^T |\bar{\rho}(s)| ds.$$

En utilisant l'inégalité de Jensen, on trouve pour la variance normalisée

$$\begin{aligned} \frac{I_q^2}{T\phi(u_T)} &\leq \frac{C_2 q(2\beta)^q}{\phi(u_T)} \sum_{k,k'=0}^q |d_{q-k}(u_T)||a_k||d_{q-k'}(u_T)||a_{k'}| \sqrt{k!(q-k)!k'!(q-k')!} \int_{T_0}^T |\bar{\rho}(s)| ds \\ &\leq C_2 q^2 (2\beta)^q \sum_{k=0}^q \frac{d_{q-k}^2(u_T)}{\phi(u_T)} a_k^2 k!(q-k)! \int_{T_0}^T \bar{\rho}(s) ds \\ &= C_2 q^2 (2\beta)^q \sum_{k=0}^q \frac{\bar{H}_{q-k}^2(u_T)}{(q-k)!} e^{-u_T^2(\frac{\delta-2}{2\delta})} a_k^2 k! e^{-u_T^2/\delta} \int_{T_0}^T \bar{\rho}(s) ds \\ &\leq C_3 q^2 (2\beta)^q \sum_{k=0}^q a_k^2 k! \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\frac{H_{q-k}^2(x)}{(q-k)!} e^{-x^2(\frac{\delta-2}{2\delta})} \right). \end{aligned}$$

Or, en utilisant le théorème 7.5.4 présenté en annexe, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{T\phi(u_T)} \mathbb{E}((U_{u_T}^q)^2) &< C_4 q^2 (2\beta)^q \left(e^{\frac{\delta}{\delta-2}} \right)^{q-k} \\ &< C_5 q^2 (2\beta e^{\frac{\delta}{\delta-2}})^q. \end{aligned}$$

Donc, en prenant $\beta = \frac{1}{4} e^{-\frac{\delta}{\delta-2}}$, chaque terme de la série est contrôlé par le terme général d'une série convergente ce qui conclut le premier cas. En réalité, ce dernier résultat est bien plus fort. Si on fixe $\epsilon > 0$, alors le choix $\beta = \frac{\epsilon}{4} e^{-\frac{\delta}{\delta-2}}$ nous assure que

$$\sum_{q=1}^{+\infty} I_q^2 \leq C\epsilon.$$

On en déduit que la masse se trouve concentrée dans le terme diagonal I_q^1 . Pour prouver cette affirmation, on commence par remarque que la bande diagonale $\{(s, t) \in [0, T]^2; |s - t| \leq T_0\}$

- contient au moins $\lfloor T/T_0 \rfloor$ carrés de la forme $[iT_0, (i+1)T_0] \times [iT_0, (i+1)T_0]$,
- peut-être recouverte par $\frac{T+1}{T_0}$ carrés de la forme précédente plus $2\frac{T+1}{T_0}$ carrés de la forme $[iT_0, (i+1)T_0] \times [(i+1)T_0, (i+2)T_0]$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière et $i \in \{0, \dots, \lfloor T/T_0 \rfloor\}$. Ainsi, en utilisant la stationnarité de χ , on a

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(U_{u_T}(T_0)^2)}{T_0\phi(u_T)} \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{V}(U_{u_T}(T_0))}{T\phi(u_T)} \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(U_{u_T}(T_0)^2) + 2\mathbb{E}(U_{u_T}(T_0)U_{u_T}(\chi, [T_0, 2T_0]))}{T_0\phi(u_T)}. \quad (7.11)$$

Le processus χ satisfaisant la condition de Geman (H2), on peut majorer

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U_{u_T}(T_0)^2) &= \nu_2(T_0) + \mathbb{E}(U_{u_T}(T_0)) \\ &= 2 \int_0^{T_0} (T_0 - \tau) \frac{A_{0,\tau}^+(u_T, u_T)}{2\pi\sqrt{1-\rho^2(\tau)}} e^{-\frac{u_T^2}{1+\rho(\tau)}} d\tau + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} T_0\phi(u_T) \\ &\leq CT_0\phi(u_T) \left(\frac{\gamma}{C} + \int_\delta^\eta \sqrt{2\pi} \frac{\theta'(\tau)}{\tau^2} e^{u_T^2 \frac{\rho(\tau)-1}{2(1+\rho(\tau))}} d\tau + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \end{aligned}$$

où la dernière inégalité provient de l'équation (7.7). De même, on est amené à considérer un calcul similaire pour le deuxième terme, à savoir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U_{u_T}(T_0)U_{u_T}(\chi, [T_0, 2T_0])) &= \int_0^{T_0} \int_{T_0}^{2T_0} \frac{A_{s,t}^+(u_T, u_T)}{2\pi\sqrt{1-\rho^2(t-s)}} e^{-\frac{u_T^2}{1+\rho(t-s)}} dt ds \\ &\leq CT_0 \int_0^{T_0} \frac{A_{0,\tau}^+(u_T, u_T)}{2\pi\sqrt{1-\rho^2(\tau)}} e^{-\frac{u_T^2}{1+\rho(\tau)}} d\tau. \end{aligned}$$

En effet, dans le deuxième cas, la formule de Kac-Rice compte directement le nombre de up-crossings dans $[0, T_0] \times [T_0, 2T_0]$. Au contraire, le cas précédent nécessitait l'exclusion de la diagonale du carré $[0, T_0] \times [0, T_0]$ par dégénérescence de la loi jointe $(X(t), X(t))$. Au final, on obtient

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{V}(U_{u_T}(T_0))}{T_0\phi(u_T)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

ce qui conclut la preuve de la proposition 7.4.2. □

A ce stade, nous avons démontré dans la proposition 7.4.2 que la variance du nombre de crossings pour un processus η -dépendant et pour un processus satisfaisant (H3) étaient asymptotiquement du même ordre. De plus, nous avons prouvé que dans le cas η -dépendant, $U_{u_T}(T)$ satisfaisait un TCL dans le théorème 7.3.1. A l'instar de Kratz et Léon [KL97], la conclusion logique serait de montrer que le comportement asymptotique du processus χ se déduit de la copie η -dépendante construite en (7.16). Malheureusement, cette dernière considération est contredite par la proposition 7.4.3. Sa démonstration est donnée ci-dessous.

Démonstration. Soit $\eta > 0$. On note ρ la fonction de covariance de χ , ρ_η la fonction de covariance de χ_η et ρ^η la fonction de covariance entre χ et χ_η qui sont toutes radiales par définition de χ et construction de χ_η . On commence par écrire (7.9) grâce à une formule de Kac-Rice, ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U_{u_T}(\chi, [0, T_0])U_{u_T}(\chi_\eta, [0, T_0])) &= \mathbb{E}(\#\{(s, t) \in [0, T_0]^2; X'(s) > 0, X'_\eta(t) > 0, X(s) = X_\eta(t) = u_T\}) \\ &= \int_{[0, T_0]^2} \mathbb{E}(X'^+(s)X'^+(t) | X(s) = X_\eta(t) = u_T) p_{(X(s), X_\eta(t))}(u_T, u_T) dt ds. \end{aligned}$$

La démonstration reprend en partie les calculs du lemme 7.3.1. Tout d'abord, on calcule la densité jointe

$$p_{(X(s), X_\eta(t))}(u_T, u_T) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-\frac{u_T^2}{1+\rho^\eta(t-s)}}}{\sqrt{1-\rho^\eta(t-s)}}, \quad (7.12)$$

qui vérifie bien $\phi(u_T)p_{(X(s), X_\eta(t))}(u_T, u_T) \rightarrow 0$ lorsque $T \rightarrow +\infty$ dans le cas où $\rho^\eta(t-s)$ est loin de 1 donc en dehors de la diagonale. Pour traiter le cas diagonal, on remarque

$$\begin{aligned} \theta_\eta(\tau) &= \rho(\tau)\psi(\eta\tau) - 1 - (\rho''(0) + \eta^2\rho(0)\psi''(0))\frac{\tau^2}{2} \\ &= \theta(\tau) + \rho(\tau)(\psi(\eta\tau) - 1) - \rho(0)\psi''(0)\frac{\eta^2\tau^2}{2} \\ &= \theta(\tau) + \psi''(0)(\rho(\tau) - \rho(0) + o(\tau))\frac{\eta^2\tau^2}{2} \\ &= \theta(\tau) + o(\eta^2\tau^3) \end{aligned}$$

ce qui implique, par la condition de Geman (H2) et par interpolation, que le terme diagonal peut-être borné par un terme aussi proche de 0 que nécessaire. Ceci conclut la preuve de la proposition. \square

La dernière proposition démontre que contrairement au cas u fixe, on a

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(|U_{u_T}(\chi, [0, T]) - U_{u_T}(\chi_\eta, [0, T])|^2) \neq 0 \quad (7.13)$$

ce qui ne permet pas de conclure sur le comportement asymptotique de $U_{u_T}(\chi, [0, T])$ malgré le fait que sa variance soit asymptotiquement de l'ordre de $U_{u_T}(\chi_\eta, [0, T])$. En particulier, la différence majeure avec le cas u fixe est le comportement des chaos. Dans le cas u fixe, on peut démontrer simplement que le deuxième chaos est positif ce qui implique bien que la variance est de l'ordre de $T\phi(u)$. Dans le cas u_T décrit depuis le début de la section, la série des chaos renormalisée par $T\phi(u_T)$ est bien strictement positive mais chaque chaos tend vers 0 lorsque T tend vers l'infini. En effet, à q fixé, en utilisant l'hypothèse (H5), on doit calculer un nombre fini de termes de la forme

$$H_{q-k}(u_T)H_{q-k'}(u_T)\exp(-\gamma u_T^2)$$

qui tend vers 0 pour toute valeur de q lorsque T tend vers l'infini. De part ce résultat, on est dans l'incapacité d'approcher uniformément la série des chaos à une erreur ϵ près par un nombre fini de termes comme dans le cas u fixe et d'utiliser les résultats de convergence de ρ_η vers ρ .

7.5 Annexes

7.5.1 Formule de Mehler généralisée

Lemme 7.5.1. Soit $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ un vecteur Gaussien centré de matrice de covariance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \rho_{1,3} & \rho_{1,4} \\ 0 & 1 & \rho_{2,3} & \rho_{2,4} \\ \rho_{1,3} & \rho_{2,3} & 1 & 0 \\ \rho_{1,4} & \rho_{2,4} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère l'ensemble

$$Z_{r_1, r_2, r_3, r_4} = \{(d_1, d_2, d_3, d_4) \in \mathbb{N}^4; d_1 + d_2 = r_1, d_3 + d_4 = r_2, d_1 + d_3 = r_3, d_2 + d_4 = r_4\}$$

alors

$$\mathbb{E}(H_{r_1}(X_1)H_{r_2}(X_2)H_{r_3}(X_3)H_{r_4}(X_4)) = \sum_{(d_1, d_2, d_3, d_4) \in Z} \frac{r_1!r_2!r_3!r_4!}{d_1!d_2!d_3!d_4!} \rho_{1,3}^{d_1} \rho_{1,4}^{d_2} \rho_{2,3}^{d_3} \rho_{2,4}^{d_4} \quad (7.14)$$

si $r_1 + r_2 = r_3 + r_4$ et 0 sinon.

Démonstration. En partant de la définition des polynômes d'Hermite donnée en 7.3 et en utilisant le théorème de Fubini, on trouve

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^4 \exp(t_i X_i - \frac{1}{2} t_i^2)\right) = \sum_{(r_1, r_2, r_3, r_4) \in \mathbb{N}^4} \frac{t_1^{r_1} t_2^{r_2} t_3^{r_3} t_4^{r_4}}{r_1! r_2! r_3! r_4!} \mathbb{E}(H_{r_1}(X_1)H_{r_2}(X_2)H_{r_3}(X_3)H_{r_4}(X_4)).$$

Or, la matrice Σ étant inversible, on peut aussi écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^4 \exp(t_i X_i - \frac{1}{2} t_i^2)\right) &= \exp(\rho_{1,3} t_1 t_3 + \rho_{1,4} t_1 t_4 + \rho_{2,3} t_2 t_3 + \rho_{2,4} t_2 t_4) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} (\rho_{1,3} t_1 t_3 + \rho_{1,4} t_1 t_4 + \rho_{2,3} t_2 t_3 + \rho_{2,4} t_2 t_4)^r \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{d_1+d_2+d_3+d_4=r} \frac{\rho_{1,3}^{d_1} \rho_{1,4}^{d_2} \rho_{2,3}^{d_3} \rho_{2,4}^{d_4}}{d_1! d_2! d_3! d_4!} t_1^{d_1+d_2} t_2^{d_3+d_4} t_3^{d_1+d_3} t_4^{d_2+d_4}, \end{aligned}$$

où la dernière égalité découle de la formule du multinôme. L'identification terme à terme entre les deux expressions implique que l'espérance est nulle pour $r_1 + r_2 \neq r_3 + r_4$ et donne le résultat énoncé en (7.14) dans le cas d'égalité. \square

7.5.2 Construction d'une copie η -dépendante

Soit $\chi = \{X(t); t \in \mathbb{R}\}$ un processus Gaussien centré à trajectoire p.s. \mathcal{C}^1 . On suppose en plus qu'il admet une densité spectrale notée f , on peut alors l'écrire sous la forme

$$X(t) = \sqrt{2} \int_0^{\infty} (\cos(t\lambda) \sqrt{f(\lambda)} dW_1(\lambda) + \sin(t\lambda) \sqrt{f(\lambda)} dW_2(\lambda)), \quad (7.15)$$

où W_1 et W_2 sont deux processus de Wiener indépendants. En particulier, par invariance par isométrie, on peut calculer simplement la fonction de covariance du processus χ par

$$\begin{aligned}\rho(h) &= \mathbb{E}(X(t)X(t+h)) \\ &= 2 \int_0^\infty \cos(\lambda t) \cos(\lambda(t+h))f(\lambda)d\lambda + 2 \int_0^\infty \sin(\lambda t) \sin(\lambda(t+h))f(\lambda)d\lambda \\ &= 2 \int_0^\infty \cos(\lambda h)f(\lambda)d\lambda.\end{aligned}$$

Notre objectif est de construire à partir de χ un processus χ_η dit η -dépendant à savoir tel que $\text{Cov}(X_\eta(s), X_\eta(t)) = 0$ si $|s - t| > 1/\eta$. Pour cela, considérons $\psi = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} * \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$ où $*$ désigne l'opérateur de convolution. La fonction ψ étant paire et à support dans $[-1, 1]$, on peut construire directement le processus χ_η en utilisant la décomposition donnée par (7.15) en posant

$$X_\eta(t) = \sqrt{2} \int_0^\infty \left[\cos(\lambda t) \sqrt{f * \hat{\psi}_\eta(\lambda)} dW_1(\lambda) + \sin(\lambda t) \sqrt{f * \hat{\psi}_\eta(\lambda)} dW_2(\lambda) \right] \quad (7.16)$$

où $\hat{\psi}_\eta$ est la transformée de Fourier de la fonction $\psi_\eta(t) = \frac{1}{2\pi} \psi(\eta t)$. En effet, le processus χ_η a pour fonction de covariance $\rho_\eta(t) = \rho(t)\psi(\eta t)$ qui est nulle pour tout $t > 1/\eta$, il est donc bien η -dépendant.

7.5.3 Théorème central limite η -dépendant

Lemma 7.5.2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $B_{n,1}, \dots, B_{n,n}$ un tableau triangulaire de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Notons $S_n = \sum_{i=1}^n B_{n,i}$, alors $np_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ est équivalent à

$$Z_n := \frac{S_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}} \implies \mathcal{N}(0, 1)$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$. La convergence considérée ici est la convergence en loi.

Démonstration. On note pour la suite $q_n = 1 - p_n$. Calculons la fonction caractéristique de Z_n définie par

$$\varphi_{Z_n}(x) = \left(p_n \exp\left(\frac{ix}{\sqrt{np_n q_n}}\right) + q_n \right)^n \exp\left(-\frac{ixnp_n}{\sqrt{np_n q_n}}\right),$$

et en passant au logarithme,

$$\log \varphi_{Z_n}(x) = n \log \left(1 + p_n \left(\exp \frac{ix}{\sqrt{np_n q_n}} - 1 \right) \right) - \frac{ixnp_n}{\sqrt{np_n q_n}}.$$

Or, comme np_n tend vers l'infini avec n , la quantité $x_n = \frac{x}{\sqrt{np_n q_n}}$ converge vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.

On en déduit alors, par deux développements limités,

$$\begin{aligned}
 \log \varphi_{Z_n}(x) &= n \log\left(1 + p_n\left(ix_n - \frac{x_n^2}{2} + o(x_n^2)\right)\right) - ix_n np_n \\
 &= n\left(p_n\left(ix_n - \frac{x_n^2}{2} + o(x_n^2)\right) - \frac{p_n^2}{2}\left(ix_n - \frac{x_n^2}{2} + o(x_n^2)\right)^2 + o(x_n^2)\right) - ix_n np_n \\
 &= n\left(ip_n x_n - p_n \frac{x_n^2}{2} + p_n^2 \frac{x_n^2}{2} + o(p_n x_n^2)\right) - in p_n x_n \\
 &= -n\left(p_n \frac{x_n^2}{2} q_n + o(p_n x_n^2)\right) \\
 &= -\frac{x^2}{2} + o(1).
 \end{aligned}$$

Par la caractérisation du théorème de Lévy, la limite en loi est gaussienne, centrée de variance 1. Ceci conclut un sens de la démonstration.

Réciproquement, en reprenant le calcul de la fonction de répartition,

$$\begin{aligned}
 \log \varphi_{Z_n}(x) &= n \log\left(1 + p_n\left(\exp\frac{ix}{\sqrt{np_n q_n}} - 1\right)\right) - \frac{ix np_n}{\sqrt{np_n q_n}} \\
 &\sim np_n\left(\exp\frac{ix}{\sqrt{np_n q_n}} - 1\right) - \frac{ix np_n}{\sqrt{np_n q_n}}.
 \end{aligned}$$

car p_n tend vers 0 et $|\exp(iy) - 1| < 2$. Dans cette expression, les seuls termes complexes sont donnés par $\exp\left(\frac{ix}{\sqrt{np_n q_n}}\right)$ et $\frac{ix np_n}{\sqrt{np_n q_n}}$. Or, toujours par le théorème de Lévy, la convergence vers une normale centrée réduite est équivalente à la convergence des fonctions caractéristiques ce qui implique en particulier

$$\exp\left(\frac{ix}{\sqrt{np_n q_n}}\right) - \frac{ix np_n}{\sqrt{np_n q_n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

En utilisant l'expression en série entière de l'exponentielle, cette dernière condition est équivalente à la convergence vers 0 de $\frac{ix np_n}{\sqrt{np_n q_n}}$, elle même équivalente à celle de np_n vers 0 ce qui conclut la preuve. \square

7.5.4 Borne uniforme sur les polynômes d'Hermite

Cette partie reprend la démonstration de l'article de E.Hille présentée dans [Sze39]. L'objectif est de comprendre précisément la démarche qui nous amène à l'équation (7.17) afin de la généraliser par (7.18). Les deux résultats sont énoncés dans les deux propositions suivantes.

Proposition 7.5.3. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et H_n le polynôme d'Hermite défini par (7.3), alors il existe une constante $C > 0$, uniforme en n , telle que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| \frac{H_n^2(x)}{n!} e^{-\frac{x^2}{2}} \right| < C. \tag{7.17}$$

Proposition 7.5.4. *Considérons le cadre de la proposition précédente, alors il existe une constante uniforme en n notée $C' > 0$ telle que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| \frac{H_n^2(x)}{n!} e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} \right| \exp\left(-\frac{n}{\alpha}\right) < C' \tag{7.18}$$

où $\alpha > 0$.

Commençons par la démonstration de (7.17). Considérons la décomposition de la fonction analytique $z \mapsto \exp(2zu - u^2)$ donnée par

$$e^{2zu-u^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{H}_n(z) \frac{u^n}{n!}$$

avec

$$\bar{H}_n(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} e^{2zu-u^2} u^{-n-1} du$$

où \mathcal{C} est un contour quelconque autour de l'origine. En particulier, on a les relations suivantes

$$\bar{H}'_n(z) = 2n\bar{H}_{n-1}(z) \quad (7.19)$$

$$\bar{H}_{n+1}(z) = 2z\bar{H}_n(z) - 2n\bar{H}_{n-1}(z) \quad (7.20)$$

$$\bar{H}''_n(z) - 2z\bar{H}'_n(z) + 2n\bar{H}_n(z) = 0 \quad (7.21)$$

où la dernière égalité est la conséquence directe des relations $\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) = 2(x-t)F = 2xF - 2\frac{\partial F}{\partial x}$ où $F(x, t) = e^{-\alpha(x-t)^2}$.

Localisation des zéros Afin d'obtenir l'inégalité (7.17), nous allons poser une fonction auxiliaire E_n définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, E_n(z) = (\sqrt{\pi}2^n n!)^{-\frac{1}{2}} \bar{H}_n(z) e^{-\frac{z^2}{2}},$$

le terme devant \bar{H}_n découlant de la normalisation donnée par le produit scalaire de $L^2(\phi)$ où ϕ est la densité Gaussienne centrée réduite. Notre objectif est d'obtenir une majoration uniforme en n et z pour E_n , pour cela, on cherche les extrema de cette fonction. Les résultats sont présentés dans les deux lemmes suivants.

Lemme 7.5.5. *Les zéros de E'_n sont tous réels et contenus dans le compact*

$$K = [-\sqrt{2n}, \sqrt{2n}]$$

Démonstration. Supposons que l'on sache montrer que les zéros de E'_n et E_n sont tous compris dans le compact

$$K_1 = [-\sqrt{2n+1}, \sqrt{2n+1}]. \quad (7.22)$$

En remarquant que $E_n(-x) = (-1)^n E_n(x)$ et $E'_n(-x) = (-1)^{n+1} E'_n(x)$, on peut se limiter au cas x positif. De plus, en passant à la limite dans les expressions de E_n et E'_n , on constate que pour $x > \sqrt{2n+1}$, on a $E_n > 0$ et $E'_n < 0$. Dans ce cas, en utilisant

$$\frac{E'_n}{E_n} = x - \frac{\bar{H}_{n+1}}{\bar{H}_n} = \frac{x\bar{H}_n(x) - \bar{H}_{n+1}(x)}{\bar{H}_n(x)} \quad (7.23)$$

on remarque que $\bar{H}_{n+1} > 0$ pour $x \geq \sqrt{2n+1}$ (le terme de gauche étant négatif et H_n strictement positif) ce qui se réécrit $\bar{H}_n(x) > 0$ pour $x \geq \sqrt{2n-1}$ donc a fortiori pour $x \geq \sqrt{2n}$. Enfin, en utilisant (7.23), il vient

$$E'_n(x) < 0 \text{ pour } x \geq \sqrt{2n} \iff x\bar{H}_n(x) - \bar{H}_{n+1}(x) < 0 \text{ pour } x \geq \sqrt{2n},$$

où la deuxième assertion se démontre par une récurrence utilisant la propriété

$$x\bar{H}_k(x) - \bar{H}_{k+1}(x) = 2k\bar{H}_{k-1}(x) - x\bar{H}_k(x) < \left(\frac{2k}{x} - x\right)\bar{H}_k(x) < 0,$$

ce qui conclut la preuve du lemme. Il reste maintenant à prouver que les zéros sont dans le compact K_1 défini par (7.22). \square

Lemme 7.5.6. Les zéros de E'_n et E_n sont tous réels et contenus dans K_1 .

Démonstration. En utilisant (7.21), on déduit directement

$$\forall z \in \mathbb{C}, E''_n(z) + (2n + 1 - z^2)E_n(z) = 0. \quad (7.24)$$

Considérons maintenant $z_1 = x_1 + iy_1$ un zéro complexe de $E_n(z)E'_n(z)$. En multipliant (7.24) par la quantité conjuguée de $E_n(z)$ où $z = x + iy \in \mathbb{C}$ et en intégrant sur le segment horizontal $[z_1, z_2]$ où $z_2 = x_2 + iy_1$, on obtient après intégration par parties

$$\left[\overline{E_n(z)} E'_n(z) \right]_{z_1}^{z_2} - \int_{x_1}^{x_2} |E'_n(z)|^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} (2n + 1 - x^2 + y_1^2 - 2ixy_1) |E_n(z)| dx = 0.$$

En faisant tendre x_2 vers l'infini, on trouve alors

$$\int_{x_1}^{+\infty} |E'_n(z)|^2 dx = \int_{x_1}^{+\infty} (2n + 1 - x^2 + y_1^2) |E_n(z)| dx - y_1 \int_{x_1}^{+\infty} 2ix |E_n(z)| dx$$

ce qui implique $y_1 = 0$. L'ensemble des zéros de $E_n(z)E'_n(z)$ est donc réel, de plus, en utilisant la positivité du terme de gauche, on peut même affirmer qu'ils se situent tous dans le compact K_1 . \square

Obtention de l'inégalité (7.17) Dans la suite, on notera x_n le point réalisant le maximum de la fonction E_n . Afin de contrôler $E_n(x_n)$, on définit une nouvelle fonction auxiliaire

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, h_n[, \Theta_n(x) := & (h_n^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} E_n^2(x) - x(h_n^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} E_n(x) E'_n(x) \\ & + (h_n^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} (h_n^2 - x^2)^{-3} (h_n^2 + 2x^2) \right) E_n'^2(x) \end{aligned}$$

où $h_n = \sqrt{2n + 1}$. En dérivant et en utilisant (7.21), on obtient

$$\Theta'_n(x) = -\frac{1}{2} x (h_n^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} (11h_n^2 + 10x^2) E_n'^2(x)$$

qui est toujours strictement négative sur $[0, h_n[$, en particulier

$$\Theta_n(0) \geq \Theta_n(x_n) = (h_n^2 - x_n^2)^{\frac{1}{2}} E_n^2(x_n).$$

Il ne nous reste plus alors qu'à majorer uniformément en n l'expression de $\Theta_n(0)$. En remarquant que pour n pair, $E'_n(0) = 0$, que pour n impair, $E_n(0) = 0$, et en utilisant la formule de duplication pour la fonction Gamma

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Gamma(x)\Gamma(x + 1/2) = \sqrt{\pi} 2^{1-2x} \Gamma(2x),$$

on obtient pour m assez grand

$$\begin{aligned} \Theta_{2m}(0) = h_{2m} E_{2m}^2(0) &= \frac{\sqrt{4m+1} 2m!^2}{\pi 2^{2m} 2m! m!^2} = \frac{\Gamma(m+1/2) \sqrt{4m+1}}{\pi^{\frac{3}{2}} m!} < C^2 \\ \Theta_{2m+1}(0) &= \frac{1}{h_{2m+1}} \left(1 - \frac{1}{2} h_{2m+1}^{-4} \right) E_{2m+1}'^2(0) < \frac{C_1 (2m+1)^{3/2} 2m!^2}{2^{2m+1} (2m+1)! m!^2} < \frac{C_2 m}{m!} < C^2 \end{aligned}$$

où la constante C peut être choisie indépendamment de m . Enfin, en renversant l'inégalité (7.5.4) et sachant que $h_n^2 - x_n^2 = 2n + 1 - x_n^2 > 1$, on déduit

$$|E_n(x)| < C$$

pour tout x réel et tout n entier naturel ou de manière équivalente,

$$|\bar{H}_n(x)e^{-x^2/2}| < C\sqrt{n!}2^{n/2}.$$

Par définition de H_n et \bar{H}_n , on a $H_n(x) = 2^{-n/2}\bar{H}_n(x\sqrt{2})$, ce qui permet de conclure

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, \left| \frac{H_n^2(x)\phi(x)}{n!} \right| < C'. \quad (7.25)$$

Obtention de l'inégalité (7.18) Jusque là, on s'est intéressé à un contrôle sur $\bar{H}_n(x)e^{-x^2/2}$. L'objectif maintenant est de réussir à contrôler des quantités du type $\bar{H}_n(x)e^{-\alpha x^2/2}$ où $0 < \alpha < 1$ par $C\gamma^n$ où C est une constante et $\gamma \in [0, 1[$. Pour cela, considérons

$$A_n(x) := (\sqrt{\pi}2^n n!)^{-1/2} \bar{H}_n(x)e^{-\alpha x^2/2} = E_n(x)e^{\frac{x^2}{2}(1-\alpha)}.$$

En suivant la démarche donnée précédemment et en utilisant (7.23), on déduit

$$\frac{A'_n(x)}{A_n(x)} = \frac{E'_n(x)}{E_n(x)} + x(1-\alpha) = \frac{x(2-\alpha)\bar{H}_n(x) - \bar{H}_{n+1}(x)}{\bar{H}_n(x)}. \quad (7.26)$$

Toujours par symétrie, on se limite à l'étude du cas x positif. D'après le lemme 7.5.6, on sait déjà que A_n et \bar{H}_n sont strictement positif si $x > \sqrt{2n}$. L'objectif maintenant est de déterminer le signe de A'_n sur cet intervalle afin de donner une borne au point y_n qui réalise le maximum de la fonction A_n . Le résultat est énoncé dans le lemme suivant :

Lemme 7.5.7. $\forall n \in \mathbb{N}$, $A'_n(x) < 0$ si $x > \sqrt{2(n+1)/\alpha}$

Démonstration. On va montrer par récurrence que pour tout $x > \sqrt{2(n+1)/\alpha}$,

$$(2-\alpha)x\bar{H}_n(x) - \bar{H}_{n+1}(x) < 0.$$

- Au rang 1, $(2-\alpha)x(2x) - (4x^2 - 2) < 0$ si $x > \sqrt{4/\alpha}$
- Supposons la propriété vérifiée au rang n , alors

$$\begin{aligned} (2-\alpha)x\bar{H}_{n+1}(x) - \bar{H}_{n+2}(x) &= 2(n+1)\bar{H}_n(x) - \alpha x\bar{H}_{n+1}(x) \\ &< \bar{H}_{n+1}(x) \left(\frac{2(n+1)}{(2-\alpha)x} - \alpha x \right) \\ &= \frac{\bar{H}_{n+1}(x)}{x} \left(\frac{2(n+1)}{2-\alpha} - \alpha x^2 \right) \end{aligned}$$

qui est négatif dès que $x \geq \sqrt{\frac{2(n+1)}{\alpha(2-\alpha)}}$ donc en particulier dès que $x > \sqrt{\frac{2(n+1)}{\alpha}}$ car $0 < \alpha < 1$. \square

Ainsi, en utilisant (7.26) et le lemme 7.5.7, on conclut

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, |A_n(x)| &\leq |A_n(y_n)| \\ &= |E_n(y_n)| e^{\frac{y_n^2}{2}(1-\alpha)} \\ &< C e^{\frac{(n+1)(1-\alpha)}{\alpha}} < C' \left(e^{\frac{1}{\alpha}} \right)^n, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de la proposition 7.5.4.

Bibliographie

- [AS65] Abramowitz, M., Stegun, I. (1965). *Handbook of mathematical functions*. National Bureau of Standards, Washington DC. [46](#)
- [Adl81] Adler, R.J. (1981). *The geometry of random fields*. Siam. [18](#), [19](#), [41](#), [91](#)
- [AT07] Adler, R.J., Taylor, J.E. (2007). *Random fields and geometry*. Springer monographs in Mathematics, Springer, New York. [26](#), [53](#), [93](#)
- [AS92] Affentranger, F., Schneider, R. (1992). *Random projections of regular simplices*. Discrete and Computational Geometry, 7(1), 219-226. [34](#)
- [AC10] Albin, J.M.P., Choi, H. (2010). *A new proof of an old result by Pickands*. Electronic Communications in Probability, 15, 339-345. [26](#), [93](#)
- [Ald89] Aldous, D. (1989). *Probability Approximations via the Poisson Clumping Heuristic*. Springer. [94](#)
- [Alex30] Alexander, J.W. (1930). *The combinatorial theory of complexes*. Annals of Mathematics, 31(2), 292-320. [26](#)
- [ALMT13] Amelunxen, D., Lotz, M., McCoy, M.B., Tropp, J.A. (2013). *Living on the edge : A geometric theory of phase transitions in convex optimisation*. arXiv 1303.6672. [35](#)
- [And55] Anderson, T. W. (1955). *The integral of a symmetric unimodal function over a symmetric convex set and some probability inequalities*. Proceedings of the American Mathematical Society, 6(2), 170-176. [44](#), [59](#), [76](#)
- [ABA13] Auffinger, A., Ben Arous, G. (2013). *Complexity of random smooth functions on the high-dimensional sphere*. Annals of Probability, 41(6), 4212-4247. [37](#)
- [AdCG15] Azaïs, J.-M., De Castro, Y., Gamboa, F. (2015). *Spike detection from inaccurate samplings*. Applied and Computational Harmonic Analysis, 38(2), 177-195. [77](#)
- [AdCM15a] Azaïs, J.-M., De Castro, Y., Mourareau, S. (2015). *A Rice method proof of the Null Space Property over the Grassmannian*. arXiv 1405.6417v3. [53](#)
- [AdCM15b] Azaïs, J.-M., De Castro, Y., Mourareau, S. (2015). *Power of the spacing test for least-angle regression*. arXiv 1503.5093v4. [80](#), [81](#), [82](#), [85](#)
- [AD02] Azaïs, J. M., Delmas, C. (2002). *Asymptotic expansions for the distribution of the maximum of Gaussian random fields*. Extremes, 5(2), 181-212. [93](#)
- [AG13] Azaïs, J.-M., Genz, A. (2013). *Computation of the distribution of the maximum of stationary gaussian processes*. Methodology and Computing in Applied Probability, 15(4), 969-985. [24](#), [72](#), [91](#), [92](#), [95](#), [96](#)
- [ALC13] Azaïs, J.-M., Lozada-Chang, L.-V. (2013) *A toolbox on the distribution of the maximum of Gaussian process*. HAL-00784874. [91](#)
- [AW05] Azaïs, J.M., Wschebor, M. (2005). *On the distribution of the maximum of a Gaussian field with d parameters*. Annals of Applied Probability, 15(1A), 254-278. [19](#), [37](#)

- [AW09] Azais, J.M., Wschebor, M. (2009). *Level sets and extrema of random processes and fields*. John Wiley & Sons. 19, 25, 37, 51, 52, 53, 63, 70, 93, 107, 110
- [AW08] Azais, J.M., Wschebor, M. (2008). *A general expression for the distribution of the maximum of a Gaussian field and the approximation of the tail*. Stochastic Processes and their Applications, 118(7), 1190-1218. 86
- [BDF14] Bendory, T., Dekel, S., Feuer, A. (2014). *Robust recovery of stream of pulses using convex optimization*. arXiv 1412.3262. 77
- [BY05] Benjamini, Y., Yekutieli, D. (2005). *False discovery rate-adjusted multiple confidence intervals for selected parameters*. Journal of the American Statistical Association, 100, 71-81. 15
- [BLPR11] Bertin, K., Le Pennec, E., Rivoirard, V. (2011). *Adaptive dantzig density estimation*. Annales de l'IHP, Probabilités et Statistiques, 47(1), 43-74. 57
- [Bal13] Berk, R., Brown, L., Buja, A., Zhang, K., Zhao, L. (2013). *Valid post-selection inference*. Annals of Statistics, 41, 802-837. 11, 15
- [BRT09] Bickel, P.J., Ritov, Y., Tsybakov, A.B. (2009). *Simultaneous analysis of lasso and Dantzig selector*. Annals of Statistics, 37(4), 1705-1732. 6, 9, 32, 57
- [BCT11] Blanchard, J.D., Cartis, C., Tanner, J. (2011). *Compressed Sensing : How sharp is the Restricted Isometry Property ?* SIAM review, 53(1), 105-125. 49, 50
- [BP13] Bredies, K., Pikkarainen, H.K. (2013). *Inverse problems in spaces of measures*. ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations, 19(01), 190-218. 77
- [BM13] Bühlmann, P., Mandozzi, J. (2013). *High-dimensional variable screening and bias in subsequent inference, with an empirical comparison*. Computational Statistics, 29(3), 407-430. 11
- [BMvdG14] Bühlmann, P., Meier, L., Van de Geer, S.A. (2014). *Discussion : "A significance test for the lasso"*. Annals of Statistics, 42(2), 469-477. 62
- [BvdG11] Bühlmann, P., Van de Geer, S.A. (2011). *Statistics for high-dimensional data : Methods, theory and applications*. Springer. 57
- [BTW07] Bunea, F., Tsybakov, A.B., Wegkamp, M.H. (2007). *Aggregation for Gaussian regression*. Annals of Statistics, 35(4), 1674-1697. 9
- [CFG14] Candès, E.J., Fernandez-Granda, C. (2014). *Towards mathematical theory of super-resolution*. Communication on Pure and Applied Mathematics, 67(6), 906-956. 77
- [CP09] Candès, E. J., Plan, Y. (2009). *Near ideal model selection by ℓ_1 minimization*. Annals of Statistics, 37(5), 2145-2177. 8
- [CRT06a] Candès, E.J., Romberg, J., Tao, T. (2006). *Robust uncertainty principles : exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information*. IEEE Transactions on Information Theory, 52(2), 489-509. 31
- [CRT06b] Candès, E.J., Romberg, J., Tao, T. (2006). *Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements*. Communication on Pure and Applied Mathematics, 59(8), 1207-1223. 5
- [CT05] Candès, E.J., Tao, T. (2005). *Decoding by linear programming*. IEEE Transactions on Information Theory, 51(12), 4203-4215. 31, 49
- [CT06] Candès, E.J., Tao, T. (2006). *Near-optimal signal recovery from random projections : universal encoding strategies ?* IEEE Transactions on Information Theory, 52(12), 5406-5425. 57
- [CT07] Candès, E.J., Tao, T. (2007). *The Dantzig selector : statistical estimation when p is much larger than n* . Annals of Statistics, 35(6), 2313-2351. 32, 57

- [Cal12] Chafaï, D., Guédon, O., Lecué, G., Pajor, A. (2012). *Interaction between Compressed Sensing, Random matrices and High dimensional geometry*. Panorama et synthèses, 37, Société Mathématiques de France. [31](#), [32](#), [36](#)
- [CDS98] Chen, S.S., Donoho, D.L., Saunders, M.A. (1998). *Atomic decomposition by basis pursuit*. SIAM Journal on Scientific Computing, 20(1), 33-61. [4](#), [31](#), [57](#)
- [CTT14] Choi, Y., Taylor, J.E., Tibshirani, R. (2014). *Selecting the number of principal components : estimation of the true rank of a noisy matrix*. arXiv 1410.8260. [20](#), [81](#)
- [CDD09] Cohen, A., Dahmen, W., DeVore, R. (2009). *Compressed sensing and best k-term approximation*. Journal of the American Mathematical Society, 22(1), 211-231. [4](#), [31](#), [32](#)
- [Cal96] Coreless, R.M., Gonnet, G.H., Hare, D., Jeffrey, D.J., Knuth, D.E. (1996). *On the lambertw function*. Advances in Computational mathematics, 5(1), 329-359. [36](#)
- [CW03] Cucker, F., Wschebor, M. (2003). *On the expected condition number of linear programming problems*. Numerische Mathematik, 94(3), 419-478. [37](#)
- [Dav94] Davis, G. (1994). *Adaptive nonlinear approximations*. PhD thesis, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York. [4](#)
- [dC13] De Castro, Y. (2013). *A remark on the lasso and the dantzig selector*. Statistics and Probability Letters, 83(1), 304-314. [32](#), [57](#)
- [dCG12] De Castro, Y., Gamboa, F. (2012). *Exact reconstruction using beurling minimal extrapolation*. Journal of Mathematical Analysis and applications, 395(1), 336-354. [77](#)
- [Del03] Delmas, C. (2001). *On likelihood ratio test in Gaussian mixture models*. Sankhya, 65(3), 513-531. [97](#)
- [DY14] Dieker, A.B., Yakir, B. (2014). *On asymptotic constants in the theory of extremes for Gaussian processes*. Bernoulli, 20(3), 1600-1619. [26](#), [93](#)
- [Don06a] Donoho, D.L. (2006). *Compressed sensing*. IEEE Transactions on Information Theory, 52(4), 1289-1306. [31](#)
- [Don06b] Donoho, D.L. (2006). *High-dimensional centrally symmetric polytopes with neighborliness proportional to dimension*. Discrete and Computational Geometry, 35(4), 617-652. [6](#), [33](#), [35](#), [36](#)
- [DT05] Donoho, D.L., Tanner, J. (2005). *Neighborliness of randomly projected simplices in high dimensions*. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 102(27), 9452-9457. [6](#), [32](#), [33](#), [35](#), [36](#)
- [DT09a] Donoho, D.L., Tanner, J. (2009). *Counting faces of randomly projected polytopes when the projection radically lowers dimension*. Journal of the American Mathematical Society, 22(1), 1-53. [6](#), [33](#), [35](#), [36](#)
- [DT09b] Donoho, D.L., Tanner, J. (2009). *Observed universality of phase transitions in high-dimensional geometry, with implications for modern data analysis and signal processing*. Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 367(1906), 4273-4293. [6](#), [33](#), [35](#), [36](#)
- [DP15] Duval, V., Peyré, G. (2015). *Exact support recovery for sparse spikes deconvolution*. Foundations of Computational Mathematics, 1-41. [77](#)
- [Ede88] Edelman, A. (1988). *Eigenvalues and condition numbers of random matrices*. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 9(4), 543 - 560. [50](#)
- [Eal04] Efron, B., Hastie, T., Johnstone, I., Tibshirani, R. (2004). *Least angle regression*. Annals of Statistics, 32(2), 407-499. With discussion and a rejoinder by the authors. MR2060166. [8](#), [10](#), [57](#), [58](#)

- [FG13] Fernandez-Granda, C. (2013). *Support detection in super-resolution*. arXiv 1302.3921. [77](#)
- [FHH07] Friedman, J., Hastie, T., Höfling, H., Tibshirani, R. et al. (2007). *Pathwise coordinate optimization*. The Annals of Applied Statistics, 1(2), 302-332.
- [FR13] Foucart, S. Rauhut, H. (2013). *A mathematical introduction to compressive sensing*. Springer. [32](#), [35](#)
- [Fuc05] Fuchus, J.-J. (2005). *Recovery of exact sparse representations in the presence of bounded noise*. IEEE Transactions on Information Theory, 51(10), 3601-3608. [8](#), [57](#)
- [Gen92] Genz, A. (1992). *Numerical computation of multivariate normal probabilities*. Journal of computational and graphical statistics, 1(2), 141-149. [72](#), [91](#)
- [Har14] Harper, A.J. (2014). *Pickands' constant H_α does not equal $1/\Gamma(1/\alpha)$ for small α* . arXiv :1404.5505. [26](#), [93](#)
- [HTF09] Hastie, T., Tibshirani, R., Friedman, J. (2009). *The elements of statistical learning, vol 2*. Springer. [57](#)
- [HTW15] Hastie, T., Tibshirani, R., Wainwright, M. (2015). *Statistical learning with sparsity : The lasso and generalizations*. CRC Press. [iii](#), [57](#), [62](#), [63](#)
- [HR48] Hoeffding, W., Robbins, H. (1948). *The central limit theorem for dependent random variables*. Duke Mathematical Journal, 15, 773-780. [108](#)
- [HK70] Hoerl, A.E., Kennard, R.W. (1970). *Ridge regression : Biased estimation for nonorthogonal problems*. Technometrics, 12(1), 55-67. [7](#)
- [JN11] Juditsky, A., Nemirovski, A. (2011). *Accuracy guarantees for recovery*. IEEE Transactions on Information Theory, 57(12), 7818-7839. [32](#), [57](#)
- [Kar39] Karush, W. (1939). *Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Constraints*. PhD Dissertation, University of Chicago, Chicago, Illinois. [10](#), [14](#)
- [KT51] Kuhn, H.W., Tucker, A.W. (1951). *Nonlinear programming*. Proceedings of 2nd Berkeley Symposium, University of California Press, 481-492. [10](#), [14](#)
- [KL97] Kratz, M.F., León, J.R. (1997). *Hermite polynomial expansion for nonsmooth functionals of stationary Gaussian processes : Crossings and extremes*. Stochastic Processes and their Applications, 66, 237-252. [28](#), [106](#), [117](#)
- [LLR89] Leadbetter, M.R., Lindgren, G., Rootzén, H. (1989). *Extremes and related properties of random sequences and processes*. Springer-Verlag, New York. [26](#), [93](#)
- [LM14] Lecué, G., Mendelson, S. (2014) *Sparse recovery under weak moment assumptions*. arXiv 1401.2188. [35](#), [36](#)
- [LSST13] Lee, J.D., Sun, D.L., Sun, Y., Taylor, J.E. (2015). *Exact post-selection inference with application to the lasso*. arXiv 1311.6238. [iii](#), [11](#), [13](#), [16](#), [57](#), [62](#)
- [LR05] Lehmann, E.L., Romano, J.P. (2005). *Testing Statistical Hypotheses*. 3rd ed. Springer. [16](#)
- [Lif83] Lifshits, M.A. (1983). *On the absolute continuity of distributions of functionals of random processes*. Theory of Probability and its Applications, 27, 600-607 (in English), 559-566 (in Russian). [87](#)
- [LTTT14a] Lockhart, R., Taylor, J.E., Tibshirani, R., Tibshirani, R.J. (2014). *A significance test for the lasso*. Annals of Statistics, 42(2), 413-468. [10](#), [11](#), [57](#), [62](#)
- [LTTT14b] Lockhart, R., Taylor, J.E., Tibshirani, R., Tibshirani, R.J. (2014). *Correction to rejoinder to "a significance test for the lasso"*. Annals of Statistics, 42(5), 2138-2139. [62](#)
- [LTTT14c] Lockhart, R., Taylor, J.E., Tibshirani, R., Tibshirani, R.J. (2014). *Rejoinder : "a significance test for the lasso"*. Annals of Statistics, 42(2), 518-531. [62](#)

- [LT15] Loftus, J., Taylor, J.E. (2015). *Selective inference in regression models with groups of variables*. arXiv 1511.01478. [21](#), [81](#)
- [MCT12] McCoy, M.B., Tropp, J.A. (2012). *Sharp recovery bounds for convex deconvolution, with applications*. arXiv 1205.1580. [35](#)
- [Mer05] Mercadier, C. (2005). *MAGP toolbox*. <http://math.univ-lyon1.fr/~mercadier/>. [24](#), [25](#)
- [Mer06] Mercadier, C. (2006). *Numerical bounds for the distribution of the maximum of one- and two-dimensional processes*. *Advances in Applied Probability*, 38(1), 149-170. [25](#), [91](#), [95](#)
- [Mou15a] Mourareau, S. (2015). <http://www.math.univ-toulouse.fr/~smourare/Software.html>. [36](#)
- [Mou15b] Mourareau, S. (2015). http://www.math.univ-toulouse.fr/~smourare/power_test.m. [72](#)
- [Mur83] Murty, K.G. (1983). *Linear programming*. John Wiley and Sons, New York. [4](#)
- [Nat95] Natarajan, B.K. (1995). *Sparse approximate solutions to linear systems*. *SIAM Journal on Computing*, 24(2), 227-234. [4](#)
- [NC06] Nuyens, D., Cools, R. (2006). *Fast algorithms for component-by-component construction of rank-1 lattice rules in shift invariant reproducing kernel hilbert spaces*. *Mathematics of Computation*, 75(254), 903-920. [72](#)
- [Oal00] Osborne, M., Presnell, B., Turlach, B. (2000). *On the lasso and its dual*. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 9(2), 319-337. [8](#)
- [Pic69] Pickands, J. III. (1969). *Asymptotic properties of the maximum in a stationary Gaussian process*. *Transactions of the American Mathematical Society*, 145, 75-86. [26](#), [91](#), [92](#)
- [Pit81] Piterbarg, V. (1981). *Comparison of distribution functions of maxima of gaussian processes*. *Teoriya Veroyatnostei i ee Primeneniya*, 26(4), 702-719. [37](#)
- [Pit96] Piterbarg, V.I. (1996). *Asymptotic methods in the theory of Gaussian processes and fields*. *Translations of Mathematical Monographs* 148, AMS, Providence. [92](#)
- [Ric44] Rice, S.O. (1944, 1945). *Mathematical analysis of random noise*. *Bell System Technical Journal*, 23, 282-332 ; 24, 45-156. [91](#)
- [Roz61] Rozanov, Y.A. (1961). *Some limit theorems for random functions II*. *Teoriya Veroyatnostei i ee Primeneniya*, 4, 186-207. [27](#), [105](#)
- [RV08] Rudelson, M., Vershynin, R. (2008). *On sparse reconstruction from fourier and gaussian measurements*. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 61(8), 1025-1045. [35](#)
- [Sto09] Stojnic, M. (2009). *Various thresholds for \downarrow_1 -optimization in compress sensing*. arXiv 0907.3666. [35](#)
- [Sto13] Stojnic, M. (2013). *A rigorous geometry-probability equivalence in characterization of \downarrow_1 -optimization*. arXiv 1303.7287. [35](#)
- [Sto03] Storey, J.D. (2003). *The positive false discovery rate : A bayesian interpretation and the q-value*. *Annals of statistics*, 2013-2035. [15](#)
- [Sze39] Szegő, G. (1939). *Orthogonal polynomials*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXIII. American Mathematical Society, New York. [120](#)
- [Tal13] Tang, G., Bhaskar, B.N., Shah, P., Recht, B. (2013). *Compressed sensing off the grid*. *IEEE Transactions on Information Theory*, 59(11), 7465-7490. [77](#)
- [TLT14] Taylor, J., Loftus, J., Tibshirani, R.J. (2014). *Test in adaptive regression via the kac-rice formula*. arXiv 1308.3020v3. [18](#), [57](#), [58](#), [59](#), [62](#), [79](#)

- [TLTT14] Taylor, J.E., Lockhart, R., Tibshirani, R.J., Tibshirani, R. (2014). *Exact post-selection inference for forward stepwise and least angle regression*. arXiv 1401.3889. [14](#), [57](#), [58](#), [62](#)
- [Tib96] Tibshirani, R. (1996). *Regression shrinkage and selection via the lasso*. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 58(1), 267-288. [8](#), [32](#), [57](#)
- [Tib13] Tibshirani, R.J. (2013). *The lasso problem and uniqueness*. Electronic Journal of Statistics, 7, 1456-1490. [8](#)
- [Tsi76] Tsirel'son, V.S. (1976). *The density of the distribution of the maximum of a Gaussian process*. Theory of Probability and Its Applications, 20(4), 847-856. [87](#)
- [VdG08] Van de Geer, S.A. (2008). *High-dimensional generalized linear models and the lasso*. Annals of Statistics, 36(2), 614-645. [9](#)
- [VdGB09] Van de Geer, S.A., Bühlmann, P. (2009). *On the conditions used to prove oracle results for the lasso*. Electronic Journal of Statistics, 3, 1360-1392. [32](#), [57](#)
- [VdGBR13] Van de Geer, S., Bühlmann, P., Ritov, Y. (2013). *On asymptotically optimal confidence regions and tests for high-dimensional models*. arXiv :1303.0518. [11](#)
- [VS92] Vershik, A.M., Sporyshev, P.V. (1992). *Asymptotic behavior of the number of faces of random polyhedra and the neighborliness problem*. Selecta Mathematica Soviet, 11(2), 181-201. [34](#)
- [Vol59] Volkonskii, V.A. (1959). *Some limit theorems for random functions I*. Teoria Veroyatnostei ee Primeneniya, 6, 202-215. [27](#), [105](#)
- [Wai09] Wainwright, M. J. (2009). *Sharp thresholds for high-dimensional and noisy sparsity recovery using ℓ_1 -constrained quadratic programming (lasso)*. IEEE Transactions on Information Theory, 55(5), 2183-2202. [8](#)
- [XH08] Xu, W., Hassibi, B. (2008). *Compressed sensing over the grassmann manifold : A unified analytical framework*. IEEE Communication, 2008 46th Annual Allerton Conference on Control and Computing, 562-567. [35](#)
- [XH11] Xu, W., Hassibi, B. (2011). *Precise stability phase transitions for minimization : A unified geometric framework*. IEEE Transactions on Information Theory, 57(10), 6894-6919. [35](#)
- [Ylv68] Ylvisaker, D. (1968). *A note on the absence of tangencies in Gaussian sample paths*. Annals of Mathematical Statistics, 39, 261-262. [23](#)
- [ZH08] Zhang, C.-H, Huang, J. (2008). *The sparsity and bias of the lasso selection in high-dimensional linear regression*. Annals of Statistics, 36(4), 1567-1594. [9](#)
- [ZZ14] Zhang, C.-H., Zhang, S. (2014). *Confidence intervals for low dimensional parameters in high dimensional linear models*. Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Statistical Methodology), 76, 217-242. [11](#)

Gaussian geometry and tools for Compressed Sensing

Auteur : Stéphane Mourareau

Directeur de thèse : Jean-Marc Azais

Date et Lieu de soutenance : le 24/06/16 à l'Institut de Mathématiques de Toulouse

Discipline : Mathématiques appliquées

RÉSUMÉ

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de l'analyse statistique en grande dimension. Plus précisément, l'objet de cette thèse est d'étudier la possible application d'outils issus de la théorie des processus Gaussiens afin de redémontrer certaines propriétés des matrices à entrées Gaussiennes et d'étendre certaines procédures de test du modèle linéaire Gaussien standard.

Dans la première partie, nous nous concentrons sur les matrices Gaussiennes. Notre objectif est de démontrer, via des formules du type Kac-Rice, qu'une telle matrice satisfait, avec très grande probabilité, la Null Space Property (NSP) et la Propriété d'Isométrie Restreinte (RIP). De plus, nous déduisons des transitions de phases dépendant des paramètres classiques de la régression parcimonieuse, à savoir le nombre d'observations, le nombre de prédicteurs et le degré de sparsité.

Dans la seconde partie, nous traitons le cas du test de nullité globale des paramètres pour le modèle linéaire Gaussien, afin de l'appliquer au cas de la sélection de modèle. Dans ces travaux, qui s'inscrivent dans la continuité de Taylor, Loftus et Tibshirani, nous proposons un test non conditionnel pour l'hypothèse de nullité globale dans le cadre du lasso et discutons autour de sa puissance. De plus, nous généralisons ces résultats aux processus Gaussiens, pour inclure, par exemple, la cas de la super-résolution.

Dans une troisième partie, nous présentons quelques applications de la formule de Rice visant à calculer la fonction de répartition du maximum d'un processus Gaussien afin d'en déduire une version numériquement implémentable. Dans un deuxième temps, nous discutons de l'efficacité ou non de certaines approximations classiques pour la fonction de répartition du maximum. Enfin, nous étudions le comportement asymptotique du nombre de franchissements d'un niveau donné u sur un intervalle de temps $[0, T]$ pour un processus Gaussien dérivable.

ABSTRACT

This thesis falls within the context of high-dimensional data analysis. More specifically, the purpose is to study the possible application of some Gaussian tools to prove classical results on matrices with Gaussian entries and to extend existing test procedures for Gaussian linear models.

In a first part, we focus on Gaussian matrices. Our aim is to prove, using a Kac-Rice formula on Gaussian processes, that such a matrix satisfies, with overwhelming probability, the Null Space Property (NSP) and the Restricted Isometry Property (RIP). Moreover, we derive phase transition graphs depending on the classical parameters of sparse regression, namely the number of observations, the number of predictors and the level of sparsity.

In a second part, we deal with global null testing for Gaussian linear models, with application to Compressed Sensing. Following recent works of Taylor, Loftus and Tibshirani, we propose a test for global null hypothesis in the lasso case and discuss about its power. Furthermore, we generalize these methods to Gaussian processes, to include, for instance, the super-resolution case.

In a third part, we present some applications of Rice formula to compute the cumulative distribution function of the maximum of a Gaussian process and derive corresponding numerical routines to investigate the efficiency of classical approximations. Finally, we consider the asymptotic behavior of the number of crossings of a differentiable Gaussian process for a given level u and time interval $[0, T]$.