ESTIMASI KOMPONEN VARIAN PADA RANCANGAN ACAK KELOMPOK DENGAN MODIFIKASI HARTLEY-ROU

Lismayani Usman[1], Raupong[2], Andi Kresna Jaya[3]
Program studi Statistika, Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Hasanuddin
lismayani.usman@gmail.com

ABSTRAK

Keragaman merupakan besaran statistika yang menunjukkan seberapa jauh persebaran nilai observasi terhadap nilai rata-ratanya. Dalam rancangan percobaan, keragaman yang timbul dari pengaruh perlakuan, kelompok dan galat percobaan dapat diestimasi dari variansi galat yang biasa disebut sebagai komponen varian. Metode etimasi komponen varian yang dapat digunakan adalah metode analisis varians, metode maksimum likelihood, dan metode REML. Pada penelitian ini digunakan metode maksimum likelihood untuk mengestimasi komponen varian pada rancangan acak kelompok model campuran dengan perlakuan bersifat tetap dan kelompok bersifat acak. Karena kesulitan mengestimasi komponen varian pada model campuran, maka diterapkan modifikasi Hartley-Rou pada metode maksimum likelihood yang dilanjutkan dengan metode iterasi Newton Raphson. Setelah memperoleh estimasi komponen varian, dapat dihitung Kuadrat Tengah pada perlakuan sehingga diperoleh nilai *F-Hitung* untuk pengujian hipotesis. Hasil penelitian pada data berat kering tanaman cabai rawit menunjukkan bahwa terdapat perbedaan pengaruh nyata pemberian dosis pupuk organik Granul dan terdapat keragaman antar kelompoknya.

Kata Kunci: Komponen Varian, RAK, Metode Maksimum Likelihood, Model Campuran, Hartley-Rou

ABSTRACT

Variance is the amount of statistics which measures how far a set of numbers in observation are spread out from their mean. In experimental design, variance which are caused by the effect of treatment, block and error of experimental can be estimated by variability of error that commonly referred to variance component. Methods that can be used to estimate variance components are analysis of variance method, maximum likelihood method, and REML method. This study will address the usage of maximum likelihood method to estimate the variance components in Randomized Block Design mixed model which treatment are fixed and block are random. Since it is complicated to estimate variance component in mixed model, then the modification of Hartley-Rou is applied in maximum likelihood estimation and it will be continued by Newton Raphson method. After the variance component estimators are obtained, then the mean square of treatment can be calculated so the value of F can be known for test the hypothesis. The results of this study for cayenne pepper plant dry weight's data showed that there is the significant effect in dosing the organic fertilizer Granul and a variety in their interblock.

Keywords: Variance Component, RAK, Maximum Likelihood Method, Mixed Model, Hartley-Rou

1. PENDAHULUAN

Pada rancangan acak kelompok, unit percobaan dikelompokkan dalam kelompok yang homogen dan diberikan perlakuan secara acak pada masing-masing kelompok. Proses pengelompokan bertujuan untuk membuat keragaman unit-unit percobaan dalam kelompok menjadi sekecil mungkin sedangkan keragaman antar kelompok menjadi sebesar mungkin.Keragaman atau variansi merupakan besaran statistika yang menunjukkan ukuran penyebaran dari suatu data. Dalam rancangan percobaan, untuk mengetahui keragaman dari pengaruh perlakuan, pengaruh kelompok dan pengaruh galat percobaan dapat diestimasi dari variansi galat yang disebut sebagai komponen varian.

Terdapat beberapa metode yang dapat digunakan dalam mengestimasi komponen varian, yaitu diantaranya Analisis Variansi (ANAVA), metode Maksimum Likelihood (MLE) dan metode *Restricted Maximum Likelihood* (REML). Dalam kajian ini, penulis akan menggunakan metode maksimum likelihood dalam mengestimasi komponen varian pada rancangan acak kelompok model campuran karena ingin diketahui keragaman untuk pengaruh tetap maupun acak. Penerapan metode estimasi maksimum likelihood dari komponen varian pada model campuran telah dibahas oleh Hartley dan Rou (1967). Meskipun metode Hartley dan Rou masih memerlukan usaha komputasi numerik, namun hasil estimasi komponen varian yang diperoleh selalu bernilai nonnegatif sehingga penulis tertarik untuk menerapkan bentuk Hartley-Rou dalam proses estimasi komponen varian pada rancangan acak kelompok.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Rancangan Acak Kelompok

Rancangan acak kelompok (RAK) merupakan salah satu bentuk rancangan yang telah digunakan secara meluas dalam berbagai bidang. Rancangan ini dicirikan oleh adanya kelompok dalam jumlah yang sama. Melalui pengelompokan yang tepat atau efektif, maka rancangan ini dapat mengurangi galat percobaan. Disamping itu, rancangan ini juga fleksibel dan sederhana.

Model linier untuk percobaan dengan menggunakan rancangan acak kelompok (RAK) adalah sebagai berikut :

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + e_{ij} \quad ; \quad i = 1,2,\dots,p \ ; \ j = 1,2,\dots,k \qquad (2.1)$$

dengan y_{ij} adalah nilai pengamatan pada perlakuan ke-i dan kelompok ke-j; μ adalah rataan umum; τ_i adalah pengaruh aditif dari perlakuan ke-i; β_j adalah pengaruh aditif dari kelompok ke-j dan e_{ij} adalah pengaruh galat percobaan pada perlakuan ke-i dan kelompok ke-j .

Asumsi untuk model tetap yang digunakan pada RAK adalah sebagai berikut :

$$E(\tau_i) = \tau_i; \quad E\left(\beta_j\right) = \beta_j; \quad \sum_{i=1}^{p} \tau_i = 0; \quad e_{ij} \sim NI(0, \sigma^2); \quad \sum_{j=1}^{k} \beta_j = 0$$

Hipotesis yang akan diuji adalah :

$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_p = 0$ dan H_1 : Minimal ada satu $\tau_i \neq 0$ untuk $i = 1,2,\cdots,p$

Hipotesis dirumuskan untuk menguji bahwa tidak ada perbedaan pengaruh perlakuan terhadap respon yang diamati. Jika model acak yang digunakan, maka asumsi yang diperlukan adalah $\alpha_i \sim N(0, \sigma_\tau{}^2)$, $\beta_j \sim N(0, \sigma_\beta{}^2)$, dan $e_{ij} \sim N(0, \sigma_e{}^2)$.

Adapun hipotesis yang diperlu dirumuskan untuk model acak adalah :

$H_0 : \sigma_\beta{}^2 = 0$ dan $H_1 : \sigma_\beta{}^2 > 0$ (Gaspersz, 1991)

2.2 Uji Asumsi Rancangan

1. Galat berdistribusi normal

Uji normalitas digunakan untuk melihat apakah data menyebar normal atau tidak. Kenormalan data dapat ditentukan dengan menggunakan *probability plot normal*, dengan melihat titik-titik dugaan galat jika mengikuti garis diagonal berarti galat berdistribusi normal. Asumsi normalitas juga dapat diuji dengan menggunakan uji Liliefors.

2. Variansi galat homogen

Asumsi homogenitas mensyaratkan bahwa distribusi residu untuk masing-masing kelompok harus memiliki ragam yang sama. Uji formal yang dapat digunakan untuk memeriksa asumsi kehomogenan adalah uji Bartlett (Montgomery,2001).

3. Galat percobaan saling bebas

Kebebasan galat percobaan diartikan sebagai tidak ada korelasi antar galat. Pengujian asumsi kebebasan antar galat percobaan dilakukan dengan cara membuat plot antara nilai sisaan dengan nilai dugaan pengamatan. Apabila grafik yang terbentuk berfluktuasi secara acak di sekitar nol, maka dapat dikatakan bahwa galat percobaan saling bebas (Karsanti, 2014).

2.3 Struktur Data Pengamatan dan Analisis Variansi

Tabel 2.1 Tabulasi data pengamatan rancangan acak kelompok yang terdiri dari dari *p* perlakuan dan *k* kelompok

Perlakuan	Kelompok				Total
	1	2	$\cdots$	k	
1 2 $\vdots$ p	y_{11} y_{21} $\vdots$ y_{p1}	y_{12} y_{22} $\vdots$ y_{p2}	$\cdots$ $\cdots$ $\cdots$ $\cdots$	y_{1k} y_{2k} $\vdots$ y_{pk}	$y_{1.}$ $y_{2.}$ $\vdots$ $y_{p.}$
Total	$y_{.1}$	$y_{.2}$	$\cdots$	$y_{.k}$	$y_{..}$

Berikut adalah struktur tabel anava untuk rancangan acak kelompok (Gazper, 1991) :

Tabel 2.2 Struktur tabel ANAVA pada rancangan acak kelompok

Sumber Keragaman	db	JK	KT	F_{Hitung}
Perlakuan	$p-1$	JKP	KTP	$\frac{KTP}{KTG}$
Kelompok	$k-1$	JKK	KTK	
Galat	$(p-1)(k-1)$	JKG	KTG	
Total	$pk-1$	JKT		

Adapun nilai taksiran untuk komponen varian pada rancangan acak kelompok model campuran dengan perlakuan bersifat tetap dan kelompok bersifat acak yaitu sebagai berikut (Searle dkk, 2006) :

$$\tilde{\sigma}_e{}^2 = \left(1 - \frac{p-1}{k\,(p-1)}\right) . KTG \tag{2.13}$$

$$\tilde{\sigma}_\beta{}^2 = \frac{JKK/k - \tilde{\sigma}_e{}^2}{p} \tag{2.14}$$

2.4 Persamaan Regresi Model Rancangan Acak Kelompok

Bentuk persamaan (2.1) dapat ditulis :

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{1}\mu + Z_1\boldsymbol{\tau} + Z_2\boldsymbol{\beta} + Z_0\boldsymbol{e} \tag{2.15}$$

μ adalah rataan umum yaitu rataan untuk keseluruhan data pengamatan, $\boldsymbol{Z}_0$ adalah matriks identitas yang berukuran $pk \times pk$, Z_i $(i = 1$ dan $2)$ adalah matriks indikator yang berhubungan dengan komponen varian ke-i , $\boldsymbol{e}$ adalah vektor galat yang berukuran $(pk \times 1)$, sedangkan $\boldsymbol{\tau}$ adalah vektor efek tetap dan $\boldsymbol{\beta}$ adalah vektor efek acak yang terkait dengan komponen varian ke-i.

Dengan demikian, persamaan (2.15) dapat ditulis:

$$\boldsymbol{y} = (1_p \otimes 1_k)\mu + (I_p \otimes 1_k)\boldsymbol{\tau} + (1_p \otimes I_k)\boldsymbol{\beta} + (I_p \otimes I_k)\boldsymbol{e} \qquad (2.16)$$

dengan 1_p adalah matriks yang setiap elemennya adalah 1 berukuran $p \times 1$; I_p adalah matriks identitas berukuran $p \times p$; $1_p \otimes 1_k = 1$ adalah matriks dengan ukuran $pk \times 1$; $Z_0 = I_p \otimes I_k$ adalah matriks dengan ukuran $pk \times pk$; $Z_1 = I_p \otimes 1_k$ adalah matriks dengan ukuran $pk \times p$ dan $Z_2 = 1_p \otimes I_k$ adalah matriks dengan ukuran $pk \times k$

2.5 Prosedur Estimasi Hartley-Rou

Menurut Sahai dan Ojeda (2005), model linear dari model campuran dirumuskan sebagai berikut :

$$\boldsymbol{y} = X\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{Z_1 u_I} + \boldsymbol{Z_2 u_2} + \cdots + \boldsymbol{Z_c u_c} + \boldsymbol{e} \qquad (2.17)$$

dengan $\boldsymbol{y}$ adalah vektor respon perlakuan berukuran $n \times 1$; X adalah matriks berukuran $n \times q$; $\boldsymbol{\delta}$ adalah vektor dari parameter efek tetap berukuran $q \times 1$; $\boldsymbol{Z_i}$ adalah matriks berukuran n x m_i ; $\boldsymbol{u}$ adalah vektor dari parameter efek acak berukuran $m_i \times 1$ dan $\boldsymbol{e}$ adalah vektor galat pengamatan berukuran $n \times 1$.

Sebagai konsekuensi dari persamaan (2.17), maka :

$$\boldsymbol{y} \sim N(\mu, V)$$

dimana

$$\mu = E(\boldsymbol{y}) = X\boldsymbol{\delta}$$

dan

$$V = Var(y) = {\sigma_i}^2 \boldsymbol{Z}_i \boldsymbol{Z}_i^t + {\sigma_e}^2 I = {\sigma_e}^2 \boldsymbol{H} \qquad (2.18)$$

dengan

$$\boldsymbol{H} = \gamma_i \boldsymbol{Z}_i \boldsymbol{Z}_i^t + I_n \quad ; \quad \gamma_i = \frac{{\sigma_i}^2}{{\sigma_e}^2} \qquad (2.19)$$

2.6 Metode Maksimum Likelihood

Misalkan $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ adalah peubah acak yang saling bebas dari populasi yang memiliki *pdf*, $f(y;\theta)$ dengan θ adalah parameter yang tidak diketahui yang merupakan parameter-parameter yang akan diduga, maka fungsi likelihoodnya adalah:

$$L(\theta) = L(\theta; y_1, y_2, \ldots, y_n) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i;\theta) \qquad (2.20)$$

Fungsi log-likelihood dapat ditulis dalam bentuk:

$$l = ln\ L(\theta) \qquad (2.21)$$

Untuk memaksimumkan fungsi log-likelihood, diperoleh dengan cara menurunkan fungsi log-likelihood terhadap θ kemudian disamakan dengan nol.

$$\frac{\partial}{\partial\theta} ln[L(\theta)] = 0 \qquad (2.22)$$

2.7 Metode Newthon Raphson

Metode Newton Raphson adalah salah satu metode untuk mencari akar-akar penyelesaian dari $f(\theta) = 0$ melalui perhitungan yang iteratif, sehingga lebih mudah jika dikerjakan dengan bantuan program komputer. Menurut Rao (1997), apabila langkah mengestimasi parameter menggunakan metode maksimum likelihood menghasilkan persamaan yang tidak eksplisit, maka untuk memperoleh nilai estimasi parameternya dapat digunakan metode Newton Raphson. Persamaan likelihood dengan parameter θ dapat diselesaikan dengan menggunakan rumus estimasi untuk parameter $\hat{\theta}$ pada iterasi ke - $(t+1)$ dalam proses iterasi yang dituliskan sebagai berikut :

$$\theta_{t+1} = \theta_t - \frac{f(\theta_t)}{f'(\theta_t)}, \qquad f'(\theta_t) \neq 0 \tag{2.23}$$

dengan θ_{t+1} adalah akar persamaan dari $f(\theta_t)$ iterasi ke-$(t+1)$; θ_t adalah akar persamaan dari $f(\theta_t)$ iterasi ke t dan $f'(\theta_t)$ adalah turunan dari $f(\theta_t)$.

Proses iterasi dengan menggunakan metode Newton Raphson sehingga didapatkan nilai $\hat{\theta}$ yang konvergen yaitu sampai nilai $\left|\frac{\hat{\theta}_{t+1} - \hat{\theta}_t}{\hat{\theta}_{t+1}}\right| < \delta$, dengan δ adalah toleransi galat yang diinginkan (Munir,2008).

3. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Sumber Data

Data yang digunakan pada tugas akhir ini merupakan data sekunder berupa data penelitian dari Ismayana (2014) mengenai pengaruh pemberian pupuk organik Granul terhadap respon berat kering tanaman cabai rawit. Penelitian ini dilakukan di Desa Blang Rakal Kabupaten Bener Meriah, Aceh pada tanggal 20 Desember sampai dengan tanggal 5 Februari 2013 menggunakan rancangan acak kelompok dengan 5 taraf perlakuan dan 5 kelompok.

3.2 Identifikasi Variabel

Adapun variabel yang digunakan sebagai berikut :

a. Variabel respon (Y)
   Variabel respon dalam penelitian ini adalah berat kering tanaman cabai rawit (gr).
b. Varibel bebas
   Varibel bebas yang digunakan yaitu dosis pemberian pupuk organik Granul yang diberikan per tanaman dengan 5 taraf perlakuan sebagai berikut :
   - P0 = 0 gr
   - P1 = 50 gr
   - P2 = 100 gr
   - P3 = 150 gr
   - P4 = 200 gr

3.3 Metode Analisis

Adapun langkah-langkah yang dilakukan yaitu sebagai berikut:

1. Pengambilan data sekunder
2. Melakukan uji asumsi rancangan percobaan.
   Dalam rancangan percobaan, galat diasumsikan berdistribusi normal sehingga data pengamatan juga diasumsikan berdistribusi normal. Pengujian asumsi varian galat homogen dengan uji *Bartlett* dan uji asumsi galat bersifat independen dapat dilakukan dengan menggunakan plot.

3. Membentuk model RAK dalam bentuk persamaan regresi dengan menggunakan perkalian kronecker.
4. Mengestimasi komponen-komponen varian:
   a. Menentukan struktur fungsi likelihood bentuk Hartley-Rou yang berdistribusi normal multivariat.
   b. Membentuk fungsi log likelihood
   c. Menurunkan fungsi log likelihood terhadap parameter (δ , ${\sigma_e}^2, \gamma$)
   d. Menyamakan dengan nol hasil penurunan fungsi log likelihood terhadap parameternya untuk mengestimasi komponen varian.
   e. Jika tidak diperoleh hasil yang eksplisit dari estimator, maka dilanjutkan dengan metode iterasi Newton Raphson.
5. Menghitung KTG
6. Menghitung F_{hitung}
7. Memberikan kesimpulan

4. PEMBAHASAN

4.1 Estimasi Komponen Varian Metode Maksimum Likelihood

Fungsi likelihood dengan asumsi berdistribusi normal multivariat dengan parameter $\boldsymbol{\delta}$ dan $\boldsymbol{H}{\boldsymbol{\sigma_e}}^{\boldsymbol{2}}$ untuk persamaan (2.17) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{H}{\boldsymbol{\sigma_e}}^{\boldsymbol{2}}; \boldsymbol{y}) = \frac{1}{(2\pi{\boldsymbol{\sigma_e}}^2)^{n/2}|\boldsymbol{H}|^{1/2}} exp\left[-\frac{(y-\boldsymbol{X\delta})^t\boldsymbol{H}^{-1}(y-\boldsymbol{X\delta})}{2{\boldsymbol{\sigma_e}}^2}\right] \tag{4.1}$$

Untuk memaksimumkan nilai fungsi $L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{H}{\boldsymbol{\sigma_e}}^{\boldsymbol{2}}; \boldsymbol{y})$ dapat diperoleh dengan cara memaksimumkan fungsi log-likelihoodnya. Misalkan l merupakan fungsi log-likelihood dari persamaan (4.1), maka:

$$l = \ln\left(L(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{H}{\boldsymbol{\sigma_e}}^{\boldsymbol{2}}; \boldsymbol{y})\right)$$
$$= -\frac{n}{2} ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln({\boldsymbol{\sigma_e}}^{\boldsymbol{2}}) - \frac{1}{2} ln|\boldsymbol{H}| - \frac{1}{2{\boldsymbol{\sigma_e}}^2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\delta})^t\boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\delta}) \tag{4.2}$$

Untuk memaksimumkan l, fungsi tersebut diturunkan terhadap parameter-parameternya $(\boldsymbol{\delta}, {\boldsymbol{\sigma_e}}^{\boldsymbol{2}}, \boldsymbol{\gamma})$ lalu disamakan dengan nol.

a) Turunan l terhadap $\boldsymbol{\delta}$

$$\boldsymbol{l_\delta} = \frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\delta}}$$
$$\boldsymbol{l_\delta} = -\frac{1}{2{\boldsymbol{\sigma_e}}^2}[-2\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\delta})]$$

Selanjutnya, hasil turunan fungsi disamakan dengan nol sehingga diperoleh :

$$\widehat{\boldsymbol{\delta}} = (\boldsymbol{X}^t\widehat{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^t\widehat{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{y} \tag{4.3}$$

b) Turunan l terhadap ${\boldsymbol{\sigma_e}}^{\boldsymbol{2}}$

$$\boldsymbol{l}_{{\sigma_e}^2} = \frac{\partial l}{\partial {\boldsymbol{\sigma_e}}^{\boldsymbol{2}}}$$
$$= -\frac{n}{2{\boldsymbol{\sigma_e}}^{\boldsymbol{2}}} + \frac{1}{2{\boldsymbol{\sigma_e}}^4}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\delta})^t\boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\delta})$$

Selanjutnya, hasil turunan fungsi disamakan dengan nol sehingga diperoleh :

$$\widehat{{\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{e}}^2} = \frac{1}{n}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\delta})^t\boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\delta}) \tag{4.4}$$

c) Turunan l terhadap γ_i

$$\boldsymbol{l}_{\gamma_i} = \frac{\partial l}{\partial \gamma_i}$$
$$= -\frac{1}{2}\, tr\left(\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{Z}_i{}^t\right) + \frac{1}{2\boldsymbol{\sigma_e}^2}\,(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\delta})^t\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{Z}_i{}^t\boldsymbol{H}^{-1}\,(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\delta})$$

Selanjutnya, hasil turunan fungsi disamakan dengan nol sehingga

$$\frac{1}{2}\, tr\left(\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{Z}_i{}^t\right) = \frac{1}{2\boldsymbol{\sigma_e}^2}\,(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\delta})^t\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{Z}_i{}^t\boldsymbol{H}^{-1}\,(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\delta}) \qquad (4.6)$$

Persamaan (4.6) tidak dapat diselesaikan secara analitik untuk mendapatkan hasil eksplisit untuk estimator γ_i. Namun, persamaan (4.6) dapat diselesaikan secara numerik dengan prosedur Newton-Raphson.

Adapun turunan parsial kedua dari fungsi Log-Likelihood l terhadap γ yang selanjutnya digunakan untuk prosedur iterasi Newton Raphson yaitu sebagai berikut:

$$\boldsymbol{l}_{\gamma_i\gamma_i} = \frac{\partial^2 l}{\partial\gamma_i\partial\gamma_i}$$
$$= \frac{1}{2}\, tr\left(\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{Z}_i{}^t\boldsymbol{H}^{-1}\,\boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{Z}_i{}^t\right) + \frac{1}{\boldsymbol{\sigma_e}^2}\,(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\delta})^t\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{Z}_i{}^t\boldsymbol{H}^{-1}\,\boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{Z}_i{}^t\boldsymbol{H}^{-1}\,(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\delta}) \qquad (4.7)$$

Selanjutnya dilakukan proses iterasi dilakukan untuk memperoleh nilai $\widehat{\gamma_i}$ yang konvergen berdasarkan persamaan (2.23) :

$$\widehat{\gamma_i}_{t+1} = \widehat{\gamma_i}_t - \frac{l_{\gamma_i}}{l_{\gamma_i\gamma_i}} \qquad (4.8)$$

4.2 Penerapan Pada Data

4.2.1 Data Pengaruh Pemberian Pupuk Organik Granul Terhadap Berat Kering Tanaman Cabai Rawit

Tabel 4.1 Data Pengamatan pengaruh dosis pemberian pupuk organik Granul terhadap berat kering tanaman cabai rawit

Perlakuan	**Kelompok**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
P0	2,3	3,2	4,3	3,4	4
P1	2,8	4,5	4	3,2	4,8
P2	3	4,8	6,9	7	8
P3	4,5	6,2	5	7,5	8,2
P4	5,2	6,9	5,12	8,15	9

Sumber : Ismayana, 2014

4.2.2 Pengujian Asumsi

1. Galat berdistribusi normal

Uji formal yang dapat digunakan untuk menguji apakah suatu data menyebar normal atau tidak adalah uji Liliefors. Dalam uji ini data disusun dari yang terkecil ke terbesar. Banyaknya pengamatan untuk data pada Tabel 4.1 adalah 25 pengamatan. Berdasarkan tabel bantu dari perhitungan uji Liliefors pada Lampiran 3 diperoleh nilai $L_0 = 0{,}156$. Karena nilai $L_0 = 0{,}156$ lebih kecil dari $L_{0,05(25)} = 0{,}173$, maka H_0 diterima sehingga disimpulkan bahwa data berdistribusi normal.

2. Variansi galat bersifat homogen

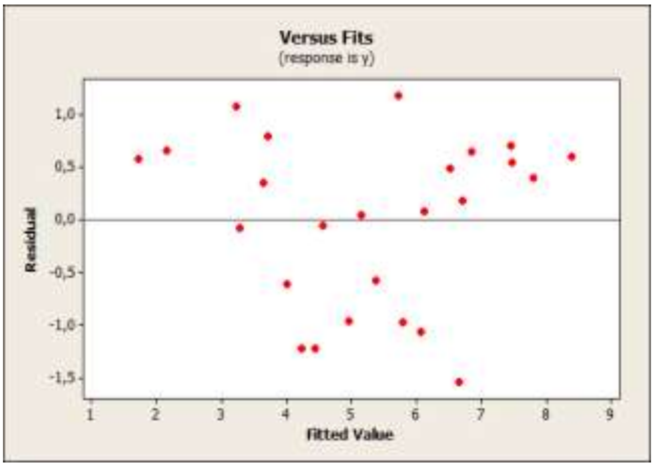
Uji formal yang dapat digunakan untuk memeriksa asumsi kehomogenan variansi galat adalah uji Bartlett. Hasil perhitungan nilai $\mathcal{X}^2{}_{hit}$ berdasarkan persamaan (2.3) untuk data pada Tabel 4.1 yaitu sebagai berikut :

$$\mathcal{X}^2{}_{hit} = ln(10)\ \frac{2,2743}{1,1} = 4,761$$

Karena nilai $\mathcal{X}^2{}_{hit} = 4,76077$ lebih kecil dari $\mathcal{X}^2{}_{0,05\ ,4} = 9,488$ maka H_0 diterima, yang berarti asumsi kehomogenan variansi terpenuhi.

3. Galat percobaan bersifat independen (saling bebas)

Nilai sisaan dan nilai dugaan pengamatan untuk data pada Tabel 4.1 dapat dilihat pada Lampiran 6. Adapun plot antara nilai sisaan dengan nilai dugaan pengamatan ditunjukkan pada Gambar 1 berikut :



Gambar 1. Plot antara Nilai Sisaan dengan Nilai Dugaan Pengamatan

Pada Gambar 1 dapat dilihat bahwa titik-titik galat menyebar secara acak atau tidak membentuk pola tertentu sehingga dapat disimpulkan bahwa asumsi kebebasan galat terpenuhi.

4.2.3 Hipotesis

Bentuk umum hipotesis yang akan diuji sebagai berikut:

1. Pengaruh Perlakuan
   $H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \tau_5 = 0$
   $H_1 : \exists\ \tau_i \neq 0\ untuk\ i = 1,2,3,4,$ dan 5
2. Kelompok (model acak)
   $H_0 : {\sigma_\beta}^2 = 0$ (tidak ada keragaman antar kelompok)
   $H_1 : {\sigma_\beta}^2 > 0$ (ada keragaman antar kelompok)

Sebagai kaidah keputusan pengujian hipotesis adalah tolak H_0 jika nilai $F_{hitung} \geq F_{tabel}$.

4.2.4 Perhitungan ANAVA

Hasil perhitungan anava disimpulkan pada Tabel 4.2 berikut ini :

Tabel 4.2 Hasil Perhitungan Analisis Variansi pada Data Pengaruh Pemberian Pupuk Organik Granul Terhadap Berat Kering Tanaman Cabai Rawit

Sumber Keragaman	Db	JK	KT	F_{Hitung}	F_{Tabel}
Perlakuan	4	46,892	11,723	12,34	3,01
Kelompok	4	28,330	7,082		
Galat	16	15,202	0,95		
Total	24	90,424			

Berdasarkan Tabel (4.2), nilai taksiran untuk komponen variannya berdasarkan persamaan (2.13) dan (2.14) sebagai berikut:

$$\widetilde{\sigma_e}^2 = \left(1 - \frac{4}{20}\right).0{,}95 = 0{,}76 \tag{4.9}$$

$$\widetilde{\sigma_\beta}^2 = \frac{28{,}330/5 - 0{,}76}{5} = 0{,}9813 \tag{4.10}$$

4.2.5 Estimasi Komponen Varian pada Rancangan Acak Kelompok

Berdasarkan persamaan (2.1) model rancangan acak kelompok untuk data pada tugas akhir ini dapat dituliskan sebagai berikut:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + e_{ij} \quad ; \quad i = 1,2,\dots,5\ ;\ j = 1,2,\dots,5 \tag{4.11}$$

Persamaan (4.11) dapat ditulis:

$$\boldsymbol{y} = (1_5 \otimes 1_5)\mu + (I_5 \otimes 1_5)\boldsymbol{\tau} + (1_5 \otimes I_5)\boldsymbol{\beta} + (I_5 \otimes I_5)\boldsymbol{e} \tag{4.12}$$

Karena rancangan acak kelompok yang digunakan menggunakan model campuran dengan perlakuan model tetap dan kelompok model acak, maka persamaan (4.12) dapat disederhanakan menjadi bentuk persamaan (2.17) sehingga diperoleh:

$$\boldsymbol{y} = X\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{Zu} + \boldsymbol{e} \tag{4.13}$$

dengan $\boldsymbol{y}$ adalah vektor respon perlakuan berukuran 25×1; $X = [\mathbf{1} \vdots Z_1]$ adalah matriks berukuran 25×6; $\boldsymbol{\delta} = [\boldsymbol{\mu} \vdots \boldsymbol{\tau}^t]^t$ adalah vektor dari parameter-parameter efek tetap berukuran 6×1; $\boldsymbol{\tau}^t = [\tau_1\ \tau_2\ \dots\ \tau_p]$ adalah vektor pengaruh perlakuan berukuran 5×1; $\boldsymbol{Z}$ adalah Z_2; $\boldsymbol{u}$ adalah $\boldsymbol{\beta}$ dan $\boldsymbol{e}$ vektor galat pengamatan berukuran 25×1.

Selanjutnya berdasarkan persamaan (2.18) dan (2.19), diperoleh :

$$\boldsymbol{H} = \gamma\, \boldsymbol{Z}_2 \boldsymbol{Z}_2{}^t + I_{25} \tag{4.14}$$

$$\gamma = \frac{\sigma_\beta{}^2}{\sigma_e{}^2} \tag{4.15}$$

dengan $\sigma_\beta{}^2$ dan $\sigma_e{}^2$ merupakan komponen varian yang akan ditaksir dengan maksimum likelihood. Berdasarkan persamaan (4.1), maka untuk memperoleh $\boldsymbol{H}^{-1}$ terlebih dahulu akan dihitung $\tilde{\sigma}_\beta{}^2$dan $\tilde{\sigma}_e{}^2$ melalui tabel ANAVA dan kemudian persamaan (4.4) dan (4.8) akan memberikan nilai penduga komponen varian.

Berdasarkan persamaan (4.9) dan (4.10), diperoleh matriks $\boldsymbol{H}$ sesuai persamaan (4.14) dan (4.15) yaitu $\boldsymbol{H} = 1{,}2894\ \boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{Z}_2{}^t + I_{25}$. Selanjutnya akan diperoleh penduga komponen-komponen varian pada rancangan acak kelompok dengan modifikasi Hartley-Rou berdasarkan *output* program MATLAB pada Lampiran 9, yaitu $\widetilde{\sigma_e}^2 = 0{,}7824$ dan $\tilde{\gamma} = 1{,}2486$ sehingga berdasarkan persamaan (4.15) diperoleh $\widetilde{\sigma_\beta}^2 = 0{,}9769$. Namun karena dalam pengaplikasian untuk data pada Tabel 4.1 akan dihitung nilai F_{hitung} untuk perlakuan dengan model tetap, maka komponen varian yang diperlukan yakni KTG, dimana nilai $KTG = \widetilde{\sigma_e}^2 = 0{,}7824$ sehingga akan diperoleh nilai F_{hitung} sesuai Tabel 2.2 yaitu $F_{hitung} = 14{,}984$

Selanjutnya, kesimpulan yang diperoleh untuk $\alpha = 0{,}05$ berdasarkan hipotesis yang telah dirumuskan pada 4.2.3 adalah sebagai berikut :

i. Nilai $F_{hitung} = 14{,}984 > F_{tabel} = 3{,}01$ sehingga H_0 ditolak, yang berarti bahwa terdapat perbedaan pengaruh nyata pemberian dosis pupuk Granul terhadap berat kering tanaman cabai rawit.
ii. Nilai $\widetilde{\sigma_\beta}^2$ yang diperoleh yaitu sebesar 0,9769 > 0 sehingga H_0 ditolak, yang berarti bahwa terdapat keragaman antar kelompok.

5. PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis yang telah diperoleh maka dapat disimpulkan sebagai berikut:

a. Estimasi komponen varian pada rancangan acak kelompok dengan modifikasi Hartley-Rou yang diperoleh adalah $\widetilde{\sigma_e}^2 = 0{,}7824$ dan $\widetilde{\sigma_\beta}^2 = 0.9769$.
b. Berdasarkan hipotesis pada rancangan acak kelompok dengan modifikasi Hartley-Rou untuk data respon berat kering tanaman cabe rawit maka diperoleh hasil bahwa terdapat perbedaan pengaruh nyata dosis pemberian pupuk Granul terhadap berat kering tanaman cabe rawit dan terdapat keragaman antar kelompoknya.Adapun hasil uji lanjutan Duncan menunjukkan bahwa perlakuan P0 dan P1 mempunyai pengaruh yang berbeda nyata dengan perlakuan P2,P3 dan P4.

5.2 Saran

Penelitian ini membahas tentang estimasi komponen varian pada rancangan acak kelompok seimbang. Model yang diterapkan adalah model campuran tanpa interaksi dengan perlakuan bersifat tetap dan kelompok bersifat acak. Untuk penelitian selanjutnya dapat dilakukan kajian tentang estimasi komponen varian pada rancangan acak kelompok tidak seimbang model campuran dengan interaksi ataupun pada model rancangan faktorial.

DAFTAR PUSTAKA

Gaspersz, Vincent.1991. *Metode Perancangan Percobaan Untuk Ilmu-ilmu Pertanian,Ilmu-ilmu Teknik, Biologi.* Bandung : CV.ARMICO.

Hartley, H.O dan Rou, J.N.K. 1967 . Maximum-likelihood Estimation for The Mixed Analysis of Variance Model. *Biometrics p.93*

Hasby dkk. 2013. Pendugaan Komponen Ragam Pada Model Campuran Klasifikasi Dua Arah Menggunakan Metode Restricted Maximum Likelihood (REML). *Journal of Mathematics* : Universitas Brawijaya, Malang.

Ismayana. 2014 . *Pengaruh Pupuk Organik Granul terhadap Pertumbuhan Vegetatif Tanaman Cabai Rawit.* Skripsi : Universitas Syiah Kuala, Aceh

Karsanti, Putri. 2014. *Diagnostik Sisaan pada Model Linier Rancangan Acak Kelompok Lengkap (RAKL) Dua Faktor.* Skripsi : Universitas Negeri Yogyakarta.

Montgomery, D.C. 2001. *Design and Analysis of Experiments, fifth Edition*. John Wilson & Sons.

Munir,Rinaldi. 2008. *Metode Numerik*. Bandung : Informatika Bandung

Rao, Poduri. 1997. *Variance Components Estimation, Mixed Models, Methodologies and Applications.* New York : Chapman Hall

Sahai, Hardeo dan Ojeda, Mario M. 2005. *Analysis of Variance for Random Models*. USA : Birkhauser Boston

Searle dkk. 2006. *Variance Components*. New York: John Wiley & Sons.

Wahyuni, Sry. 2014. *Estimasi Komponen Varian pada Rancangan Petak Terbagi dalam Rancangan Acak Lengkap dengan Metode Maksimum Likelihood.* Skripsi : Universitas Hasanuddin, Makassar.