UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

RÉFLEXIONS ÉPISTÉMOLOGIQUES ENTRE MATHÉMATIQUES ET SCIENCES : POSSIBLES ET IMPOSSIBLES DE LEURS RELATIONS

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

FRANÇOIS LAGACÉ

JUIN 2015

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

« Sticking feathers up your butt does not make you a chicken »
Tyler Durden (Fight Club, 1999)

[Cette page a été laissée intentionnellement blanche]

REMERCIEMENTS

Un peu à la manière de la citation précédente, m'inscrire à la maîtrise ne m'a pas fait chercheur. C'est à force d'effort et de travail que j'ai pu en expérimenter le milieu. Effort et travail qui n'ont été possibles que grâce à l'aide et l'appui des personnes qui m'ont côtoyé. Pour ces raisons, je tiens à les remercier.

Un merci dans toute sa virtualité et sa puissance d'explosion à mon directeur Jean-François Maheux qui – malgré qu'il soit la principale cause des efforts et du travail que j'ai dû fournir pour ce mémoire! – a grandement contribué à parfaire ma formation et à alimenter mes réflexions, notamment grâce à sa capacité d'écoute et son étonnante connaissance des mathématiques et de la philosophie.

Merci aussi à mes collègues étudiants et amis de la maîtrise et du doctorat qui, d'une manière ou d'une autre, ont été sources d'inspiration à certains moments opportuns, mais aussi sources de motivation à poursuivre ce travail. À David, Doris, Geneviève Loïc, Mathieu, Raquel, Sabrina et Sarah D. merci! À mes collègues de bureau, Déborah, Sarah M.S., Karl-Philippe, merci d'avoir été des *buddies* de bureau (pour reprendre l'expression de l'une de ces collègues!) si plaisants à côtoyer. Je garde de bons souvenirs de nos discussions.

Je tiens également à remercier les habitués du Cercle Mathématiques, Éducation et Épistémologie de Montréal, notamment les professeurs Jérôme Proulx et Nadia Hardy, Dalia, Erin, Ildiko, Maude et les autres collègues nommés précédemment qui ont participé à ces rencontres pour la richesse des conversations qui en est ressortie depuis presque deux années déjà.

Finalement, je tiens à remercier ma famille qui a su m'épauler tout au long de ce parcours rempli de bons et (très assurément!) de moins bons moments. Maman, merci de m'avoir fourni les outils qui m'ont permis de poursuivre mes études. Jennifer, merci d'avoir cru en moi et de n'avoir jamais hésité à accepter que je poursuive aux cycles supérieurs à ce moment de notre vie. C'était un grand sacrifice de ta part de me partager avec l'Université. Je t'en remercie grandement. Abigaëlle et Ézéchiel, vous ne vous en êtes certainement pas rendu compte de par votre jeune âge, mais merci de m'avoir permis de déconnecter de mes travaux grâce aux moments passés à jouer avec vous, à vos sourires, vos premiers pas, vos premiers mots.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

RÉSUMÉ

Ce mémoire s'intéresse aux relations entre mathématiques et sciences ainsi qu'aux possibilités et impossibilités de telles relations. Une entrée épistémologique sur la question permet d'aborder trois thèmes distincts, toutefois connexes, de ces relations qui sont présentés sous forme d'articles. D'abord, une mise en relation entre les propos d'Aristote, d'Archimède et de Châtelet et les écrits en didactique des mathématiques permettent de voir comment on peut faire ressortir différentes postures épistémologiques dans certains travaux, mais aussi ouvrir à de nouvelles possibilités sur le plan didactique. Par la suite, à partir d'une analyse de deux problèmes tirés chacun de manuels scolaires de mathématiques et de physique portant sur les mêmes concepts est discutée l'(in)existence d'une frontière entre mathématiques et physique à l'intérieur du contexte scolaire. La posture épistémologique de l'inséparabilité du physicomathématique, défendue notamment par Châtelet, appuyée par un survol historique des concepts de vecteur et de force, permet d'ouvrir une discussion sur comment celle-ci pourrait être imaginée dans le contexte scolaire. Finalement, centré en partie sur une analyse quantitative et qualitative de problèmes à contextes scientifiques dans des manuels scolaires, le dernier article discute de la forte présence de ce type de contextes dans les manuels et des difficultés importantes, du point de vue scientifique, qui ressortent de ces analyses. Appuyée en partie sur la posture épistémologique de Châtelet, une lecture épistémologique permet de proposer une interprétation plus positive et productive de ces observations.

Mots clés : Mathématiques, sciences, physique, épistémologie, histoire,

INTRODUCTION

Ce mémoire s'intéresse aux relations envisageables entre mathématiques et sciences ainsi qu'aux possibilités et impossibilités de telles relations. Se voulant une introduction à des réflexions épistémologiques prenant la forme de trois articles, le premier chapitre s'inspire de mes expériences liées au monde de l'enseignement. Confrontées à des études en didactique des mathématiques, ces expériences mènent à l'objectif de recherche suivant :

> *Mettre en lumière l'intérêt d'un travail épistémologique sur les relations possibles/impossibles entre sciences et mathématiques du point de vue de la recherche en didactique des mathématiques*

Ce dernier peut se décliner en trois grandes questions, chacune faisant l'objet d'une réflexion épistémologique approfondie :

1. Comment différentes postures épistémologiques sur la relation entre mathématiques et sciences se manifestent-elles dans la recherche en didactique des mathématiques?

2. Comment de telles relations sont-elles aussi observables du point de vue des disciplines scolaires (e.g. dans les manuels, les curriculums)?

3. Comment une connaissance de ces épistémologies et une appréciation de ces enjeux pourraient-elles être réinvesties dans l'enseignement des mathématiques?

Ce mémoire présente trois chapitres écrits sous la forme d'articles acceptés, soumis et en voie de soumission à des journaux de recherche en didactique des mathématiques, qui sont suivis d'une conclusion dans laquelle je reviens sur l'objectif et les questions de recherche mentionnées ci-dessus.

Le premier texte (chapitre 2) s'intitule *Mathématiques et physique sous l'angle d'Aristote, Archimède et Châtelet* et a fait l'objet d'une soumission à la revue *For the Learning of Mathematics* en avril 2014. La version présentée ici est celle que j'ai retravaillée suite à l'acceptation de l'article par la revue à condition de répondre certaines questions formulées par les évaluateurs. Cet article est issue d'une première mise en relation entre les propos d'Aristote, Archimède et Châtelet (mais aussi Auguste Compte et Albert Einstein), et les écrits en didactique des mathématiques (Hanna et Jahnke 1999, 2002; Tanguay et Geeraerts, 2012 ; Radford et al., 2002). J'y montre comment on peut reconnaître différentes postures épistémologiques dans certains de ces travaux, et comment un regard épistémologique peut non seulement servir de fondement à ces écrits, mais aussi ouvrir à de nouvelles possibilités sur le plan didactique.

Le chapitre suivant présente un article accepté sous réserve de modifications à la *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, et dont le titre est *De l'(in)existence d'une frontière entre mathématiques et physique* (chapitre 3). Ce texte est issu d'un travail plus spécifique sur la notion de discipline (e.g. Chervel, 1988) et les différentes variantes concernant les relations qu'elles pourraient entretenir du point de vue des curricula (Pang et Good, 2000 ; Czerniak et al., 1999 ; Lederman et Niess, 1998) ou de la classe de mathématiques (e.g. Rivard, 2008). Observant d'une part les demandes explicites de la part du Ministère de l'Éducation, des Loisirs et du Sport à créer des liens entre les disciplines (MELS, 2007), j'y discute ensuite la manière dont se traduisent ces exigences dans deux manuels (un de mathématiques et un de physique) ayant fait l'objet d'une approbation par le Ministère. Ici encore, le point de vue épistémologique s'avère révélateur pour mieux comprendre les enjeux, dans ce cadre, liés à l'(in)existence d'une frontière entre mathématiques et physique (ici autour du concept de vecteur). Une étude historique de l'évolution de ces concepts permet cependant de revoir leur articulation et appuie la vision de Châtelet (2010, 1993), vision unificatrice des mathématiques et des sciences (particulièrement la physique). Cette étude historique à dû être construite, à partir de textes différents (Patonnier, 2004 ; Chaitin, 2002 ; Crowe, 2002 ; Dorier, 2000 ; Pressiat, 1999 ; Dobrovolskij, 1968). En effet, chacun des textes met de l'avant différents aspects des concepts de vecteur et/ou de force, laissant parfois de côté les points de vue des mathématiques ou des sciences, ou encore d'une évolution provenant de l'une ou l'autre des disciplines.

Enfin, le chapitre 4, intitulé *Les contextes scientifiques dans les manuels scolaires, quel usage?*, regroupe mon travail en cours concernant les manuels scolaires de manière plus spécifique. Une première partie de cette étude quantitative et qualitative des problèmes présentés dans différents manuels scolaires approuvés pour l'enseignement des mathématiques au secondaire a fait l'objet d'une présentation sous forme d'affiche à colloque international PME/PMENA en juin 2014. J'y discute d'une part l'importance relative des contextes d'inspiration scientifique dans différentes sections des manuels, puis je discute plus en détail de ce qui apparaît comme des difficultés importantes, du point de vue scientifique, du rendu des situations ou des concepts dans ces problèmes. Une lecture épistémologique appuyée en particulier sur les idées de Châtelet, me permet ensuite de proposer une interprétation plus positive et productive de ces observations.

[Cette page a été laissée intentionnellement blanche]

CHAPITRE I

CONTEXTE

1.1 Origine de mon questionnement

1.1.1 Ma formation comme enseignant de mathématiques au secondaire

Mon intérêt pour l'utilisation de concepts scientifiques dans l'enseignement ou l'apprentissage des mathématiques s'est développé au cours de ma formation de futur enseignant. En effet, cette formation m'a permis de prendre conscience de l'intérêt potentiel de l'utilisation des concepts scientifiques comme support à l'apprentissage des mathématiques. À travers plusieurs cours (Didactique de la variable et de la fonction, Application pédagogique de l'informatique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, Regard mathématique et didactique au secondaire, Didactique d'intervention en mathématiques auprès de clientèles particulières), j'ai pu explorer les concepts de vitesse, d'accélération (gravitationnelle), de trajectoire, de force, d'énergie, de résistance aérodynamique, etc. Chacun de ces cours vise des objectifs précis autres que l'intégration de concepts scientifiques, toutefois le recours à ces concepts – à travers des activités d'introduction, d'exploration et d'approfondissement de concepts mathématiques à enseigner – m'a amené à me sensibiliser aux liens étroits qui pouvaient exister entre les mathématiques et les autres sciences. C'est surtout la manière dont étaient travaillés les concepts scientifiques, dans ces cours, qui m'a sensibilisé à ces liens. En effet, les concepts scientifiques n'étaient pas présentés comme des vérités admises (même s'ils l'étaient d'une certaine façon, par exemple la vitesse uniformément accélérée), mais ils étaient plutôt des contextes de bases à partir desquels il était possible de faire « ressortir » des mathématiques.

Ainsi, le recours aux concepts scientifiques dans l'enseignement des mathématiques - qui est par ailleurs recommandé par le Ministère de l'Éducation, des Loisirs et du Sport (MELS, 2007) — m'a été présenté comme un moyen de rendre le travail mathématique riche et significatif pour les élèves en permettant de lier les mathématiques à d'autres matières, notamment les sciences. On m'a fait voir que ces liens peuvent faciliter la compréhension de certaines notions mathématiques plus abstraites. Par exemple, concernant l'étude de la fonction quadratique, je me souviens d'une question d'apparence toute simple :

« Un plongeur se laisse tomber d'une hauteur de dix mètres. Combien de temps mettra-t-il pour atteindre l'eau, sachant qu'il subit une accélération d'environ 9,8 m/s^2? »

Cette question mène vers le concept de vitesse uniformément accélérée, mais présentée de cette manière, elle invite à questionner la situation (Que se passe-t-il lorsque l'on tombe? À quoi ressemble notre mouvement?) dans le but de résoudre le problème, plutôt que de recourir à une formule qui pourrait être présentée dans la question (comme on le voit souvent dans les manuels scolaires par exemple).

Ainsi, un élève pourrait aborder cette question en approximant l'accélération gravitationnelle à 10 m/s^2 et dire : « comme il n'y a que dix mètres entre le plongeur et l'eau et que l'accélération gravitationnelle est de 10 m/s^2, il s'écoulera 1 seconde avant que le plongeur touche l'eau ». Il pourrait ensuite vouloir ajuster ce résultat en fonction d'une valeur plus précise : « À 9,8 m/s^2, il prendra donc un peu plus de temps ». Un autre pourrait alors mettre en doute cette interprétation en soulignant que « c'est la vitesse du plongeur qui a augmenté de 10 m/s durant cette seconde, ce n'est pas la distance parcourue! » et si un enseignant leur lance alors « En effet, après 1 seconde, le plongeur ne sera qu'à 5 environ... »? Il serait évidemment possible d'y arriver en appliquant simplement une formule mettant en relation la distance, le temps, la vitesse initiale et l'accélération. Mais dans ces cours, j'ai pris conscience de l'intérêt de raisonner sur la situation, d'y réfléchir mathématiquement, afin de « construire » petit à petit de telles formules, de les rendre signifiantes par rapport à la situation (on pense évidemment aux fameux travaux de Claude Janvier, par exemple : Bell et Janvier, 1981; Janvier, 1997). La situation devient alors un lieu où les élèves peuvent tester leur compréhension du concept mathématique étudié. Il leur permet entre autres de confronter leur compréhension à même la situation.

De plus, le recours aux contextes scientifiques offre aussi la possibilité d'investiguer des phénomènes scientifiques pour en approfondir sa compréhension. Dans ce cas, qui est en quelque sorte l'opposé du cas précédent, le jumelage permet de réinvestir des concepts mathématiques au profit d'une compréhension d'un phénomène scientifique qui pourrait être au départ totalement inconnu (avec l'exemple précédent, on pourrait vouloir faire découvrir le lien entre l'accélération gravitationnelle et la distance parcourue). C'est alors par le biais des concepts mathématiques, mais surtout par la compréhension et l'interprétation qu'on s'en fait, que l'on entre sur le phénomène scientifique.

1.1.2 Expérience d'assistance de recherche

Bien que l'utilisation de concepts scientifiques me soit alors apparue comme très intéressant, mon travail comme assistant de recherche dans un projet visant à introduire au secondaire la fonction quadratique par l'entremise des concepts de vitesse et d'accélération est venu nuancer ceci. En effet, ce travail m'a permis de me familiariser avec des productions d'élèves révélant certaines difficultés et qui m'ont conduit à questionner plus profondément la place des concepts dits scientifiques dans les cours de mathématiques.

Dans le cadre d'un cours d'été visant à revoir le contenu de la deuxième année du second cycle du secondaire (pour des élèves ayant échoué leurs mathématiques en cheminement normal), des élèves avaient à répondre à une question d'examen faisant intervenir les concepts de vitesse, d'accélération et de distance parcourue. Les élèves sont introduits dans la situation avec un exemple de chronophotographie (Figure 1.1) et il leur est demandé de produire graphiquement et formellement le déplacement d'un robot en fonction du temps, déplacement représenté par la Figure 1.2. Voici les images servant à introduire la situation, à partir desquelles les élèves devaient produire les représentations formelles et graphiques du déplacement du robot selon le temps :

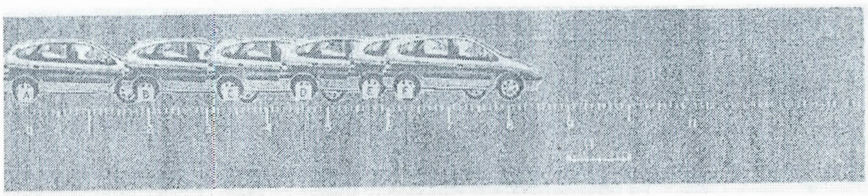


Figure 1.1 Chronophotographie présentée aux élèves en introduction du problème

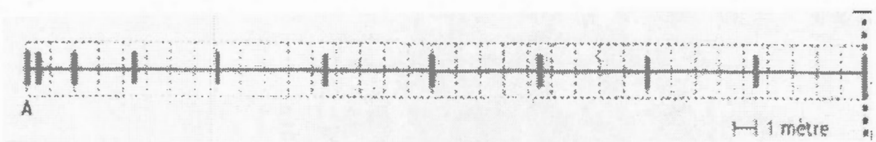


Figure 1.2 Diagramme de la distance parcourue par le robot selon le temps

Sur les 27 élèves reprenant l'étude de la fonction quadratique, 10 ont échoué, obtenant en moyenne 25 %, la note moyenne du groupe étant près de 65 %. Selon toutes évidences, plusieurs élèves n'ont pas trouvé facile de composer avec les concepts de vitesses et de distance parcourue. D'autre part, une analyse des copies d'élèves laisse voir que ces derniers semblent avoir rapidement délaissé le contexte pour se centrer sur la production de tables de valeurs et de formules. Cette perte du contexte et du sens qui pourrait y être associée pourrait-elle limiter la validation ou l'invalidation des réponses obtenues par les élèves?

Une autre hypothèse réside dans la complexité des concepts présents dans la situation (vitesse, accélération et distance parcourue). En effet, plusieurs chercheurs soulignent cette complexité (Choquette, 2008; Hale, 2000; Champagne et Kloffer, 1982 ; Caramazza et al., 1981 ; Clément, 1981 ; McCkloskey et al., 1980). Par exemple, Choquette (2008) rapporte des difficultés vécues par des élèves du secondaire à établir des liens entre le monde réel (celui des observations) et le monde mathématique. Notamment, il souligne les difficultés à lier certains graphiques faisant intervenir les concepts de mouvement (vitesse, déplacement, position) à des situations particulières. McKlosky et al. (1980) s'intéressent plutôt aux croyances d'étudiants de niveau universitaire concernant le mouvement étudié en absence de forces externes (la première loi de Newton). D'autre part, Champagne, Kloffer et Anderson (1980) expliquent que les élèves développent souvent des conceptualisations du monde de la physique qui viennent interférer avec la compréhension que l'on s'en donne du point de vue scientifique. Hale (2000) argumente dans ce sens, en expliquant que c'est en liant les expériences pratiques, les laboratoires et les observations aux mathématiques qu'il est possible de mettre en lumière les conceptualisations (principalement aristotélicienne) des élèves liées au mouvement pour les « remplacer » par celles admises par la communauté scientifique.

Il est intéressant de noter la proposition de Hale, soutenue par Beichner (1994), à l'effet que les mathématiques aident, notamment par le recours à des graphiques, à entrer sur l'étude du mouvement. Ainsi, selon ces chercheurs, les mathématiques aident à avoir une entrée scientifique sur les concepts scientifiques. Ce constat conforte un des points de vue énoncés précédemment, à savoir que le jumelage entre mathématiques et sciences permet de réinvestir des concepts mathématiques au profit d'une compréhension d'un phénomène scientifique au départ inconnu.

Toutefois, les difficultés des élèves, maintes fois soulignées par ces mêmes chercheurs et par d'autres, à parvenir à une compréhension adéquate (selon la communauté scientifique) du mouvement viennent questionner le recours aux concepts scientifiques pour étudier les mathématiques. Comment arriver à centrer l'attention des élèves sur les concepts mathématiques si le contexte choisi pour soi-disant favoriser cet apprentissage est lui-même porteur de difficulté au plan conceptuel?

1.1.3 Expérience de stage

Suite à ces expériences de recherche et aux cours présentés précédemment, j'ai amorcé un stage en troisième année du deuxième cycle, dans la séquence Sciences Naturelles. Le chapitre sur les fonctions réelles que je dois enseigner est tout indiqué pour mettre à profit certains concepts scientifiques. Toutefois, les manuels scolaires à ma disposition sont décevants. Les contextes scientifiques, bien que présents, me semblent accessoires. Tel que présenté, je n'y vois pas d'avantages ou de possibilités d'investigations, pas plus qu'ils ne me semblent pouvoir faciliter la compréhension de concepts ou fournir la possibilité de tester différentes compréhensions. J'ai tout de même décidé de m'attarder à certains problèmes afin d'en découvrir le potentiel. Ainsi, le problème suivant, tiré de Guay et al. (2010), en est un exemple de contexte relativement accessoire à la résolution fig 1.3 :

4 Un astronome a observé un système particulier composé d'une planète et d'une étoile.
DÉVELOPPEMENT CD 3 Il s'intéresse particulièrement à l'orbite de la planète autour de l'étoile. Il a constaté que, pendant une révolution autour de l'étoile, la vitesse de déplacement de la planète varie périodiquement en fonction du temps et qu'elle peut être représentée par l'équation suivante.

$$V(t) = 2\sin\left(\frac{\pi}{55}(t - 30)\right) + 45$$

où $V(t)$: la vitesse (en kilomètres par seconde)

t : le temps (en jours)

a) En combien de jours la planète fait-elle une révolution complète autour de l'étoile ?

b) Quelle est la vitesse maximale atteinte par la planète ?

c) Représentez graphiquement cette fonction.

d) Au cours d'une période de révolution, durant combien de temps la vitesse de la planète est-elle inférieure ou égale à 44 km/s ?

Figure 1.3 Point de vue mathématique, séquence SN, page 280

En renvoyant directement à l'équation, en insistant sur la périodicité, on met de côté le contexte comme lieu de travail mathématique, de raisonnement. Dans ce cas-ci, le contexte reste en effet présent d'une certaine manière. Les questions s'intéressent au nombre de jours mis pour faire le tour de l'étoile, à la vitesse maximale et à un intervalle particulier : on fait référence à des éléments liés au déplacement orbital qu'il faut mettre en relation avec certains aspects de la fonction sinus... mais là s'arrête le « lien » entre physique et mathématique. Le contexte ne présente pas de support au niveau des raisonnements ou du sens. La révolution de la planète autour de l'étoile n'est pas étudiée pour découvrir ou travailler l'idée de périodicité, ou pour aborder la fonction sinus en lien avec une fonction cosinus déphasée par exemple. Le contexte propose seulement une sorte référence « concrète » permettant de désigner certains éléments d'une relation « connue ».

J'ai trouvé d'autres problèmes présentant par ailleurs des contextes qui sont d'une telle complexité que l'on peut se demander s'ils n'empêchent pas les élèves d'entrer dans la tâche au lieu de les aider à le faire. Le problème suivant, tiré de Boivin et al. (2010), illustre ceci :

20 Un bioréacteur expérimental est originalement constitué de 5 unités et d'une pompe à dioxyde de carbone. La propagation des algues microscopiques fait en sorte que 3 unités et 1 pompe sont ajoutées chaque mois au système. Pour que le système puisse fonctionner, il faut que le rapport $\frac{\text{nombre d'unités}}{\text{nombre de pompes}}$ soit d'au moins 3,2.

a) Si x représente le temps (en mois), déterminez la règle qui permet de calculer :
   1) le nombre U d'unités ;
   2) le nombre P de pompes ;
   3) le rapport R du nombre d'unités au nombre de pompes.

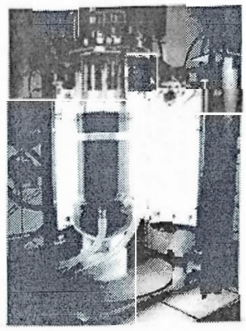
b) Quel est le domaine de la fonction associée à R?

c) Quelle est la valeur initiale de la fonction associée à R?

d) Quel est le codomaine de la fonction associée à R?

e) Qu'advient-il de la valeur de R lorsque celle de la variable indépendante augmente?

f) Dans ces conditions, à quel moment le système cesse-t-il de fonctionner?



Un bioréacteur sert à la bioconversion de molécules d'intérêt. Certaines technologies visent à convertir le CO_2 atmosphérique en biocarburant à partir d'algues propagées dans des bioréacteurs.

Figure 1.4 Visions, 3^e année du 2^e cycle, séquence Sciences Naturelles, page 73

Dans ce problème, il est question d'unités, de pompes à dioxyde de carbone et d'algues... Un encadré et une photo accompagnent le problème, mais n'aident pas vraiment à comprendre : la description est encore plus complexe que ce qui est présenté dans l'énoncé. Ces éléments donnent une impression décorative, ou semblent vouloir insister sur l'authenticité du contexte dont il est question... même si, comme dans le cas précédent, le contexte semble surtout servir de référence (nombre de composantes, état initial, arrêt du système, etc.). Ça me semble cependant peu du point de vue de l'activité mathématique.

Qui plus est, j'ai aussi remarqué qu'il est possible de trouver dans les manuels des problèmes qui font intervenir des concepts scientifiques en contradiction avec ce qui est généralement admis par la communauté scientifique, ou qui confondent certaines. Par, exemples, ces problèmes tirés de Guay et al. (2008) :

1 Du haut d'une falaise, Xavier lance un projectile vers le haut en direction de la mer. La relation entre le temps et la hauteur du projectile est décrite par la règle $h(t) = {}^{-}4t^2 + 15t$, où t représente le temps en secondes et $h(t)$ la hauteur en mètres.

a) Combien de temps après le lancer le projectile sera-t-il à la même hauteur que Xavier?

b) Si le projectile touche la mer six secondes après avoir été lancé, déterminez la hauteur de la falaise.

c) Trouvez la hauteur maximale par rapport à la mer atteinte par le projectile.

Figure 1.5 Point de vue, secondaire 4, séquence SN, page 86

17 Francis frappe une balle de golf qui décrit une trajectoire parabolique représentée par la fonction $f(x) = {}^{-}3x^2 + 18x$. La balle de golf touche le sol six secondes après avoir été frappée. La balle est passée au-dessus d'un arbre de 24 m de haut.

a) Dans un plan cartésien, représentez graphiquement cette fonction.

b) Déterminez l'intervalle de temps durant lequel la balle a atteint une hauteur plus grande que celle de l'arbre.

Figure 1.6 Point de vue, secondaire 4, séqence SN, page 110

Le premier problème[1] propose une règle présentée sous la forme générale. Sous cette forme, le coefficient multipliant le terme au carré devrait être la moitié de la constante de la pesanteur (approximativement 9,81 m/s^2), soit environ 4,9. La valeur « 4 »

[1] J'omets volontairement de discuter la difficulté apparente chez les auteurs à décrire la situation : « lancer vers le haut en direction de la mer », alors que la personne est en « haut d'une falaise »...

retenue dans le problème est donc une approximation assez douteuse. Le second problème induit une confusion entre une trajectoire et la relation hauteur-temps. En effet, le problème propose une règle censée traduire la trajectoire de la balle, mais le reste de l'énoncé discute du temps mis pour que la balle touche le sol (ou encore, mentionne une certaine hauteur ayant été dépassée). Dans ce cas, non seulement les concepts scientifiques ne me semblent pas mis à profits de façon riche et significative du point de vue des mathématiques, mais leur utilisation peut même sembler assez peu souhaitable (surtout du point de vue de l'enseignement de la physique, par exemple).

Cette expérience de stage m'a permis de réaliser que beaucoup de problèmes s'articulant autour de concepts scientifiques que l'on retrouve dans les manuels scolaires n'invitent pas les élèves à travailler *à partir* des contextes scientifiques pour extraire les mathématiques qu'ils contiennent. Ces contextes ne sont pas travaillés comme supports au raisonnement mathématique au sens du MELS par exemple, pour qui il s'agit de traiter « des données observées ou recueillies sur une question d'ordre scientifique [dans le but] de déployer un raisonnement mathématique » (MELS, 2007, p.10).

Bien entendu, les manuels scolaires ne sont pas les seuls outils à la disposition des enseignants, toutefois plusieurs études montrent qu'ils jouent le plus souvent un rôle prédominant dans le travail mathématique des enseignants en classe (Antoun, 2012 ; Squalli, 2007 ; Nicol et Crespo, 2006 ; Lebrun et al., 2006) .

1.1.4 Des futurs enseignants confrontés à des contextes scientifiques

Durant la dernière session du baccalauréat, j'ai obtenu une tâche d'auxiliaire d'enseignement pour le cours *Didactique de la variable et de la fonction.* Mon travail dans ce cours consistait à corriger et commenter les devoirs des étudiants. Comme je l'ai mentionné plus haut, ce cours offre l'occasion d'exploiter les concepts de vitesse et de mouvement uniformément accéléré pour étudier la fonction quadratique. Les concepts scientifiques sont introduits dès la première semaine du cours et repris toutes les semaines en séance d'exercices jusqu'à l'examen intra, en plus d'être travaillés en classe.

Dans le cadre de mon travail de correcteur, j'ai constaté que plusieurs étudiants semblaient éprouver, semaine après semaine, de la difficulté à traiter de ces concepts. Par exemple, voici la question 7 du devoir de la troisième semaine de cours, suivie de deux productions d'étudiants :

> *Steve est arrêté avec sa voiture à cause de travaux sur l'autoroute. Au moment où on lui laisse le chemin libre pour repartir, une voiture bleue le dépasse et continue à rouler à une vitesse constante de 60 km/h. Steve lui, AUGMENTE sa vitesse de façon constante et, à un moment donné est côte à côte avec l'auto bleue!*
>
> *a) Produire sur le même graphique, la courbe vitesse-temps pour la voiture bleue et pour Steve.*
>
> *b) En comparant les vitesses sur le graphique, expliquer comment il se fait que Steve puisse être côte à côte avec la voiture bleue.*

Avant d'analyser les productions des étudiants, je trouve important de m'arrêter à l'énoncé un moment pour en faire ressortir deux aspects. Tout d'abord, on peut remarquer l'aspect familier (presque banal même!) de ce dernier : des voitures se dépassant sur l'autoroute. En lien avec la familiarité du contexte, l'énoncé et les sous-questions se présentent sous la forme d'abus de langage. Par exemple, l'énoncé explique que Steve augmente sa vitesse, alors qu'on y comprend que c'est la voiture dans laquelle il se trouve qui produit le changement de vitesse; on note aussi les mêmes abus de langage dans les sous-questions, où Steve est mis pour référer à sa voiture, permettant en quelque sorte de ne pas alourdir l'énoncé pour insister davantage sur le phénomène ciblé par la question. Bien que ces aspects puissent apparaître futiles, ils sont importants pour permettre une analyse plus éclairée des productions des étudiants.

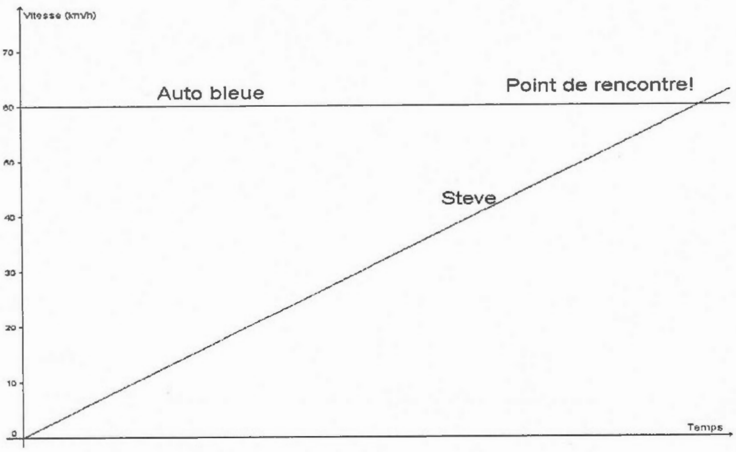


Figure 1.7 Solution produite par un étudiant à la question 7a) du cours Didactique de la variable et de la fonction.

L'étudiant propose un graphique représentant la vitesse (en km/h) selon le temps. Il est intéressant de voir que les unités choisies correspondent aux informations fournies dans l'énoncé. Ainsi, le graphique ne propose pas de graduations pour l'axe du temps, n'ayant aucune information à ce sujet. Le graphique peut ainsi « s'adapter » à toute accélération que ferait Steve comme l'explique l'étudiant à la question b : *« La pente de la droite représentant Steve peut différer selon son accélération »*. Par la suite, l'étudiant reste vague lorsque vient le temps de donner le moment où les voitures se croisent : *« Puisque la voiture bleue va toujours à 60 km/h et que Steve accélère, ils se croiseront à x minutes (ou secondes ou heures). Il dépassera aussi la voiture bleue après leur rencontre puisqu'il continuera à accélérer alors que la voiture bleue restera à 60 km/h. »* Cette explication est surprenante, car l'étudiant semble bien comprendre le phénomène de mouvement uniformément accéléré. En effet, il explique que le graphique représente un cas général, et que dépendamment de l'accélération de Steve, la pente de la droite représentant sa vitesse selon le temps variera. Par contre, l'étudiant affirme que les voitures se croisent lorsque les droites se croisent (ce qu'il indique sur le graphique), donc lorsque les vitesses sont les mêmes. La confusion est d'autant plus apparente que l'étudiant incorpore au graphique produit – rappelant les abus de langage discutés précédemment – des éléments du contexte, à savoir l'« auto bleue » et « Steve » (fig. 1.5). On a l'impression que ce « rapprochement » pourrait avoir causé l'ajout surprenant d'un « point de rencontre! » là où les droites se croisent, rappelant Janvier (e.g. 1987, 1978).

Un second étudiant a produit un graphique d'allure tout à fait différent (Figure. 1.6), mais qui rappelle certains aspects du premier : les graduations, les axes, l'ajout d'éléments tirés de l'énoncé tel « auto bleue » et « Steve ». Toutefois, contrairement à la production précédente, l'étudiant a représenté par une courbe ouverte vers le bas qui semble se « linéariser » à mesure qu'elle se rapproche de la droite représentant la vitesse de la voiture bleue (en fonction du temps).

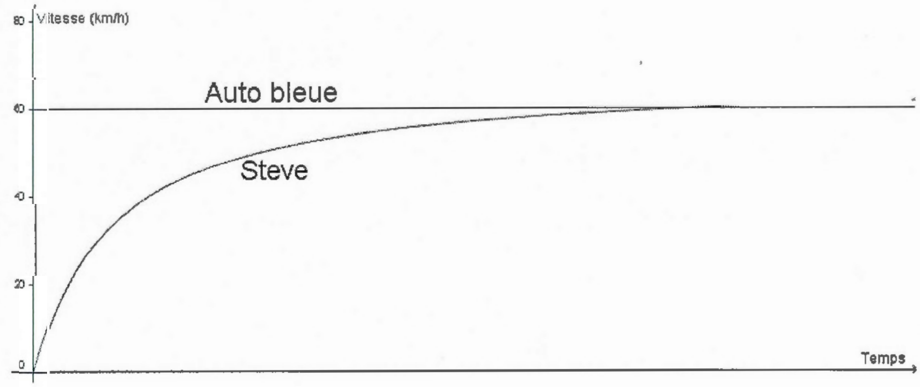


Figure 1.8 Solution 2 à la question 7a) du cours Didactique de la variable et de la fonction

L'étudiant explique son graphique dans un texte l'accompagnant : « Pour un même temps de croisière, l'auto bleue roule à une vitesse constante, tandis que Steve effectue une grande accélération, le permettant ainsi de rattraper l'auto bleue. » Comme la production précédente, l'étudiant semble voir à travers le graphique deux voitures qui roulent pendant un certain temps pour se rejoindre et rouler côte à côte, un élément sur lequel l'énoncé insiste en quelque sorte. Mais le texte de l'étudiant laisse aussi comprendre qu'il s'est fait une certaine appropriation de la situation en mettant de côté certains aspects. Par exemple, il parle d'une « grande accélération », suivi de l'idée de « rattraper » l'auto bleue sans évoquer la suite (et, donc, la possibilité que la seconde dépasse la première). La courbe représentant la vitesse de Steve selon le temps peut alors, pour l'étudiant, représenter à la fois cette « grande accélération » qui se stabilise lorsque Steve rejoint l'auto bleue, et le trajet de la voiture de Steve qui roule enfin à la même vitesse que l'auto bleue (et côte à côte avec elle!). Par contre, il y a bien entendu des incohérences entre la production graphique de l'étudiant et l'interprétation qu'il fait de la situation à la question. En effet, l'étudiant dit que Steve accélère pour rattraper la voiture bleue qui roule depuis un bon moment à une vitesse supérieure à la sienne, mais dans le graphique produit, jamais Steve ne roule plus vite que l'auto bleue.

Autre exemple de réponse : Le graphique produit par un troisième étudiant est semblable à celui de la figure 1, mais celui-ci ne confond pas le point de croisement des droites avec le moment où les voitures se croisent. Par contre, il propose à la question b que « Puisque nous n'avons pas un graphique qui montre les kilomètres parcourus, nous ne pouvons donc pas savoir à quel moment Steve arrivera côte à côte avec la voiture bleue. » Malgré une représentation graphique adéquate, l'étudiant ne semble pas en mesure de relever les informations nécessaires pour répondre à la question.

Que se passe-t-il entre le phénomène scientifique et le travail mathématique? Il est difficile de croire que ces étudiants universitaires ne soient pas en mesure de produire des graphiques et les analyser. D'autre part, les expériences de vitesse, d'accélération et de distance parcourue présentes dans la situation, les étudiants qui ont offert ces réponses les ont pourtant déjà vécues au quotidien. On peut sans exagération penser qu'ils arriveraient à expliquer dans une situation et un langage courant que pour rattraper une voiture il faut se déplacer plus vite qu'elle. Ils peuvent aussi très vraisemblablement parler de la relation proportionnelle entre le temps et la distance parcourue à vitesse constante... Et pourtant, ils ne produisent pas les graphiques attendus ou ne tirent pas correctement l'information de ceux-ci.

Ces constatations rappellent certains travaux en didactique autour de « sens commun » (e.g. René de Cotret, 2012) expliquant qu'il arrive très souvent que des individus démontrant diverses connaissances d'un concept ne les sollicitent pas nécessairement, selon le contexte. Dans les cas qui nous intéressent ici, il serait possible de voir cette non-sollicitation du recours à l'expérience vécue dans la production du premier étudiant. En effet, il ne semble pas lier sa production graphique à une expérience quelconque de voyage à bord d'une voiture qui lui aurait peut-être permis de réaliser que son « point de rencontre » se situe à un moment où la voiture bleue n'a roulé qu'à des vitesses inférieures à celle de l'autre voiture, phénomène impossible à moins que cette dernière ralentisse... De la même manière, le troisième étudiant produit le graphique adéquat, mais ne propose pas une réponse qualitative réellement adéquate à la question b. On peut penser que celui-ci, comme le premier étudiant, n'a pas eu (suffisamment) recours à ses expériences en voiture pour produire la réponse attendue.

Pour ce qui est du second étudiant, on pourrait supposer qu'il a fonctionné en quelque sorte à l'inverse des deux autres. En effet, celui-ci produit un graphique qui n'est pas cohérent avec l'énoncé : la courbe qu'il propose dans son graphique pour la voiture de Steve ne traduit en rien une accélération uniforme de la vitesse. Sa description de la situation peut toutefois laisser croire à un recours à une expérience vécue (des voitures qui roulent côte à côte, telles qu'énoncées précédemment ou encore), à ce qu'on observe quand on se retrouve dans une voiture au moment d'un « dépassement » (cette impression de rouler en parallèle au « moment » du dépassement). On pourrait aussi peut-être y reconnaître le sentiment d'être écrasé dans son siège au moment où l'accélération débute (forte courbature dans le graphique), sentiment qui s'estompe peu à peu tandis que la voiture prend de la vitesse (un effet lié à l'inertie).

Plus généralement, on reconnaîtra que ces étudiants ne semblent pas avoir eu recours à ce qu'ils ont étudié (au secondaire à tout le moins) concernant la vitesse uniformément accélérée ou qu'ils n'ont pas suffisamment lié ces diverses connaissances entre elles. Les étudiants un et trois semblent essentiellement s'appuyer sur leurs connaissances mathématiques, ne recourant pas (suffisamment) à leurs expériences personnelles de voyage en voiture pour réaliser les erreurs commises. Le second aurait quant à lui sembler avoir laissé ses connaissances mathématiques liées à la proportionnalité (vitesse uniformément accélérée) pour s'appuyer (trop?) fortement sur des impressions qu'il eut été profitable de réexaminer du point de vue mathématique.

Cela dit, il n'y a pas que pour les élèves ou les futurs enseignants que ce type de situation pose problème. Davantage centrés sur le travail d'interprétation de représentions mathématiques de phénomènes scientifiques et rappelant les études citées précédemment liant mathématiques et sciences, Roth et Hwang (2006) ont demandé à un physicien d'interpréter un graphique traitant de la distribution de trois types de plantes. Il ressort de leur expérimentation que le travail d'interprétation est un processus très complexe, et particulièrement exigeant pour une personne qui n'est pas familière aux éléments à interpréter dans le graphique. En effet, dès les premiers moments, le scientifique semble désemparé, cherche ses mots et tente de se faire une compréhension du graphique auquel il est confronté, mais n'y parvient pas. Les chercheurs décrivent comment, par la suite, ce dernier interprète le graphique en se servant de repères et d'expériences passées n'ayant aucun lien spécifique avec le graphique sur lequel il travaille : il fait la lecture des repères mathématiques (les axes et leur titre), il tente de représenter un schéma à partir du graphique pour s'en faire une compréhension parallèle, il « extrait » du graphique des informations qui n'y sont pas présentes, mais interviennent effectivement dans le phénomène représenté. Toutes ces réactions montrent que lorsque l'on donne du sens à un graphique, on fait à la fois apparaître des éléments qui ne sont pas (nécessairement) en lien avec la situation représentée, et que l'on fait aussi intervenir des éléments qui ne sont pas directement « lus » dans le graphique. Ces deux aspects témoignent de la distance fondamentale entre un phénomène et ses différentes interprétations ou représentations : quelque chose qu'il serait sans doute intéressant d'explorer davantage par rapport au travail des élèves en mathématique (et en sciences).

Ainsi, même s'ils sont les auteurs des graphiques qu'ils ont produits, les trois étudiants présentés précédemment semblent éprouver des difficultés à les interpréter. En effet, les premier et troisième étudiants ne tirent pas (correctement) les informations que leurs graphiques contiennent et le second, comme le physicien de Roth et Hwang, extrait du graphique des informations inaccessibles (dans la vision de la grande accélération et des voitures qui roulent côte à côte dans le graphique de la vitesse en fonction du temps).

Janvier (1981) a lui aussi traité de la place de l'interprétation dans l'utilisation des situations en mathématiques. Il explique, à partir de situations où il est demandé de mettre en relation des schémas de pistes de course et des graphiques décrivant la vitesse d'une voiture de course selon la distance parcourue sur la piste, comment une tâche peut devenir plus exigeante lorsqu'elle se présente dans le cadre d'une « situation », entre autres parce qu'une situation implique généralement (sinon toujours?) des éléments abstraits (par exemple ce qui fait office de piste de course : texte, schéma, image, etc.) et fait référence directement aux aspects concrets de cette situation (par exemple les performances d'un pilote ou encore certains aspects techniques injectés au problème). En d'autres mots, Janvier explique que « the personalisation involved in each situation brings in various interpretation of the goals of a task and a range of strategies which determine its level of complexity » (1981, p. 120), ce qui rappelle en un certain sens le scientifique de Roth et Hwang qui extrait du graphique des informations qui n'y sont pas dans le but de donner un contexte au graphique. Janvier explique que ces situations où l'on tente de se représenter le statisme ou le dynamisme relèvent davantage de la reconstitution mentalement que de la reproduction. Selon les observations du chercheur, cette reconstitution s'appuierait entre autres de supports verbaux prenant la forme du langage ou de traces écrites servant de repère, ces dernières rappelant le schéma que le scientifique tente de produire au paragraphe précédent. Le recours aux traces écrites a d'ailleurs été observé chez les trois étudiants, notamment lors de l'association des voitures (Steve, auto bleue) aux courbes, et particulièrement dans l'établissement d'un point de rencontre pour le premier étudiant.

De manière plus fine, on peut cependant remarquer que chaque étudiant fait sa propre interprétation de la tâche, cette dernière apparaissant ainsi plus complexe pour certains que pour d'autres. Ainsi, la conclusion du troisième étudiant évoque la difficulté de reconstituer le dynamisme des voitures qu'invoque la situation, alors que les deux premiers mettent en lumière l'enjeu de concilier l'abstrait (le graphique des vitesses des voitures en fonction du temps) et le concret (la reconstitution mentale) de la situation.

1.1.5 Une rencontre autour de la contextualisation

Ces réflexions d'enseignant, d'assistant de recherche et d'auxiliaire d'enseignement autour des difficultés à vivre la relation entre mathématiques et science tant chez les élèves et les enseignants, je suis invité à participer à une rencontre de recherche sur le thème de la contextualisation, rencontre organisée par deux groupes préoccupés par la formation des enseignants : le *Groupe de recherche sur la formation à l'enseignement en mathématiques* et le *Centre de recherche sur l'enseignement et l'apprentissage des sciences*. En préparation de cette rencontre, Jean-François Maheux et moi avons discuté de la difficile articulation entre les contextes scientifiques et les mathématiques. Les observations rapportées à la section précédente me conduisent d'une part à vouloir réfléchir à ce qui pourrait être la formation scientifique des enseignants de mathématiques : comment s'assurer qu'ils peuvent correctement aborder les phénomènes scientifiques impliqués dans les problèmes proposés aux élèves, débusquer les erreurs qui s'y glissent parfois, et même aller plus loin dans le sens de pouvoir véritablement prendre appui sur les contextes scientifiques afin d'enrichir le travail ou les conceptualisations mathématiques des élèves? Nos échanges en préparation de cette rencontre m'ont cependant fait réaliser que la relation entre une situation de référence (e.g. des voitures qui font la course) et le travail scientifico-mathématique sur celle-ci n'est pas si évidente.

En fait, si l'on regarde du côté des modèles scientifiques eux-mêmes, on constate qu'il est commun en science de présenter et travailler une certaine *lecture* d'un phénomène sans la prétendre absolument juste[2]. Il suffit de penser à la « chute libre », longtemps étudiée *sans tenir compte de la friction de l'air*. Les situations étudiées dans les livres de physique ne sont pas des situations « exactes ». Il n'y a pas réellement de chute libre possible sur Terre, mais on se donne toutefois, dans les cours de physique (et dans la physique comme science!), le droit de *concevoir* une telle situation pour travailler certaines idées. Même si l'on cherche, en physique, à comprendre le mieux possible des phénomènes naturels, on accepte l'inexactitude, ou

[2] On pourrait aussi penser à distinguer la manière dont une personne développe, dans l'action, des « modèles scientifiques », « mathématisations du modèle », « traitements mathématiques » ; l'ordre dans lequel ceux-ci se présentent, les allés-retours, etc.

les simplifications un peu « abusives ». L'explication scientifique d'un phénomène n'est donc pas si simplement juste ou acceptée : la théorie de la relativité d'Einstein est venue complexifier les équations sur le mouvement ou la gravitation de Newton et le modèle atomique de Rutherford-Bohr ne rend pas du tout compte de plusieurs phénomènes essentiels (spin, particules subatomiques, fonction d'onde, interactions quantiques), ce qui n'empêche pas les équations de Netwon ou le modèle planétaire de l'atome d'être utilisés, et enseignés.

Ces observations m'ont conduit à réfléchir plus profondément au rôle possible des contextes ou concepts scientifiques par rapport à l'enseignement des mathématiques. L'adéquation entre l'interprétation scientifique d'un phénomène et sa représentation pour le travail mathématique est-elle si indispensable? En science, la notion de modèle est très importante, et fait l'objet de nombreuses réflexions didactiques (e.g. Drouin, 1988, Molino, 1979). Un travail semblable sur la notion de contexte en mathématique permettrait-il d'être plus clair quant aux rôles attendus pour les contextes scientifiques au-delà des observations concernant leur degré d'authenticité en regard de leur pertinence par rapport au travail mathématique (e.g. Cotnoire, 2010)? Pourrait-on alors regarder les contextes scientifiques comme des situations « concevables » permettant d'aborder, d'approfondir, de raisonner, de pousser telle ou telle idée mathématique? Des situations, donc, qui traduiraient des phénomènes scientifiques sans nécessairement (prétendre, ou suggérer) respecter toutes les contraintes que leur imposent les domaines scientifiques dont elles sont issues, mais que l'on trouverait néanmoins intéressantes à investiguer du point de vue mathématique?

En même temps, on peut se demander si à faire des mathématiques ainsi, on ne se trouverait peut-être pas à faire faire aux élèves autre chose que les « mathématiques traditionnelles », incluant ce qui est généralement proposé quand on pense à la représentation ou à la modélisation de situations scientifiques. C'est en quelque sorte ce qu'affirment Caron et Savard (2012) lorsqu'elles disent que « Dans sa forme traditionnelle, l'enseignement des mathématiques tend à accorder une plus grande attention [au] traitement purement mathématique du modèle, et à négliger le travail des relations qui lient les situations réelles aux modèles utilisés. » (p. 25). Cependant, leur vision de la modélisation et de ses rapports avec les situations de références se tourne davantage vers les aspects d'authenticité et les implications pratiques que vers le travail mathématique (pour) lui-même. Ainsi, elles décrivent la modélisation comme « une forme complexe et exigeante de la résolution de problème [...] qui vise essentiellement à prédire ou à expliquer un aspect de la réalité » (p. 25). C'est en fait l'étape « finale » du cycle de modélisation (e.g. Blum et al. 2002), commandant l'interprétation et la validation du travail mathématique à l'égard de la situation de départ (issue du monde réel, mais, à la première étape, structuré et simplifié pour en faire un problème spécifique avec un but, des objets et des relations qui les lient) qui force un réalisme qui n'est peut-être pas nécessaire au travail mathématique. Mais encore, que pourraient vouloir dire voir les situations comme des prétextes à l'activité mathématique tout en voulant s'appuyer sur l'interprétation pour donner sens à des concepts, des raisonnements, et ainsi de suite?

1.2 Vers une réflexion épistémologique des liens entre mathématiques et sciences

Face à ces difficultés, rencontrées dans la pratique, à articuler les aspects scientifiques aux problèmes mathématiques, j'ai amorcé une recherche afin de mieux comprendre les relations entre mathématiques et sciences, et aussi l'impact de ces relations pour l'enseignement des mathématiques. Mais tout d'abord, il me semble important de discuter certains concepts qui sont utilisés tout au long du mémoire.

1.2.1 Mathématiques et sciences, selon qui?

Selon le Petit Robert (1993), les mathématiques sont « l'ensemble des sciences qui ont pour objet la quantité et l'ordre, l'étude des êtres abstraits (nombre, figure, fonction, etc.), ainsi que les relations qui existent entre eux » (p.1367). Quant aux sciences, il est dit que ce sont « un corps de connaissances ayant un objet déterminé et reconnu, et une méthode propre » et que c'est « un domaine organisé du savoir » (p.2051). Plus couramment, ont les définit comme un « ensemble de connaissances, d'études d'une valeur universelle, caractérisées par un objet (domaine) et une méthode déterminés, et fondés sur des relations objectives vérifiables » (p.2051). Ces définitions sont peu précises et le recours à l'expérience (généralement scolaire) d'avoir soi-même fait des « sciences » et des « mathématiques » participe à rendre moins généraux certains aspects.

Les dictionnaires spécialisés en mathématiques ne définissent pas plus facilement ce que sont les mathématiques. Par exemple, Bouvier, George et Le Lionnais (2001) définissent les mathématiques en parlant « de relations, de structure [...] », qu'elles forment en un tout « cohérent » (p. 525). Les auteurs mettent toutefois en lumière trois « forces » ayant permis aux mathématiques de se développer, la première étant « l'étude de la nature et la recherche des meilleurs moyens pour en tirer parti » (p. 525). À cette première force s'ajoutent l'étude des relations ainsi que la recherche d'un certain esthétisme. La première de ces forces pourrait être envisagée comme ayant permis la formation d'une discipline (la science) de laquelle les mathématiques se seraient tranquillement dissociées pour s'intéresser plus spécifiquement aux deux autres. Les auteurs affirment cependant que cette première force n'a « jamais cessé d'être à l'œuvre » dans les mathématiques (p. 525).

La définition de science proposée dans le Petit Robert est assez vaste et englobe l'ensemble des sciences dites humaines et naturelles ou encore pures. C'est pourquoi je prends la précaution de spécifier que j'entends par sciences, tout au long du mémoire, les sciences dites naturelles. Plus particulièrement, je ferai références à ce qui est entendu dans le PFEQ sous la discipline Science et technologie, regroupant notamment les champs disciplinaires suivants : l'astronomie, la biologie, la chimie, la géologie et la physique (MELS, 2007).

D'autre part, toujours tel que décrit par le Petit Robert, les mathématiques apparaissent sous la forme d'une science aux objets d'intérêts qui lui sont propres. Mon but n'étant pas de parvenir à classifier ou ordonner les deux disciplines en question, je m'en tiendrai donc à la seule spécification précédente. Je retiens toutefois l'idée que ces concepts sont difficilement définissables, qu'ils s'appuient sur certains objets pour définir leur domaine d'intérêt ainsi que sur des méthodes propres permettant une certaine organisation des savoirs qui leur « reviennent ». Qui plus est, ces constatations contribuent à alimenter mes réflexions sur les rapprochements et les distinctions entre les deux disciplines.

1.2.2 Mathématiques et sciences, quelle relation envisager? Vers la formulation d'un objectif et des questions de recherche

Je me suis donc intéressé à la nature de la relation entre mathématiques et sciences. Comment l'appréhender? Peut-il y avoir plus d'un type de relation? Ces questions m'ont amené à étudier les textes de mathématiciens, de philosophes et de scientifiques ayant à la fois travaillé en mathématiques et en sciences. Plus particulièrement, j'ai étudié en détail les textes d'Aristote, d'Archimède et de Gilles Châtelet. Tout d'abord, les nombreuses allusions aux « conceptions aristotéliciennes » que j'ai observées dans les articles de recherche m'ont poussé à vouloir mieux comprendre Aristote. Archimède s'étant intéressé tant à ce qu'on appelle maintenant la mécanique qu'à la géométrie, c'est d'abord par curiosité que je me suis intéressé à ce dernier. En effet, il m'a paru intéressant d'investiguer comment ce personnage presque mythique de l'Antiquité conciliait physique et mathématiques. Finalement, un premier regard sur le livre Les enjeux du mobile (1993) de Gilles

Châtelet m'a permis de découvrir une vision non conventionnelle de la relation entre mathématiques et sciences. C'est afin d'approfondir cette relation que j'ai décidé de m'intéresser davantage à ce philosophe-mathématicien contemporain. Les trois visions particulières qui ressortent de l'étude des textes de ces hommes sont à la base d'une réflexion épistémologique par laquelle je cherche à envisager les possibilités et les impossibilités des relations entre mathématiques et sciences pour la recherche en didactique des mathématiques.

Pour mieux comprendre la vision des mathématiques et de la physique d'Aristote, je me suis appuyé sur les textes *Introduction à la physique aristotélicienne*, d'Auguste Mansion (1913), ainsi que *Physique d'Aristote ou Leçons sur les principes généraux de la nature*, de Jules-Barthélemy Saint-Hilaire, paru en 1862. Les deux livres proposent des interprétations de la Physique d'Aristote, mais le second contient également une traduction française des livres originaux (toutefois tirée d'une traduction anglaise antérieure). Les ouvrages *Métaphysique tome 1* de J. Tricot (1933) ainsi que *Métaphysique tome I, II et III*, de Jules-Barthélemy Saint-Hilaire (1879), permettent de compléter l'analyse amorcée dans *la Physique* et déterminent les premiers pas de ma réflexion épistémologique, me permettant d'amorcer une discussion autour des possibilités et impossibilités d'une telle relation.

C'est aussi par ces analyses approfondies de la vision d'Aristote des mathématiques et de la physique qu'il m'a été possible d'établir un contraste entre celle-ci et celle d'Archimède. Archimède ayant peu écrit, j'ai fait la rencontre de ses idées surtout à partir d'œuvres interprétatives, tel que *La vie des hommes illustres* de Ricard (1858) ou *A History of Greek Mathematics* de Heath (1921), mais aussi via les *Œuvres d'Archimède* de Peyrard (1807), qui offre une traduction de quelques textes originaux ainsi que *Les oeuvres complètes d'Archimède* de Ver Eeke (160). Ce travail d'analyse et de liaison de ces différents textes a permis de développer ma réflexion sur les relations entre mathématiques et sciences, offrant en effet un contraste avec celle d'Aristote et venant justifier l'intérêt, pour la recherche en didactique des mathématiques, d'y travailler du point de vue épistémologique.

Gilles Châtelet est un mathématicien-philosophe contemporain, de plus en plus connu en didactique des mathématiques pour l'importance qu'il accorde au mouvement dans le travail des mathématiciens. C'est toutefois pour ses écrits autour de la relation en mathématiques et sciences (et plus particulièrement en physique), sa vision du physico-mathématiques comme il l'appelle, que je m'y suis intéressé. À travers les ouvrages *Les enjeux du mobile* (1993), *L'enchantement du virtuel* (2010) et *Gilles, Deleuze, Félix Guattari et Gilles Châtelet, de l'expérience diagrammatique* (Dupuis, 2012), j'ai pu approfondir cette idée du physico-mathématique de Gilles Châtelet. Ainsi, contrairement aux deux visions précédentes, visions qui instrumentalisent l'une ou l'autre des disciplines, c'est au contraire une vision unifiée des mathématiques qu'il propose. Cette relation particulière nourrit grandement la réflexion épistémologique entamée par mes lectures précédentes, et bonifie donc le regard porté sur différentes relations entre les mathématiques et les sciences, m'amenant à questionner les possibilités de telles visions pour l'enseignement des mathématiques.

1.2.3 Objectif de recherche

À la lumière du travail épistémologique évoqué à la section 1.2.1, je me suis penché sur différents travaux de recherche souhaitant mettre à profit les liens entre mathématiques et sciences. En effet, le travail autour des textes d'Aristote, d'Archimède et de Châtelet m'a amené à réaliser que beaucoup de chercheurs en didactiques des mathématiques, mais aussi en didactique des sciences et en éducation plus largement, adoptent des postures épistémologiques quant à la relation entre mathématiques et sciences qui évoquent celles développées. Or, si certains le font de manière explicite, par exemple Hanna et Jahnke (1999, 2002), plusieurs véhiculent ces différentes épistémologies sans en faire mention et peut-être même sans en prendre conscience, considérant les tensions ou les contradictions épistémologiques rencontrées quand on lie leurs écrits sous cet angle.

Ces observations, dont je fais une discussion appuyée dans les chapitres qui suivent, m'ont conduit à formuler ce qui peut être considéré comme l'objectif général de cette recherche. En quelques mots, je l'énoncerais de la manière suivante :

OBJECTIF :

> *Mettre en lumière l'intérêt d'un travail épistémologique sur les relations possibles/impossibles entre sciences et mathématiques du point de vue de la recherche en didactique des mathématiques*

De ce point de vue, les trois personnages auxquels je me suis surtout intéressé (Châtelet, Aristote, Archimède) composent en quelque sorte une étude de cas. En effet, il est essentiel de souligner que ces trois auteurs font partie d'une longue série de commentateurs des sciences et des mathématiques. Plusieurs autres grands noms de l'histoire (et d'autres moins connus!) mériteraient à mon avis d'être aujourd'hui relus sous l'angle épistémologique auquel je m'attache ici. Je pense par exemple à Démocrite, Héron, Ptolémée, al-Tusi, Oresme, Copernic, Galilée, Kepler, Descartes, Newton et Leibnitz, Bernouilli, Maxwell, Poincaré, Einstein, de Broglie et beaucoup d'autres! On peut donc voir dans ce mémoire un travail exploratoire en ce sens, que l'on pourrait aussi organiser autour de trois grandes questions :

QUESTIONS :

1 **Comment différentes postures épistémologiques sur la relation entre mathématiques et sciences se manifestent-elles dans la recherche en didactique des mathématiques?**

2 **Comment des telles relations sont-elles aussi observables du point de vue des disciplines scolaires (e.g. dans les manuels, les curriculums)?**

3 **Comment une connaissance de ces épistémologies et une appréciation de ces enjeux pourraient-elles être réinvesties dans l'enseignement des mathématiques?**

1.3 Présentation du mémoire

Dans les pages qui suivent, ce mémoire présente trois chapitres écrits sous la forme d'articles acceptés, soumis et en voie de soumission à des journaux de recherche en didactique des mathématiques, qui sont suivis d'une conclusion dans laquelle je reviens sur l'objectif et les questions de recherche mentionnées à la section précédente.

Le premier texte (chapitre 2) s'intitule *Mathématiques et physique sous l'angle d'Aristote, Archimède et Châtelet* et a fait l'objet d'une soumission à la revue *For the Learning of Mathematics* en avril 2014. La version présentée ici est celle que j'ai retravaillée suite à l'acceptation de l'article par la revue à condition de répondre à certaines questions formulées par les évaluateurs. Cet article est issu d'une première mise en relation entre les propos d'Aristote, Archimède et Châtelet (mais aussi Auguste Compte et Albert Einstein), et les écrits en didactique des mathématiques (Hanna et Jahnke 1999, 2002; Tanguay et Geeraerts, 2012 ; Radford et al., 2002). J'y montre comment on peut reconnaître différentes postures épistémologiques dans certains de ces travaux, et comment un regard épistémologique peut non seulement servir de fondement à ces écrits, mais aussi ouvrir à de nouvelles possibilités sur le plan didactique.

Le chapitre suivant présente un article soumis et accepté, sous demande de révisions, à la *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des* *technologies*, et dont le titre est *De l'(in)existence d'une frontière entre mathématiques et physique* (chapitre 3). Ce texte est issu d'un travail plus spécifique sur la notion de discipline (e.g. Chervel, 1988) et les différentes variantes concernant les relations qu'elles pourraient entretenir du point de vue des curricula (Pang et Good, 2000 ; Czerniak et al., 1999 ; Lederman et Niess, 1998) ou de la classe de mathématiques (e.g. Ducharme-Rivard, 2008). Observant d'une part les demandes explicites de la part du Ministère de l'Éducation, des Loisirs et du Sport à créer des liens entre les disciplines (MELS, 2007), j'y discute ensuite la manière dont se traduisent ces exigences dans deux manuels (un de mathématiques et un de physique) ayant fait l'objet d'une approbation par le Ministère. Ici encore, le point de vue épistémologique s'avère révélateur pour mieux comprendre les enjeux, dans ce cadre, liés à l'(in)existence d'une frontière entre mathématiques et physique (ici autour du concept de vecteur). Une étude historique de l'évolution de ces concepts permet cependant de revoir leur articulation et appuie la vision de Châtelet (2010, 1993), vision unificatrice des mathématiques et des sciences (particulièrement la physique). Cette étude historique à dû être construite, à partir de textes différents (Patonnier, 2004 ; Chaitin, 2002 ; Crowe, 2002 ; Dorier, 2000 ; Pressiat, 1999 ; Dobrovolskij, 1968). En effet, chacun des textes met de l'avant différents aspects des concepts de vecteur et/ou de force, laissant parfois de côté les points de vue des mathématiques ou des sciences, ou encore d'une évolution provenant de l'une ou l'autre des disciplines.

Enfin, le chapitre 4, intitulé *Les contextes scientifiques dans les manuels scolaires, quel usage?*, regroupe mon travail en cours concernant les manuels scolaires de manière plus spécifique. Une première partie de cette étude quantitative et qualitative des problèmes présentés dans différents manuels scolaires approuvés pour l'enseignement des mathématiques au secondaire a fait l'objet d'une présentation sous forme d'affiche à colloque international PME/PMENA en juin 2014. J'y discute d'une part l'importance relative des contextes d'inspiration scientifique dans différentes sections des manuels, puis je discute plus en détail de ce qui apparaît comme des difficultés importantes, du point de vue scientifique, du rendu des situations ou des concepts dans ces problèmes. Une lecture épistémologique appuyée en particulier sur les idées de Châtelet, me permet ensuite de proposer une interprétation plus positive et productive de ces observations.

[Cette page a été laissée intentionnellement blanche]

CHAPITRE II

MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE SOUS L'ANGLE D'ARISTOTE, ARCHIMÈDE ET CHÂTELET

2.1 Résumé

Les liens entre physique et mathématiques ont été l'objet d'étude de scientifiques depuis fort longtemps et, plus récemment, des didacticiens des mathématiques et des sciences. Les chercheurs en didactique des mathématiques qui tentent de s'appuyer sur les liens entre la physique et les mathématiques spécifient rarement le sens qu'ils donnent à ces termes rendant difficile le fondement de ces analyses et leurs nuances. Cet article propose une étude épistémologique sur la nature des mathématiques et de la physique pour conceptualiser les liens entre ces deux disciplines. En revisitant les textes d'Aristote et d'Archimède, représentants de perspectives développées dans la Grèce Antique, et de Gilles Châtelet, un contemporain, trois perspectives sont dégagées, permettant de voir différemment la relation entre les mathématiques et la physique. À partir de ces perspectives, une analyse de certaines recherches en didactique des mathématiques cherchant à tirer parti des relations entre mathématiques et physique permet de développer des fondements épistémologiques pour ces travaux, tout en questionnant certains de leurs aspects.

[Riemann] parvint ainsi, par la pure spéculation mathématique, à la pensée de l'indissociabilité de la géométrie et de la physique, dont l'idée, soixante-dix ans plus tard, devint réalité avec la théorie de la relativité générale, par laquelle la géométrie et la théorie de la gravitation se fondent en une seule entité.

Albert Einstein (1926). Géométrie non-euclidienne et physique.

2.2 Introduction

La citation présentée en exergue, tirée d'un texte d'Albert Einstein, conclut une présentation du célèbre physicien théorique dans laquelle il s'intéresse aux rapports entre la géométrie et la physique à travers l'histoire. Les liens entre physique et mathématiques occupent en effet depuis longtemps les esprits des scientifiques s'intéressant aux mathématiques et/ou à la physique. On connaît non seulement de nombreux « hommes de sciences » dont les travaux ont touché autant une discipline que l'autre (Archimède, Oresme, Newton), mais aussi de nombreux « commentateurs » qui se sont attardés à les présenter (Aristote, Comte, Piaget, Chervel, Serres), certain faisant parfois les deux.

Plus récemment, des didacticiens des mathématiques et des sciences se sont aussi intéressés à ces liens. Par exemple, Hanna et Jahnke (1999, 2002, 2003) se penchent sur l'utilisation de concepts relevant de la physique dans l'enseignement de la preuve en mathématiques pour développer des séquences d'enseignement. Ils cherchent en particulier à tirer profit d'une rencontre entre des concepts ou modèles physiques et des théorèmes mathématiques afin d'aider non pas à les prouver, mais à *comprendre pourquoi ils sont vrais*. Tanguay et Geeraerts (2012) présentent une approche semblable à travers ce qu'ils appellent « la géométrie du physicien-géomètre ». Il s'agit pour eux d'approcher la géométrie *à la manière de la physique expérimentale*, suggérant par exemple que les élèves se basent sur la mesure pour élaborer des hypothèses qui sont ensuite investiguées par l'entremise des mathématiques. Radford, Savage et Roberge (2002) mettent plutôt l'accent sur le *développement de discours scientifico-mathématiques* à travers des situations où physique et mathématiques se rencontrent : par exemple, avec l'étude de la chute d'un corps. Ils mettent en évidence la complexe articulation entre physique et mathématiques dans le discours des élèves, développée à la rencontre des observations empiriques et hypothétiques où traitement mathématique et expérimentation se rencontrent.

Ces trois exemples montrent que les chercheurs en didactique des mathématiques exploitent à leur façon la relation entre mathématiques et physique : par rapprochement conceptuel ou emprunt méthodologique ou en tablant directement sur la présence d'une relation fructueuse entre les deux. Cependant, la nature de cette relation n'est pas directement abordée dans ces recherches. De plus, elle semble souvent conceptualisée d'une manière qui ressemble assez peu à ce qui est mis de l'avant par Einstein lorsqu'il dit que « la géométrie et la théorie de la gravitation se fondent en une seule entité ». Peut-on alors encore penser à des rapprochements conceptuels ou à des emprunts méthodologiques? Quels rôles la physique peut-elle jouer dans cet enrichissement des mathématiques?

Pour aborder ces questions, je propose une étude épistémologique[3] à partir des écrits de trois philosophes et praticiens des sciences et des mathématiques qui se sont explicitement penchés sur la relation en physique et mathématiques: Aristote, Archimède et Gilles Châtelet. D'autres grandes figures auraient pu être convoquées, à commencer par Husserl (2010) qui écrit à propos de la science en prenant la géométrie comme « cas », Newton ou Platon du côté des anciens, et Vygotsky, Michel Serres, Alfred Tarski ou même Stephen Wolfram chez les penseurs plus proche de nous, sans compter tous ceux dont le discours sur les sciences *ou* les mathématiques pourrait être revisité sous cet angle (Descartes, Kant, etc.). C'est dire la richesse du sujet. Le choix présenté ici permet de dresser un premier portrait accessible de la question en montrant à la fois les ressemblances et les nuances entre les perspectives développées dans la Grèce Antique, puis dans le travail d'un contemporain pour qui l'intérêt est grandissant dans notre domaine (e.g. Sinclair, de Freitas & Ferrara, 2013).

[3] On notera aussi que je limite cet article à certains aspects de la question regardée du point de vue épistémologique. Un travail à partir des observations d'épistémologues tels que Piaget (1972) ou Lakoff et Nunez (2003), par exemple, aurait conduit à un tout autre type d'analyse.

Je montre aussi comment ces trois perspectives peuvent être rapprochées du travail des chercheurs en didactique des mathématiques mentionnés plus haut. Je propose de considérer ces rapprochements comme : (a) une occasion de développer un fondement épistémologique pour les travaux s'intéressant aux liens entre physique et mathématiques, mais aussi (b) de venir « troubler » ces postures, encourageant les chercheurs du domaine à s'engager sur le plan épistémologique afin de générer de nouvelles questions faisant avancer notre champ de recherche (Proulx et Maheux, 2012). Dans la section suivante, les perspectives d'Aristote, d'Archimède, et Châtelet sont présentées. Je reviens ensuite sur les travaux de Hanna et Jahnke, Tanguay et Geeraerts ainsi que Radford, Savage et Roberge en considérant les épistémologies développées. Cet article se voulant une sorte d'introduction à la problématique susmentionnée, il facilitera la lecture d'autres travaux qu'il sera éventuellement important de discuter, en particulier ceux de Roth (e.g. sous presse; 2014; 2003) autour de l'activité graphique des scientifiques, et les articles récents qui portent les écrits de Châtelet dans notre domaine.

2.3 Trois perspectives sur les relations entre mathématiques et physique

2.3.1 Aristote (-384, -322), ou la physique comme révélatrice de mathématiques

Dans le second chapitre du livre XIII de la *Métaphysique*, Aristote se questionne sur la nature des mathématiques. Après avoir reconnu dans le livre III que « les êtres mathématiques ne peuvent se retrouver dans les choses sensibles » (Aristote, XIII, 1, §12, 1879c)[4], il détermine, par un travail laborieux, qu'elles sont antérieurement logiques aux êtres, mais elles ne leurs seront jamais substantiellement antérieures (§14). Autrement dit, bien qu'elles ne soient pas dans les choses sensibles, c'est à

[4] Cette notation signifie Aristote, Livre XIII, Chapitre I, Paragraphe 12. De plus, pour ne pas alourdir la lecture du texte, je référerai dorénavant à Aristote par Λ dans les références relatives à la traduction dans St-Hilaire.

partir de ces dernières qu'il est possible de les apercevoir. Or, ces choses sensibles à travers lesquelles les mathématiques sont approchées appartiennent précisément au monde « naturel » de la physique, dont l'étude rationnelle permet d'extraire certains aspects qui appartiennent aux mathématiques (Λ, XIII, 3, §5, 1879c). Une discussion semblable, entre la physique et les mathématiques, apparaît dans *Derniers Analytiques* :

> C'est qu'ici, en effet, la connaissance du fait appartient à la science qui relève uniquement des sens [entendre ici la physique], et la connaissance de la cause appartient aux sciences mathématiques. Ce sont elles qui, seules, possèdent les démonstrations des causes, ignorant d'ailleurs souvent si la chose existe [...] parce qu'elles n'y regardent pas. (Λ, I, 13, §15, 1842)

La physique apparaît donc pour Aristote comme la science de la nature (Λ , I, 1, §1, 1862a), lieu des êtres naturels. Il affirme du même coup que les mathématiques peuvent permettre de comprendre comment certains phénomènes se produisent, mais qu'ils ne peuvent répondre à « pourquoi » ils se produisent. La raison tient dans la distinction que propose Aristote entre la forme et l'essence des objets du monde naturel. La physique cherche à comprendre le monde en s'intéressant à la forme *et* à sa nature, par laquelle la forme acquiert certaines propriétés, alors que les mathématiques s'intéressent à la forme en faisant abstraction de ces propriétés, et donc de la nature des objets. Le physicien qui étudie le Soleil ou la Lune considère qu'il s'agit d'objets massifs, plus ou moins sphériques, ayant une température et une composition donnée. Le mathématicien, au contraire, se défait de ces considérations pour ne s'intéresser qu'à la forme (e.g. des sphères, des elliptiques), sans tenir compte des propriétés des formes qu'il révèle, ou du fait que ces formes proviennent ou non du « monde réel » (Λ, II, 2, 1862b). Or, ce qu'Aristote considère comme la cause des choses est intimement liée à leur essence, considérée comme *mouvement* au sens d'un déplacement spatial et en tant que transformation, les faisant donc appartenir au domaine de la physique (Λ, VII, 3, §3-§6, 1862b).

Par exemple, une pierre est *formée* par *l'assemblage* des éléments qui la composent et s'unissent pour lui donner des caractéristiques que l'on mesure dans l'espace (y compris la masse, qui est associée à un déplacement relatif), et une pierre est aussi *transformée* en colonne pour un temple, fonction qu'elle peut occuper grâce aux propriétés physiques qu'elle possède (le mouvement comme devenir est discuté longuement dans le livre V de La Physique, ainsi que dans Les Catégories, chapitre XIV).

La distinction entre les mathématiques et la physique va au-delà des considérations autour des objets dont chacune s'occupe. En effet, Aristote laisse entendre que cette distinction concerne aussi les *buts* recherchés par ces disciplines, ainsi que les *moyens* qu'elles emploient. D'une part, si les efforts portés par les mathématiques concernent des objets qui ne sont *pas* les êtres (mais uniquement leur forme ou des quantités particulières révélées par ces êtres), ces efforts ne sont pas non plus guidés par le besoin de comprendre la nature, mais plutôt de comprendre des cas particuliers. C'est la particularité des objets mathématiques qui intéresse mathématiquement en tant que ces objets sont mathématiques dans leur particularité. Dis simplement, il ne s'agit pas de comprendre le monde, mais de comprendre les mathématiques *révélées* par le monde. Il s'en suit que les moyens de l'une des disciplines diffèrent de ceux de l'autre : les mathématiques utilisent des moyens de la même espèce que les objets qu'elle étudie, elles se servent d'outils développés à partir des objets mathématiques (par exemple des théorèmes, des formules...) pour répondre à ses questions. La physique de son côté procède de manière similaire, faisant usage de moyens physiques et donc sensibles (e.g. des instruments de mesure) pour enrichir sa compréhension du monde.

La distinction développée par Aristote, bien que permettant de classifier ce qui relève ou ne relève pas des mathématiques ou de la physique, mène néanmoins à quelques cas complexes particulièrement intéressants. Ce sont des cas où il y a mélange entre la nature des moyens permettant de parvenir à la compréhension d'un phénomène et la motivation première. Ainsi, Aristote explique que l'optique, l'harmonie et l'astronomie sont des disciplines « récalcitrantes » aux définitions des objets d'études des mathématiques et de la physique, en raison de la conjugaison entre la manière dont on y fait l'étude et les buts recherchés. Par exemple, l'astronomie et l'optique sont toutes deux des sciences qui se fondent sur la géométrie. Cependant, contrairement à la géométrie qui s'inspire de la réalité pour étudier les formes qu'elle peut y abstraire, l'astronomie et l'optique s'inspirent des réalités qui les concernent pour en extraire les objets géométriques *dans le but précis* d'étudier les astres ou la lumière (et non pas les objets géométriques). Ces deux sciences utilisent donc des outils qui relèvent des mathématiques (des figures géométriques et des théorèmes associés) non pas en tant qu'êtres mathématiques : elles s'en servent en tant que représentants de « réalités » dans le but de comprendre le monde physique. La finalité de ces sciences est donc d'ordre physique, mais leurs moyens sont empruntés aux mathématiques, au point de faire dire à Aristote qu'elles relèvent d'une branche plus « physique » des mathématiques (Λ, II, 2, §7, 1862b).

Dans l'ensemble, on peut dégager l'idée d'une relation entre mathématiques et physique où les deux disciplines, fortement séparées, évoluent en parallèle l'une de l'autre; la physique permettant néanmoins de « nourrir » les mathématiques en objets d'intérêt. En révélant la présence d'objets mathématiques (e.g. des nombres, des figures, des relations), la physique donne accès à des entités dont l'origine est familière. Nous apprenons de la physique *pourquoi* nous nous intéressons à la sphère ou au cercle obtenu en déplaçant une pierre attachée par une corde à un piquet. Mais ce sont les mathématiques qui permettent de comprendre *comment* ce que nous imaginons alors est un cercle ou une sphère, et ce qui fondamentalement les unit. Dans certains cas, de l'étroitesse de la relation entre les deux disciplines, qui demeurent fondamentalement distinctes, naît des cas où les objets mathématiques sont si proches des phénomènes du monde observable qu'il devient possible de raisonner mathématiquement sur eux. Il en résulte alors des compréhensions du monde qui sont aussi des compréhensions mathématiques. De manière ontologique (c'est-à-dire relative à ce que sont les mathématiques et la physique en eux-mêmes) cependant, la nature de ces compréhensions reste accidentelle : il y a coïncidence, mais les objets qui se rencontrent alors ne s'unifient pas pour autant. Qui plus est, une certaine directionalité de la relation entre mathématiques et physique est préservée : la physique étant toujours révélatrice des mathématiques. En revanche, les mathématiques contribuent à mieux faire comprendre le monde en ce qui a trait aux formes qui l'habitent. Les mathématiques sont en ce sens « au service » de la physique, servitude qui en revanche donne accès à ces entités littéralement abstraites du monde.

2.3.2 Archimède (-287, -212), ou la physique comme évocatrice de mathématiques

Archimède, qui succéda à Aristote de moins d'un siècle, présente une vision qui, si elle partage certains éléments de celle de son prédécesseur, s'en distingue de manière importante. Reconnu pour ses nombreuses inventions et découvertes, tant mathématiques que physiques, Archimède n'avait de réel intérêt que pour les mathématiques et ne considérait ses connaissances et ses découvertes en physique que dans la mesure où elles lui permettaient de confirmer ses intuitions et, ultimement, de proposer des avenues vers des possibles preuves mathématiques (Ricard, 1858). C'est ainsi que, dans *La Méthode relative aux théorèmes mécaniques*, Archimède explique comment la mécanique l'a guidé dans la rédaction de certaines preuves géométriques qu'il n'aurait pu résoudre en considérant la position des géomètres de l'époque sur les infinitésimaux (Peyrard, 1807). Archimède reste cependant très réticent face à ces résultats, comme le rapporte Heath (1921) : « certain things [...] first became clear to [him] by a mechanical method, although they had to be proved by geometry afterwards because their investigation by the said method did not furnish an actual proof » (p. 21).

Ainsi, il apparaît qu'Archimède n'entrevoyait qu'un rapport de servitude de la physique vers les mathématiques. Les distinctions entre les visions d'Archimède et d'Aristote sur la relation entre mathématiques et physique méritent donc de s'y arrêter. Alors qu'Aristote entrevoit que les mathématiques puissent faire abstraction de la réalité sensible dans laquelle elles sont perceptibles, Archimède insiste sur le fait que les observations d'ordre physique ne donnent pas véritablement accès aux idées mathématiques. Le monde sensible peut cependant servir *d'inspiration* pour travailler en mathématiques et en ce sens il ne cherche pas à isoler les mathématiques de la physique pour mieux les étudier. En effet, bien qu'il reprenne la distinction platonicienne qui sépare de manière fondamentale les idées (mathématiques) du monde sensible, Archimède propose de faire vivre la réalité du monde physique aux mathématiques pour, par la suite, mieux les comprendre, mieux les découvrir, mieux les prouver :

> In [The Method] Archimedes tells us how he discovered certain theorems in quadrature and cubature, namely by the use of mechanics, weighing elements of a figure against elements of another simpler figure the mensuration of which was already known. (Heath, 1921, p. 21)

Pris de la sorte, on réalise que pour Archimède le monde n'incarne pas des entités mathématiques, mais, pourrait-on dire, les *évoque*. C'est ce pouvoir de suggestion qu'Archimède met de l'avant, et qui ne porte pas uniquement sur des objets ou leurs relations, mais permet aussi d'imaginer des méthodes intéressantes pour le travail mathématique (j'y reviens).

On constate ainsi une différence importante entre la posture épistémologique d'Archimède et celle d'Aristote concernant les relations entre mathématiques et physique. Les mathématiques physiques d'Aristote sont intrinsèquement proches de certains phénomènes physiques et cette proximité rend possible leur emprunt quand vient le temps de décrire certains phénomènes du monde. Une différence avec la position d'Archimède sur la relation entre mathématique et physique se pose : pour ce dernier, la recherche en physique (et tout particulièrement en mécanique) permet de *s'approcher* des idées mathématiques. C'est en quelque sorte pour lui la raison d'être principale de la physique, qui se trouve donc à son tour considérée comme étant au service de sa vis-à-vis! Par ce revirement qui pourrait surprendre à la vue des nombreuses inventions attribuées à Archimède (on dit que son travail comme mathématicien est assez peu connu même dans l'Antiquité), se découvre donc un projet pour ainsi dire à l'opposé de celui d'Aristote : saisir les mathématiques à l'aide du monde physique, plutôt que de faire des mathématiques pour mieux comprendre le monde.

Il faut revenir sur les éléments de méthode qui permettent de bien voir la manière particulière dont Archimède conçoit le rapport entre mathématiques et physique. J'ai fait référence au fait que sans la mécanique, Archimède n'aurait pu résoudre certaines propositions géométriques. Son travail bien connu sur la quadrature de la parabole, en lien avec le principe de levier qu'il a lui-même théorisé, est un exemple souvent discuté : se servant de mesures obtenues en comparant successivement le poids des segments d'une section de parabole avec ceux d'un triangle (connus), il a pu trouver l'aire de la section de parabole, mais aussi identifier une relation mathématique permettant d'obtenir ces poids (et donc ces aires) par calcul plutôt que par mesure. Il y parvient au moyen de sommes de « petits nombres » dans lesquelles on reconnaîtra plus tard une amorce au calcul différentiel. Ce faisant, Archimède va au-delà de l'intuition que lui offre l'observation du monde physique et fait des « théories mécaniques » des outils mathématiques pour prouver certaines propositions, essayant autant que possible de les faire cadrer dans les méthodes géométriques orthodoxes de l'époque. Il ne s'en contente cependant pas et c'est pourquoi après avoir illustré certains théorèmes par la mécanique, il s'efforce de les prouver mathématiquement :

> La recherche de la démonstration précédée d'une certaine connaissance des questions par cette méthode [mécanique] est, en effet, plus aisée que sa recherche sans cette connaissance. Et c'est ainsi que, pour ce qui concerne les propositions relatives au cône et à la pyramide, dont Eudoxe a le premier trouvé la démonstration [...], l'on doit attribuer une part non négligeable à Démocrite qui, le premier, a affirmé les choses, sans démonstration [...] En effet, je suis persuadé qu'à la faveur de cette méthode, une fois qu'elle aura été exposée, d'autres propositions, qui ne se sont pas encore présentées à moi-même, seront trouvées par d'autres... (Archimède, dans Ver Eecke, 1960, 478-479)

Archimède établit donc une distinction importante entre le fait de *montrer* une proposition mathématique, la rendre visible, sensible, et celui de la *démontrer*, la rendre intelligible, sensée. S'excusant comme d'autres avant lui d'énoncer des propositions dont la preuve mathématique reste à faire, il insiste néanmoins sur l'apport d'une méthode passant par la physique afin de découvrir, de faire « trouver » des théorèmes que l'on prouvera éventuellement de manière rigoureuse. Ainsi s'attarde-t-il à démontrer géométriquement des théorèmes d'abord présentés en considérant des propriétés mécaniques (e.g. un centre de gravité), ou des évidences physiques (les côtés d'un prisme droit sont parallèles), fournissant parfois plusieurs « propositions » du même théorème présentant un degré croissant de « pureté » mathématique.

On retient donc d'Archimède l'idée d'une physique au service des mathématiques dont le pouvoir évocateur dénote une irréconciliable séparation entre ces deux disciplines. L'action de mettre en œuvre les idées mathématiques dans des configurations aux propriétés physiques évocatrices de relations mathématiques permet d'entrevoir des vérités mathématiques qu'il faudra néanmoins démontrer en propre. Archimède ne s'étend pas sur des questions philosophiques concernant la nature du monde, ou sur des distinctions possibles entre les « pourquoi » et les

« comment » de formes qui habiteraient mathématiquement le monde. Son travail suggère cependant de distinguer la réalité sensible de la vérité mathématique, de telle sorte que chacune soit porteuse de ses propres causes et définitions, et faisant de la métaphore une voie privilégiée nous permettant de concevoir *à partir* du monde sensible des entités *à part* de celui-ci.

2.3.3 Gilles Châtelet (1944, 1999), ou la provocation du physicomathématiques

Dans son texte à propos de la géométrie non-euclidienne et de la physique, Einstein (1926) retrace rapidement l'histoire de la géométrie à partir de l'Antiquité, expliquant comment elle s'est peu à peu transformée en une « science mathématique ... [indépendante] de ses fondements empiriques » (p. 1-2). Il nous explique ensuite comment le travail de mathématiciens et de physiciens a finalement conduit à retrouver l'indissociabilité de la géométrie et de la physique par laquelle elles se fondent en une seule entité. Radicalement différente des positions développées par Aristote et Archimède, cette perspective a fait l'objet d'un travail de fond de la part du Gilles Châtelet (1993), dont le travail gagne en popularité en didactique des mathématiques (e.g. Bautista et Roth, 2012; de Freitas et Sinclair, 2013; Roth et Temple, sous presse; Maheux et Proulx, soumis) pour l'attention qu'il donne à l'aspect *mouvant* des mathématiques.

Un peu à la manière d'Einstein, Châtelet (1993) propose une vision unifiée des mathématiques et de la physique. Il emprunte aux « mondes » des mathématiques et de la physique plusieurs exemples historiques lui servant à illustrer comment ces deux disciplines, loin d'êtres séparées, sont en fait constamment articulées. Montrant comment l'une répond aux mouvements de l'autre, Chatelet dresse le portrait historique de leurs relations convergentes ou divergentes en tant qu'*opérations de l'esprit* prenant leur source chez Aristote. En ordonnant les disciplines (antériorité logique des mathématiques et substantielle de la physique), Aristote, explique-t-il, attire tant l'attention sur l'établissement d'un « terrain » à explorer pour chacune d'elles (l'abstrait aux mathématiques et le concret à la physique), qu'il fait perdre de vue le fait que toutes deux évoluent autour de « problématiques communes » (p. 23). Cet oubli, qui résulte en une distanciation conceptuelle des disciplines, est encore fortement perceptible dans la plupart des épistémologies actuelles[5].

Châtelet s'intéresse à cette inséparabilité et à l'idée selon laquelle chacune de ces disciplines évolue autour de problématiques communes en y portant cependant un regard particulier, chacune abordant « les questions à sa manière, sans se sentir menacée par ses rivales » (Châtelet, 1993, p. 23). Il dénonce en effet non seulement la volonté d'émancipation mutuelle de la physique et des mathématiques portée par certains, mais surtout le rapport hiérarchique, voire prédationniste, qui découle de cette distanciation des deux disciplines : « Certains débats contemporains ne semblent concevoir [...] que des rapports de servilité ou de perpétuelle bouderie, en oubliant qu'en Occident, depuis vingt-cinq siècles, [...] la mathématique et la physique se sont toujours (bon gré mal gré) accompagnées » (Châtelet, 1993, p.22-23).

Ainsi, il n'est pas question pour Châtelet de subordination entre physique et mathématiques, suivant une dominance qui serait soutenue par exemple par la nature des objets ou les finalités qu'il serait possible de leur attribuer. Il ne s'agit ni d'emprunter ni d'appliquer des mathématiques ou de la physique à l'une ou à l'autre, dans un rapport utilitariste qui nie les transformations réciproques nécessaires à garder actives, vivantes, et en plein développement les disciplines. Châtelet ne propose pas non plus que le travail dans une discipline conduise à une meilleure compréhension de l'autre. Il insiste plutôt sur la manière dont elles *se transforment*

---

[5] Le constructivisme radical de Glasersfeld (e.g. 1995) en est un bon exemple, où l'expérience du monde est ontologiquement séparée des structures cognitives auxquelles il donne lieu.

l'une l'autre en provoquant l'élargissement de leurs champs d'action. La discussion que fait Châtlet sur le travail d'Oresme permet d'illustrer ces propos.

Au 14e siècle, Oresme, en travaillant sur le « mouvement du mouvement », cherche à calculer la distance parcourue par un corps dont la vitesse est en continuel changement. Ce phénomène physique pose le problème de se laisser saisir par les sens en imposant de considérer plusieurs dimensions à la fois (le temps, la distance parcourue, le changement de vitesse, la comparaison de différentes vitesses), et se complexifie par la mise en œuvre d'un appareillage permettant de faire des mesures. Oresme y parvient en calculant la distance parcourue à l'aide d'une représentation tenant compte à la fois des vitesses et des distances selon des unités de temps (Figure 1). Dans les trois cas, la distance parcourue par le mobile correspond à l'aire de ce que Châtelet appelle déformation d'un rectangle étalon (à gauche), qui devient un triangle ou un trapèze par exemple.

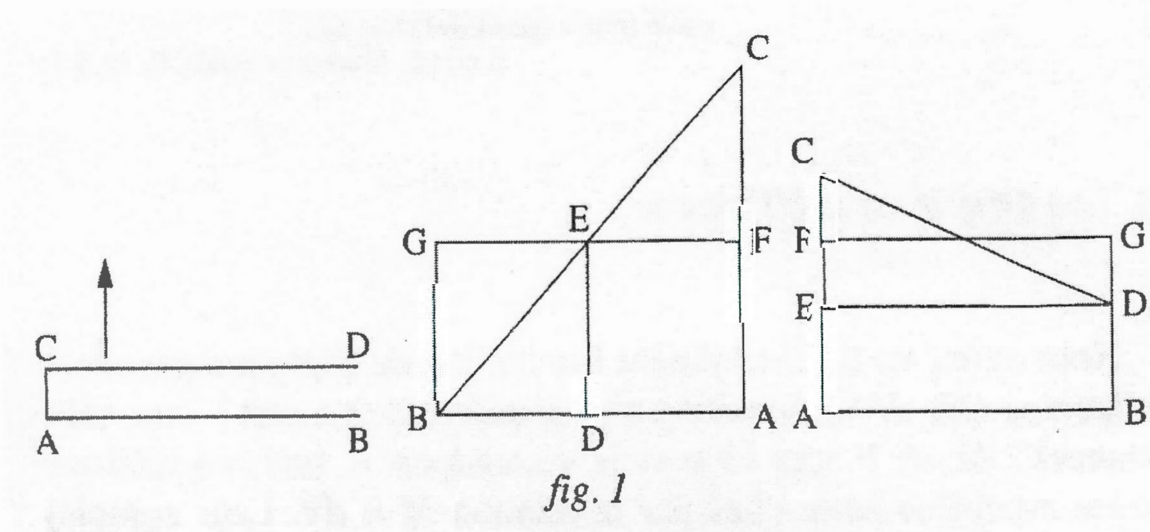


Figure 2.1 Diagramme d'Oresme tiré de Châtelet (1993)

(un segment (partant de C) représentant la vitesse pour unité de temps se déplace verticalement en fonction de l'intervalle de temps considéré (AB). Dans tous les cas (de gauche à droite : vitesse constante, accélération, décélération), les différents mouvements sont caractérisés par la déformation du rectangle étalon (à gauche).)

Châtelet explique que le travail mathématique d'Oresme sur les vitesses vient transformer les concepts de rectangles et de triangles, et qu'en même temps ces concepts géométriques viennent changer (et enrichir) les notions physiques de temps, distance, déplacement, etc. Les figures, dit Châtelet, ne sont plus statiques, mais dynamiques : elles se déforment pour répondre des changements de vitesse. Elles gagnent une élasticité et une mobilité qui leur permettent de participer à la compréhension d'un phénomène au lieu d'être simplement le produit fini d'une compréhension (Sinclair et al., 2013), et c'est peu à peu toute une (nouvelle) géométrie de morphismes qui pourra voir le jour. De façon plus immédiate, analyse Châtelet, la relation entre les aires des figures (correspondant aux distances parcourues) vient troubler les positions mathématiques de l'époque sur les infinitésimaux, contribuant à l'émergence d'un nouveau champ des mathématiques qui s'affirmera plus tard, notamment grâce à Leibniz. De son côté, le physicien a désormais accès à de nouvelles relations (entre vitesses), et une manière de s'intéresser à d'autres phénomènes qui échappent aux sens, tels que le concept de force qu'on retrouvera au cœur du travail physico-mathématique de Newton, par exemple.

Cette manière de concevoir le monde qui nous entoure, résultant d'un éveil de potentialités latentes, un élargissement des champs, une explosion dans laquelle les deux disciplines se provoquent mutuellement tout en s'intéressant au monde, Châtelet la qualifie de « physico-mathématique » :

L'objet qu'on a en face de soi, ce n'est jamais un objet « physique », ce

> n'est jamais un objet mathématique, c'est toujours un objet physico-mathématique. Et faire de la physico-mathématique c'est trouver une forme d'adéquation entre les virtualités mathématiques de la chose et les complexes expérimentaux avec lesquels je peux faire exploser [cet objet]. (Châtelet, 1987, p. 11)

2.4 Un retour sur quelques travaux en didactique des mathématiques

À la lumière de ces trois visions des relations possibles entre mathématiques et physique, revenons maintenant sur certains travaux mentionnés en introduction qui cherchent à tirer parti de ces relations. Je propose de mettre en lumière quelques rapprochements possibles entre ces travaux et les épistémologies qui viennent d'être présentées, y voyant d'abord l'occasion de développer un fondement épistémologique pour les travaux s'intéressant à mettre à profit les liens entre physique et mathématiques. Mais du même coup, je propose de remettre en question ces travaux au moyen de réflexions épistémologiques telles qu'amorcées ici.

2.4.1 Hanna et Jahnke

Hanna et Jahnke (2002) entrevoient l'idée d'employer dans les preuves mathématiques des principes ou concepts relevant de la physique, par exemple l'unicité du centre de gravité, en les considérant comme s'ils étaient des axiomes ou des théorèmes. Argumentant que l'utilisation de ces concepts permet un éclairage nouveau et intuitif à des théorèmes mathématiques, ils proposent ainsi d'amener d'abord les élèves à observer à partir des outils « empruntés » à la physique que les médianes d'un triangle se croisent en un même point, pour ensuite les amener à comparer cette preuve empruntant des arguments provenant de la physique avec une preuve traditionnelle dite « purement » mathématique (Hanna et Jahnke, 2002).

Une telle proposition rappelle immédiatement les écrits d'Archimède discutés précédemment (et d'ailleurs cité en exemple dans certains des travaux de Hanna et

Jahnke (1999, 2002)). En effet, en cherchant à expliquer ce qu'ils entendent par « aguments from physics within mathematical proofs » (Hanna et Jahnke, 1999, p. 872), ces auteurs, par l'entremise d'histoires de mathématiciens servant à exemplifier leur propos, concluent que cette approche « led to considerable progress in the calculus of variations » (Monna, 1975, dans Hanna et Jahnke, 1999, 3-76). Ce point de vue conforte la vision d'Archimède, qui voit la physique au service des mathématiques. Cependant, lorsqu'ils donnent des exemples de manifestations dans le monde de l'éducation de l'application de la physique en mathématiques, Hanna et Jahnke expliquent que les preuves qui découlent de l'étude de phénomènes ne sont pas moins rigoureuses que celles obtenues par démonstrations mathématiques. La physique n'est alors pas simplement un outil proposant l'orientation vers la démarche permettant de prouver un théorème, mais un *complément* à ces démonstrations permettant aux mathématiques de prendre un sens. Cette affirmation indique alors une séparation marquée avec Archimède, mais ne semble pas remettre en question la séparation posée par Aristote entre la connaissance du monde sensible et la vérité mathématique. Placer dans l'observation du monde physique le « sens » des idées mathématiques évoque aussi fortement la pensée d'Aristote et sa distinction entre le pourquoi et le comment des phénomènes mathématiques. On peut aussi se demander dans quelle mesure la relation entre physique et mathématiques mise en œuvre ici se rapproche de la perspective épistémologique de ce dernier lorsqu'il trouve « incarnées » dans le monde physique des phénomènes mathématiques qu'il s'agit alors d'extirper.

Un rapprochement timide avec la vision physico-mathématique de Châtelet se dessine néanmoins. En effet, considérer sur le même plan les preuves physiques et mathématiques suggère d'une part de rompre avec le rapport de préséance d'une discipline sur l'autre et ouvre vers l'idée que les deux disciplines s'intéressent, chacune à sa manière, aux mêmes phénomènes. Mais en se limitant à vouloir améliorer la compréhension des idées mathématiques en jeu par les élèves, Hanna et

Jahnke passent à côté de l'élément essentiel de la pensée de Châtelet : la *transformation* des disciplines provoquée par le physico-mathématique.

On peut cependant imaginer cette transformation dans le contexte scolaire à partir de certains propos des auteurs. Hanna et Jahnke (2002) avancent par exemple l'idée qu'une vision « holistique » de telle ou telle preuve mathématique puisse être produite par une étude physique : « (...) using an argument from physics may also help create a « holistic" version of a proof, one that can be grasped in its entirety » (p.1). Cette vision holistique suggère que le travail en physique fait plus que guider vers une preuve mathématique, et même plus que de rendre convaincant tel résultat en montrant « pourquoi ça marche ». Elle propose que la physique sorte d'une certaine manière la preuve d'elle-même, qu'elle conduit à transformer le monde mathématique de l'élève en lui permettant de « saisir » la preuve dans son entièreté pour la considérer un nouvel objet du monde mathématique, une nouvelle possibilité d'action *indépendamment* du détail, essentiel du point de vue mathématique, de « comment » elle fonctionne. Prise comme un tout, la preuve apparaît dans un paysage mathématique provoqué par la physique comme un phénomène *justifié* par l'observation du monde sensible et appartenant donc, d'office, au nombre des objets dont les mathématiques *doivent* s'occuper. La découverte du centre de gravité d'un triangle fait « exploser » la figure en lui donnant tout à coup un nouveau point auquel (on doit!) s'intéresser, que l'on s'efforcera de capturer mathématiquement. Point qui une fois saisi, compris, pourrait bien ouvrir la porte à de nouvelles idées mathématiques, comme celle de l'inscription du triangle dans un cercle...

2.4.2 Tanguay et Geeraerts

Cette provocation du mathématique par la physique est davantage marquée dans le travail de Tanguay et Geeraerts (2012) quand ils proposent d'étudier la géométrie de la même manière que l'on étudie la physique expérimentale. En tentant de réhabiliter le rôle de la mesure en géométrie par l'entremise de la géométrie du physicien-géomètre, ces chercheurs mettent de l'avant la difficulté à passer d'une géométrie du perceptible à une géométrie axiomatique formaliste. C'est donc reconnaître dans la démarche du physicien, dans la mesure empirique et l'observation expérimentale, une source fertile pour la production d'idées mathématiques *nouvelles* du point de vue de ceux qui en font ainsi l'expérience.

Ici encore, cependant, les auteurs de ces travaux sont portés à réduire la contribution du travail en physique à une meilleure compréhension (de la preuve) en mathématiques. Ils expliquent ainsi comment leur géométrie du physicien-géomètre vise essentiellement à amener les élèves à passer du perceptible à l'axiomatique, qui s'érige comme finalité. On y rencontre donc, comme chez Hanna et Jahnke, une vision utilitariste de la relation entre mathématiques et physique présente chez Archimède. Et faisant pour l'occasion dominer en importance le raisonnement mathématique à la compréhension du monde sensible, on reconnaît bien alors une posture épistémologique très proche de celle d'Aristote au sens où l'on cherche encore à "dégager" du sensible les idées mathématiques que la mesure révèle. Il est toutefois intéressant de noter le pouvoir *évocateur* des résultats de la physique, qui semble ici jouer un plus grand rôle : il s'agit moins de situer dans le physique l'origine des concepts mathématiques que d'y former certaines intuitions, comme c'est bien le cas chez Archimède. Mais il ne faudrait pas trop vite oublier que les objets dont Tanguay et Geeraerts prétendent se préoccuper sont, pour eux, des objets *mathématiques* en eux-mêmes. C'est la mesure répétée des *angles* internes d'une série de triangles qui conduira à vouloir une preuve du résultat généralement observé concernant leur somme qui les intéressent, et non pas, par exemple, l'observation du fait que 3 copies d'un même triangle peuvent toujours être alignés de la manière suivante (figure 1) :

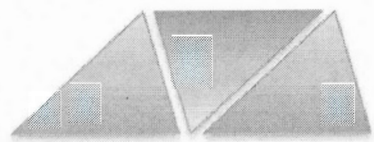


Figure 2.2 L'alignement remarquable de trois objets triangulaires identiques

La nuance illustrée entre les propos d'Archimède, travaillant sur les objets physiques évocateurs d'objets mathématiques idéaux, et ce dont nous parlent Tanguay et Geeraerts quand ils souhaitent s'inspirer de la démarche en physique pour travailler sur des objets mathématiques, est en bonne partie épistémologique. Alors qu'Archimède, comme Aristote, se refusait l'accès direct aux objets mathématiques et considérait leurs représentations mêmes comme des phénomènes physiques, Tanguay et Geeraerts semblent envisager les *figures* (mathématiques) comme des représentants directs des entités mathématiques (une distinction bien connue par opposition au *dessin*, par exemple, qui n'est pas présenté et traité *qua* des propriétés géométriques que l'on y fait figurer). Cette discussion manque, hélas, à leurs travaux. Elle manque d'autant plus qu'elle permettrait peut-être de faire basculer leur conceptualisation des liens entre physique et mathématiques du côté de ce que Châtelet propose. La notion de figure repose en effet très précisément sur l'unicité du physico-mathématiques, montrant combien mathématiques et physique sont en fait inséparables. La preuve d'existence d'une entité ouvertement mixe montre que les deux disciplines se touchent, s'interpénètrent. Ces points de contact, ces lieux (en) communs, ces zones hybrides sont en fait au cœur du travail de Châtelet qui, lui, nous parle plus précisément du cas des diagrammes. Le diagramme, comme la figure, est une trace dans le monde physique dont l'épaisseur provoque des possibilités que l'objet mathématique *qua* mathématique ne permet pas d'envisager. C'est ainsi *l'inexactitude* de la mesure physique aussi bien que *l'épuisement* d'une approche tant soit peu systématique de différents cas de figure qui demandent aux mathématiques de prendre le relais de la physique dans la connaissance de ces objets qui sont tous bel et bien matériellement constitués, mais tous aussi, en même temps, exemplaire, et donc idéaux.

2.4.3 Radford, Savage et Roberge

Le cas de Radford, Savage et Roberge (2002) diffère sensiblement des deux précédents du point de vue de la visée que l'on prête au travail convoquant physique et mathématiques. En effet, ces chercheurs s'intéressent, à partir d'une séquence d'enseignement mettant à profit le phénomène de la chute des corps et les fonctions, à la manière dont se développe le discours scientifico-mathématique à partir de la rencontre du vécu quotidien et de la rigueur présente en mathématiques. Les élèves ayant préalablement et séparément abordé les idées physiques et mathématiques en jeu, c'est la rencontre de l'expérience sensible du rebondissement d'une balle et du travail sur les fonctions affines et non affines qui intéresse les chercheurs. En ce sens, on peut reconnaître en partie la posture d'Aristote qui marie mathématiques et physique avec l'idée de comprendre *comment* les mouvements observés se produisent sans nécessairement vouloir en donner la raison (le pourquoi). Ici, des élèves reconnaissant comme observable le phénomène de la chute des corps et mettant à profit leurs outils mathématiques (concepts de fonctions, graphiques, tables de valeurs) dans une investigation du phénomène physique cherchent d'une certaine manière à voir « au-delà » des objets et de leurs propriétés spécifiques des régularités et/ou des différences cachées.

Par contre, lorsque les chercheurs discutent de la construction du discours scientifico-mathématique des élèves, on sent davantage la perspective de Châtelet qui insiste sur la non-séparation du physique et du mathématique. En effet, Radford, Savage et Roberge relèvent divers moments où les élèves se projettent dans des « expériences [...] hypothétiques » (p.15) — qui rappelle l'adéquation entre le virtuel et l'actuel discutée par Châtelet — plutôt que d'insister sur les éléments relevés par l'expérience empirique.

Les chercheurs n'approfondissent pas, hélas, cette idée d'emprunts à des expériences de pensées qui mettent justement en jeu le va-et-vient entre travaux mathématique (dans les graphiques) et physique (l'expérimentation). La traduction graphique des données empiriques amène de nouvelles considérations mathématiques qui, à leur tour, conduisent à revoir les in/certitudes de l'expérience physique. Quand un élève remarque « Vraiment la masse n'a rien à faire. Parce que tu pourrais échapper un avion puis un cube [...] puis l'avion "guiderait" [mais] le cube ferait rien que tomber » (p. 15), les auteurs notent à juste titre qu'il difficile de parler d'une « meilleure compréhension » du phénomène. Par contre, nous pouvons penser que le travail physico-mathématique dans son ensemble gagne en épaisseur. C'est *là* que se développe le discours scientifico-mathématique dont il est question, par un élargissement du champ de ce qui est physiquement ou mathématiquement pris en compte.

Comme l'explique Châtelet, le travail dans l'une des disciplines transforme nécessairement l'autre. Ainsi, on voit assez bien comment le travail mathématique présent dans l'activité proposée oblige les élèves à reconsidérer la physique telle qu'ils la comprennent. Il ne reste qu'à se demander comment ce type d'activité pourrait également être regardé en termes d'une transformation du champ mathématique (des élèves) grâce à l'observation. Viennent alors à l'esprit les nombreux travaux s'intéressant à l'interdisciplinarité sous toutes ses facettes, tels que rapportés par Pang et Good (2000), qui proposent entre autres de faire travailler les élèves dans l'optique qu'ils puissent « découvrir » par l'observation d'un phénomène physique un type de régularité nouveau pour eux (e.g. quadratique).

Il faut bien voir cependant qu'une telle intégration des sciences et des mathématiques ne répond pas pleinement à la proposition de Châtelet. La métaphore de l'intégration ou de l'interdisciplinarité suggère en effet une séparation fondamentale des disciplines mises en contact là où Châtelet nous appelle à y voir une unité profonde. La relation dialectique entre interprétation (mathématique) et compréhension (du phénomène physique) décrite par Radford pourrait représenter cette unification physico-mathématique. Prise sous cet angle, une lecture attentive des analyses peut conduire à des suggestions relatives à cette unité sur le plan pédagogique (Lagacé, 2014). En même temps, la question du discours physico-mathématique n'est pas un des éléments les plus explicites du travail du Châtelet, qui discute plutôt de notre rapport aux *traces* de façon plus générale. Mais les travaux récents de Sinclair, de Freitas et Ferrara (e.g. 2013) ou de Roth et Maheux (e.g. sous presse) sur l'inséparabilité du mathématique et de la « matière » avec laquelle on en fait l'expérience par une gestuelle particulière ouvrent une porte de ce côté. Le défi, en reprenant ces écrits, sera par contre de bien montrer le lien entre les propos de Châtelet concernant le physico-mathématique et ce que nous reprenons de ses observations sur les diagrammes pour penser le travail mathématique des élèves.

2.5 Conclusion

Dans cet article, j'ai présenté trois perspectives distinctes qui concernent des relations envisageables entre mathématiques et physique : celle d'Aristote, d'Archimède et de Châtelet. Ces trois perspectives offrent l'occasion de développer un fondement épistémologique pour les travaux s'intéressant à mettre à profit les liens entre physique et mathématiques. D'un autre côté, la nature épistémologique de ce travail vient aussi « troubler » ces postures, allant creuser au-delà des clichés que l'histoire a bien voulu laisser choir sur les philosophes en question. Le choix d'aller puiser chez Aristote, Archimède et Chatelet est un peu arbitraire : il repose en partie sur un désir d'aller au-delà de ces clichés et sur l'intérêt grandissant récemment porté au travail de Châtelet en didactique des mathématiques. Il y a bien sûr d'autres mathématiciens-physiciens-philosophes pour qui un travail semblable peut-être fait (e.g. Poincaré, Leibniz, Newton, Roberval, etc.)

De même, je me suis penché, parmi d'autres, sur trois exemples de recherches explorant la rencontre des mathématiques et de la physique. L'analyse présentée montre d'une part que ces recherches évoquent les postures épistémologiques d'Aristote, d'Archimède et de Châtelet, et d'autre part qu'elles le font sans pour autant se borner à l'une ou à l'autre. Enfin, si ces recherches rappellent par moments l'une ou l'autre de ces perspectives, elles peuvent aussi être *réinterprétées* à travers le regard épistémologique développé par ce travail de recherche. C'est dans cet esprit que je me suis légèrement attardé à mettre en valeur les idées de Châtelet, en partie parce que son travail est à la fine pointe des conceptualisations courantes concernant les relations entre mathématiques et physique, mais aussi parce qu'il est de plus en plus présent dans notre domaine.

Ce travail cherche à encourager l'engagement sur le plan épistémologique afin de générer de nouvelles questions. Si le lecteur devait ne retenir qu'une chose de celui-ci, j'aimerais que cela touche la puissance et la richesse d'une approche épistémologique de ces questions. Je partage en ce sens la proposition de Proulx et Maheux (2012) de garder au cœur de la recherche en didactique des mathématiques les questions épistémologiques relatives à la nature de la connaissance. De plus, ce travail fait ressortir l'idée de positionner mathématiques et sciences à égalité, en essayant de faire en sorte que le travail dans l'une des disciplines puisse bénéficier à l'autre, sans toutefois que l'une soit conçue dans un rapport de servitude. Bien entendu, cette vision marque un détachement avec les perspectives grecques étudiées précédemment. La question se pose alors : quelle épistémologie permettrait de la soutenir? Une approche riche de cette question fera appel à une lecture attentive d'autres penseurs, évoqués plus haut, ayant écrit sur la nature des mathématiques et les sciences, ainsi que des travaux récents dans notre domaine explorant d'autres aspects de la pensée de Châtelet, et des aspects historico-culturels de développement des pratiques mathématico-scientifiques.

[Cette page a été laissée intentionnellement blanche]

CHAPITRE III

DE L'(IN)EXISTENCE D'UNE FRONTIÈRE ENTRE MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

3.1 Résumé

Cet article pose un regard sur l'existence ou non d'une frontière entre physique et mathématiques à l'intérieur du contexte scolaire. Pour aborder cette (in)existence concrètement, j'analyse deux activités (l'une tirée d'un manuel de mathématiques, l'autre de physique) impliquant les mêmes concepts, et fais ensuite un retour historique sur le développement des concepts en question. Ces observations sont examinées à la lumière de la posture épistémologique, défendue entre autres par Gilles Châtelet, concernant l'inséparabilité du « physicomathématique ». Enfin, je discute sous cet angle certains travaux récents qui permettent d'illustrer comment cette perspective unifiée pourrait être imaginée dans le contexte scolaire.

> Certains débats contemporains ne semblent concevoir [...] que des rapports de servilité ou de perpétuelle bouderie, en oubliant qu'en Occident, depuis vingt-cinq siècles, [...] la mathématique et la physique se sont toujours (bon gré mal gré) accompagnées.
>
> (Châtelet, 1993, p.22-23)

> Appliquée à l'enseignement, la notion de « discipline », indépendamment de toute considération évolutive, n'a pas fait, dans les sciences de l'homme, et en particulier dans les « sciences de l'éducation », l'objet d'une réflexion approfondie.
>
> (Chervel, 1988, p. 60)

3.2 Les disciplines en question

Dans *Les enjeux du mobile*, Gilles Châtelet (1993) questionne les rapports entre les mathématiques et la physique, remettant en question la séparation initialement proposée par Aristote (attribuant l'abstrait aux mathématiques et le concret à la physique). En fait, Aristote lui-même voyait des limites à cette partition en ce qui concerne l'astronomie ou l'optique, par exemple (Lagacé, 2015). L'idée s'est néanmoins maintenue au cours des siècles, comme dans la classification de Comte (XVIIIe siècle), qui établit ainsi un lien hiérarchique entre disciplines (suivant un ordre de généralité décroissante et de complexité croissante), la physique se construisant sur les prémisses des mathématiques (Hausberger, 2009). On imagine alors facilement se développer les tensions évoquées par Châtelet : les mathématiques ne sont-elles que des outils? La physique, qu'application? D'autres écrits plus récents questionnent la séparation des deux disciplines, dont ceux d'Einstein, qui explique comment « avec la théorie de la relativité générale [...] la géométrie et la théorie de la gravitation se fondent en une seule entité » (Einstein, 1926, p. 5). Châtelet, par une analyse fine du travail de mathématiciens et de physiciens, souligne l'importance fondamentale d'outrepasser cette séparation qui, si elle était vraie, rendrait impossible l'expansion des sciences et des mathématiques (Châtelet, 2010).

Les effets de classification des sciences se transposent également à l'école, où physique et mathématiques semblent bien définies en tant que matières scolaires. Or, la recherche montre depuis longtemps des limites à la compartimentation des concepts, en réponse à quoi certains proposent de revoir les curricula pour coordonner les apprentissages entre mathématiques et sciences (Czerniak et al., 1999). Généralement préoccupés par la préservation des particularités disciplinaires, on maintient le rattachement des concepts à des disciplines données, on souligne alors que l'articulation des mathématiques et des sciences ne devrait pas viser la dissolution des disciplines ou la création d'hybrides (Lederman et Niess, 1998). En ce sens, on insiste sur des différences dans la nature des concepts, les visées, les méthodes: « science seeks consistency with the natural/external world, [...] mathematics seeks consistency within its internal system... » (Pang et Good, 2000, p. 74). Une multitude d'approches sont alors suggérées, désignées par les préfixes *multi-*, *pluri-*, *co-*, *inter-* ou *trans-*, ou qualifiées par des adjectifs tels que « integrated, connected, nested, sequenced, shared... » (Czerniak et al., 1999, p. 422).

Ces nombreux travaux teintent nos curricula. Dans le programme du Ministère de l'Éducation, des Loisirs et du Sport (MELS), on lit à propos des mathématiques et des sciences que « l'interdisciplinarité qui les caractérise s'avère incontournable » (MELS, 2007, p.1). En même temps, l'analyse de ce programme a très tôt mis en évidence la présence d'embûches et de risques associés à cette tentative d'interdisciplinarité, en mathématiques du moins. Ainsi, on parle par exemple de difficultés à saisir les occasions d'interdisciplinarité, de réticences des enseignants, voire de glissements vers un « intégrisme pédagogique » (e.g. Dionne, 2007). Mais ces risques peuvent s'étendre à d'autres disciplines, ce qui incite certains à mettre en question de manière profonde la séparation des disciplines. Ainsi, Beane (1995) propose d'en faire abstraction pour organiser les curricula autour des concepts eux-mêmes, ou de situations où ils se présentent naturellement. Après tout, dit Chervel (1988), les disciplines scolaires sont peut-être plus *l'effet* des découpages curriculaires qu'elles n'en sont la cause : « les disciplines, c'est ce qui s'enseigne, un point c'est tout » (p. 60).

Cet article pose un regard sur l'existence ou non (l'(in)existence) d'une frontière entre physique et mathématiques dans le contexte scolaire. Sans prétendre couvrir ce qui est fait à l'école, une analyse de deux activités est d'abord faite (tirées de manuels de mathématiques et de physique) impliquant les mêmes concepts (forces et vecteurs). Les manuels scolaires sont en effet connus pour leur importance dans l'orientation du travail des enseignants, en plus, de par leur accréditation ministérielle, de refléter l'interprétation des orientations curriculaires dans la pratique

(Lebrun, 2006). Je fais ensuite un retour historique sur le développement des concepts en question afin de présenter la posture épistémologique défendue entre autres par Châtelet (1993, 2010) concernant l'inséparabilité de ce qu'il appelle le « physicomathématique ». Enfin, je discute sous cet angle certains travaux récents qui permettent d'imaginer cette perspective dans le contexte scolaire.

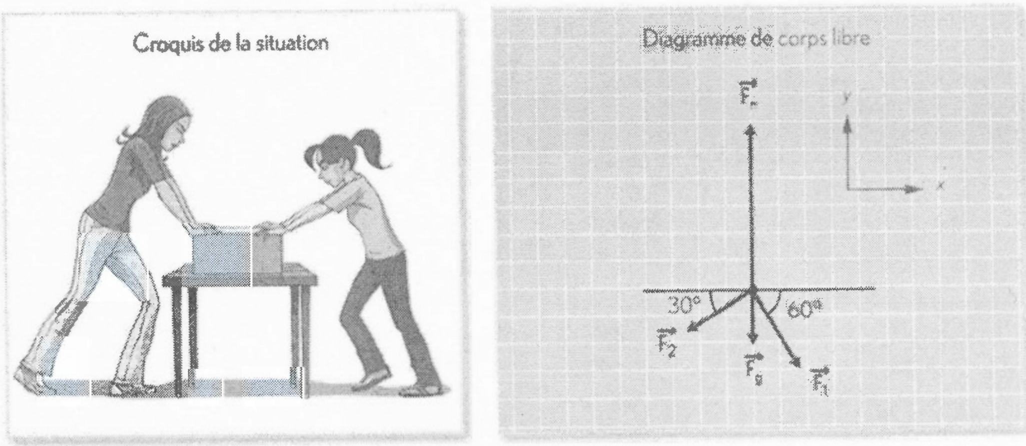
3.3 Deux problèmes. Deux manuels. Deux concepts

Si des similarités semblent possibles et même nécessaires entre physique et mathématiques, le rapprochement dans la pratique scolaire de concepts rattachés à ces deux disciplines ne va pas toujours de soi. L'exploration de manuels scolaires approuvés par le MELS fournit de beaux exemples de ces liens, qui deviennent souvent sources de tension. Pour illustrer ceci, une analyse de deux activités tirées d'un manuel de physique et d'un manuel de mathématiques est faite — chacune de différentes collections en usage au Québec — abordant toutes deux les concepts de force et vecteur. Ces activités ont été choisies comme « cas » selon Dowling (e.g. 1994), c'est-à-dire davantage pour leur habileté à illustrer certains éléments (autour de l'(in)existence d'une frontière entre physique et mathématiques) qu'en les supposant représentatifs d'une situation « typique ». On gardera donc en tête que l'idée n'est pas de faire une critique des manuels, mais d'en faire une lecture du point de vue de la disciplinarité comme phénomène (e.g. Chervel, 1988).

3.3.1 Présentation des deux activités

Tirée d'un manuel de physique, la première activité (AP, figure 1) décrit deux personnes poussant sur une boîte. Il est demandé de trouver la force normale résultante.

5. Audréanne et Laurie poussent simultanément sur une boîte de 15 kg posée sur une table. Les bras d'Audréanne forment un angle de 60° au-dessus de la table et exercent une poussée vers la droite de 25 N. Les bras de Laurie forment un angle de 30° et poussent la boîte vers la gauche avec une force de 22 N.



Quatre forces s'exercent sur la boîte : 1) la poussée de Audréanne, 2) la poussée de Laurie, 3) la force gravitationnelle de la Terre, 4) la force normale de la table.

a) Quelle est la grandeur de la force normale exercée par la table sur la boîte ?

Figure 3.1 Activité tirée du manuel de Physique

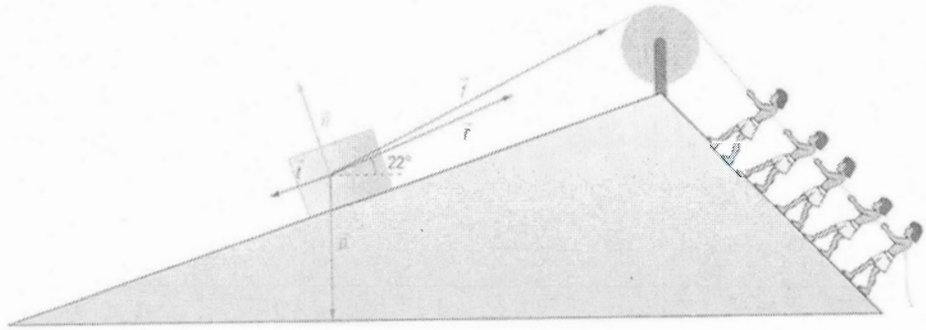
Le problème réfère à quatre forces : les poussées des personnes, la gravitation et la force normale. Les forces de poussées sont données dans l'énoncé (en Newton), tout comme la masse de la boîte. La place du problème dans le manuel suggère la mise en pratique d'un cas précis de l'application du concept de force normale (trois cas étant détaillés). Deux images accompagnent l'énoncé : une avec les personnages, l'autre (intitulée « Diagramme de corps libre ») présentant les forces par des vecteurs.

Tirée d'un manuel scolaire de mathématiques, la seconde activité (AM, Figure 2) propose de s'intéresser à un bloc de pierre tiré par une corde (via une poulie, dont on ne s'occupe guère). Il est question de forces s'appliquant sur le bloc (force normale et de frottement, poids du bloc). On demande de trouver la résultante.

Le schéma ci-dessous fournit des renseignements concernant les forces (en kN) exercées sur un bloc de pierre. Sur ce schéma, le vecteur *r* représente la force résultante qui correspond à la somme de toutes les autres forces qui interviennent dans cette situation.

- Poids du bloc : $\vec{p} = (0, -2{,}1)$
- Force normale : $\vec{n} = (-0{,}5,\ 1{,}4)$
- Force de frottement : $\vec{t} = (-0{,}9,\ -0{,}3)$
- Force appliquée par les travailleurs : $\vec{f} = (4{,}4,\ 2{,}2)$
- Force résultante : $\|\vec{r}\| = 3{,}2$

Lorsque deux objets sont placés l'un sur l'autre, la force normale est la force qu'exerce l'objet A sur l'objet B en réaction à la force exercée par l'objet B sur l'objet A. Sans cette force, les objets s'enfonceraient les uns dans les autres.



a. Déterminez les composantes du vecteur *r*.

b. 1) Additionnez les composantes horizontales des vecteurs *p*, *n*, *t* et *f*.

2) Comparez la somme obtenue avec la composante horizontale du vecteur *r*. Que remarquez-vous ?

c. 1) Additionnez les composantes verticales des vecteurs *p*, *n*, *t* et *f*.

2) Comparez la somme obtenue avec la composante verticale du vecteur *r*. Que remarquez-vous ?

d. Quelle conjecture pouvez-vous émettre quant aux composantes d'un vecteur résultant de l'addition de plusieurs vecteurs ?

SECTION 4.2 31

Figure 3.2 Activité tirée du manuel de Mathématiques

Les forces sont présentées sous forme de couple de coordonnées, et une image accompagnant la description de la situation montre des personnages tirant un bloc sur lequel plusieurs vecteurs (correspondant aux forces) sont dessinés. Placée dans un chapitre sur les vecteurs, l'activité apparaît suite à une section de révision de notions géométriques et une introduction aux vecteurs, et semble ainsi une introduction aux opérations sur les vecteurs (l'addition au moyen des composantes).[6]

3.3.2 Analyse comparée des activités

On peut lire, dans le programme de formation du MELS, le souhait de voir ce qui est travaillé en physique enrichir ce qui se fait en mathématique par exemple, et vice versa :

> Dans une perspective de formation intégrée, il importe de ne pas dissocier les apprentissages réalisés en physique de ceux qui sont effectués dans d'autres domaines d'apprentissage. Toute discipline se définit, en partie du moins, par le regard particulier qu'elle porte sur le monde. La physique peut dès lors s'enrichir de l'apport complémentaire d'autres disciplines et contribuer à les enrichir à son tour. (MELS, 2007, p. 6)

Or, la mise en parallèle des deux activités montre les défis d'une telle entreprise, tout en rendant très visible la proximité des situations ou des concepts en jeu. De manière générale, le contexte physique tiré du manuel de mathématiques montre une application possible des vecteurs à des situations concrètes (l'étude des forces). Cependant, le concept de force semble accessoire à la mise en pratique d'opérations sur les vecteurs. Ainsi, la signification des forces représentées par les vecteurs dans AM ne semble pas devoir être abordée, ce qui ne va pas sans quelques défis du point de vue physique. On réfère au « poids » du bloc, correctement donné sous forme de vecteur, sans toutefois faire référence aux notions de masse et de force gravitationnelle permettant de donner sens de cette donnée. La relation est un peu différente dans AP : le concept à l'étude est celui de force, et les vecteurs apparaissent comme des outils (le manuel les nomme même à un moment des « outils

[6] On notera par ailleurs que la nature du questionnement de AM laisse malheureusement peu de place à la physique. Il est en effet possible de répondre aux questions sans recourir au contexte.

pratiques ») permettant de représenter ce concept pour l'étudier. Du point de vue mathématique, on note rapidement la manière dont sont décrits les vecteurs, en référence à des directionalités (vers la gauche, la droite) dans une représentation semi-cartésienne laissant en arrière-plan des questions importantes (dont la notion de repère). Il y a donc, visiblement, des tensions, accompagnant une différence d'accent sur les concepts (force ou vecteur), mais aussi dans le rapport entre ceux-ci. Le concept de force apparaît dans AM comme une sorte d'application concrète des vecteurs, alors que dans AP ces derniers sont posés comme des outils servant à l'étude du concept de force. L'enrichissement mutuel semble plutôt limité à la recherche de son propre bénéfice. Dans chaque cas, quelques éléments rappellent la présence du concept dans une autre discipline, mais sans plus. Cependant, on le verra plus loin, les concepts de vecteurs et de force sont, du point de vue historique, parties prenantes l'une de l'autre.

De manière plus fine, on peut s'intéresser aux consonances/dissonances relatives à la **désignation** des forces/vecteurs dans les activités. Notons d'abord que l'on appelle naturellement (puisque non présenté, discuté, questionné) au symbolisme des lettres surmontées de flèches, une notation d'abord développée par certains physiciens puis généralement adoptée par les mathématiciens (voir plus bas). On remarque aussi des différences dans les notations. AP présente les vecteurs par des F majuscules « droits » munies d'indices, $\mathrm{F_g}$, $\mathrm{F_n}$, $\mathrm{F_1}$, $\mathrm{F_2}$. AM utilise plutôt différentes lettres minuscules italiques : *p, t, f, r, n.* Malgré que les désignations en termes de coordonnées ou de grandeur et orientation soient trop limitées pour être discutées, notons tout de même que AP présente les forces dans un diagramme (abordé plus loin) dont le quadrillage suggère l'orthogonalité et la graduation d'un plan cartésien, les décrivant cependant au moyen d'un angle et d'une norme. AM décrit ses vecteurs au moyen de coordonnées, mais sans référence, dans l'image, au plan cartésien où elles sont définies. On remarque cependant la présence d'un angle de 22 ° antihoraire tracé à partir d'un pointillé horizontal semblant « s'appuyer » sur un axe des abscisses et, à gauche, ce qui serait son origine. En revanche, AP situe, à l'écart du tracé des forces, des flèches *x* et *y* évoquant des axes, et oriente des angles dans les sens horaire et antihoraire, à gauche ou à droite de l'origine des vecteurs/forces. Pour schématiser l'importance de ces distinctions dans la désignation, la figure suivante (fig. 3) illustre la manière dont on représente à l'aide de coordonnées polaires, souvent utilisées pour travailler les vecteurs en mathématiques, des vecteurs de grandeurs 25 et 22 et d'angles 60 ° et 30 °[7] :

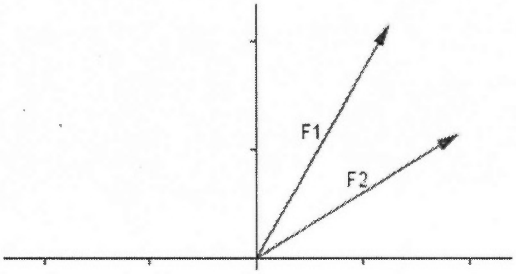


Figure 3.3 À l'aide de coordonnées polaires, $F1 = \{25; 60^\circ\}$ et $F2 = \{22; 30^\circ\}$

Ceci amène à discuter la *représentation* des concepts de force et de vecteur dans les activités. Dans les deux cas, les illustrations précisent ce qui est décrit dans l'énoncé textuel de la situation. AP laisse soupçonner que la boîte reste immobile (un glissement ou une rotation seraient possibles, selon les points d'application), alors que AM confirme le point d'origine des vecteurs dont on ne donne que les coordonnées. D'autres informations passent aussi implicitement par les illustrations : la position de l'origine « dans » le bloc (AM) ou le report des forces à un point particulier de la boîte (AP) qui (implicitement dans les deux cas) peut être situé

[7] L'orientation des vecteurs dans la figure 3, mathématiquement juste, ne correspond cependant pas à la situation décrite dans AP. Bien que cette activité semble séparer mathématiques (illustration de droite) et physique (illustration de gauche), il y a se rapprochement obligatoire entre les deux illustrations pour faire sens de ce que représente chacune d'elles.

n'importe où sur l'objet. En revanche, des informations peut-être « douteuses » accompagnent également ces représentations imagées : si les vecteurs dans AP semblent proportionnels (sauf F_g) relativement à l'énoncé (une idée importante en mathématiques), ce n'est pas le cas dans AM, où on peut penser, par exemple, que le vecteur p correspondant au poids doive toucher ce qui semble être le sol (une considération importante du point de vue physique).

AP présente une illustration, un diagramme « des corps libres », dont l'essentiel vise la visualisation d'un phénomène tel quel approchée par une « généralisation » et/ou une spécification des entités et des relations en jeu de manière à favoriser l'émission d'inférences (e.g. Anzai, 1991). Bien que le plan cartésien permette de construire des vecteurs, de les additionner graphiquement et d'en identifier les composantes, ce n'est pas exactement ce que AM suggère. Un plan cartésien semble en effet soutenir la représentation, illustrant la situation « qui habille » le problème (e.g. Janvier, 1987)[8], où le vecteur résultant recherché est si bien représenté que l'on pourrait pratiquement y mesurer (à un facteur près) les composantes recherchées. Nous sommes donc en présence de deux représentations diagrammatiques ayant plusieurs éléments en communs, de toute évidence inspirées en partie l'une de l'autre, mais également marquées par des différences importantes.

Ce type de constatations ont mené certains à séparer formellement physique et mathématiques autour de la notion même de vecteur. Dorier (2000) propose ainsi de distinguer les « vecteurs mathématiques » des « vecteurs physiques », sur quoi Patonnier (2004) insiste : « Les vecteurs sont enseignés dans différentes disciplines, notamment en mathématiques et en physique [mais] on ne peut pas dire, pour autant, qu'il s'agisse de la même notion » (p. 3). Cette séparation est cohérente à une (recherche de) définition des disciplines, et répond particulièrement aux découpages

[8] Un des enjeux qui a retenu l'attention de plusieurs didacticiens concerne les passages d'une représentation à l'autre.

scolaires d'aujourd'hui, où des champs d'études définis par une série d'habiletés (ou compétences) et de concepts se partagent le temps des élèves[9]. Suivant les modèles, on peut penser que de telles séparations sont essentielles au travail en *trans-inter-...-multi-disciplinarité*, permettant de bien définir la part de chaque discipline dans ces croisements, échanges, partages, etc. On sait d'autre part, le programme actuel du MELS au secondaire étant un bel exemple, que l'organisation des disciplines et particulièrement de leurs « contenus » pose des problèmes curriculaires de taille. Ainsi, le concept de vecteur n'est abordé en mathématique que durant la cinquième année (seulement pour les séquences Techno-Science et Sciences Naturelles), alors que les forces apparaissent dès le premier cycle du secondaire dans le programme de Sciences et Technologies.

Toutefois, ces efforts d'isolement et de particularisation vont à l'opposé des réflexions sur le concept de disciplinarité et l'analyse historique du développement des concepts scientifico-mathématiques, qui le plus souvent insistent sur l'aspect artificiel et nuisible de ces distinctions. Châtelet (1993, 2010) par exemple pose le problème du rapport utilitariste généralement perçu de part et d'autre. Les mathématiques sont vues comme étant au service de la physique; à l'inverse, ce sont les sciences que l'on représente comme lieu d'application des mathématiques. Les deux activités discutées illustrent ces postures. Or, démontre Châtelet, cette interprétation est peu défendable épistémologiquement, que ce soit en regard de l'histoire, de la nature des concepts, ou du principe même qui permet leur apparition.

3.4 Épistémologie d'une inséparabilité

Quand Aristote propose son tryptique – mathématiques, physique, métaphysique – pour classifier le travail de recherche de ses contemporains, les cas de l'astronomie, de l'optique et de l'harmonie se posent immédiatement comme exemples de la non-

[9] Elle ne peut non plus être éloignée des effets découlant de la réforme des mathématiques modernes.

étanchéité des catégories proposées. Bon an mal an, l'idée est restée de « discipliner » nos pratiques investigatrices en séparant/regroupant leurs manières de prendre/découper le monde. En pratique cependant, les « hommes de sciences » se sont rarement contentés de travailler dans un seul de ces domaines, profitant au contraire des avancées dans l'un pour avancer dans l'autre. Pensons à Descartes, Newton ou Pascal (17e siècle), au travail de Fourier (1822) écrivant que « l'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques » (p. viii) et plus récemment au propos d'Einstein (1926) affirmant que la géométrie et la théorie de la gravitation se fondent en une seule entité. Il serait donc permis, voire nécessaire, de mettre en forme une vision « unifiée » des mathématiques et de la physique (à tout le moins!). La sous-section suivante illustre cette vision au moyen d'un survol historique des notions de vecteur et de force. S'en suit une présentation des réflexions de Châtelet, plus théoriques, autour de la *virtualité* comme source de nouveauté en physico-mathématique.

3.4.1 Forces et vecteurs, bref historique d'une coévolution

Dans une présentation donnée en 1991, Chaitin (2002) discute de la relation très étroite entre mathématiques et physique et suggère que les mathématiques soient davantage travaillées comme l'est la physique. La réaction de l'audience (telle qu'il le rapporte) traduit toutefois l'impression générale d'une impossibilité à joindre ainsi les deux disciplines. Si l'on s'intéresse un peu à l'évolution historique des concepts de force et vecteur par exemple, on constate néanmoins la vraisemblance du rapprochement évoqué par Chaitin. En effet, une des premières apparitions des concepts de force et de vecteur se trouve dans le travail de Newton, qui propose l'utilisation de « parallélogrammes de force » (Crowe, 2002 ; Pressiat, 1999) : une ingénieuse représentation mathématique *et* physique, où les longueurs et les angles permettent d'évoquer et de manipuler des actions ou interactions entre objets. Plus tard, Poinsot et Carnot, tous deux mathématiciens et ingénieurs, poursuivent en quelque sorte les idées de Newton, en introduisant le concept de vecteur dans leurs recherches en mécanique (Dobrovolskij, 1968), menant entre autres au concept de « travail » (l'énergie fournie par une force) de la thermodynamique (Massain, 1940). D'autre part, l'idée de Newton est aussi reprise au moment de représenter de nouveaux nombres au moyen de vecteurs, parmi lesquels les quaternions d'Hamilton qui permettront à leur tour de conceptualiser certaines forces (fluides, électrodynamique, magnétisme) (Crowe, 2002). En revanche, les travaux de Gibbs vers 1880 font clairement voir les fondements mécaniques, géométriques et algébriques à la base de l'élaboration du système et de l'analyse vectorielle (Dobrovolskij, 1968). Plus récemment, on notera aussi par exemple une sorte coévolution au niveau de la notation (Patonnier, 2004) dont on voit aujourd'hui encore de nombreuses traces.

Très brièvement donc, un regard historique sur l'évolution des concepts de force et de vecteur montre qu'ils se situent quelque part « entre physique et mathématiques ». L'existence d'une frontière permettant de délimiter le champ d'appartenance de chacun des concepts est donc assez problématique : ils originent un peu des deux à la fois, si bien que certains ont voulu y voir l'émergence d'un nouveau champ « à la frontière » des deux autres, parfois appelé la physique mathématique. La proposition de Chaitin (2002) concernant la reconnaissance d'une certaine « mathématique physique » semble alors peut-être moins étonnante, surtout si, du point de vue épistémologique, on se refuse à séparer l'objet (e.g. les concepts de vecteur et de force) de ses manifestations. S'il semble évident d'autre part que les questions du mathématicien et celle du physicien ne sont pas les mêmes, plusieurs s'entendent néanmoins pour reconnaître que ces questionnements sur la nature des disciplines et de leurs objets sont importants, tant en mathématiques qu'en physique (entre autres Pincock, 2007).

3.4.2 Gilles Châtelet, une vision unifiée du physicomathématique

Dans cette lignée, un intérêt particulier est porté au travail du mathématicien Gilles Châtelet, dont les écrits attirent une attention grandissante dans la recherche en didactique des mathématiques. L'analyse épistémologique qui vient d'être esquissée est utile pour comprendre la proposition développée par Châtelet concernant l'unité du physicomathématique. Selon Châtelet, la séparation connue entre physique et mathématique est une *opération de l'esprit* prenant source chez Aristote. En ordonnant les disciplines, Aristote, explique-t-il, attire l'attention sur l'établissement d'un « terrain » à explorer pour chacune d'elles, faisant perdre de vue qu'elles évoluent autour de « problématiques communes » (p. 23). Au-delà de ce qui a été « monté » en discipline dans les discours sur les mathématiques ou la science, Châtelet remarque :

> L'objet qu'on a en face de soi, ce n'est jamais un objet « physique », ce n'est jamais un objet mathématique, c'est toujours un objet physico-mathématique. Et faire de la physico-mathématique c'est trouver une forme d'adéquation entre les virtualités mathématiques de la chose et les complexes expérimentaux avec lesquels je peux [la] faire exploser. (Châtelet, 1987, p. 11)

Le travail de Châtelet repose entre autres sur l'observation historique des *travaux* de mathématiciens et de physiciens tels Leibniz, Argand, Grassmann, Hamilton, etc. Cette orientation vers ce que font physiciens et mathématiciens conduit à une mise à l'écart des questions disciplinaires à proprement parler, forçant à remarquer qu'en pratique, physique et mathématiques ne semblent pouvoir s'envisager qu'ensemble. Il en vient à proposer de voir les mathématiques et la physique comme une « dialectique [qui ne se résume pas à la] neutralisation synthétique [de deux disciplines] préexistant[e]s et opposé[e]s mais [est vue comme] la découverte de l'articulation qui déploie la dimension le long de laquelle [elles] surgiront comme des "côtés" » (Châtelet, 2010, p. 172). Physique et mathématiques ont une même origine, et donc émergent ensemble, tant du point de vue historique que de celui de l'expérience (ce qu'illustre en partie la section précédente).

Cette unification, cette inséparabilité, s'oppose aux classifications systématiques des sciences reprises depuis Aristote. Cependant, Châtelet ne prétend pas faire disparaître les tensions souvent évoquées entre physique et mathématiques. Son travail permet plutôt d'envisager ces impasses de manière productive, faisant de ces coupures dans le physicomathématique des sources de « provocation ». Ainsi, le travail de Newton sur les forces peut-être vu comme un appel au développement de concepts mathématiques répondant efficacement aux phénomènes qu'il dégage, les vecteurs apparaissant à leur tour comme une manière de dégager certains phénomènes (pensons à la mécanique lagrangienne, puis hamiltonienne). Qui plus est, Châtelet avance que ce type de provocation se produit aussi dans l'expérience même du physicien et du mathématicien, au moment même de faire de la physique et des mathématiques. Pour lui, il y a quelque chose d'intimement physique dans les traces avec lesquelles le mathématicien travaille, et le physicien n'échappe pas non plus à la dimension mathématique des phénomènes qu'il observe; et il en serait de même au niveau de leurs méthodes.

Châtelet montre ceci par une analyse des diagrammes, insistant sur leur aspect métaphorique et s'en servant même pour exemplifier ce qu'il décrit comme « stratagèmes allusifs » (Châtelet, 2010), au nombre desquels on pourrait aussi compter les « expérimentations scientifiques ». Le diagramme (au sens grec ancien *diagramma* : tracé, dessin, schéma) n'est jamais exactement ce qu'il représente, mais n'est pas non plus sans rapport avec ce qu'il illustre. Certains, tels que Charles Alunni (en introduction de l'*Enchantement du virtuel* de Châtelet) ont rapproché cette vision du diagramme des propos de Peirce:

> Icons are so completely substituted for their objects as hardly to be distinguished from them. Such are the diagrams of geometry. A diagram, indeed, so far as it has a general signification, is not a pure icon; but in the middle part of our reasonings we forget that abstractness in great measure, and the diagram is for us the very thing. (Pierce, 1885, p. 181)

Plus importante encore est l'insistance de Châtelet sur le fait que cette distance qui donne au diagramme physicomathématique les qualités d'une métaphore réussie permet de trouver « un genre de virtuel qui [la] supporte » (Châtelet, 2010, p. 72). Cette virtualité, en formant la ligne par laquelle on sépare physique et mathématiques, est aussi ce qui les lie, une frontière délimitant deux horizons, mais servant aussi de passage. Ainsi, une « figure géométrique » peut-être prise comme évocation d'un monde physique ou de phénomènes tels la courbature de notre planète, provoquant éventuellement la création de géométries non-euclédiennes, et vice versa. Ainsi, au-delà de ce qu'un diagramme peut signifier en physique et en mathématique (et les distinctions possibles du mot : dessin, figure, image, représentation, diagramme, graphique, etc.), c'est surtout l'état d'esprit (l'expérience de pensée dit Châtelet) dans lequel on aborde la trace qui est déterminante. Reconnaissant l'unité du physicomathématique, Châtelet invite donc à *habiter* les diagrammes (Dupuis, 2012):

> Il faut que l[e mathématicien et le physicien] se rejoignent dans l'idée qu'ils *habitent* des paliers communs, voisins, mieux qu'ils semblent habiter tout un immeuble fait de plusieurs paliers, et que les diagrammes des différents domaines *s'équivalent* au point de ne pouvoir s'envisager qu'ensemble. (p. 142)

Habiter le diagramme c'est, selon Châtelet, le vivre, s'y projeter, si bien que la représentation et l'objet (ou le concept) représenté se rencontrent dans le physicomathématique, qu'ils ne deviennent qu'un. Du point de vue épistémologique, donc, Châtelet fait de l'expérience diagramatique un cas exemplaire de l'unité dialectique du physicomathématique tout en insistant sur la manière dont on l'aborde. On peut vouloir ignorer ou réduire l'un ou l'autre aspect et se trouver à entretenir ses « rapports de servilité ou de bouderie » mentionnés en exergue. Ou, au contraire, peut-on embrasser la virtualité née de cette unité, y prendre appui pour le développement des idées et, à l'occasion, la célébrer au moment où, pour reprendre Einstein (1926), elle devient particulièrement apparente. Rapporté au monde scolaire, comment ceci peut-il nous amener à faire des propositions intéressantes par rapport aux activités présentées, par exemple, dans les manuels scolaires?

3.5 En guise de conclusion, « retour » sur les activités analysées

Les idées de Châtelet rappellent certains propos de Beane (1995) qui, remarquant que « life itself does not know the boundaries or compartments of what we call disciplines of knowledge » (p. 616), et suggère de construire les curricula autour de concepts ou de situations. Deux différences importantes doivent cependant être soulignées. Dans une perspective qu'il nomme « d'intégration » des disciplines, Beane (1) appelle à des situations particulières afin de mettre à profit l'apport de différentes disciplines; (2) disciplines qui seraient par ailleurs bien caractérisées au niveau des savoirs et des pratiques. Châtelet propose de voir en toutes situations une mise en œuvre du physicomathématique dans son ensemble par le fait même de « définir » la physique et les mathématiques dans et par le travail qui est alors réalisé. Ainsi, certains pourraient discuter les activités analysées à la section 2 en fonction de leur potentiel à « intégrer » physique et mathématiques en se demandant : « How can we be certain that integrated knowledge will not simply accumulate without meaning (as separate-subject knowledge usually does) but will help young people continuously expand meanings? » (Beane, 1995, p. 621). Mais on pourrait aussi les accepter « telles quelles » avec en tête la *recherche* de ce qui fait qualifier le travail et les concepts de physiques et de mathématiques, tout particulièrement en prenant appui sur ce qui se révèle d'un côté pour solliciter l'autre. Il s'agit alors moins « d'étendre » le sens que d'ouvrir de nouveaux horizons. Reprenant des idées de Châtelet, on pourrait par exemple « habiter » les images proposées en en faisant des objets d'études dans lesquels se projeter pour tirer profit des métaphores suggérées : se mettre à la place du bloc pour sentir les forces qui participent à son déplacement, et leur composition-décomposition-recomposition possible, ou encore pénétrer l'univers schématique du « diagramme de force » où naît le besoin d'une équilibration numérique des forces pour rendre compte de l'absence de déplacement de la boîte (et vice versa).

Parmi les travaux mettant en valeur une relation étroite en mathématiques et physique, un autre exemple parlant est offert par Radford, Savage et Roberge (2002), qui s'intéressent au développement du « discours scientifico-mathématique » et au « rôle de l'évidence » (p.1-2). L'accent placé sur des idées qui se situent d'emblée en travers d'une distinction par disciplines (discours et évidences occupent tous deux une place de choix chez les physiciens et les mathématiciens) met de côté les antagonismes et permet d'évoquer une « relation dialectique » (p. 23) enrichissante entre le travail mathématique et physique. Une analyse, soutenue par le cadre développé par Châtelet, de leurs propos permet d'observer que la situation dont ils discutent, où des élèves travaillent (et expérimentent) sur la chute des corps, montre que le discours scientifico-mathématique se développe *dans* les dépassements mutuels et successifs, autour du phénomène; du travail physique (e.g. l'intuition, la prise de données, l'interprétation) et du travail dit mathématique (les concepts de proportion, de linéarité, les modèles, le calcul d'écarts).

Si l'on souhaite travailler à l'intérieur des découpes disciplinaires imposées (e.g. programmes, manuels, spécialité des enseignants) tout en les faisant se rejoindre autour de certaines situations, les activités de la section 2 pourraient alors être mises en relation, travaillées ensemble. Suivant Châtelet, le pouvoir d'une telle rencontre ne serait pas tant dans la possibilité (toujours envisageable) de distinguer ou d'uniformiser le travail ou la présentation des situations ou des concepts (un projet risquant de conduire à des tensions peu constructives), que dans l'interrogation même du phénomène, de ses représentations, des concepts qui y sont associés. Il faut imaginer une sorte de déconstruction des disciplines dont résulte, en guise d'apprentissage, une aisance à naviguer le physicomathématique, à parler forces et vecteurs...

Le but de cet article était d'ouvrir nos réflexions sur ces questions à un discours encore peu connu faisant la promotion d'une entrée à rebours de nos considérations habituelles (i.e. qui cherchent à réunir ce qui serait séparé au lieu de questionner l'existence (ou la nature) d'une séparation). Certains demanderont où cela peut conduire, concrètement, par rapport aux questions que se posent les éducateurs en science, mathématiques et technologies. Les paragraphes qui précèdent évoquent quelques suggestions concernant la manière dont on pourrait travailler certaines activités avec les élèves. Une discussion en termes d'(in)existence invite à revoir ces questions sous un jour nouveau : par exemple, celles concernant la préparation scientifique ou mathématique des futurs enseignants (e.g. Koirala & Bowman, 2003), considérant qu'elles contribuent (sans doute) au maintien des discours séparatistes et en découvrir des nouvelles. Gardant à l'esprit Dewey (1910) : « intellectual progress usually occurs through sheer abandonment of questions together with both of the alternatives they assume [...] We do not solve them: we get over them » (p. 18-19).

[Cette page a été laissée intentionnellement blanche]

CHAPITRE IV

LES CONTEXTES SCIENTIFIQUES DANS LES MANUELS SCOLAIRES, QUEL USAGE?

4.1 Avant-propos

Cet article est un travail en cours dont une partie a été présentée sous forme d'affiche à l'*International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Une copie du résumé est jointe à ce chapitre pour présenter, en partie, le cheminement du travail qui a mené à cette version préliminaire.

What's the use of science? Scientific contexts in textbook problems

François Lagacé and Jean-François Maheux

Université du Québec à Montréal

Mathematical concepts, especially in high school textbooks, are commonly approach referring to scientific phenomena for the "concreteness and usefulness" they provide to mathematical ideas (e.g. Bossé et al., 2010). But what is science's contribution in mathematics problems? In this poster, we present details of our textbooks analysis and considerations regarding mathematics teachers' scientific preparation.

Analyzing mathematics textbooks recently published in Quebec (Canada) reveals an increasing presence of scientific concepts as we progress through high school.

Examining 12 textbooks, the proportion of such problems is about 15%. Scientific phenomena are thus significantly present on the quantitative side (reaching up to nearly 100% when considering only "context problems" in the chapters on vectors or functions). Concerning the *qualitative* aspect of this representation, our analysis leads to the observation of numerous *inadequacies*, from a scientific perspective, in the presentation of those notions: In many cases, the science behind the problem is incorrect. One example is a problem involving fireworks trajectories, inaccurately described as parabolas. This raise questions, especially in regard with the *scientific* preparation of mathematics teachers (e.g. Koirala & Bowman, 2003) who eventually have to use these problems: Is scientific inadequacy in mathematics textbooks an important issue? Should we prepare teachers to deal with it? What orientation could we take in this preparation? To investigate these questions, we began conceptualizing the *relations* between scientific phenomena and mathematical concepts in regard with the possible use of textbooks problems involving both. We found that, epistemologically speaking, the relation between scientific phenomena and mathematical concepts is far from obvious (e.g. Einstein, 1926). Notions such as modelization, mathematization, representation or application allude to different understandings of those relations along the disciplinarity/trans-disciplinarity spectrum. Presenting those perspectives and some examples, we offer to discuss the concept of *conceivability* as a way to "get around" problems involving scientific concepts, somehow regardless of their scientific inadequacies.

(...) le physicien mathématicien c'est celui qui précisément parvient à déceler un certain type d'homologie, qui [...] force la situation pour voir que la provocation rationnelle mathématique est exactement identique, d'une certaine manière [...] à la « provocation expérimentale »
Gilles Châtelet, 1987, p.15

4.2 Introduction

L'arrivée du Programme de Formation de l'École Québécoise (PFEQ) s'est faite, de connivence avec les concepts de compétences disciplinaires et transversales qui ont créé du tumulte dans plusieurs sphères de la société (Inchauspé, 2007), en mettant explicitement de l'avant le recours à des approches dites interdisciplinaires, approches amenant plusieurs défis, notamment pour les enseignants (Ducharme-Rivard, 2008). En mathématiques et en sciences et technologie, cette demande se matérialise d'abord par le regroupement des deux disciplines sous le même domaine d'apprentissage (MELS, 2007), pour par la suite se répandre à différents endroits à travers les lignes directrices de chacune des disciplines. À cet effet peut-on lire dans la première page présentant ce domaine de formation que « Depuis fort longtemps, ces disciplines sont intrinsèquement liées et leur évolution de même que leur dynamique interne témoignent de leur synergie. [Ainsi,] l'interdisciplinarité qui les caractérise s'avère incontournable. » (MELS, 2007, p. 1)

Le programme de mathématiques poursuit cette ligne directrice, présentant les mathématiques comme langage universel présent dans tous les domaines et permettant de créer des modèles de toute sorte. Ainsi, il est possible de voir une croissance des allusions aux contextes scientifiques dans le programme, que ce soit dans la section sur les repères culturels, les descriptions des compétences ou encore dans la présentation des contenus à enseigner. Plus fortement encore que l'on fait les programmes d'études Mathématiques 436 (MEQ, 1996) et 536 (MEQ, 1997) en référant à la « préparation aux études scientifiques » (p. 3), les séquences Sciences Naturelles et Technico-Science du PFEQ, présentes dès la deuxième année du deuxième cycle en mathématiques, poursuivent et intensifient l'idée de lier mathématiques et sciences véhiculée par le PFEQ. Par exemple, en Sciences Naturelles :

> Ils se trouvent placés devant des contextes purement mathématiques, tout en continuant de traiter des situations concrètes, particulièrement de nature scientifique. Les situations d'apprentissage concernant le domaine de la science sont privilégiées, car elles permettent de développer des méthodes liées à la recherche et à l'investigation scientifique (p. 100)

Cette interdisciplinarité promue par le MELS et présente sous différentes formes dans le PFEQ se transpose dans les manuels scolaires. En effet, dans le but de satisfaire les exigences ministérielles liées aux ressources didactiques (MELS, 2013a), les maisons d'édition de manuels scolaires tentent de se conformer aux critères établis par le Ministère, dont fait partie entre autres le respect des orientations du programme et du contenu à enseigner. Ainsi, il ne serait pas étonnant de voir dans les manuels scolaires de mathématiques présentement en usage au secondaire les contextes scientifiques occuper une place importante, suivant la progression des années au secondaire.

Les manuels scolaires approuvés par les MELS passent en effet par un processus d'évaluation visant à ce « que les ensembles didactiques disponibles sur le marché so[ie]nt de qualité » (MELS, 2010, p. 2), tel que mentionné par le Bureau d'Approbation du Matériel Didactique (BADM), et qu'ils représentent avec « exactitude les contenus » à enseigner (http://www1.mels.gouv.qc.ca/bamd/index.asp?page=info_new_fr). Par ce processus, le BAMD s'assure toutefois que ces manuels respectent les exigences ministérielles relevant de la discipline pour laquelle le manuel est conçu. À cet effet, il s'appuie sur des conseillères/conseillers pédagogiques et des enseignants en pratique ayant reçu une formation en lien avec l'évaluation demandée par le BAMD ainsi qu'une formation sur les contenus des programmes disciplinaires dans leur domaine de spécialité (MELS, 2010). Donc, pour qu'un manuel de mathématiques puisse être approuvé par le BAMD, une révision est faite sur les contenus mathématiques.

Qu'en est-il toutefois des contextes scientifiques présents dans les manuels de mathématiques? Quelle est l'importance accordée à ces contextes? Où se retrouvent-ils? Quel(s) lien(s) entre mathématiques et sciences se dégage-t-il de ces contextes empruntés à la science? Comment les enseignants et les élèves vivent-ils ces liens et comment serait-il possible de les vivre?

Pour investiguer ces questions, je présente le résultat d'une étude empirique sur les collections de manuels présentement en usage au Québec. Cette étude traite à la fois des aspects quantitatifs et qualitatifs de la présence des contextes scientifiques dans les problèmes de mathématiques. On y verra que si d'une part les contextes scientifiques occupent en effet une place de choix dans certains manuels scolaires, les problèmes proposés autour de ces contextes soulèvent plusieurs questions en raison des incohérences et des erreurs qu'il est possible d'y déceler, mais aussi à cause de la vision utilitariste qui se dégage de la manière dont se présentent ces contextes.

Cette vision utilitariste n'est toutefois pas celle adoptée par plusieurs personnalités influentes en mathématiques et en sciences (e.g. Einstein, 1926) qui voient une relation, plus profonde, d'interdépendance entre les concepts dits mathématiques ou scientifiques. Cette vision particulière du lien entre mathématiques et sciences est théorisée par Gille Châtelet (2010, 1993, 1987). Elle force dans un premier temps à questionner l'approche proposée dans les manuels scolaires quant à l'utilisation des contextes scientifiques. Par la suite, elle permet d'envisager sous un angle différent la manière dont les enseignants peuvent tirer parti de ces contextes sans toutefois avoir à devenir des spécialistes de ces derniers. Cette perspective, que je présente autour du concept de *concevabilité*, permettrait de travailler autour des contextes scientifiques sans craindre les incohérences, au plan scientifique, que peuvent contenir certains problèmes.

4.3 Une étude en deux temps

Bien que n'étant pas les seuls outils à la disposition des enseignants, les manuels scolaires sont, comme le mentionne Marchand (1997, dans Antoun, 2012), fortement utilisés. Ils répondent à différents rôles, notamment de soutien et de référence (MELS, 2010). D'ailleurs, de toutes époques est-il possible de trouver des manuels faisant office de l'un ou l'autre de ces rôles (Ducharme-Rivard, 2007). Plusieurs études se sont d'ailleurs attardées à analyser les manuels scolaires en s'intéressant à différents aspects : les situations d'apprentissage en algèbre (Antoun, 2012), l'arithmétique (Ducharme-Rivard, 2007), la preuve (Tanguay, 2000), etc.

S'intéressant aux liens entre mathématiques et sciences, Sokolowski et al. (2011) discutent de la manière dont sont utilisés les contextes scientifiques dans les manuels de mathématiques, expliquant que « relating context to task is essential to increase human attention and extend long-term memory», et que « environments lacking these applications [tels qu'ils l'ont observé dans les manuels] are reduced to mechanical operations, and they do not provide students with meaningful connections » (Sokolowski et al., 2001, p 295). Ainsi, bien que les contextes scientifiques soient centraux dans les mises en contextes des problèmes qu'ils analysent, ceux-ci ne servent pas à alimenter les élèves pour la résolution des problèmes mathématiques. Il revient aux enseignants à établir ces liens, ces relations entre les phénomènes scientifiques et leurs représentations mathématiques. L'étude que je présente s'intéresse à la place qu'occupent et la manière dont sont présentés les contextes scientifiques dans les manuels scolaires en utilisation au Québec.

4.3.1 Analyse quantitative des contextes scientifiques dans les manuels scolaires

Pour évaluer la place occupée par les contextes scientifiques dans les manuels, je recense, dans les collections présentement en usage au Québec, les problèmes s'inspirant de tels contextes. Afin de demeurer cohérent avec les affirmations faites préalablement en lien avec le PFEQ et les processus de révisions du BAMD, je me suis cependant limité, pour cette étude, aux manuels scolaires du secondaire édités suite à la parution du PFEQ. Contrairement aux études citées précédemment, celle-ci porte sur toutes les branches des mathématiques se retrouvant dans les manuels choisis. Toutefois, seules les sections portant sur les problèmes (sans les distinguer des *exercices* au sens du fascicule K (MEQ, 1988)) sont considérées. L'étude ne s'étend donc pas sur les « réactivations », les « capsules historiques », ou les « présentations des savoirs », et autres sections du même genre.

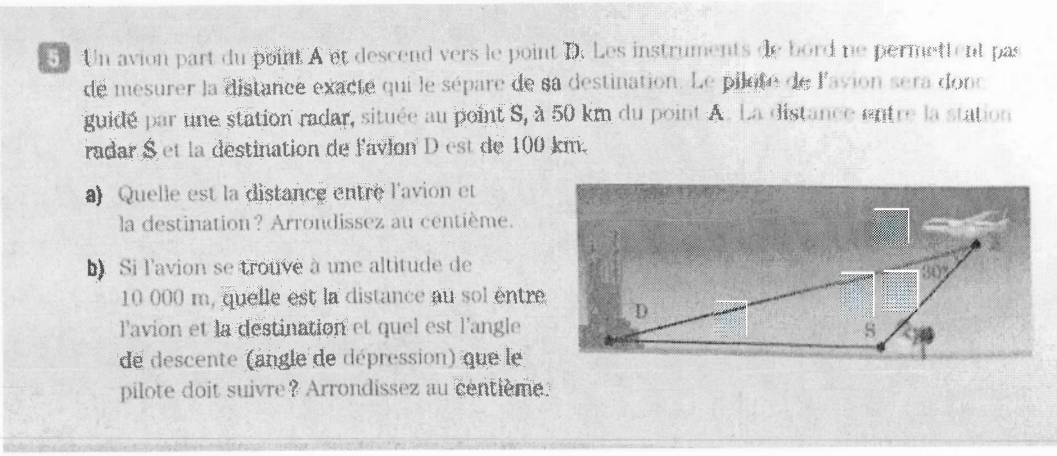
Dans le but de départager ce qui est considéré comme *contexte scientifique* de ce qui ne l'est pas, certains critères ont dû être définis. Suite à une première sélection de problèmes, ces critères ont pu être établis et validés auprès de deux personnes à qui différents problèmes à classer ont été présentés. Pour cette étude, sont ainsi considérés comme problèmes à contextes scientifiques les problèmes

α) s'inspirant des champs disciplinaires relevant du domaine de la science tels que décrit dans le PFEQ (MELS, 2007), à savoir :

a. l'astronomie,
b. la biologie,
c. la chimie,
d. la géologie et
e. la physique ;

[redacted]) dont le champ disciplinaire est l'élément central de la mise en contexte du problème.

Pour exemplifier la mise en application de ces critères, voici un premier problème qui répond à ces critères malgré le faible investissement de sa proximité avec le domaine de l'aérodynamique – une branche relevant de la mécanique – et des concepts qui y sont associés :


5 Un avion part du point A et descend vers le point D. Les instruments de bord ne permettent pas de mesurer la distance exacte qui le sépare de sa destination. Le pilote de l'avion sera donc guidé par une station radar, située au point S, à 50 km du point A. La distance entre la station radar S et la destination de l'avion D est de 100 km.

a) Quelle est la distance entre l'avion et la destination ? Arrondissez au centième.

b) Si l'avion se trouve à une altitude de 10 000 m, quelle est la distance au sol entre l'avion et la destination et quel est l'angle de descente (angle de dépression) que le pilote doit suivre ? Arrondissez au centième.

Figure 4.1 Point de vue, 2e année du 2e cycle, SN, p. 172

En effet, tout au long du problème, le contexte reste présent. Ainsi, bien que le travail demeure technique (la mise en application de la loi des sinus, entre autres), il est très rattaché à la situation. Le schéma contribue en quelque sorte à la proximité entre le travail calculatoire et la situation, un triangle étant superposé à une image qui évoque un avion atterrissant.

L'ambiguïté qui se dégage de la question b) vient en quelque sorte à questionner la situation, et indirectement les concepts associés. Il serait en effet possible de considérer plus profondément ou authentiquement la situation pour prendre en compte, par exemple la résistance de l'air, une trajectoire non linéaire pour l'atterrissage (sans quoi l'avion risquerait fort probablement de s'écraser!), le ralentissement de l'avion, etc. Ainsi, un lien plus fort *pourrait être* construit entre les mathématiques et les sciences à partir de ce problème.

En revanche, un problème comme le suivant n'est pas retenu comme problèmes « à contextes scientifiques » bien qu'il y soit question d'un sujet connexe à la biologie. En effet, le sujet n'est ici rien de plus qu'une trame de fond servant à introduire un travail d'optimisation sur des équations se retrouvant dans le texte. :

5 Martin est biologiste et étudie deux espèces d'oiseaux vivant sur un territoire donné. Il estime que la population totale de ces deux espèces sur le territoire est d'au moins 2000 oiseaux. Sachant que, chaque année, la population d'oiseaux de l'espèce A augmente de 10 % et celle de l'espèce B de 25 %, Martin prévoit que, dans deux ans, le nombre d'oiseaux sur le territoire sera d'au plus 2800. Après avoir capturé un petit échantillon d'oiseaux, Jolène, une collègue de Martin, pense que le territoire compte au moins 1300 oiseaux de l'espèce B. Martin, lui, prétend que c'est impossible. Expliquez pourquoi.

Figure 4.2 Point de vue, 3e année du 2e cycle, SN, p. 20

Dans ce problème, les espèces d'oiseaux tout comme le territoire ne sont que vaguement évoqués : il devient donc difficile, voire impossible, de s'appuyer sur la situation pour la travailler. En résulte un travail essentiellement algébrique où le contexte ne sert qu'à alimenter les aspects mathématiques en nombre. Pour ces raisons, les problèmes de ce type ne sont pas comptabilisés comme proposant un contexte scientifique dans le cadre de cette étude.

Cependant, dans le but d'avoir une analyse qui permette de voir au-delà d'une comparaison des problèmes à contextes scientifiques sur l'ensemble des problèmes d'un manuel, trois catégories ont été établies pour classifier les problèmes : problèmes sans contextes (aussi appelés purement mathématiques), problèmes à contextes autres que scientifiques (d'après les critères de sélection définis précédemment) et problèmes à contextes scientifiques. Comme je le montrerai à la section suivante, la comparaison des problèmes à contextes scientifiques avec les autres problèmes contextualisés offre en effet une image différente de ce qui ressort d'une comparaison de ces premiers avec l'ensemble des problèmes, par exemple.

4.3.1.1 Présence des contextes scientifiques aux premier et deuxième cycles

L'exploration de 43 manuels de différentes collections présentement en usage a permis de constater que, même s'ils se présentent au premier cycle du secondaire, en première année du second cycle ainsi que dans les séquences CST (culture, société, technique), les contextes scientifiques n'apparaissent pas comme centraux dans la mise en contexte de ces problèmes. Par ailleurs, la même exploration a permis de constater de fortes similitudes entre les manuels des séquences TS et SN d'une même collection.

			Collections			
	A		B		C	
Secondaire 5, SN	140/664 (164/664)	21,1% (24,7%)	32/577 (49/577)	5,5% (8,5%)	Pas de manuels	
Secondaire 5, TS	94/869 (164/869)	10,8% (18,9%)	48/629 (84/629)	7,6% 13,4%)	Pas de manuels	
Secondaire 5, CST	1/422 (17/422)	0,2% (4%)	2/319 (11/319)	0,3% (3,4%)	2/456 (11/456)	0,4% (2,4%)
Secondaire 4, SN	112/633 (151/633)	16,9% (23,8%)	32/518 (53/518)	6,2% (10,2%)	22/580 (33/580)	3,8% (5,7%)
Secondaire 4, TS	28/690 (85/690)	4% (12,3%)	28/513 (49/513)	5,5% (9,6%)	30/783 (52/783)	3,8% (6,6%)
Secondaire 4, CST	19/577 (51/577)	3,3% (8,8%)	3/411 (15/411)	0,7% (3,6%)	16/655 (50/655)	2,4% (7,6%)
Secondaire 3	37/758 (90/758)	4,8% (11,9%)	30/958 (76/958)	3,1% (7,9%)	19/914 (63/914)	2% (6,8%)
Secondaire 2	19/658 (42)/658	2,9% (6,4%)	25/589 (34/589)	4,2% (5,8%)	14/912 (48/912)	1,5% (5,3%)
Secondaire 1	13/823 (44/823)	1,6% (5,3%)	7/326 (16/326)	2,1% (4,9%)	7/1011 (28/1011)	0,7% (2,8%)

Tableau 4.1 Présence des contextes scientifiques dans les manuels scolaires en usage au Québec

Le tableau 1 compare le nombre de problèmes à contextes scientifiques dans les différents manuels scolaires en usage au Québec (en se basant sur les critères établis précédemment) avec la somme des problèmes des manuels. En prenant en exemple les manuels scolaires de première secondaire de la collection A, 13 problèmes ont été identifiés comme s'appuyant sur des contextes scientifiques sur un total de 823 problèmes. Le rapport entre parenthèses indique qu'en ne tenant pas compte du critère β (le champ disciplinaire devant être central dans le problème) ce nombre grimpe à 44, faisant presque quadrupler le pourcentage de ce type de problèmes. De ce fait, l'omission du critère β lors du recensement des problèmes à contextes scientifiques a un impact considérable dans la presque totalité des manuels du premier cycle : le plus faible impact faisant passer de 4,2 % à 5,8 % le pourcentage; le plus important le multipliant par presque 20.

Bien qu'il ne soit pas possible d'observer dans toutes les collections une progression de la place des problèmes à contextes scientifiques suivant la progression des niveaux d'enseignement, la progression remarquable que présente la collection A suggère de s'intéresser plus spécifiquement aux manuels des séquences SN des niveaux 4 et 5. Bien entendu, les séquences TS des mêmes niveaux sont tout aussi intéressantes. Néanmoins, pour la raison évoquée au début de cette section, cette dernière ne sera pas retenue. D'autres parts, le côté stable de la place des contextes scientifiques dans la collection B ne rend pas moins intéressante l'étude plus approfondie des manuels des séquences SN des niveaux 4 et 5.

D'autre part, il a été possible d'observer pendant le recensement certains champs mathématiques abordés dans les manuels ayant un impact (tant positif que négatif) sur la quantité de problèmes à contextes scientifiques dans les manuels. En effet, la géométrie (vecteurs mis à part), les statistiques et les probabilités sont des exemples de champs dans lesquels très peu (sinon aucun dans certains cas) de problèmes à contextes scientifiques ont été répertoriés. La forte place de la géométrie en secondaire 3 est peut-être ce qui explique la (légère) régression de la collection B lorsque l'on regarde l'évolution des problèmes à contextes scientifiques des trois premiers niveaux (le critère B étant considéré). Les séquences CST de chacune des trois collections présentent aussi une baisse par rapport aux séquences TS et SN, s'expliquant possiblement par le travail considérable sur les graphes et sur la probabilité (les deux champs absents des séquences TS et SN) en secondaire 5, ou encore la diminution remarquée de l'étude des fonctions et de l'algèbre.

En effet, les champs tels que les fonctions et l'algèbre sont ceux où il a été possible d'observer les plus importants recours à ce type de problèmes. Ces champs occupant une place importante des séquences TS et SN des 2 dernières années, expliquant peut-être les fortes occurrences des problèmes à contextes scientifiques que j'ai pu observer. L'étude des vecteurs, absent de la séquence CST, semble aussi avoir contribué à l'émergence du type de problèmes recherchés.

4.3.1.2 Les contextes scientifiques dans les manuels de la séquence SN des deuxième et troisièmes années du second cycle

Sur la base des informations recueillies par la première exploration, une seconde exploration, plus détaillée et s'attardant seulement à six[10] manuels de la séquence SN des deuxième et troisième années du second cycle, permet de mettre en relation les problèmes à contextes scientifiques avec les autres problèmes contextualisés, mais aussi avec les problèmes sans contextes. L'étude quantitative des problèmes tient compte également des chapitres proposés par les maisons d'édition. Voici d'abord la répartition des problèmes de chacun des manuels retenus selon le type de contexte (absence de contexte, contexte non scientifique et contexte scientifique) :

[10] Les manuels de 4^{e} et 5^{e} secondaire de la collection A sont chacun divisés en deux volumes. Ces derniers seront considérés comme un seul manuel suite à cette note.

	Problèmes sans contexte	Problèmes contextualisés (science exceptée)	Problème à contextes scientifiques
Alpha Sec. 4	320	201	112
	51%	32%	18%
		64%	36%
Bêta Sec. 4	343	143	32
	66%	28%	6%
		82%	18%
Gamma Sec. 5	395	129	140
	59%	19%	21%
		48%	52%
Epsilon Sec. 5	425	65	87
	74%	11%	15%
		43%	57%

Tableau 4.2 Répartition des problèmes de manuels scolaires selon le type de contextes

Le tableau 1 permet de voir que le recours aux contextes scientifiques dans l'élaboration des problèmes présents dans les manuels fluctue entre 6 % et 21 % si l'on tient compte de l'ensemble des problèmes proposés. Ces pourcentages augmentent toutefois considérablement si les problèmes décontextualisés (ou autrement dit « purement mathématiques ») ne sont pas retenus dans la comparaison, fluctuant cette fois-ci entre 18 % et 57 %!

Mis à part le manuel Bêta, où l'écart entre les problèmes à contextes scientifiques et les problèmes s'inspirant d'autres contextes est relativement grand (64 % si l'on délaisse les problèmes sans contexte), les trois autres manuels présentent des écarts beaucoup plus serrés : 28 %, 14 % et 4 % en ne tenant compte que des problèmes contextualisés, et respectivement de 14 %, 4 % et 2 % si l'on inclut les problèmes sans contexte.

De plus, il est intéressant de voir que c'est en deuxième année du second cycle que les écarts sont les plus marquants, où l'on favorise fortement les contextes ne se rapportant pas à la science. Un renversement est perceptible pour la troisième année du second cycle, où les contextes scientifiques apparaissent cette fois-ci plus nombreux.

4.3.1.3 Au deuxième cycle : les problèmes à contextes scientifiques et les chapitres dans lesquels ils se retrouvent

Le tableau suivant met en relation les problèmes à contextes scientifiques et les chapitres dans lesquels ils se retrouvent, permettant de voir que bien qu'il y ait globalement une faible utilisation de ce type de contexte dans certains manuels, cette utilisation est néanmoins importante à des moments précis :

	Problèmes sans contexte	Problèmes contextualisés (science exceptée)	Problème à contextes scientifiques
Alpha	41	21	27
Sec. 4	46%	24%	30%
Fonction quadratique		44%	56%
Alpha	64	35	1
Sec. 4	64%	35%	1%
Raisonnement géométrique		97%	3%
Bêta	26	9	0
Sec. 4	74%	26%	0%
Similitudes et isométries de triangles		100%	0%
Gamma	74	14	43
Sec. 5	56%	11%	33%
Les fonctions		25%	75%
Gamma	76	4	21
Sec. 5	75%	4%	21%
Les vecteurs		16%	84%
Epsilon	39	0	13
Sec. 5	75%	0%	25%
Fonction sinusoïdale		0%	100%

Tableau 4.3 Répartition des problèmes de certains chapitres de manuels scolaires selon le contexte

D'après le tableau 1 présenté avant celui-ci, le manuel Alpha contient 18 % de problèmes à contextes scientifiques tel que défini précédemment. Ce pourcentage augmente toutefois, comme le tableau 2 le montre, à 30 % dans le chapitre sur la fonction quadratique, et atteint même 56 % lorsque les problèmes sans contexte ne sont pas retenus. D'un autre côté, il y a une absence remarquée des contextes scientifiques dans le chapitre sur le raisonnement géométrique du même manuel. Seulement un problème sur les 100 proposés dans le chapitre, laissant le pourcentage dégringoler à 1 %. En tenant compte des problèmes contextualisés, ce dernier passe à 3 %, ce qui laisse comprendre qu'il n'y a pas uniquement peu de problèmes à contextes scientifiques, il y a peu de contextes point.

Le constat est sensiblement le même dans les autres manuels, où les problèmes à contextes scientifiques atteignent 75 %, 84 % et même 100 % des problèmes contextualisés dans les chapitres sur les fonctions et sur la fonction sinusoïdale, ainsi que les chapitres sur les vecteurs. Ainsi donc, si les contextes scientifiques semblent appréciés dans les chapitres sur les fonctions (réelles, trigonométriques, etc.) ou les vecteurs, ils semblent les délaissés des chapitres portant, par exemple, sur la géométrie, la géométrie analytique, les systèmes d'(in)équations, ou les rapports trigonométriques.

4.3.2 Retour sur l'étude quantitative

On retient donc de cette étude quantitative que les problèmes à contextes scientifiques sont présents du début à la fin du secondaire dans les manuels. Dans les premières années, il est possible de les retrouver même si leur présence fait davantage office de trame de fond aux problèmes, plutôt que d'être centraux à leur mise en contexte. Le même constat peut être fait dans la séquence CST des deux dernières années du secondaire.

Les séquences TS et SN des deux dernières années du secondaire sont celles où il est possible de retrouver en plus grand nombre les contextes scientifiques, et ce, dans plus d'un champ des mathématiques. Certains de ces champs semblent cependant plus propices à intégrer ces contextes. Par exemple, les chapitres sur les fonctions (tous les types) ainsi que ceux sur les vecteurs présentent les recours à ces contextes les plus nombreux, alors que les chapitres portant sur les géométries (euclidiennes et analytiques) ou encore les graphes les délaissent. Ces utilisations plus importantes dans certaines branches des mathématiques semblent traduire une vision plutôt utilitaire du lien entre mathématiques et sciences. La manière dont les mathématiques y sont présentées laisse en effet entendre que les mathématiques sont utiles pour comprendre certains phénomènes ou modéliser certaines situations. Toutefois, la quasi-absence de tels liens (utilitaires) entre sciences et géométrie, algèbre ou arithmétique contribue à ce déséquilibre.

4.3.3 Étude du lien entre mathématiques et sciences dans les programmes

L'utilisation remarquée des contextes scientifiques dans les deux dernières années du secondaire n'est pas sans rappeler ce que l'on peut lire les programmes d'études Mathématiques 436 et 536 des années 1990 (MEQ, 1996, 1997), c'est-à-dire « offrir une préparation aux études scientifiques » (p. 3). Elle n'est pas non plus sans lien avec la position du programme actuel qui insiste sur la « synergie » et sur « l'interdisciplinarité qui [...] s'avère incontournable » entre les deux domaines disciplinaires (MELS, 2007, p. 1). Cependant, ces positions plutôt générales sur la relation entre les deux disciplines n'expliquent pas pourquoi le recours aux contextes scientifiques apparaît de manière si irrégulière, à certains moments presque nulle et à d'autres, presque exclusive. En fouillant plus en profondeur dans les programmes de formation, il est possible de trouver des éléments expliquant cette utilisation irrégulière des contextes scientifiques.

Les allusions au domaine des sciences, dans la section Mathématiques du PFEQ discutent la relation entre les mathématiques et les sciences. À cet effet, il est possible d'y lire que « La mathématique est étroitement associée à la science [...] d'où originent de nombreuses problématiques qui se prêtent à la formulation de modèles mathématiques. En contrepartie, la modélisation contribue à la compréhension de phénomènes scientifiques... » (MELS, 2007, p. 10). Cette allusion à la modélisation peut-elle être une explication à la forte présence des contextes scientifiques dans les chapitres qui se prêtent bien à ce genre de travail, notamment les chapitres sur les fonctions?

La section Science et technologie pose sensiblement les mêmes affirmations quant aux liens entre les deux disciplines. Les mathématiques sont réinvesties dans des activités telles que : « mesurer, dénombrer, calculer des moyennes, appliquer des notions de géométrie, visualiser dans l'espace et choisir divers modes de représentation » (MELS, 2007, p. 6). La science et la technologie, de leur côté, permettent de rendre « concrets certains savoirs mathématiques, comme la notion de variable, les relations de proportionnalité, les principes de la géométrie ou les concepts associés aux statistiques » (p.6).

Il apparaît donc, dans les programmes de mathématiques et de science et technologie, des relations semblables, cependant différentes, entre les deux disciplines. D'un côté, le programme de mathématiques invite à puiser dans la science des situations favorisant le travail de modélisation et reconnaît dans ce même travail des occasions d'enrichir la compréhension des phénomènes scientifiques étudiés. Cette invitation a d'ailleurs été acceptée par les éditeurs de manuels scolaires, la section précédente témoignant en effet d'une présence significative des contextes scientifiques dans les chapitres sur les fonctions ou les vecteurs. D'une autre côté, la relation étroite entre les deux disciplines, du point de vue du programme de mathématiques, bien qu'intéressante pour ce dernier, semble favorable au programme de science et technologie, tant de par la manière dont la science est abordée dans les manuels scolaires que par la manière dont elle l'est dans le programme, et invite à questionner si elle ne pouvait pas l'être davantage pour le programme de mathématique. En effet, présentés comme des occasions d'améliorer la compréhension des phénomènes scientifiques, les problèmes à contextes scientifiques semblent davantage favoriser les sciences que les mathématiques, où l'on peut les voir comme des outils permettant de travailler sur les phénomènes. L'étude qualitative qui suit laisse toutefois voir que les phénomènes scientifiques ne sont pas tant travaillés en mathématiques qu'ils pourraient l'être.

La relation paraît favoriser tout autant le programme de science et technologie lorsqu'on regarde comment elle est évoquée dans ce dernier. En effet, les mathématiques y sont réinvesties, certes, mais dans une optique d'applicabilité. Les mathématiques sont présentées en quelque sorte comme des accessoires, des outils, utilisés à des fins d'études scientifiques. Par contre, ce même programme explique qu'il offre l'occasion de rendre « concret » certains savoirs mathématiques et cette affirmation peut prendre une orientation très intéressante pour le programme de mathématiques, selon ce qui est entendu par *concret*. Je discuterai à la section 3 de ce point de vue particulier. Toutefois, si par *concret* le programme de science et technologie n'entend qu'une occasion de mettre en pratique les concepts de variables, proportionnalité, statistiques ou géométrie dans des situations d'exploration ou d'observation, alors il ne s'éloigne pas de la vision d'applicabilité des mathématiques en sciences discutée précédemment, et l'on peut penser que les mathématiques n'en ressortent pas tellement enrichies.

En questionnant le rapport qui est véhiculé entre les mathématiques et les sciences par le biais de l'utilisation qui est faite de la cinématique dans les manuels scolaires en usage aux États-Unis (*pre-calculus*), Sokolowski et al. (2011) mettent en évidence plusieurs incohérences entre la manière dont est présentée la cinématique dans les classes de physique et comment elle l'est dans les manuels de mathématiques. Ils questionnent, par exemple, les différences de symbolisme, la manière dont sont utilisés les contextes scientifiques dans les manuels, mais surtout les différentes interprétations qui sont faites de certains concepts scientifiques. Ces constats faits par les chercheurs forcent à questionner, au-delà de la quantité des liens entre mathématiques et sciences, la qualité de ces derniers.

4.3.4 Analyse qualitative des contextes scientifiques dans les manuels scolaires

Les programmes de mathématiques et de science et technologie présentés par le MELS mettent de l'avant les liens étroits qui unissent les deux disciplines. Dans le programme de mathématiques comme dans celui de science et technologie, ces références à l'autre discipline sont encouragées pour les occasions d'approfondissement et d'enrichissement qui peuvent en découler. En effet, tel que mentionné précédemment, le travail autour de la modélisation en mathématiques peut contribuer à la compréhension des phénomènes scientifiques à modéliser. Mais encore faut-il que ces contextes scientifiques, que l'on cherche à modéliser dans les classes de mathématiques, soient propices à un enrichissement ou un approfondissement. Plus particulièrement sur le rôle du contexte, Cotnoir (2010) laisse entendre que le recours aux contextes en mathématiques est avantageux entre autres parce qu'il permet de « comprendre pourquoi, quand, ou, et comment certaines connaissances ou concepts en mathématiques sont utilisés » (p. 26), mais aussi parce qu'il permet « de développer chez l'élève une meilleure compréhension des concepts amenés, une meilleure utilisation des connaissances apprises, l'utilisation de stratégies personnelles qui font du sens de même qu'une plus grande motivation dans la tâche » (p. 27).

D'un autre côté, si le but recherché est aussi l'enrichissement ou l'approfondissement des contextes scientifiques travaillés, on peut penser que le travail mathématique fait autour de ces contextes dans la classe de mathématiques ne devrait pas être source de contradiction ou d'incohérence avec ce qui est admis par la communauté scientifique. À cet effet, Sokolowski et al. (2011) s'intéressent à la manière dont sont traités dans les manuels scolaires de mathématiques certains concepts relevants de la science. Ils remarquent entre autres que le symbolisme diffère dans chacune des disciplines pour un même concept, et critiquent l'utilisation des contextes dans les manuels scolaires. Cette étude est abordée à la section suivante.

Ce questionnement me semble important, car l'étude quantitative présentée à la section 2.1 m'a permis de réaliser que certains des problèmes à contextes scientifiques se retrouvant dans les manuels présentent des contradictions ou encore des incohérences par rapport à ce qui est normalement accepté dans la communauté scientifique. Voici un premier exemple, tiré de Boivin et al. (2010a) :

13 **ART PYROTECHNIQUE** Le Concours international d'art pyrotechnique de Montréal a vu le jour en 1985 à La Ronde. Chaque été, une dizaine de pays présentent tour à tour un spectacle grandiose au cours duquel l'explosion des pièces pyrotechniques est soigneusement synchronisée avec une trame musicale par des pyrotechniciens.

Le graphique ci-dessous montre la hauteur de trois pièces pyrotechniques en fonction du temps. Chaque règle est de la forme $y = a(x - h)^2 + k$.

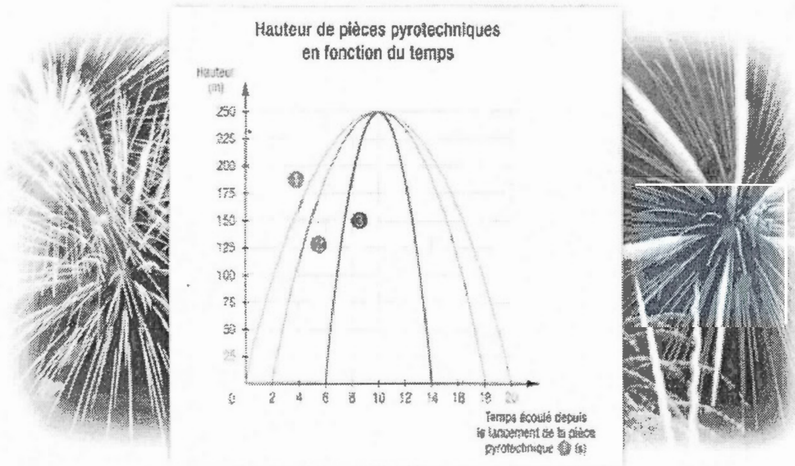


Figure 4.3 Visions mathématiques 1, SN 3^{e} année du 2^{e} cycle, p. 29

Le problème est présenté à la fin d'une section portant sur les opérations sur les fonctions. Il vise essentiellement le rôle et l'influence des paramètres sur l'allure des trois fonctions présentées à la figure 1.

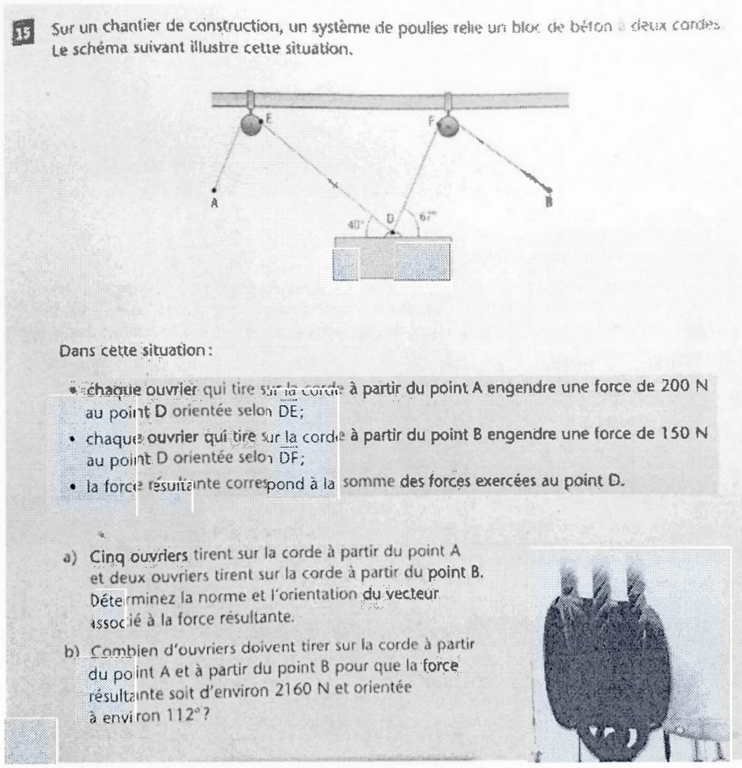
On comprend que trois pièces pyrotechniques sont lancées à trois moments distincts. La première est lancée au temps 0, la seconde 2 secondes plus tard, et la dernière à 6 secondes de la première. Les trois pièces atteignent une hauteur de 250 mètres au même moment. On peut en déduire que la première pièce s'est élevée de 250 mètres en 10 secondes, alors que les pièces 2 et 3 ont mis respectivement 8 et 4 secondes. Les vitesses orientées des trois pièces sont donc différentes, la première ayant la plus petite vitesse et la dernière, la plus grande. Ces vitesses sont cependant des vitesses moyennes : la non-linéarité des courbes des hauteurs en fonction du temps laissant comprendre que les vitesses de chacune des trois pièces pyrotechniques sont en constant changement. De plus, puisque l'énoncé affirme que le mouvement de chaque pièce pyrotechnique se modélise par une fonction quadratique, l'accélération que subissent ces pièces devrait être constante. Le graphique présente donc trois pièces pyrotechniques dont les vitesses instantanées sont en continuel changement, dont les vitesses moyennes sont différentes, mais qui atteignent et plafonnent toutes trois à la même hauteur et au même moment. Au moment de la descente, les trois pièces pyrotechniques viennent d'atteindre des vitesses verticales nulles. Le graphique, qui laisse (curieusement!) sous-entendre qu'elles n'ont pas explosé, montre alors que la première pièce un met le plus long moment pour atteindre le sol, suivie dans l'ordre des pièces deux et trois.

Du point de vue de la physique, on peut se demander comment ces trois objets peuvent présenter ces différentes vitesses. Supposons pour commencer que les pièces soient projetées verticalement (et non propulsées). Alors forcément la troisième pièce doit avoir une plus grande impulsion que les deux premières. Or, chacune des vitesses subit une décélération dans le sens de la hauteur correspondant à la force de gravitation (approximativement 9,81 m/s^2), à laquelle s'ajoute celle provoquée par la friction de l'air (généralement négligeable). De ce point de vue, il est difficile d'imaginer comment deux pièces propulsées à des vitesses différentes, par exemple les pièces 1 et 3, pourraient se stabiliser à une même hauteur au même moment, une plus grande vitesse nécessitant plus de temps pour devenir nulle (alors qu'ici la pièce ayant la vitesse initiale la plus rapide est aussi celle disposant de moins de temps pour s'arrêter). Il apparaît donc peu probable que cette situation se produise dans le cas où les pièces sont projetées. La descente n'est pas moins problématique, et de manière peut-être encore plus évidente : comment trois objets en chute libre pourraient-ils tomber à des vitesses différentes, chacun suivant une accélération constante qui est en plus l'exacte opposée de celle caractérisant sa montée?

La situation serait-elle possible si les pièces étaient propulsées de façon variable? Dans ce cas, la force de gravitation n'aurait pas le même effet que précédemment : la vitesse de chacune des pièces ne serait pas diminuée de 9,81 m/s par seconde, puisqu'elles subiraient une accélération en sens inverse. Les courbes obtenues seraient donc plutôt ouvertes vers le haut pour les branches de gauches (i.e. avant l'atteinte de la hauteur maximale). En fait, il faudrait que chacune des pièces puisse constamment ajuster sa vitesse pour que la situation concorde avec le graphique.

Ces réflexions sur la manière dont sont projetées ou propulsées les pièces pyrotechniques, sur la manière dont ces dernières devraient ou non varier leurs vitesses rappellent en quelque sorte les théories du Moyen Âge sur le mouvement, notamment celle de l'*impetus* prenant source chez Aristote. En effet, Aristote imagine que lorsqu'une action (de déplacement par exemple) sur un objet cesse, cet objet cesse de se déplacer. Ainsi, une flèche tirée dans les airs retombe au sol non seulement à cause du mouvement naturel, inhérent à la nature de l'objet, qui ramène les objets vers leur lieu d'origine, mais aussi parce que l'action appliquée à (ou absorbée par) l'objet cesse immédiatement au moment où cet objet commence à retomber (e.g Mansion, 1913 ; St-Hilaire, 1862). Cette interprétation ne correspond évidemment pas à ce que l'on fait en physique depuis Newton, en constitue en fait un élément important du point de vue de l'enseignement de cette matière.

Un second exemple d'incohérence par rapport à ce qui est généralement accepté dans la communauté scientifique peut être observé dans le problème suivant, mettant en scène la relation entre les concepts de force et de vecteurs (Boivin et al., 2010b) :


35 Sur un chantier de construction, un système de poulies relie un bloc de béton à deux cordes. Le schéma suivant illustre cette situation.

Dans cette situation :

- chaque ouvrier qui tire sur la corde à partir du point A engendre une force de 200 N au point D orientée selon DE;
- chaque ouvrier qui tire sur la corde à partir du point B engendre une force de 150 N au point D orientée selon DF;
- la force résultante correspond à la somme des forces exercées au point D.

a) Cinq ouvriers tirent sur la corde à partir du point A et deux ouvriers tirent sur la corde à partir du point B. Déterminez la norme et l'orientation du vecteur associé à la force résultante.

b) Combien d'ouvriers doivent tirer sur la corde à partir du point A et à partir du point B pour que la force résultante soit d'environ 2160 N et orientée à environ 112° ?

Figure 4.4 Visions mathématiques, SN 3e année du 2e cycle, p. 52

Ce problème apparaît après une section sur les combinaisons linéaires et le produit scalaire. Il propose de s'intéresser à des ouvriers tirant un bloc de béton par le biais de deux cordes passant chacune par une poulie. Des informations sont données quant à la force qu'exerce chacun des ouvriers sur le bloc de béton. On présente la force résultante comme étant « la somme des forces exercées au point D », qui est le point d'attache des deux cordes sur le bloc de béton.

La position du problème dans le manuel scolaire laisse comprendre qu'il est demandé d'additionner les forces appliquées au bloc par l'une et/ou l'autre des méthodes présentées précédemment dans le manuel, ou de décomposer en deux vecteurs ce qui est appelé force résultante.

L'incohérence ici réside dans l'usage qui est fait du concept de *force résultante*. La force résultante est la somme de toutes les forces agissant sur un corps, et en particulier ici : la force gravitationnelle (déterminée par la masse du bloc de béton et l'attraction gravitationnelle). Cependant, la masse du bloc de béton n'est pas donnée dans l'énoncé. Ainsi, dans le cas où le bloc de béton serait très lourd la force résultante pourrait même s'orienter vers le bas, annulant complètement les forces exercées par les ouvriers. Dans le cas d'un bloc plus léger, la force résultante serait vers le haut, mais tout de même influencée par la force gravitationnelle exercée sur l'objet. Il semble aussi sous-entendu dans l'énoncé que le centre de gravité du bloc (en d'autres mots la concentration de la masse de tout le bloc de béton en un point unique) s'aligne parfaitement avec le point D, le cas contraire résultant obligatoirement en une modification de la force résultante. L'alignement du centre de gravité avec le point D n'est pas nécessairement perceptible dans l'image, toutefois l'image du bloc étant supportée par le point D de sorte que celui-ci soit maintenu horizontalement laisse croire qu'il en est ainsi. Le concept de force équivalente, en ce sens, semble mieux adapté pour décrire la situation présentée précédemment, plutôt que le concept de force résultante, qui a une signification bien particulière en physique.

D'autres problèmes, tirés de tous les manuels analysés et en lien avec la mécanique des fluides, l'aérodynamique, la biologie ou encore l'électricité, présentent également des contradictions avec des concepts scientifiques ou sont sources d'incohérences. Toutefois, l'idée ici est davantage de souligner les subtilités qu'il est possible de rencontrer lors de l'utilisation de contextes scientifiques que de faire un étalage de contradictions ou d'incohérences. Je m'en tiens aux deux exemples précédents, proposant plutôt d'entrer dès ici sur une réflexion de fond concernant ce phénomène, débutant par la manière dont est pensée l'interdisciplinarité entre mathématiques et sciences selon le MELS et s'inspirant de recherches en didactiques des mathématiques et des sciences.

4.3.5 Intégration, modélisation, interprétation de phénomènes scientifiques

Tels que décrits à la section 2.3 par le MELS, les liens entre mathématiques et sciences prennent essentiellement la forme de modélisation, où par exemple les mathématiques s'avèrent adéquates pour présenter des modèles de phénomènes observés. Toutefois, comme il m'a été possible de l'observer et comme le rapportent Sokolowski et al. (2011), les problèmes à contextes scientifiques dans les manuels de mathématiques se résument bien souvent à des applications méthodiques de formules préarrangées. À cet effet, Caron et Savard (2012) affirment que ce genre de travail, qu'elles rapportent à l'enseignement traditionnel, tend à négliger le lien qu'il est possible de créer entre la situation réelle et le modèle qui y est établi. Selon elles, le travail de modélisation est « une forme complexe et exigeante de la résolution de problème [...] qui vise essentiellement à prédire ou à expliquer un aspect de la réalité » (p. 25). Ainsi, elles désirent engager le travail sur la relation (entre le modèle *et* la situation) plutôt qu'uniquement sur le modèle, ce que tendent à faire les problèmes actuellement présentés dans les manuels. Elles proposent donc des activités d'explorations en laboratoire de phénomènes aboutissant à des modèles mathématiques non connus des élèves, ces derniers découvrant les modèles à travers les situations d'exploration. En d'autres mots, la vision qu'elles ont de la modélisation ressemble à la relation entre mathématiques et sciences décrite dans le programme de sciences et technologie, à cette différence près qu'elles l'envisagent dans une optique de découverte mathématique.

Cependant, bien que la modélisation telle que présentée par Caron et Savard semble un moyen intéressant de lier les deux disciplines, d'autres chercheurs ont vite fait de souligner chez les enseignants certaines difficultés à vivre le recours à un contexte scientifique dans la classe de mathématiques. C'est le cas de Pang et Good (2000), qui se sont entre autres penché sur la manière dont les enseignants vivent l'intégration des mathématiques et des sciences. De cette étude ressortent différentes raisons expliquant la difficile intégration des sciences et/ou mathématiques dans l'autre discipline : connaissance limitée de l'autre discipline; conceptions liées à certains concepts; contraintes curriculaires, administratives, de temps; etc. Il peut alors apparaître difficile pour des enseignants vivant certaines de ces difficultés ou contraintes à s'engager dans des activités nécessitant une démarche exploratrice, à lier adéquatement des résultats observés lors d'une phase d'exploration à un modèle mathématique, ou encore à effectuer ces liens sans que le travail effectué ne transmette « [an] inadequate perceptions of the nature of other disciplines » (p. 77). Et même lorsque le concept étudié ne semble pas d'emblée porter d'ambiguïté, la manière dont il est travaillé dans la classe de mathématiques ou de sciences peut être source de confusion. C'est ce qui pousse Dorier (2000) à séparer les vecteurs dits physiques de ceux mathématiques. Cette particularisation d'un même concept à l'une ou l'autre des disciplines peut en effet être une source de confusion pour l'enseignant qui croit, par exemple, adopter une démarche scientifique type lorsqu'il intègre les concepts de force dans la classe de mathématiques.

D'autres recherches s'intéressant à certains concepts associés aux disciplines scientifiques révèlent qu'il est généralement difficile pour des élèves de délaisser leurs conceptualisations au profit d'autres admises par la communauté scientifique. Cette difficulté est à prendre en considération lorsque vient le temps de revoir ces concepts dans les livres de mathématiques. Choquette (2008) souligne d'ailleurs la difficulté des élèves à délaisser certaines conceptualisations liées à l'électricité ou la cinématique, cette dernière étant un champ de la physique que l'on retrouve abondamment dans les chapitres de manuels scolaires portant sur les vecteurs ou les fonctions. Dans le même sens que Choquette, McCloskey, Caramazza et Green (1980) affirmaient déjà que « many students who have completed one or more physics courses, as well as many of those without formal instruction, fail to understand the most fundamental principles of mechanics » (p. 1139).

Ainsi, le recours à des contextes scientifiques dans la classe de mathématiques, bien qu'apparaissant un moyen de créer du sens entre des situations concrètes et des modèles mathématiques (abstraits), peut être source de confusion à la fois chez l'enseignant et chez l'élève. De plus, cette pression soulignée par Pang et Good (2000) à reproduire la pratique de l'autre discipline ou à tenter de représenter le plus fidèlement possible certains phénomènes naturels peut être source de malaise pour des enseignants moins familiers avec ces concepts délicats. Comment, donc, prendre en compte ces différents aspects qui surviennent lors de ces recours aux contextes scientifiques dans les manuels (et les classes) de mathématiques? Comment rendre les contextes scientifiques significatifs et utiles au travail mathématique? Pourrait-on éviter de mettre sur les épaules des enseignants ou des concepteurs de manuels le poids qu'imposerait une reproduction fidèle du travail en science (physique, chimie, biologie, etc.) tout en permettant un recours à ces contextes particuliers?

Une amorce de réponse réside peut-être dans un changement de paradigme. Le cloisonnement disciplinaire, dont l'origine remonte au moins à Aristote, a façonné la manière dont nous pensons l'école et la formation des enseignants. La compartimentation existante rend naturellement difficile l'établissement de liens qui ne sont pas superficiels. On a donc tôt fait de créer des rapprochements futiles, de surface. Qui plus est, l'absence de formation des enseignants de mathématiques en sciences et technologies impose à ces derniers d'établir eux-mêmes les liens entre les disciplines au meilleur de leurs connaissances, rendant difficile par le fait même le dialogue entre les deux disciplines. Un regard unifiant sur les mathématiques et les sciences n'ouvrerait-il pas un paradigme permettant de passer outre ces difficultés?

4.4 Vers l'unification des mathématiques et des sciences, le physicomathématique

Dupuis (2012) raconte que le grand physicien Paul Dirac aurait dit au non moins grand physicien Richard Feynman : « Comprendre un problème physique, c'est être capable d'en voir la solution sans résoudre d'équation » (p. 140). C'est dans cette optique que Feynman, suivant les conseils de son maître, s'est mis à utiliser des diagrammes scientifiques « non pas pour simplement *illustrer* ses calculs, mais pour "penser" la physique » (p 139). Ces diagrammes devinrent rapidement les diagrammes de Feynman, une manière ingénieuse de penser les comportements de particules, évitant ainsi de longues chaînes de calcul, dans le domaine de l'électrodynamique quantique (Kaiser, 2005).

C'est dans cette manière de *vivre* le diagramme que Dupuis (2012) rapproche Gilles Châtelet de Richard Feynman. En effet, le travail de Feynman sur les diagrammes va au-delà d'une seule lecture qui réduit non seulement à l'utilitarisme le rapport entre mathématiques et physique, mais contribue par le fait même à maintenir érigée par certaines épistémologies traditionnelles la frontière entre les deux disciplines (Châtelet, 1993).

4.4.1 Exéprience diagrammatique

Feynman, dans la création de ses diagrammes, voit le temps se dérouler et la dimension spatiale s'étendre, perception que Châtelet (2010, 1993, 1987) décrit comme le physicomathématique :

> L'objet qu'on a en face de soi, ce n'est jamais un objet « physique », ce n'est jamais un objet mathématique, c'est toujours un objet physico-mathématique. Et faire de la physico-mathématique c'est trouver une forme d'adéquation entre les virtualités mathématiques de la chose et les complexes expérimentaux avec lesquels je peux [la] faire exploser. (Châtelet, 1987, p. 11)

Cette vision particulière de l'articulation entre physique et mathématiques décrite par Châtelet et exemplifiée par le travail de Feynman est d'une certaine manière rejointe en partie les propos du MELS énoncés précédemment, mais contraste avec ce qu'on observe dans les manuels (section précédente, ou encore : Sokolowski et al. (2011)). Le MELS affirme que « la mathématique est étroitement associée à la science [...] d'où originent de nombreuses problématiques qui se prêtent à la formulation de modèles mathématiques. En contrepartie, la modélisation contribue à la compréhension de phénomènes scientifiques... » (2007, ch. 6, p. 10). Cette affirmation rejoint en effet la proposition de Châtelet quant au lien entre les deux disciplines. Physique et mathématiques sont certes étroitement liées – Châtelet allant jusqu'à dire que les objets ne puissent être qu'uniquement physiques ou mathématiques.

Toujours suivant Châtelet, il ne faut cependant pas voir dans le physico-mathématique une sorte de neutralisation des particularités de la science et des mathématiques, ni un effort de compréhension mutuelle. C'est plutôt dans des mouvements de « provocation » qu'il les envisage. Cette provocation permet aux deux disciplines d'avancer, de se transformer l'une l'autre, les tensions étant prises comme des occasions productives. En ce sens, on peut voir un rapprochement possible avec ce qui est proposé dans le programme de science et technologie : si les mathématiques se « concrétisent » dans la science, ce mouvement les amenant à se redéfinir, à s'approfondir, à élargir leurs champs.

Les problèmes examinés plus haut offrent-ils de telles occasions? Telles que présentées, ces situations ne semblent pas viser la provocation dont parle Châtelet. Mais à quoi donc pourrait ressemble cette provocation? Si l'intérêt du recours aux contextes scientifiques, comme le rapportent Caron et Savard (2012), est de s'inspirer de ces derniers pour faire des mathématiques, alors peut-être que l'adéquation entre l'interprétation scientifique acceptée d'un phénomène et sa représentation pour le travail mathématique n'est pas si indispensable... Il faudra, en revanche, être bien clair à ce propos! Après tout, on se donne le droit, dans les cours de physique par exemple, de *concevoir* des situations qui permettent d'isoler certains phénomènes. Il suffit de penser à l'étude de la « chute libre », littéralement impossible à étudier sur Terre, néanmoins étudiée dans ces cours à l'aide d'expériences « reproduisant » ce phénomène.

En adoptant ce point de vue, serait-il envisageable de travailler les problèmes à contextes scientifiques comme des occasions d'approfondir, d'investiguer mathématiquement, de questionner, de raisonner les mathématiques, sans toutefois que l'exactitude du phénomène ou de la démarche adoptée soit une barrière à ce travail (mathématique)? Ne pas se borner à ce souci de l'exactitude du phénomène dans ces problèmes fait en quelque sorte de ces derniers des situations *concevables* qui ouvrent à la provocation telle qu'évoquée par Châtelet.

4.4.2 Vers une conceptualisation du *concevable*

Inspiré du physicomathématique et du travail que l'on s'autorise parfois en physique, le concept de « concevabilité » veut permettre une mise à profit plus cohérente des situations à contextes scientifiques dans le but de travailler mathématiquement. Un peu à la manière dont le constructivisme propose un changement de paradigme important en parlant de viabilité plutôt que de vérité (Glasersfeld, 1994), la notion de concevabilité cherche à mettre l'accent sur le caractère sensible, perceptible, intelligible, imaginable, expérimentable, voire explicable d'un phénomène ou de son traitement mathématique (Lagacé et Maheux, 2012) plutôt que sur ce qui en serait l'exactitude ou la justesse. Ainsi, c'est le caractère concevable du contexte scientifique de référence qui en fait l'intérêt du point de vue de l'enseignement des mathématiques, la question de son adéquation avec l'expérience quotidienne ou le traitement qui en serait fait en science étant, justement, un des moteurs l'activité mathématique (et scientifique, si on le voulait). Une situation est concevable si elle peut être « saisie par la pensée », si elle peut être imaginée, envisagée, comprise, l'intérêt de cette prise n'étant pas simplement de servir de toile de fond au travail mathématique, mais, d'une certaine manière, d'en devenir la matière première.

Avec ces lunettes, les mathématiques se présentent comme *une entrée* sur les situations examinées, permettant par exemple de se donner différentes modélisations d'un même phénomène, ou de voir une situation comme une manière particulière d'entrer sur des idées mathématiques. Pour illustrer ceci, je propose de revenir au problème des pièces pyrotechniques abordé à la section 2.4. Du point de vue de la concevabilité, la situation est intéressante en ce qu'elle permet de questionner le phénomène à l'aide des mathématiques, et même de questionner les mathématiques à l'aide du phénomène. L'analyse du problème proposée à la section 2.4 est alors, justement, une amorce de ce travail en ce sens.

D'abord, l'analyse illustre un travail à partir du graphique (comme on le voit en mathématiques) et du phénomène (tel que traité en science) qui s'applique à questionner le graphique. La situation représentée est-elle possible? Sous quelles conditions la situation évoquée pourrait-elle se représenter ainsi? L'analyse se conclut de manière plutôt négative sur ce point, ce qui n'empêche pas qu'un travail mathématique intéressant ait eu lieu! Quelle transformation du graphique permettrait de mieux représenter la situation? Tout ce travail est très intéressant parce qu'il articule le travail mathématique et la situation dans laquelle il se présente, et se construit sur les provocations entre le travail mathématique et la situation, en plus de préserver le lien étroit en sciences et mathématiques. En effet, il amène en un certain sens à considérer les mathématiques et les sciences à la manière de Châtelet, dans cette provocation entre le graphique et le phénomène, mettant en dialogue les conceptualisations que l'on peut formuler à partir de l'une ou l'autre discipline. Toutefois, il est possible de remarquer que le but visé est essentiellement la conformité du graphique avec le phénomène, rappelant cette recherche de l'exactitude de la représentation du phénomène.

Il est moins facile de voir comment, d'autre part, la situation conduit à un véritable questionnement des idées mathématiques en jeu. Certes le travail décrit à la section 2.4 témoigne d'un va-et-vient entre le phénomène et les mathématiques, d'une articulation forçant le mouvement du graphique pour s'ajuster au phénomène, mais encore? Le phénomène (les pièces pyrotechniques s'envolant, ralentissant, explosant ou retombant comme le feraient un ballon ou une balle) devient une occasion de provocation du graphique, mais il peut aussi ouvrir à un questionnement des concepts de fonctions, de relations ou de covariation *par* la situation.

Les fonctions sont généralement définies comme des relations où pour tout élément d'un ensemble de départ (le domaine) ne correspond qu'un seul élément d'un ensemble d'arrivée (le co-domaine). Cette définition, qui peut sembler évidente et très générale (voire même universelle), s'appuie en fait sur certaines idées mathématiques de la théorie des ensembles dont la mise en évidence rappelle le caractère historique et contextuel (par rapport à ces idées). En effet, le concept de fonction a connu au cours de l'histoire plusieurs changements qui n'ont pas toujours ravi (Charbonneau, 1987a). Certains auteurs en retracent les balbutiements dans l'étude des règles de correspondances faite chez les Grecs (Charbonneau, 1987b). Plutôt considéré comme statique à cette époque (essentiellement une approche point à point sur des figures), ce concept profite du dynamisme insufflé par l'étude du mouvement par Oresme et Galilée (14^{e}-17^{e} siècles) pour être redéfini, servant désormais de support à l'étude des variations et de la dépendance. Un nouveau tournant apparaît avec Descartes et l'approche qu'il propose pour les fonctions par le travail en géométrie analytique qu'il met au point. Leibniz propose alors une première définition formelle du concept de fonction, très graphique : une fonction est alors une « portion des lignes droites qu'on fait en menant des droites indéfinies qui répondent au point fixe et aux points de la courbe… » (Charbonneau, 1987b, p.10). Bernouilli redéfinit finalement à son tour le concept de manière à restreindre considérablement la portée (au domaine algébrique et à certains types de relations). C'est ainsi de manière assez récente que nous la définissons en nous appuyant fortement sur le principe de correspondance plutôt qu'en termes de covariation (René de Cotret, 1987).

Comme tout objet mathématique, la fonction est donc un concept complexe, aux significations et définitions multiples et, parfois difficiles à concilier. Le contexte fourni par le lancement de pièces pyrotechniques propose une définition de la fonction qui rejoint en un sens la vision dynamique de la fonction développée au Moyen Âge, tant dans l'approche (étude du phénomène dans sa globalité plutôt que localement) que dans le sujet traité (le mouvement) : une fonction est une relation du type de ce qui est observé entre le temps et la hauteur d'un objet lancé vers le haut. On peut donc y voir une occasion intéressante de questionner la définition ensembliste de la fonction.

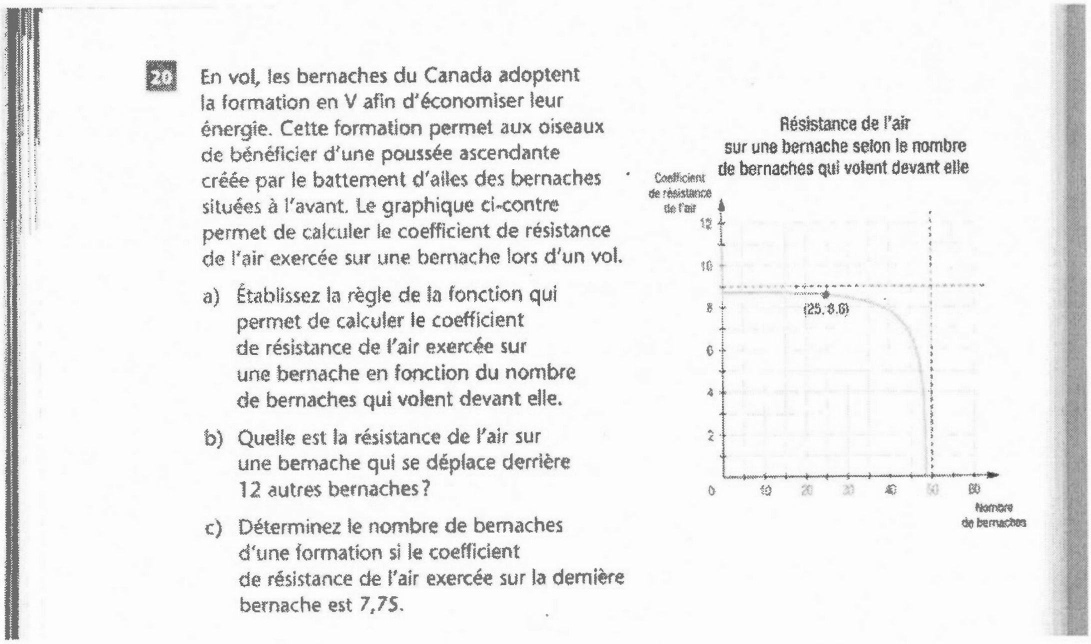
En effet, sortie de son contexte algébrique, la définition ensembliste de la fonction rejoint difficilement le type d'étude qui est demandé lors de l'observation de phénomènes comme celui des pièces pyrotechniques. Outre l'association qui est faite entre l'allure de la courbe dans le graphique et l'idée même de fonction – association qui n'est seulement possible que par notre connaissance de l'éventail des fonctions, la définition ensembliste de la fonction permet difficilement un dialogue avec la situation des pièces pyrotechniques. Une approche par correspondance découlant de cette définition paraît effectivement difficile à mettre en pratique dans ces cas-ci. Comment arriver à saisir l'ensemble du domaine de la situation? Cette dernière se basant sur le temps pour observer différentes altitudes, il devient impossible d'accéder « physiquement » à l'ensemble des « moments » observables. D'un autre côté, s'arrêter à l'observation d'une certaine quantité de « moments » permettant, à partir de ceux-ci, de voir dans la situation un quelconque type de fonction serait une association biaisée. Comment savoir si certains des éléments du domaine non considérés dans ce cas hypothétique satisfont à la définition ensembliste? En contrepartie, comment s'assurer que les critères d'une telle définition soient respectés à tout moment de la situation?

D'autre part, la représentation graphique de la situation, qui nous ramène à la fonction comme courbe dans le plan, semble tout à fait appropriée à une réflexion sur les différentes formes et usages du traitement graphique. En effet, il y a une certaine ambiguïté sur le plan mathématique entre la manière d'interpréter un diagramme qui représenterait la *trajectoire* des pièces pyrotechniques et celui, présenté dans le problème, modélisant son altitude en fonction du temps. Dans certains graphiques, c'est la trace qui fournit directement la solution au problème posé (e.g. construire le centre d'un cercle passant par 3 points non alignés), alors que dans d'autres elle doit faire l'objet d'une analyse plus fine (e.g. À quoi correspond le point de rencontre des 3 courbes dans la figure 4.1?). Ici, en raison de la confusion facile entre les différentes manières de considérer la situation (trajectoire, déplacement, vitesse, etc.), la situation peut devenir une occasion de questionner l'idée même de représentation graphique d'une relation, et du traitement que l'on peut en faire.

Présentées ainsi, il devient difficile de voir les mathématiques comme une entité rigide à assimiler et sur laquelle notre questionnement n'a aucun impact. On y voit plutôt une discipline qui évolue, qui s'enrichit des questionnements de chacun et des avancements des autres disciplines, une discipline qui est en mouvement (presque qu'au sens d'Aristote). Les définitions contextuelles participent à ces évolutions, ces questionnements. Particulièrement dans la rencontre des sciences, les définitions contextuelles enrichissent les mathématiques. Il ne suffit qu'à penser à Archimède et l'utilisation qu'il a su faire du principe du levier pour arriver à résoudre certains problèmes jusqu'alors inaccessibles aux Grecs pour s'en convaincre.

En s'autorisant momentanément ces définitions contextuelles (par exemple, une fonction est une relation du type de ce qui est observé entre le temps et la hauteur d'un objet lancé vers le haut), comment établir un lien d'applicabilité ou d'utilitarisme entre les mathématiques et la physique? Les mathématiques ne servent en effet plus à représenter à l'aide des fonctions ce phénomène particulier, car ce dernier participe à la définition du concept que l'on cherche à utiliser pour le représenter lui-même, en faisant un non-sens. D'autre part, comment les mathématiques pourraient-elles être utiles pour décrire certains phénomènes si ces derniers font partie des définitions des concepts qui composent les mathématiques? Pourrait-on seulement parler de contextes scientifiques dans ce cas précis?

Voici un autre exemple permettant peut-être plus facilement d'illustrer le concept de concevabilité :



20 En vol, les bernaches du Canada adoptent la formation en V afin d'économiser leur énergie. Cette formation permet aux oiseaux de bénéficier d'une poussée ascendante créée par le battement d'ailes des bernaches situées à l'avant. Le graphique ci-contre permet de calculer le coefficient de résistance de l'air exercée sur une bernache lors d'un vol.

a) Établissez la règle de la fonction qui permet de calculer le coefficient de résistance de l'air exercée sur une bernache en fonction du nombre de bernaches qui volent devant elle.

b) Quelle est la résistance de l'air sur une bernache qui se déplace derrière 12 autres bernaches?

c) Déterminez le nombre de bernaches d'une formation si le coefficient de résistance de l'air exercée sur la dernière bernache est 7,75.

Figure 4.5 Visions, secondaire 5, séquence TS, page 56

Ce problème s'articule autour du concept de résistance aérodynamique. Je doute que la majorité des enseignants de mathématiques puissent discuter de ce phénomène comme le ferait un enseignant de physique ou un physicien (ou un zoologiste!). Toutefois, il pourrait être intéressant d'amener les élèves à utiliser leurs connaissances mathématiques pour extraire le plus d'informations possible de cette représentation du phénomène, et même de la questionner du point de vue de ses implications mathématiques. Quelle est la signification des asymptotes dans le graphique représentant la situation? Doit-on considérer l'autre branche de la fonction rationnelle? Si oui, quel sens donner à la représentation de cette situation? Comment le vent influence de tels résultats? En tentant de répondre aux quelques questions précédentes, on réalise que la représentation proposée par les auteurs de ce manuel n'est probablement pas celle qui représente le mieux la résistance de l'air sur des bernaches volant en formation. Ce travail demande toutefois un aller-retour entre la représentation mathématique et le phénomène de résistance aérodynamique. Déjà est-il possible de questionner la continuité de la représentation (quantités discrètes en abscisse). On peut aussi se demander ce qu'arrive-t-il si la formation regroupe plus de 50 bernaches? Ces questions forcent à établir un lien entre la situation et le modèle présenté non pas pour en montrer l'inadéquation, mais plutôt dans le but d'approfondir à la fois le travail mathématique et scientifique. On notera bien entendu une part d'inadéquation dans la représentation du phénomène, mais l'intérêt pour nous ici est dans le fait que cette observation demande un travail mathématique significatif par rapport à la situation, travail qui vient aussi nourrir les raisonnements qu'on pourrait mettre en jeu dans la réponse aux questions posée dans l'exercice. Au lieu que le contexte vienne simplement donner une signification aux points repérés dans le graphique ou à la règle de la courbe présentée, c'est le modèle du phénomène qui, en tant que tel, peut alors servir de support à donner un sens à cette relation inverse, et au fait d'aller lire certains points sur cette courbe épurée.

Peut-être alors faut-il envisager le concept de concevabilité comme un état d'esprit dans lequel on se met plutôt qu'une approche précise, ou une démarche à suivre. La rencontre entre mathématiques et sciences devient alors une occasion à la fois d'élargissement, de provocation, de va-et-vient menant à et mené(e) par un questionnement sur la nature du lien entre les deux disciplines. Le but n'est pas de concilier les deux disciplines pour atténuer les tensions. Il cherche plutôt à tirer parti de la rencontre et des tensions qui s'installent dans cette rencontre.

4.5 Conclusion

Pang et Good (2000) ont laissé comprendre qu'il n'est pas facile pour les enseignants de composer avec ces problèmes s'inspirant d'autres disciplines. À travers les contraintes de temps, curriculaires, monétaires ou administratives, les enseignants doivent parfois ajouter leur malaise à aborder des sujets qu'ils pensent ne pas maîtriser ou au contraire qu'ils croient maîtriser pour des raisons non scientifiquement admises. D'autre part, j'ai montré la présence considérable de problèmes à contextes scientifiques dans certaines sections des manuels scolaires en usage au Québec. Des problèmes qui peuvent sembler satisfaire les exigences du MELS en ce qui concerne l'interdisciplinarité, mais qui en fait ne semblent pas tisser de liens profonds entre les deux disciplines. À preuve : les nombreux problèmes présentés dans les manuels de mathématiques, dont j'ai présenté quelques exemples, qui témoignent d'incohérences ou de contradictions avec ce qui est accepté par la communauté scientifique. En ce qui concerne l'interdisciplinarité, il me semble important de questionner non seulement l'insistance qui est mise de l'avant par le MELS quant à cette approche en mathématiques, mais la vision des mathématiques qui est véhiculée par cette insistance. En effet, partout dans le programme de mathématiques est-il possible de lire des références à des liens interdisciplinaires ou intradisciplinaires, des relations aux autres disciplines, des repères culturels, des occasions de faire telle ou telle chose. Ces apparitions récurrentes, bien que proposant des idées intéressantes, semblent dresser un portrait des mathématiques bien particulier. Que reste-t-il de ces dernières lorsqu'elles sont dépouillées de tous ces liens ou repères?

On peut retenir de ce travail que la manière dont se présente l'interdisciplinarité dans les manuels traduit dans un premier temps une vision utilitaire des mathématiques et dans un second, une utilisation futile. Ces constatations pourraient amener à questionner la formation scientifique des futurs enseignants de mathématiques qui auront, éventuellement à composer avec ces contextes et ce type de problèmes. Comment appréhender ces erreurs et ces incohérences? Est-ce que les futurs enseignants doivent être préparés à traiter de ces concepts dans les classes de mathématiques? De quelle nature pourrait être cette préparation? Il va de soi qu'il n'est pas réaliste que ces derniers soient formés dans toutes les disciplines scientifiques...

Le concept de *concevabilité* apparaît en ce sens comme une manière intéressante de dépasser ces tensions. Travailler les mathématiques *et* les sciences dans la classe de mathématiques à partir d'une situation de sorte qu'une provocation se vive entre chacune des disciplines est une approche qui pourrait non seulement libérer les enseignants du besoin « d'articuler » les deux disciplines de manière cohérente, mais aussi présenter le rapport entre mathématiques et sciences d'une manière qui se rapproche davantage de ce qu'il a été tout au fil de l'histoire (ce dont nous parle abondamment Châtelet). Elle libère en effet de l'exigence de réalisme dans la manière dont s'articulent les disciplines dans les situations où elles se présentent. En effet, le concept de concevabilité dispense de cette recherche de réalisme et préfère plutôt construire sur les liens entre mathématiques et sciences à travers des « expériences de pensée », qui se rapprochent d'ailleurs beaucoup du travail du scientifique. Il suffit de penser à Einstein « à cheval » sur son photon, à Feynman et ses diagrammes mouvant, à Archimède demandant un point d'appui afin de « soulever la Terre », ou aux propositions de Newton et Galilée sur le mouvement « dans le vide » : toutes des situations impossibles à vivre pour ces personnages! Dans toutes ces situations, les scientifiques ont su tirer parti d'un contexte d'une manière impossible à saisir, mais d'autre part tout à fait signifiant, et *permettant* en fait un travail scientifico-mathématique qui n'aurait peut-être pas été possible autrement. Cette manière de vivre les mathématiques rappelle les propos d'Étienne Ghys dans une conférence « Les Ernest » lorsqu'il revient sur l'ingénieuse façon qu'a trouvée Poincaré de se représenter la géométrie non euclidienne :

> La morale de cette petite histoire de Poincaré est qu'on peut très bien envisager beaucoup de mondes extrêmement raisonnables. Chacun ayant sa géométrie. Chacun ayant sa logique. Et qui, chacun, peuvent nous apporter une vision de notre monde concret. [...] Ce message de Poincaré, moi je le pense comme un message de liberté. Nous avions avant ce carcan imposé par Euclide, mais tout à coup, Poincaré nous dit : « allez-y! Créez des mondes et utilisez-les! » (Ghys, 2014)

De la même manière, nous pouvons nous restreindre à une vision des mathématiques définies avant nous, tout comme nous pouvons nous autoriser à créer de nouveaux mondes mathématiques et nous mettre à les utiliser, comme l'on fait aussi d'autres avant nous.

CONCLUSION

La nature des relations entre mathématiques et sciences préoccupe d'une manière ou d'une autre quiconque s'affaire à travailler en sciences ou en mathématiques. Toute personne qui côtoie l'une ou l'autre de ces disciplines doit en effet composer avec ces relations, que ce soit en tentant de faire fi des subtilités et complexités que ces dernières soulèvent, en acceptant plutôt une relation toute faite qui a su traverser (tant bien que mal) les époques, ou encore en tentant d'en mettre certaines à jour par un travail méticuleux. Chacun tente de se satisfaire de la manière dont il envisage cette relation.

Cette attitude peut sembler valable pour une personne s'intéressant de près ou de loin aux mathématiques ou aux sciences. Toutefois, elle est, je pense, à nuancer pour les différents intervenants du monde de l'enseignement. En effet, un regard historique à l'évolution des disciplines laisse comprendre que ce qui se fait sous les vocables *mathématiques* et *sciences* n'est qu'un jeu habile de classification des connaissances et qu'il pourrait en être autrement. Les différents intervenants du monde de l'enseignement auraient sans doute avantage à en être conscients et comprendre que c'est davantage par choix, habitude et praticité qu'il en est ainsi, et que toute autre tentative de classification peut-être aussi valable, quoique possiblement moins pratique. Cette prise de conscience doit, à mon avis, être perceptible dans le discours des intervenants, autrement les élèves pourraient percevoir ces relations de subordination ou d'utilisation comme les seules envisageables.

L'objectif de ce. mémoire était de *mettre en lumière l'intérêt d'un travail épistémologique sur les relations possibles/impossibles entre sciences et mathématiques du point de vue de la recherche en didactique des mathématiques.* J'ai témoigné de l'intérêt d'un tel travail dans le cadre de l'écriture de trois articles abordant de manières différentes, mais connexes la question des relations entre sciences et mathématiques.

De manière plus spécifique, trois questions de recherche ont contribué à orienter l'exploration de l'objectif de recherche fixé. Je les présente en caractère gras dans les paragraphes suivants.

Comment différentes postures épistémologiques sur la relation entre mathématiques et sciences se manifestent-elles dans la recherche en didactique des mathématiques? Bien qu'il soit possible de percevoir les traces de cette question de recherche à travers les trois articles que j'ai présentés, c'est surtout dans le premier (chapitre 2) que je m'y suis attardé. À partir de trois manières de penser ces relations, trois points de vue que l'on pourrait reprendre de manière plus exhaustive comme lunettes d'analyses des travaux existants en didactique des mathématiques mariant mathématiques et sciences, il m'a été possible d'apprécier selon ces différentes lunettes certains travaux de chercheurs intéressés à tirer parti des relations entre les deux disciplines. Ce travail d'analyse autour des trois postures épistémologiques se veut de nature exploratoire et invite par le fait même à investiguer d'autres postures. Par exemple, le travail de classification proposé par Aristote quant à l'astronomie, l'optique et l'harmonie, qu'il qualifie de branches les plus physiques des mathématiques – de par la manière dont elles sont travaillées ou encore leur objet de recherche – n'est pas sans rappeler le quadrivium pythagoricien (géométrie, musique, arithmétique, astronomie). En effet, la musique et l'astronomie traitent toutes deux d'objets inaccessibles (les sons et les astres), néanmoins observables : la musique par le travail autour des proportions et des longueurs de cordes; l'astronomie par la mesure des positions des astres. En ce sens, une analyse des textes pythagoriciens permettrait une comparaison plus fine et possiblement riche en subtilités entre les positions d'Aristote et celle des pythagoriciens sur cet aspect particulier, tout en alimentant le travail de recherche en didactique des mathématiques autour des relations entre les deux disciplines. Je rappelle aussi que l'exploration faite dans cet article s'intéressait plus particulièrement à la relation entre mathématiques et physique. Il me semble qu'il serait tout aussi intéressant de faire une analyse semblable des relations entre les mathématiques et une autre branche des sciences (la chimie ou la biologie par exemple).

Comment des telles relations sont-elles aussi observables du point de vue des disciplines scolaires (e.g. dans les manuels, les curriculums)? Le travail exploratoire de différentes postures épistémologiques autour de la relation entre mathématiques et sciences fait dans l'article précédent m'a amené à questionner les relations entre les disciplines du point de vue scolaire ainsi que l'existence possible (et la nature, le cas échéant) d'une frontière entre les deux, notamment à l'aide de problèmes tirés de manuels scolaires de physique et de mathématiques. Si ce travail permet de mieux présenter l'idée selon laquelle les mathématiques et les sciences (sur le plan scolaire) sont à plusieurs égards indissociables, celui-ci gagnerait à approfondir l'histoire de la relation entre ces dernières en tant que disciplines *scolaires*. Cet approfondissement renforcerait l'idée, déjà énoncée dans l'article, selon laquelle l'indissociabilité des disciplines passe davantage par un changement de paradigme sur le statut même de ces disciplines plutôt que par l'étude de stratagèmes se basant sur celles-ci.

Comment une connaissance de ces épistémologies et une appréciation de ces enjeux pourraient-elles être réinvesties dans l'enseignement des mathématiques? L'étude la relation entre les mathématiques et les sciences du point de vue des disciplines scolaires m'a ensuite amené à la questionner du point de vue de la classe de mathématiques. C'est à travers une mise en œuvre plus poussée d'analyse quantitative et qualitative de manuels scolaires de mathématiques en usage au Québec qu'il m'a été possible de mettre en évidence la place occupée par les contextes scientifiques dans ces ouvrages tout en soulignant certaines difficultés associées à cette présence. S'il ressort de cette analyse une vision utilitariste rappelant par moment les postures d'Aristote et d'Archimède énoncées plus spécifiquement dans le premier article, le travail vers un nouveau paradigme permettant une articulation plus libre des mathématiques et des sciences, qui transparaît d'ailleurs dans le second article, est plus affirmatif dans ce dernier. Ce paradigme se veut une manière d'envisager dans les situations le caractère plus ou moins raisonnable, utile, acceptable, cohérent de leur interprétation mathématique indépendamment du souci d'exactitude.

De manière plus générale, l'entrée épistémologique adoptée pour ce mémoire vient questionner les relations généralement admises entre mathématiques et sciences. Un premier intérêt de cette recherche aura été de mettre en lumière la complexité et la subtilité qui se dégage des relations entre mathématiques et sciences. Un second apport se situe dans la possibilité de réinterpréter le travail des chercheurs en didactique des mathématiques à travers le regard épistémologique que j'ai développé. Plus axée ici sur le monde de l'enseignement que de l'apprentissage, cette entrée épistémologique a conduit un questionnement sur le concept même de discipline, et le projet de les « intégrer » ou de les « articuler ». C'est aussi un travail sur la manière dont sont perçues les mathématiques qui s'en dégage, une réflexion sur leurs buts, leurs utilités, tant « en elles-mêmes » que du point de vue de l'enseignant ou des élèves. Quel message la structure disciplinaire renvoie-t-elle des mathématiques? Et de l'éducation à plus grande échelle? À quel point cette vision n'est-elle pas responsable du fait que dans les manuels scolaires on semble miser sur la simple présence (en quantité!) de contextes scientifiques plutôt que chercher à présenter des situations favorisant un travail profond à partir ou en raison de ces contextes? L'adoption d'une posture épistémologique particulière, fortement inspirée de Gilles Châtelet, m'a conduit à proposer d'aborder différemment la question en pensant ces failles et ces difficultés non pas comme erreurs à faire disparaître, mais comme des occasions d'enrichissement et d'approfondissement.

Dans l'ensemble, je vois donc ce travail comme une première réponse, personnelle, à la relation entre les deux disciplines. Une réponse qui, par une entrée épistémologique sur le sujet, soulève davantage de questions qu'elle ne donne de réponses (définitives!). Ce travail de nature épistémologique m'apparaît néanmoins important *justement* en ce sens qu'il permet de générer de nouvelles questions, les nouvelles questions ne sont-elles pas ce qui garde vivante la didactique des mathématiques? Hilbert avait dit, à la conférence d'ouverture du Congrès International des Mathématiciens à Paris au début du siècle passé, que « Les problèmes sont le signe que la discipline (mathématique) est vivante. Le bénéfice des problèmes est que, en les résolvant, le chercheur acquiert une vue élargie du sujet. » (cité dans Gray, 2003, p. 2) Pour le paraphraser, je dirais que le bénéfice des *questions* est que, en les *posant*, le chercheur acquiert une vue élargie du sujet. Parmi ces questions, celle qui continue le plus fortement de m'habiter, assez ironiquement, est celle-ci : qu'est-ce qui est mathématique et/ou physique? Les propositions d'Aristote, Archimède et Châtelet amorcent à cette réflexion, mais je pense que cette question mérite mûrissement, Plus particulièrement, cette question invite selon moi à étudier d'autres mathématiciens et scientifiques tels que Newton et Leiniz, pour n'en nommer que deux. Étude dont la finalité ne serait évidemment pas d'arriver à des définitions précises, surtout pas si elles devaient séparer « pour de bon » sciences et mathématiques. Répondre à cette question est plutôt pour moi *y réagir*, continuer de « parler autour », dans le but de faire naître de nouvelles idées, de nouvelles potentialités pour la didactique des mathématiques.

Avant de terminer, j'aimerais discuter du format un peu particulier que j'ai adopté pour ce mémoire. En effet, le travail de présentation sous forme d'article me paraît intéressant parce qu'il m'a fait me concentrer sur trois sujets distincts, mais connexes autour des relations entre mathématiques et sciences. D'autre part, ce travail est aussi exigeant d'une manière particulière : un défi considérable de présentation et de synthèse des idées, dont on voit le résultat pour les deux premiers articles. Par contraste, le troisième article (chapitre 4), qui est en voie de soumission, présente en effet une version plus « brute ». Il sert en quelques sortes de témoin au travail de base qu'ont nécessité les premier et second articles, tout en évoquant « ce qu'il reste à faire » afin d'en tirer un (ou deux...) texte(s) concis.

Enfin, sur une note plus personnelle, ce travail m'a permis d'amorcer une réflexion sur les mathématiques ainsi que celui de la recherche en didactique des mathématiques. Éprouvant plus que jamais (je pense!) une difficulté à définir ce que sont ou ne sont pas les mathématiques, je pense cependant que j'en sais un peu plus sur ces dernières que je ne le savais avant ce mémoire. J'arrive toujours difficilement à envisager à quoi pourrait ressembler un concept purement mathématique ou encore purement scientifique (et particulièrement physique!), et je pense que cette difficulté a fait naître une réflexion personnelle permettant d'enrichir ma vision des mathématiques et des sciences; mais aussi de l'enseignement et de l'apprentissage, de la relation entre l'enseignant et l'élève, de l'enseignant dans son milieu. Cette réflexion est en quelque sorte la seule réponse que je puisse offrir pour ce mémoire. Si je ne devais retenir de ce dernier qu'une seule chose, c'est la puissance d'explosion que l'on peut faire se dégager des mathématiques. Les mathématiques peuvent certes apparaître comme des entités rigides, fixes, objets du plan ou de l'espace, mais je préfère désormais les faire sauter. Je préfère les considérer des potentialités, des puissances d'explosion. Et cette puissance d'explosion n'est pas une autorisation à faire ce que l'on veut, ce n'est pas non plus quelque chose qui se freine à des considérations réalistes, c'est plutôt un point de vue qui envisage de conserver le dynamisme en mathématiques et y entrevoit la virtualité qu'elles renferment.

BIBLIOGRAPHIE

Antoun, Z. (2012). *Analyse des situations d'apprentissage dans le cadre de la résolution de problèmes en algèbre (premier cycle) dans une collection du secondaire.* (Mémoire de maîtrise). Université du Québec à Montréal.

Anzai, Y. (1991). Learning and use of representations for physics expertise. In Ericsson, K. A., & Smith, J. (Eds.), *Toward a general theory of expertise* (64-92). Cambridge University Press.

Bautista, A., & Roth, W.-M. (2012). The incarnate rhythm of geometrical knowing. *Journal of Mathematical Behavior*, 31, 91–104.

Beane, J. A. (1995). *Curriculum* Integration and the Disciplines of Knowledge, *The Phy Delta Kappan*, 76 (8), 616-622.

Beichner, R. (1994). Testing student understanding of kinematics graphs. *American Journal of Physics*. 62, 750-762.

Bell A., Janvier, C. (1982). The interpretation of Graphs Representing situations. *For the learning of Mathematics*, 2(1). 34-41

Berlin, D. F. (1990). Science and mathematics integration: Current status and future directions. *School Science and Mathematics,* 90(3), 254-257.

Blum, W., et al. (2002). ICMI Study 14 : Applications and Modelling in Mathematics Education – Discussion Document. Educational Studies in Mathematics, 51 (1-2), 149-171

Boivin, C., Boivin, D., Ledoux, A., Meyer, E., Pomerleau, F., et Roy, V. (2010a). *Visions mathématiques : 3e année du 2e cycle du secondaire*, séquence sciences naturelles. [Manuel de l'élève volume 1]. Anjou : Les Éditions CEC.

Boivin, C., Boivin, D., Ledoux, A., Meyer, E., Pomerleau, F., et Roy, V. (2010b). *Visions mathématiques : 3^e année du 2^e cycle du secondaire*, séquence sciences naturelles. [Manuel de l'élève volume 2]. Anjou : Les Éditions CEC.

Bossé, M. J. et al. (2010). The NCTM process standards and the five Es of science. *School Science and Mathematics, 110*, 262-276.

Bouvier, A., George, M., Le Lionnais, F. (2001). *Dictionnaire des mathématiques.* France : Quadrige/PUF.

Caramazza, A., McCloskey, M. et Green, B. (1981). Naive beliefs in "sophisticated" subjects: Misconceptions about trajectories of objects. *Cognition,* 9, 117-123

Caron, F. et Savard, G. (2012) Une expérience avec l'exponentielle. *Bulletin AMQ – Textes du 55^e congrès de l'AMQ*. Vol. 52, no.3, 24-41.

Champagne, A.B. et Klopfer, L.E. (1982). A causal model of students' achievement in a college physics course. *Journal of Research in Science Teaching*. 19, 299.

Champagne, A.B., Klopfer, L.E., et Anderson, J.H. (1980). Factors influencing the learning of classical mechanics. *American Journal of Physics.* 48, 1074.

Chaitin, G. J. (2002). Conversations *with a Mathematician: Math, Art, Science and the Limits of Reason*. Springer Verlag.

Charbonneau, L. (1987a) Chronique d'histoire des mathématiques En état de crise, sa personnalité se dévoile. Le début du XIXe siècle. *Bulletin AMQ*. 27(4), 5-9.

Charbonneau, L. (1987b) Chronique d'histoire des mathématiques. Du statisme grec au dynamisme du début du XVIIIe siècle. *Bulletin AMQ*. 27(2) 5-10.

Châtelet, G. (2010). *L'enchantement du virtuel*. Paris: Édition rue d'Ulm.

Châtelet, G. (1993). *Les enjeux du mobile*. Paris: Seuil.

Châtelet, G. (1987) *L'enchantement du virtuel,* Revue Chimère, no 2, 1987. http://www.revue-chimeres.fr/drupal_chimeres/files/02chi05.pdf

Chervel A. (1988) L'histoire des disciplines scolaires. Réflexions sur un domaine de recherche. *Histoire de l'éducation*, 38, 59-119.

Choquette, G.-O. (2008) *Une approche conceptuelle pour l'interprétation des graphiques en cinématique au secondaire.* (Mémoire de maîtrise). Université de Montréal.

Clement, J. (1980). Students' preconceptions in introductory mechanics. *American Journal of Physic.,* 50 (1), 66-71.

Cotnoir, G. (2010). *Évolution de l'utilisation des contextes dans les chapitres introductifs à l'algèbre dans les manuels scolaires québécois de 1960 à nos jours.* (Mémoire de maîtrise). Université de Sherbrooke.

Crowe, M. J. (2002) *A History of Vector Analysis.* Conférence basée sur le livre A History of Vector Analysis : The Evolution of the Idea of a Vectorial System. Notre Dame, Indiana : University of Notre Dame Press, 1967.

Czerniak, C. M., Weber, W. B. Jr., Sandmann, A., Ahern, J. (1999). A literature review of science and mathematics integration. *School Science and Mathematics*, 99(8), 421-430.

Dewey, J. (1910) *The Influence of Darwin on Philosophy and Other Essays.* New York, NY: Henry Holt and Company.

Dionne, J. (2007) L'enseignement des mathematiques face aux defis de l'ecole au Québec : Une coherence a vivre dans une necessaire cohesion, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 7(1), 6-27.

Dobrovolskij, W. (1968) Développement de la théorie des vecteurs et des quaternions dans les travaux des mathématiciens russes du XIXe siècle, *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 21(4), 345-349.

Dowling, P. C. (1994). Discursive Saturation and School Mathematics Texts: a strand from a language of description. *Mathematics, Education and Philosophy: an international perspective.* P. Ernest. London: Falmer.

Dorier, J. L. (2000). Recherche en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire. Perspectives théoriques sur leurs interactions. *Les cahiers du laboratoire Leibniz n°12.*

Drouin, A. M. (1988). Le modèle en questions.

Ducharme-Rivard, A. (2008) Études des pratiques interdisciplinaires en mathématiques et en sciences : réflexion sur le concept d'interdisciplinarité. Dans L. Theis (dir.) *Enseignement des mathématiques et interdisciplinarité.*

Actes du colloque du Groupe des Didacticiens des Mathématiques du Québec, Sherbrooke, 2008, 75-88.

Ducharme-Rivard, A. (2007). Qu'est-ce que l'arithmétique? Que recouvre son enseignement? Regard historique et analyse de manuels québécois du début et de la fin du XXe siècle au secondaire. Dans P. Marchand (dir.) *La didactique des mathématiques au Québec : Genèse et perspectives.* Actes du colloque du Groupe des Didacticiens des Mathématiques du Québec, Rimouski, 2007, 147-156.

Dupuis, J. D. (2012) *De l'expérience diagrammatique*, L'Harmattan, Paris.

Einstein, A. (1926) *Géométrie non-euclidienne et physique (traduction),* Revista Matematica Hispano-Americana, serie 2, 1926, p. 72-76.

Fourier, M. (1822). Theorie analytique de la chaleur. Paris, Firmin Didot. En ligne : https://archive.org/details/thorieanalytiq00four.

de Freitas, E. & Sinclair, N. (2013). New materialist ontologies in mathematics education: The body in/of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 83(3), 453-470*

Gray, J. J. (2003) Le défi de Hilbert, Un siècle de mathématiques. Dunod, Paris.

Guay, Laplante, Van Moorhem et al. (2010). *Point de vue mathématique, 2e année du deuxième cycle,* Séquence Science Naturelle, Montréal, Grand Duc.

Guay, Laplante, Van Moorhem et al. (2008). *Point de vue mathématique, 3e année du deuxième cycle,* Séquence Science Naturelle, Montréal, Grand Duc.

Ghys, E. (2014) Et si le théorème de Pythagore n'était pas vrai. *Conférencde Les Ernest.* http://www.lemonde.fr/sciences/video/2014/06/13/et-si-le-theoreme-de-pythagore-n-etait-pas-vrai_4437688_1650684.html (page consultée le 12 janvier 2014)

Hale, P. (2000). Kinematics and graphs: students' difficulties and CBLs. *The Mathematics Teacher.* 93(5), 414-417.

Hanna, G. et Jahnke, H. N. (1999) *Using arguments from physics to promote understanding of mathematical proofs.* Proceedings of PME 23.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (2002). *Another approach to proof: Arguments from physics.* International reviews on mathematical education, ZDM, 1/02, 1-8.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (2003). *Using ideas from physics in teaching mathematical proof.* In: Ye, Q., Blum, W., Houston, S. K., & Jiang, Q. (Eds.), Mathematical modeling in education and culture: ICTMA 10. Chichester, U.K.: Horwood Publishing, pp. 31- 41.

Hausberger, T. (2009) *Peut-on classifier les sciences?* IREM de Montpellier. http://www.irem.univ-montp2.fr/IMG/pdf/Classification-sciences.pdf [page consultée le 21 avril 2014]

Heath, T. L. (1921) *A History of Greek Mathematics II.* Oxford, Royaume-Uni.

Husserl, E. (2010). L'origine de la géométrie, PUF, Paris.

Janvier, C. (1997). Grandeur et mesure: la place des formules à partir de l'exemple du volume. *Bulletin AMQ*, 37(3), 28-41.

Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* Lawrence Erlbaum Associate inc. Hillsdale, New Jersey.

Janvier, C. (1981). Use of situations in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(1), 113-122.

Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations: studies and teaching experiments* (Doctoral dissertation). Nottingham University).

Kaiser, D. (2005). Physics and Feynman's Diagrams. *American Scientist*, 93 (2), 156 – 165.

Koirala, H. P., & Bowman, J. K. (2003). Preparing middle level preservice teachers to integrate mathematics and science. *School Science and Mathematics, 145*(10), 145-154.

Lagacé, F. (2015). Étude des liens entre mathématiques et physique sous l'angle d'Aristote, Archimède et Châtelet.*For the Learning of Mathematics,* 35(1), pp 21-27.

Lagacé, F. (2014) *What's the use of science? Scientific contexts in textbook problems.* PME38 Proceedings.

Lagacé, F., Maheux, J.-F. (2012). Relation tendue entre mathématiques et contextes scientifiques. Présentation lors de la rencontre GREFEM-CRÉAS

Lakoff, G., & Núñez, R. (2003). Where mathematics comes from. Santa Fe Institute.

Lebrun, M. (Ed.). (2006). *Le manuel scolaire: un outil à multiples facettes*. PUQ.

Lederman, N.G., Niess, M. L. (1998) 5 apples + 4 oranges = ?, *School Science and Mathematics,* 98(6), 281-284.

Mansion, A. (1913) *Introduction à la physique aristotélicienne*. Paris: Louvain.

Massain, R (1940). *Physique et physiciens, 2e ed.* Les éditions de l'école, Paris.

McCloskey, M., Caramazza, A. et Green, B. (1980). Curvilinear Motion in the Absence of External Forces : Naïve Beliefs about the Motion of Objects. *American Association for the Advancement of Science, volume 210* (No. 4474), 1139-1141.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport du Québec [MELS]. (2013). *Bureau d'Approbation du Matériel Didactique*. Québec : Gouvernement du Québec. http://www1.mels.gouv.qc.ca/bamd/index.asp?page=info_new_fr, page consultée le 25 novembre 2014.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport du Québec [MELS]. (2010). *Bureau d'Approbation du Matériel Didactique*. Québec : Gouvernement du Québec. http://www1.mels.gouv.qc.ca/bamd/Doc/Approbation_materiel_didactique_fr.pdf , page consultée le 25 novembre 2014.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport du Québec [MELS] (2007). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, deuxième cycle. Québec: Ministère de l'éducation.*

Ministère de l'Éducation du Québec [MEQ] (1997) *Programme d'Études Mathématiques 536, enseignement secondaire*. Québec : Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Éducation du Québec [MEQ] (1996) *Programme d'Études Mathématiques 436, enseignement secondaire*. Québec : Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Éducation du Québec [MEQ] (1988). Guide pédagogique. Primaire. Mathématique. Résolution de problèmes, Orientation générale. Fascicule K (Document 16-2300-11). Québec : Gouvernement du Québec.

Molino , J. (1979). Métaphores, modèles et analogies dans les sciences. Langages, 83-102.

Pang, J. S., & Good, R. (2000). A review of the integration of science and mathematics: Implications for further research. School Science and Mathematics, 100(2), 73–82.

Patonnier, S. (2004). Vecteur, objet d'enseignement multiple. Contribution au *Septième Biennale de L'Education et de la Formation.* Lyon : INRP. En ligne : http://www.inrp.fr/biennale/7biennale/Contrib/longue/7248.pdf

Peyrard, F. (1807) *Oeuvres d'Archimède*, Paris, France, 601 p.

Piaget, J. (1972). L'épistémologie génétique. Presses universitaires de France.

Pierce, C. S. (1885) On the Algebra of Logic: A Contribution to the Philosophy of Notation. *American Journal of Mathematics*, 7(2), 180-196.

Pincock, C. (2007). A Role for Mathematics in the Physical Sciences. *Nous* (41), 253-275.

Pressiat, A. (1999). *Aspects épistémologiques et didactiques de la liaison « points-vecteurs ».* (Thèse de Doctorat). Université Paris VII.

Proulx, J. et Maheux, J.F. (2012). Épistémologie et didactique des mathématiques : questions anciennes, nouvelles questions. *For the Learning of Mathematics, 32*(2), p. 42-47

Radford, L., Savage, M. et Roberge, L. (2002). *Évidence, interprétation et argumentation scientifique: une activité en 9e année au sujet de la chute des corps.* Pre-prints École des sciences de l'éducation, Université Laurentienne, Ontario, Canada, No. 4/2002.

René de Cotret, S. (2012) Sybil en formation des maîtres, Un cas de personnalité multiple. In Proulx, J., Corriveau, C. Squalli, H. *Formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques, pratiques, orientations et recherches.* Montréal, PUQ.

René de Cotret, S. (1988) Une etude sur les représentations graphiques du movement comme moyen d'accéder au concept de function ou variable dépendante. *Petit X,* 17, 5-27.

Ricard, D. (1858). *Les vies des hommes illustres,* Tome 1, Traduction de Plutarque, Paris, France.

Robert, P., Rey-Debove, J., & Rey, A. (1993). *Le nouveau petit Robert.* le Robert.

Roth, W.-M., & Temple, S. (in press). On understanding variability in data: a study of graph interpretation in an advanced experimental biology laboratory. *Educational Studies in Mathematics.*

Roth, W.-M. (2014). *Graphing and uncertainty in the discovery sciences: With implications for STEM education*, Springer, Dordrecht, The Netherlands.

Roth, W.-M. (2003), *Toward an anthropology of graphing*, Kluwer Academic, Dordrecht, The Netherlands.

Roth, W.-M., & Maheux, J.-F. (in press). The visible and the invisible: the immanence of doing mathematics and mathematics as revelation. Educational Studies in Mathematics.

Saint-Hilaire, J.-B. (1839), *Logique d'Aristote*, Tome II, Paris, France.

Saint-Hilaire, J.-B. (1842), *Logique d'Aristote*, Tome III, Paris, France.

Saint-Hilaire, J.-B. (1879a), *Métaphysique d'Aristote*, Tome I, Paris, France.

Saint-Hilaire, J.-B. (1879b), *Métaphysique d'Aristote*, Tome II, Paris, France.

Saint-Hilaire, J.-B. (1879c), *Métaphysique d'Aristote*, Tome III, Paris, France.

Saint-Hilaire, J.-B. (1862a), *Physique d'Aristote*, Tome I, Paris, France.

Saint-Hilaire, J.-B. (1862b), *Physique d'Aristote*, Tome II, Paris, France.

Sinclair, N., de Freitas, E., & Ferrara, F. (2013). Virtual encounters: The murky and furtive world of mathematical inventiveness. ZDM, 45(2), 239-252. Chicago

Sokolowski, A., Yalvac, B., & Loving, C. (2011). Science modeling in pre-calculus: How to make mathematics problems contextually meaningful *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 42(3), 238-297.

Squalli, H., Theis, L., Ducharmes-Rivard A., Cotnoir, G. (2007). Analyse des scenarios d'introduction de l'algèbre dans trios nouveaux manuels quebecois du premier cycle du secondaire.

Tanguay, D. et Geeraerts, L. (2012). *D'une géométrie du perceptible à une géométrie déductive : à la recherche du paradigme manquant.* Petit x, n°88, pp. 5-24.

Tanguay, D. (2000). *Analyse du développement de la notion de preuve dans une collection du secondaire.* (Mémoire de maîtrise). Université du Québec à Montréal.

Tricot, J. (1933), *Métaphysique (edito minor),* Tome 1, Paris, Vrin, coll. Bibliothèque des textes philosophiques, 310p.

Ver Eecke, P. (1960) *Les oeuvres complètes d'Archimède*, Tome 2, deuxième édition. Blanchard, Paris.

Von Glasersfeld, E. (1994). Pourquoi le constructivisme doit-il être radical. Revue des sciences de l'éducation, 20(1), 21-27.