UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

LOGIQUE FORMELLE ET DÉMONSTRATIONS AU NIVEAU UNIVERSITAIRE

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

SARAH MATHIEU-SOUCY

MAI 2015

« Pure mathematics is, in its way, the poetry of logical ideas. »
(Albert Einstein)

« If I had a world of my own, everything would be nonsense.
Nothing would be what it is, because everything would be what it isn't.
And contrary wise, what is, it wouldn't be.
And what it wouldn't be, it would. You see? »
(Lewis Carroll, Alice in Wonderland)

REMERCIEMENTS

"How lucky I am to have something that makes
saying goodbye so hard."
A.A. Milne, Winnie-the-Pooh

Je tiens d'abord à remercier mon directeur de recherche M. Denis Tanguay qui m'a montré, à mon arrivée à l'UQÀM, qu'il était possible de joindre mes intérêts pour la logique et pour la didactique des mathématiques. Je le remercie pour son soutien, ses précieux conseils ainsi que pour ses capsules grammaticales qui m'ont grandement appris. Je suis reconnaissante de son ouverture à mes idées et de l'opportunité de stage qu'il m'a aidée à obtenir. J'exprime d'ailleurs ma reconnaissance à Mme Viviane Durand-Guerrier de l'Université Montpellier 2 de m'avoir accueillie. Je la remercie vivement pour les fructueuses discussions sur la logique et la didactique des mathématiques ainsi que pour la multitude d'opportunités d'apprentissage auxquelles j'ai pu prendre part.

Je ne crois pas que mon projet aurait pu voir le jour sans le soutien et l'écoute de mes collègues et professeurs de l'UQÀM, de qui j'ai énormément appris. Je n'aurais pu rêvé d'un meilleur accueil et d'un meilleur entourage pour débuter mon cheminement en recherche. J'aimerais exprimer ma gratitude tout particulièrement Mme Doris Jeannotte, Mme Caroline Lajoie et M. Jérôme Proulx, qui m'ont beaucoup (beaucoup) apporté sur tous les plans. Un merci tout spécial à Déborah, François, Sarah et Maryse de m'avoir accompagnée, soutenue et encouragée dans cette aventure. Vous avez été et resterez des amis et collègues précieux.

Je tiens aussi à remercier mes collègues de mathématiques qui ont accepté à plusieurs reprises d'exprimer leur point de vue sur des considérations didactiques, en tant qu'enseignants au collégial et étudiants universitaires en mathématiques, et aussi de tenir le rôle de cobaye pour tester des tâches mathématiques. Je désire aussi souligner le courage dont ont fait preuve les participants à mon expérimentation, ainsi que l'excellent travail qu'ils ont réalisé, sans quoi ce travail n'aurait pas pu être ce qu'il est.

Pour terminer, un immense merci à ma famille, Papi, Mamie, Papa, Maman et Anne, qui m'ont soutenue, écoutée et encouragée à chaque étape de ce travail. Je vous savais fiers et confiants, ce qui m'a grandement aidée à mener ce travail à terme.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

RÉSUMÉ

L'importance de la logique formelle en mathématiques, autant pour les mathématiciens que pour les étudiants, ne fait pas l'objet d'un avis unique (Durand-Guerrier, 2008). Certains (par ex. Poincaré, 1905) considèrent la logique comme essentielle aux mathématiques tandis que d'autres considèrent qu'un fonctionnement de la recherche en mathématiques appuyé sur la seule logique ne permettrait pas de découvrir et d'établir de nouveaux résultats et serait donc stérile (Dieudonné, 1987). Dans cette recherche, j'ai pour but d'étudier les façons dont les étudiants au baccalauréat en mathématiques produisent et valident des démonstrations, en m'attardant à l'influence éventuelle de leurs connaissances prédicatives en logique formelle et à la passation ou non d'un cours de logique sur leur travail mathématique. Pour ce faire, j'ai fait passer un test diagnostique à chaque étudiant et les ai, par la suite, placés en dyades pour les interroger, sous forme d'entrevue semi-dirigée, sur leur façon d'aborder et résoudre des tâches liées à la démonstration. J'ai ensuite effectué une analyse des productions et de l'enregistrement audio des participants.

Je remarque que la passation d'un cours de logique accroît la vigilance des étudiants vis-à-vis les considérations logiques mais les ralentit dans un contexte non familier, car ils ont alors tendance à rechercher plus activement un appui sur le sens et sur leurs intuitions, ce qui n'est pas toujours possible dans de nouveaux contextes.

Mots clés : Didactique des mathématiques, logique formelle, cours universitaires, mathématiques avancées, démonstration.

CHAPITRE I

PROBLÉMATIQUE

1.1 Introduction : origine du questionnement

J'ai toujours aimé les mathématiques. J'ai toujours été captivée par des phénomènes mathématiques tout au long de mes études de sorte que j'ai décidé de commencer mes études universitaires dans un baccalauréat en mathématiques[1]. Au tout début, comme beaucoup de mes consœurs et confrères, j'éprouvais des difficultés à produire des démonstrations, ne sachant pas vraiment comment m'y prendre, par où commencer et quelle technique utiliser. Tout au long de ma première année d'étude universitaire, j'ai été exposée à plusieurs démonstrations déjà rédigées mais je n'ai pas eu à produire des démonstrations très complexes, de sorte que je suis arrivée au terme de cette année toujours avec certaines lacunes. Lorsque j'ai commencé ma deuxième année, j'ai été confrontée durement à celles-ci dans les cours d'analyse et d'algèbre plus poussés, qui ne me permettaient plus de les contourner. Parallèlement à ces cours, j'ai eu la chance de suivre un cours de logique formelle. Ce cours faisait travailler, entre autres, l'implication, la négation et les systèmes d'axiomes. Il a complètement changé ma vision et ma compréhension des preuves formelles, de sorte que j'en suis sortie avec un nouveau regard sur la démonstration et sur les mathématiques en général. J'ai eu l'impression d'avoir, tout au long des apprentissages relatifs à ce cours, amélioré ma façon de véhiculer mes idées mathématiques, c'est-à-dire de m'exprimer en mathématique dans le but de me faire comprendre, autant à l'oral qu'à l'écrit. J'étais maintenant plus apte à mettre de l'ordre dans mes idées et cela paraissait sur papier par

[1] Au Québec, le système scolaire est constitué de 6 ans d'école primaire, 5 ans d'école secondaire, de 2 ou 3 ans de Cégep (programmes pré-universitaires ou techniques) puis de l'entrée au baccalauréat universitaire, vers 19-20 ans. Les étudiants au baccalauréat en mathématiques proviennent généralement d'un programme pré-universitaire du cégep en science de la nature.

la façon dont je structurais mes productions mathématiques. J'ai aussi appris à tout écrire dans un ordre clair et à utiliser un symbolisme adéquat, de sorte que j'ai eu l'impression de produire des mathématiques plus « universelles », en ce sens que mes textes comportaient plus de symboles mathématiques ou de figures que de mots malhabiles qui tentent d'expliquer un raisonnement. Pour moi, la logique a pris une place importante dans les mathématiques que je faisais, à tous les niveaux.

Cependant, ce ne sont pas tous mes collègues étudiants qui ont suivi ce cours et, malgré tout, la plupart d'entre eux avaient une aisance égale ou supérieure à la mienne dans l'écriture de démonstrations. Ainsi, je me suis demandée si des connaissances en logique aidaient un individu dans les processus de démonstration, ou bien s'il existe quelque chose que l'on pourrait appeler une « logique de secours », qui permettrait de manipuler correctement un énoncé simple à démontrer, sans nécessairement qu'elle soit suffisante pour réussir des tâches complexes demandant, par exemple, des connaissances approfondies du calcul des prédicats. Je me suis également demandée sur quelles connaissances mes collègues s'appuyaient pour réaliser les mêmes démonstrations que moi, au moment où je m'appuyais sur mes connaissances en logique.

Ainsi, c'est de là qu'a débuté mon questionnement sur la façon dont on fait des mathématiques, en particulier en ce qui concerne les démonstrations et la logique. J'ai par la suite découvert la didactique des mathématiques avec sa quantité considérable d'articles sur la démonstration. J'ai tout de suite été captivée par ce que je lisais et j'ai vite voulu chercher à répondre au questionnement que j'ai énoncé précédemment, en lien avec mon expérience personnelle des mathématiques avancées. En particulier, mon cheminement m'amène à me questionner sur la démonstration dans le but de cerner le rôle, l'utilisation et la place de la logique.

Note : j'utiliserai le terme « logique » au sens du sujet général et non de la branche spécifique des mathématiques, comme il est précisé dans l'ouvrage *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study* (Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp et Tanguay, 2012), à savoir, « when we refer to logic as a subject, we mainly restricts ourselves to the mathematical uses of the words and, or, not and if-then, especially in the statements that involves variables, as well as for-all and there-exists » (p. 370). Cela inclut, à mon sens, toutes les inférences mathématiques utilisant ces concepts, comme la négation ou encore l'instanciation existentielle ou universelle.

1.2 *Faire des mathématiques* : la place de la logique

Dans un contexte où des mathématiciens sont considérés, *faire des mathématiques* signifie souvent faire des démonstrations car celles-ci constituent un élément central dans la discipline mathématique et, par le fait même, central dans le travail du mathématicien (Knuth, 2002). La démonstration peut être vue comme étant l'élément des mathématiques porteur des connaissances (Rav, 1999 dans Hanna et Barbeau, 2008), et non les théorèmes comme on pourrait le penser de prime abord. Toujours selon Rav (1999), les démonstrations servent à beaucoup plus qu'à faire accepter un nouveau résultat. En effet, il semble que les démonstrations fournissent aux mathématiques une vision différente qui peut, par le fait même, amener à trouver de nouvelles techniques de résolution, de nouveaux lemmes, définitions ou théories, attribuant ainsi une valeur bien plus grande aux démonstrations que celle de statuer sur la vérité d'un énoncé.

Du côté plus pratique, la communauté s'accorde généralement sur le fait que pour faire des mathématiques, il faut rallier l'intuition et la rigueur. À ce sujet, le présent texte adoptera la terminologie de Tirosh et Tsamir (2008) selon laquelle le terme *rigueur* englobe les idées de logique, qui est l'intérêt principal de ce texte, de formalisme et d'axiomatisation.

Selon Poincaré (1905), « la logique et l'intuition ont chacune leur rôle nécessaire. Toutes deux sont indispensables. La logique qui peut seule donner la certitude est l'instrument de la démonstration : l'intuition est l'instrument de l'invention » (p. 33). Dans le même ordre d'idées, la logique joue un rôle indispensable dans le raisonnement mathématique, malgré que sa connaissance ne soit pas suffisante pour faire des mathématiques (Kuiper, 2004).

À ce sujet, il semble que la communauté mathématique n'ait pas un avis unique ou consensuel sur l'utilisation de la logique chez les mathématiciens, ou bien encore pour faire des mathématiques en général. Par exemple, Durand-Guerrier (2008) oppose deux positions, celle du logicien Quine (1987) à ce qu'elle appelle une « hypothèse générale » qui aurait cours chez les mathématiciens :

> « All his life, Quine supported the thesis of the fruitfulness of logic in analysing scientific discourse and reasoning as well as ordinary language. This position seems contradictory with a general assumption that logic is of no use for mathematics (Dieudonné, 1987; Thurston, 1994), or that logical deduction is necessarily sterile (does not product new truths) ». (Durand-Guerrier, 2008, p. 1)

En d'autres mots, il semble qu'il y ait une hypothèse générale que la logique ne serait pas d'une grande utilité aux mathématiciens, mais cette hypothèse ne serait pas acceptée par tout le monde, comme par exemple par Quine. Parmi les opposants à cette hypothèse, on retrouve également Frege qui dit que la logique est source de connaissances (Marion et Voizard, 1998).

En ce qui concerne les adhérents à l'hypothèse, certains grands mathématiciens, comme Thurston et Thom, considèrent que pour réussir leurs travaux en mathématiques, leurs notions de base en logique, autant théoriques qu'intuitives, leur suffisent (Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp et Tanguay, 2012). Par exemple, pour Thom (1974, p. 74), la logique, et en particulier le calcul propositionnel, ne permet de mettre en évidence que les articulations relativement grossières du raisonnement, les articulations fines, dues au sens, se laissant difficilement expliciter, voire formaliser. Aussi, pour Thurston (1994, pp. 4-5),

> « we have some built-in ways of reasoning and putting things together associated with how we make logical deductions: cause and effect (related to implication), contradiction or negation, etc. Mathematicians apparently don't generally rely on the formal rules of deduction as they are thinking. Rather, they hold a fair bit of logical structure of a proof in their heads, breaking proofs into intermediate results so that they don't have to hold too much logic at once. In fact, it is common for excellent mathematicians not even to know the standard formal usage of quantifiers (for all and there exists), yet all mathematicians certainly perform the reasoning that they encode ».

Les mathématiciens semblent donc s'appuyer, pour venir à bout d'une démonstration, sur des connaissances « logiques » qui n'ont pas toujours de statut théorique, du moins pas strictement. Thurston discute en effet de « manières intuitivement construites de raisonner » (ma traduction de *built-in ways of reasoning*) qui, pour les mathématiciens, ne font généralement pas intervenir de règles de logique formelle.

1.3 D'un point de vue historique

On retrouve, dans l'histoire, les traces de certaines lacunes logiques dans des travaux de grands mathématiciens. Par exemple, Cauchy a été responsable de quelques erreurs, dont certaines de nature logique, qui ont grandement aidé les mathématiques à avancer. En particulier, il a proposé une démonstration de l'énoncé suivant : *la somme d'une série simplement convergente de fonctions continues est continue*. Par exemple : soit u_n, une suite de fonctions continues définies sur un intervalle I, tel que la série de termes u_n est simplement convergente sur I et la somme $s = lim\ s_n$, où $s_n = u_0+u_1+u_2+ \ldots +u_n$ correspond à la suite des sommes partielles de la série. Dans ce contexte, une série simplement convergente se définit comme suit : $\forall x,\ x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists m \in N$, tel que $\forall n \in N,\ (n > m \Rightarrow |s(x) - s_n(x)| < \varepsilon)$. Ici, m dépend de x et de ε. L'erreur de Cauchy a été d'omettre la dépendance par rapport à x, de sorte que la convergence de la série a été présumée uniforme, ce qui n'est pas nécessairement le cas d'une série convergente. La convergence uniforme pourrait de fait s'exprimer en une proposition très voisine, à ce changement de détail près que la quantification universelle sur x serait déplacée à l'intérieur de la quantification existentielle sur m : dans le cas de la convergence simple, il suffit de pouvoir trouver un m pour chaque x préalablement fixé, ce $m = m(x)$ étant par conséquent fonction de x ; dans le cas de la convergence uniforme, il faut pouvoir trouver un seul et même m qui vaudrait pour tous les x de l'intervalle. C'est donc dire que les deux énoncés ne diffèrent que par la position relative des deux quantificateurs $\forall x$ et $\exists m$. Il s'agit donc ici d'une erreur due à l'ordre et à la portée des quantificateurs dans la définition de la convergence simple. De fait, le résultat pour lequel Cauchy a offert une démonstration, à savoir qu'une suite convergente de fonctions continues converge vers une fonction continue, est bien connu comme étant faux. Malgré cette erreur, Cauchy reste un mathématicien très prolifique et de très grande valeur. Ces constatations appuient la thèse que la réussite en mathématiques n'est pas dépendante de connaissances accrues en logique. Mais elle montre aussi que les considérations logiques permettent un meilleur contrôle, qui peut même déboucher sur l'institution de nouvelles notions comme celle de convergence uniforme.

Selden et Selden (1999) vont dans le même sens en affirmant que les cours de logique, du moins ceux s'adressant aux débutants, ne sont pas capitaux pour faire des mathématiques puisque plusieurs mathématiciens ont entamé leurs travaux sans formation équivalente. De plus, « du point de vue historique, les théories logiques se sont construites bien après la stabilisation de la pratique de la démonstration mathématique dont elles fournissent un modèle et un outil de contrôle » (Durand-Guerrier et Arsac, 2003, p. 310). Ainsi, les théories logiques ne semblent pas indispensables à la démonstration.

1.4 Sur quels types de connaissance les mathématiciens s'appuient-ils pour faire des mathématiques ?

Il devient pertinent, à la lumière des dernières sections, de se demander de quelle nature est la compréhension de ces mathématiciens vis-à-vis la logique formelle pour qu'ils travaillent comme professionnels des mathématiques, sans toutefois que leur connaissance de la logique formelle soit nécessairement approfondie. Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp et Tanguay (2012) proposent une piste de réponse : « it is possible that through innate ability or unconscious absorption during their school years, many mathematicians reached this level of competence without formal training » (p. 383). Cette idée accentue l'importance de l'expérience de l'individu en mathématique lorsqu'il fait des mathématiques. J'y reviendrai au prochain chapitre.

Dans le même ordre d'idées, le même texte discute du fait que le raisonnement en mathématique demande d'aller puiser de l'information dans divers aspects mathématiques, allant des définitions aux théorèmes en passant par des conjectures, de sorte que ces allers et retours demandent d'utiliser adéquatement des règles d'inférences, certaines reliées à l'utilisation de la logique. Cette utilisation doit être faite de façon adéquate pour raisonner de manière juste. Il est possible que ce soit fait de façon inconsciente chez certains individus, de sorte que de tels raisonnements seraient tenus pour acquis chez certains (Epp, 2003), en articulier ceux qui auraient acquis une grande expérience en la matière, comme les mathématiciens de profession. Également, Selden et Selden (1999) soulignent qu'il existe des capacités naturelles chez les individus à utiliser quelques éléments de logique, sans toutefois qu'ils soient habiles avec tous les aspects de la logique formelle.

En d'autres mots, les précédents paragraphes montrent qu'il est difficile de statuer sur l'utilité réelle de connaissance en logique formelle dans le travail du mathématicien. Un élément qui ressort particulièrement est que certains mathématiciens, qui ne donnent pas une grande importance à leurs connaissances logiques théoriques, semblent s'appuyer sur d'autres types de connaissances, comme une intuition forte ou encore leur expérience, pour effectuer un raisonnement adéquat et rigoureux afin d'atteindre leur but sans erreur. Cependant, il ne s'agit pas d'un type de connaissances qui est à la disposition des étudiants qui font leur entrée dans l'univers des mathématiques avancées. Quelles connaissances ces étudiants utilisent-ils dans les contextes où les mathématiciens utilisent des connaissances reliées à leur expérience ? Dans les mots de Durand-Guerrier et Arsac (2003), « comment, en tant que novice du domaine mathématique étudié, [l'étudiant] peut-il satisfaire aux exigences de rigueur qui permettent, en principe, de se prémunir contre les preuves non valides ? » (p. 297).

1.5 Les difficultés des étudiants

Une tendance identifiée par la recherche semble se dessiner, à savoir que les étudiants en général éprouvent d'importantes difficultés à résoudre des tâches faisant appel à leurs connaissances logiques et aussi d'importantes difficultés à réaliser des démonstrations (par ex. Epp, 2003; Selden et Selden, 1995). À titre d'exemple concret, les étudiants vont utiliser deux variables liées ayant le même nom en dehors de la portée du quantificateur auquel ils sont rattachés et vont ainsi confondre les deux variables qui ne sont pourtant pas les mêmes (Epp, 2009). Par exemple, pour montrer que la somme d'un nombre pair et d'une nombre impair est impaire : soit n un nombre impair $n = 2k + 1$ et soit m un nombre pair $m = 2k$, alors $m + n = (2k+1) + 2k = 4k + 1$. Évidemment, ici, la valeur de k n'est pas nécessairement la même pour n et m. Les étudiants commettent aussi des erreurs reliées à la dépendance entre deux objets, c'est-à-dire que dans le cas de l'expression « $\forall\varepsilon\ \exists\delta$ ... », un étudiant pourrait perdre de vue que la valeur de δ dépend de la valeur de ε et ainsi commettre une erreur (Epp, 2009), de la même nature que celle de Cauchy, étudiée dans la section précédente. De manière plus générale, les étudiants démontrent des difficultés avec la négation d'énoncés quantifiés, la négation d'une implication et l'équivalence entre une implication et sa contraposée (Epp, 1997).

Également, des recherches réalisées par des spécialistes de la psychologie cognitive suggèrent fortement que la grande majorité des étudiants n'acquièrent pas, durant leurs études secondaires, les bases logiques (manipulation correctes des implications et quantificateurs et compréhension des exemples génériques) pour raisonner efficacement en mathématiques (Anderson, 1990 mentionné dans Epp, 1997). Aussi, Epp (2003) qualifie les tentatives de démonstration de ses étudiants de niveau universitaire comme étant de pauvre qualité, consistant en un ensemble déconnecté de calculs et de mots ou phrases utilisés de façons incorrectes, et elle va même jusqu'à dire que les étudiants vivent dans un univers logiquement et linguistiquement différent du sien (p. 886). Ces quelques remarques proposent de se pencher sur ce qui est enseigné au sujet de la logique.

1.6 L'enseignement de la logique formelle

Il semble important de garder en tête que la formation logique des étudiants au baccalauréat en mathématiques diffère d'un établissement et d'un cheminement à l'autre. Certains programmes n'offrent aucun cours de logique obligatoire de sorte que plusieurs étudiants obtiennent un baccalauréat en mathématiques sans jamais avoir reçu tout un semestre de formation théorique visant à développer leurs connaissances en logique formelle. Or, ces étudiants, au terme de leurs études de premier cycle, ont, en théorie, la capacité de démontrer en mathématiques.

Cela étant dit, Selden et Selden (1999) constatent que la plupart des concepts discutés dans les cours de logique s'adressant aux débutants peuvent rarement être réinvestis dans la production de démonstrations. Par exemple, plusieurs cours d'introduction vont étudier les tables de vérité ou les diagrammes de Venn, qui sont très rarement utilisés dans les démonstrations en mathématiques avancées. Par contre, les manipulations d'implications et d'équivalences, qui sont généralement enseignées dans ces cours, sont très fréquemment utilisées dans les démonstrations, sans toutefois exiger leur forme la plus complexe. En effet, rarement un étudiant aura à déployer ses connaissances face à un énoncé comprenant plus de deux quantificateurs. Aussi, on remarque que des propositions très complexes au niveau logique peuvent souvent se simplifier en plusieurs propositions plus simples, de sorte que celui qui les manipule n'a finalement pas besoin de maîtriser les aspects les plus complexes de la logique classique (calcul propositionnel et calcul des prédicats). Toutefois, ces connaissances doivent aller un peu au-delà de ce que les gens peuvent normalement faire de façon intuitive. Pensons ici, par exemple, à l'implication qui est vraie dans tous les cas où sa prémisse est fausse, ce qui va à l'encontre du sens commun et de l'intuition. Il y a donc un besoin pour les étudiants d'apprendre certaines bases. Cependant, des études remettent en question la réelle utilité des cours de logique réguliers dans l'apprentissage de celle-ci, dans un but d'application à divers contextes mathématiques (par exemple Cheng et al., 1986).

Ainsi, une connaissance accrue de la logique classique n'est généralement pas requise pour la production de démonstrations dans le cheminement d'un étudiant ni même dans le travail d'un mathématicien, peu importe si ce sont des démonstrations très élaborées ou en lien avec un sujet très complexe.

1.7 La logique dans les mathématiques faites par les étudiants

Malgré tout, il semble que certaines études vont à l'encontre de l'idée que des connaissances en logique ne seraient pas requises. Certains auteurs considèrent que les lacunes en logiques sont une des causes des difficultés au niveau des démonstrations, autant dans la validation que la production, chez les étudiants. En effet, Selden et Selden (1995) discutent des difficultés des élèves à « déballer la logique[2] » des énoncés, c'est-à-dire à mettre en évidence un énoncé logique équivalent à un autre en incluant les caractéristiques logiques conventionnelles. Par exemple, la logique de l'énoncé « une fonction est continue lorsqu'elle est dérivable » peut être déballée sous les formes « pour toute fonction f, si f est dérivable alors f est continue » ou encore « pour toute fonction f, f n'est pas dérivable ou f est continue » (Selden et Selden, 1995, p. 128). Il y a évidemment plusieurs manières de déballer la logique d'un même énoncé. Les auteurs soulignent le fait suivant : « if a student cannot

[2] « unpack the logical structure » (Selden et Selden, 1995, p. 127)

reliably unpack the logical structure of informal statements[3], then, as we have argued above, he/she will lack adequate information for constructing proof frameworks[4] or validating proofs » (Selden et Selden, 1995, p. 130). Il semble important de souligner que les étudiants, dans un contexte scolaire, lisent probablement plus souvent des démonstrations déjà construites qu'ils en écrivent, ce qui donne de l'importance à la validation de démonstrations chez eux. Également, la validation comprend les moments où l'étudiant lit un énoncé et doit le *valider*, c'est-à-dire déballer la logique incluse dans celui-ci afin de saisir les caractéristiques propres à cet énoncé, soit pour le démontrer soit pour l'utiliser adéquatement.

Également, Epp (2003) expose tous les principes logiques requis pour démontrer la vérité ou la fausseté de simples énoncés, mettant à l'avant plan que ces connaissances sont indispensables à la réussite de la démonstration. Par exemple, l'énoncé « le carré de tout nombre rationnel est rationnel » demande à l'individu qui veut en démontrer la validité l'ensemble des considérations suivantes :

- Il doit prendre conscience que l'énoncé concerne tous les éléments compris dans l'ensemble des nombres rationnels, cet ensemble étant infini, et que, par conséquent, la vérification d'un nombre fini d'exemples ne saurait être concluante.
- Il doit comprendre que pour établir la validité de l'énoncé, il doit considérer un élément générique de l'ensemble des rationnels en ayant comme seule information la rationalité de ce nombre. Il doit par la suite démontrer l'énoncé par rapport à cet élément, c'est-à-dire que le carré de ce nombre est rationnel.
- Il doit être informé, consciemment ou inconsciemment, de l'importance des définitions dans le travail mathématique, en ce sens que pour démontrer un énoncé en lien avec les nombres rationnels, il doit avoir une compréhension précise de ce qu'est un nombre rationnel et de sa définition.

---

[3] « By an informal statement we mean one which departs from a natural language version of predicate calculus, i.e., departs from the use of "for all", "there is", "and", "or", "not", "if-then", "if-and-only-if" in a significant way. We ignore minor differences in wording such as those existing between "for all", "for each", and "for every", or between "there is" and "there exists". » (Selden et Selden, 1995, p. 127)

[4] « By a proof framework we mean a representation of the "top-level" logical structure of a proof, which does not depend on detailed knowledge of the relevant mathematical concepts, but which is rich enough to allow the reconstruction of the statement being proved or one equivalent to it. » (Selden et Selden, 1995, p. 129)

- Il doit savoir, consciemment ou inconsciemment, que les définitions sont des énoncés universels, c'est-à-dire des phrases ouvertes qui permettent de déterminer quels objets satisfont ou non la définition, et que ces énoncés vont dans deux directions, soit le « si » et le « seulement si », qui forment l'équivalence. Donc, en se référant à la définition d'un nombre rationnel comme étant un nombre qui peut s'écrire comme un quotient de deux entiers et en considérant un élément r pris arbitrairement en tant que nombre rationnel, l'individu doit considérer une direction de la définition pour conclure que r peut être écrit d'une certaine manière, soit par exemple a/b, où a et b sont des entiers. Ensuite, après avoir établi que r^2 s'écrit d'une certaine forme, soit a^2/b^2 où a^2 et b^2 sont aussi des entiers, il utilise l'autre direction de la définition et conclut que r^2 est rationnel.
- Il doit aussi comprendre que la règle pour multiplier des fractions est un énoncé universel qui s'applique à toutes les paires de fractions, même celles composées de deux fractions identiques.

Ainsi, on peut voir qu'il y a plusieurs considérations logiques sous-jacentes à une démonstration qui ne semble pas, de prime abord, contenir autant d'éléments de complexité et solliciter autant de connaissances logiques.

Finalement, il est intéressant de constater que des étudiants familiers avec certains concepts logiques assez poussés et leurs applications puisent dans ces ressources ou s'appuient sur celles-ci lorsque confrontés à des tâches où leurs connaissances mathématiques ne suffisent pas pour répondre à la question adéquatement (Epp, 2003).

1.8 Retour et questions de recherche

Somme toute, je me rends compte que l'évaluation de l'utilité de la logique dans la production de démonstrations et dans les mathématiques en général est assez mitigée. Ce qui est certain, c'est que la démonstration fait partie intégrante du travail du mathématicien et qu'il est possible de faire le métier de mathématicien, et par le fait même de faire des démonstrations, sans utiliser explicitement des connaissances formelles en logique.

En considérant plus particulièrement que :

- les démonstrations, même les plus simples, peuvent faire intervenir plusieurs considérations logiques (Epp, 2003);
- des connaissances en logique ne semblent pas essentielles au travail des mathématiciens car ils peuvent utiliser des connaissances différentes pour atteindre leur but, celles-ci provenant généralement de leur intuition ou de leur expérience (Thurston, 1994);
- certains individus savent démontrer sans avoir reçu de formation en logique (Selden et Selden, 1999);
- des étudiants familiers avec certains concepts logiques s'appuient sur celles-ci lorsque confrontés à des tâches où leurs connaissances mathématiques ne suffisent pas (Epp, 2003);

il apparaît pertinent de se demander sur quels types de connaissances les étudiants s'appuient pour réaliser des démonstrations en mathématiques.

En d'autres mots, sur quels types de connaissances s'appuient les étudiants ou encore, quels types d'arguments utilisent-ils afin de réaliser les mêmes démonstrations, selon qu'ils ont ou non des connaissances en logique formelle ? Et ce, sachant que ces étudiants ne disposent pas du même bagage mathématique que les mathématiciens, qui clament souvent l'utilité réduite des concepts théoriques de logique. Est-ce que les étudiants selon qu'ils ont ou qu'ils n'ont pas de connaissances poussées en logique mettent à profit des connaissances ou des arguments différents lors de la production de démonstration ? Finalement, est-ce que la manière de faire des démonstrations est alors différente ?

CHAPITRE II

CADRE THÉORIQUE

Est-il possible de caractériser les productions de démonstrations, en lien avec le type de connaissances, d'arguments et de raisonnements utilisés, en espérant répondre à la question de savoir si les manières de faire une même démonstration sont différentes et en quoi elles le sont, comme le veulent les questions de recherche mises en avant au terme du précédent chapitre ? Tout d'abord, il semble important de se munir d'outils conceptuels et terminologiques, pour bien nommer ce qui sera vite un enjeu dans cette recherche. Dans cette optique, les travaux de Vergnaud seront un atout important à ce travail.

2.1 Les idées de Vergnaud

Certains concepts qui interviennent dans la *Théorie des champs conceptuels* de Vergnaud seront importants dans le présent travail. La Théorie des champs conceptuels est « une théorie cognitiviste, qui vise à fournir un cadre cohérent et quelques principes de base pour l'étude du développement et de l'apprentissage des connaissances complexes » (Vergnaud, 1990, p. 197). À titre d'exemple, « le champ conceptuel des structures additives est à la fois l'ensemble des situations dont le traitement implique une ou plusieurs additions ou soustractions, et l'ensemble des concepts et théorèmes qui permettent d'analyser ces situations comme des tâches mathématiques » (op. cit., p. 214). Un champ conceptuel est donc constitué d'un ensemble de situations, et comprend aussi les concepts et connaissances qui s'y rapportent.

Vergnaud introduit ensuite ce qu'il appelle un « schème » : il s'agit d'une organisation invariante, reposant sur une conceptualisation implicite, qui guidera la conduite d'un individu dans une classe de situations donnée, par des règles d'action et d'anticipation. On peut aussi dire que les schèmes sont similaires à des processus, voire parfois à des procédures ou même à des algorithmes, mais qui seraient intégrés à la façon dont l'individu conduit sa pensée et ses actions. Outre les règles d'action et d'anticipation, qui guident la résolution déployée par un individu placé dans une situation ou une classe de situations donnée, il y a dans les schèmes les invariants opératoires.

En fait, il y a trois différents types d'invariants opératoires : les propositions, les fonctions propositionnelles et les arguments. Les propositions sont ce qui peut être déclaré vrai ou faux. On les appellera aussi les *théorèmes-en-acte*. Un exemple simple pourrait être « 12 est plus grand que 23 », qui est une proposition fausse. Les fonctions propositionnelles sont des fonctions qui prennent en entrée des arguments en nombre variable. Il s'agit de ce qui construit les propositions et n'est donc, par le fait même, ni vrai ni faux. Leur existence est conditionnelle à l'existence des propositions et l'inverse est également vrai. Nous les appellerons des *concepts-en-acte*. Par rapport à notre exemple, la fonction propositionnelle est « est plus grand que » et il s'agit d'une fonction binaire, car elle prend deux arguments. Toujours en lien avec notre exemple, les arguments seraient 23 et 12. D'ailleurs les fonctions propositionnelles peuvent devenir des arguments dans certains contextes. Toujours par rapport au même exemple, la fonction propositionnelle « est plus grand que » devient argument dans la proposition « *est plus grand que* est une relation antisymétrique » et « être une relation antisymétrique » est une fonction propositionnelle unaire.

Dans les mots de Vergnaud, les invariants opératoires sont très importants car :

> [les] concepts et théorèmes explicites ne forment que la partie visible de l'iceberg de la conceptualisation : sans la partie cachée formée par les invariants opératoires, cette partie visible ne serait rien. Réciproquement on ne sait parler des invariants opératoires intégrés dans les schèmes qu'à l'aide des catégories de la connaissance explicite : propositions, fonctions propositionnelles, objets – arguments. (Op. cit., p. 211)

La partie immergée est constituée des connaissances-en-actes, qui sont aussi appelées connaissances opératoires et la « partie visible du iceberg » est constituée de connaissances prédicatives (Merri et Pichat, 2007), deux notions introduites par Vergnaud et auxquelles nous allons maintenant nous attacher.

En fait, c'est la différence entre la connaissance prédicative et la connaissance opératoire (ou connaissance-en-acte), deux formes de connaissances que Vergnaud met en relation, qui va nous intéresser dans ce projet. Plus précisément, une connaissance prédicative se présente généralement sous forme d'énoncés, à l'intérieur de textes ou de manuels (Vergnaud, 2001). Également, « les connaissances prédicatives sont explicites, verbalisantes et conscientes. Elles sont habituellement socialement reconnues, partagées et acceptées par un groupe culturel (plus ou moins vaste) donné » (Merri et Pichat, 2007, p. 83). Le pendant opératoire est ce qui est acquis au cours de l'expérience, ce qui permet de penser le réel, de faire et de réussir (Vergnaud, 2001). Les connaissances opératoires...

> que [Vergnaud] nomme également connaissances-en-acte [...] sont, par nature, rattachées à des situations tangibles d'action effective. Ce sont elles qui « chargent de sens » les connaissances prédicatives auxquelles elles sont sous-jacentes. Ce sont également elles qui leur permettent d'être applicables, d'être mises en œuvre dans des situations données et d'être rattachées à des situations d'action (Merri et Pichat, 2007, p. 83).

Il peut être intéressant de lier cette idée de connaissance opératoire, dans un contexte de logique formelle, à l'idée de « logique de secours » (cf. section 1.1) émise plus tôt.

Prenons un exemple donné par Vergnaud et qui ne fait pas directement intervenir de concepts mathématiques. La mise en situation est la suivante : on a demandé à certains ingénieurs experts d'écrire des guides méthodologiques, en lien avec leur travail et leur savoir-faire personnel. Selon Vergnaud, deux choses surprenantes sont ressorties de ces guides : les ingénieurs ne rapportent pas toutes les connaissances importantes utilisées dans leur travail et ils ne mentionnent pas les obstacles qu'ils ont rencontré au cours de leur développement en tant que professionnels. Or, il est primordial pour le jeune ingénieur de savoir quels raisonnements résulteront en une erreur. Malgré que ces erreurs de raisonnement ne soient pas mentionnées dans les guides, les experts les évitent dans leur pratique professionnelle. Ainsi, la forme prédicative de la connaissance dans un ouvrage, un guide méthodologique dans le cas qui nous intéresse ici, et la forme opératoire de la connaissance telle qu'elle est déployée dans l'action, par l'ingénieur dans le cas qui nous intéresse ici, ce n'est pas la même chose (Vergnaud, non daté).

Considérons un autre exemple, cette fois-ci en mathématiques : *Donner la négation mathématique de « Si un nombre est premier, alors il se termine par trois ».* Une connaissance prédicative serait de pouvoir formellement énoncer la forme négative de cette proposition sous sa forme exacte ; c'est-à-dire la conjonction « *Il existe un nombre premier et qui ne se termine pas par trois* ». La quantification existentielle ici est importante dans la forme négative, malgré que la quantification universelle ait été implicite dans l'énoncé de départ. Notons ici que le fait de dire que la négation d'une implication est une implication montre l'absence de la connaissance prédicative sur les statuts logiques de l'implication. D'un autre côté, le fait de dire qu'il est possible de trouver un nombre, par exemple 5, qui ne répond pas à l'énoncé, sans avoir en tête les règles logiques précises qu'on ferait intervenir pour avancer ce contre-exemple, serait une connaissance opératoire.

Ce sont précisément ces idées de connaissances prédicatives et opératoires, incluant les théorèmes-en-acte et les concepts-en-acte, qui vont être utiles à ce projet. Ce qui se dégage de ce vocabulaire et qui sera crucial dans cette recherche est qu'il existe des opérations inconscientes, qui ne sont pas explicitement réfléchies, et qui peuvent être les pendants « en-actes » des opérations analogues menées à partir de connaissances (prédicatives) en logique. Ces idées seront un appui important pour discuter des idées et résultats de cette recherche plus loin dans ce travail.

2.2 Caractérisation des démonstrations : la rigueur et l'intuition

Tel que mentionné dans le précédent chapitre, la communauté s'accorde généralement sur le fait que pour faire des mathématiques, il faut allier l'intuition et la rigueur. On remarque que les définitions formelles des mathématiques avancées comportent de la symbolisation qui demande une certaine dose de rigueur pour être manipulée, selon des règles définies par la syntaxe de ce symbolisme. Mais plusieurs considèrent qu'il est indispensable d'utiliser des représentations non formelles intuitives des concepts afin de réfléchir efficacement (par ex. Weber et Alcock, 2004).

Par exemple, Kline caractérise les mathématiques ainsi : « What then is mathematics if it is not a unique, rigorous, logical structure ? It is a series of great intuitions carefully sifted, refined, and organized by the logic men are willing and able to apply at any time » (1980, cité dans Van Moer, 2007, p. 174). Dans le même ordre d'idées, j'ai cité Poincaré précédemment à ce sujet et j'aimerais rajouter une analogie assez parlante pour montrer le rôle de l'intuition dans l'activité mathématique selon lui :

> Si vous assistez à une partie d'échecs, il ne vous suffira pas, pour comprendre la partie, de savoir les règles de la marche des pièces. Cela vous permettrait seulement de reconnaître que chaque coup a été joué conformément à ces règles et cet avantage aurait vraiment bien peu de prix. C'est pourtant ce que ferait le lecteur d'un livre de Mathématiques, s'il n'était que logicien. Comprendre la partie, c'est toute autre chose ; c'est savoir pourquoi le joueur avance telle pièce plutôt que telle autre qu'il aurait pu faire mouvoir sans violer les règles du jeu. C'est apercevoir la raison intime qui fait de cette série de coups successifs une sorte de tout organisé. À plus forte raison, cette faculté est-elle nécessaire au joueur lui-même, c'est-à-dire à l'inventeur. (Poincaré, 1905, p. 31)

Dans cet ordre d'idées, on peut citer Thurston (1994, p. 165), à partir d'un texte qui a beaucoup été discuté par les didacticiens[5] :

> « Personally, I put a lot of effort into "listening" to my intuitions and associations, and building them into metaphors and connections. This involves a kind of simultaneous quieting and focusing of my mind. Words, logic, and detailed pictures rattling around can inhibit intuitions and associations ».

Finalement, et de façon non exhaustive, on peut mentionner Fischbein (1982), qui est d'avis que les formes de pensée intuitives et analytiques sont complémentaires et profondément inter-reliées.

2.3 Intuition

Qu'est-ce que l'intuition ? Ce terme, utilisé à quelques reprises dans les dernières sections, semble nécessiter quelques précisions. Selon le Centre national des ressources textuelles et lexicales (CNRTL) français, une des définitions de l'intuition serait l'« action de deviner, pressentir, sentir, comprendre, connaître quelqu'un ou quelque chose d'emblée, sans parcourir les étapes de l'analyse, du raisonnement ou de la réflexion; résultat de cette action; aptitude de la personne capable de cette action ». Les dictionnaires Oxford, pour leur part, disent ceci : « the ability to understand something instinctively, without the need for conscious reasoning » et « a thing that one knows or considers likely from instinctive feeling rather than

---

[5] Cet article est une réponse au texte polémique de Jaffe et Quinn (1993) et a sucité un grand intérêt autant du côté de la communauté mathématique que didactique. Thurston discute de sa vision des mathématiques et des processus associés aux mathématiques, où plusieurs se sont retrouvés.

conscious reasoning ». Retenons ici que le sens commun donné à l'intuition est qu'il s'agit d'une habileté à comprendre quelque chose sans avoir besoin de consciemment raisonner ou analyser la situation.

Dans le contexte de la didactique des mathématiques, où s'inscrit ce mémoire, plusieurs auteurs de la discipline expriment leur opinion sur la question de ce qu'est l'intuition. Tanguay (2010), par exemple, propose cette définition de l'intuition :

> relations supputées, structurations implicites au sein des faits, des données et des phénomènes, issues d'un sentiment de validité de ces relations qui s'impose immédiatement, et qui sert de tremplin au raisonnement. Ce sentiment peut être basé sur des perceptions, sur des inductions ou déductions pressenties (et généralement non encore explicitées), et évolue avec le développement conceptuel de l'individu. Elle est fonction des connaissances construites antérieurement par cet individu, et ne peut se réduire à la pure perception. Pour une situation donnée, l'intuition variera donc d'un individu à l'autre, et variera aussi dans le temps (en une évolution discontinue, par à-coups) chez le même individu. Le rapport à l'intuition évolue lui aussi avec l'individu. Celui-ci pourra la tenir d'emblée pour certitude, ou cherchera à la valider (par l'expérimentation, par le raisonnement ...) selon qu'il aura appris ou non à « s'en méfier » ; car bien entendu, l'intuition peut être source d'erreurs. (Op. cit., p. 70)

Il est possible de dire que l'intuition est un sentiment qui s'impose à un individu sans qu'il puisse expliquer pourquoi. Si un mathématicien dit avoir utilisé son intuition mathématique, alors on pourra dire qu'il a adopté ou rejeté un concept mathématique, lors d'une production de démonstrations, sans pouvoir expliciter pourquoi (Van Moer, 2007). Ce sont des connaissances qui s'imposent subjectivement à un individu comme étant absolues (Fischbein, 1987, cité dans Tirosh et Tsamir, 2008).

L'importance de l'intuition est mise en avant lorsqu'il est question de la production de mathématiques, en tant que processus, et non lorsqu'il est question du produit final. On s'accorde généralement pour dire que ce qui sera transmis à la communauté doit ne laisser aucun élément au hasard, conformément aux standards de rigueur menant vers la validité en mathématiques (Fischbein, 1982 ; Hanna, 1995). À ce sujet, l'utilisation successive d'inférences valides offre une multitude de chemins qui sont infaillibles, qui mèneront sans aucun doute quelque part, sans erreur. Il reste cependant à trouver le bon chemin vers le but souhaité et une des facultés qui peut guider vers le chemin à prendre n'est nulle autre que l'intuition (Poincaré, 1905, p. 30). En effet, l'intuition aide à diriger les actions de l'individu qui fait des mathématiques et cette faculté peut même mener l'individu à trouver la solution d'un problème avant d'avoir pu expliciter les étapes de résolution (Fischbein, 1982).

Ces deux façons d'atteindre un but peuvent être associées aux deux types interreliés de connaissances identifiés par Fischbein (1982) : l'analytique et l'intuitif. Tout d'abord, la pensée analytique a comme caractéristique d'être explicite et permet d'atteindre rigoureusement et de façon sûre une conclusion. La pensée analytique fait donc partie de ce qui a été appelé rigueur un peu plus tôt. Cependant, il y manque l'immédiateté et l'efficacité, deux caractéristiques requises en situation de résolution de problèmes. Selon Fischbein, « in practical situations we need global, rapid evaluations which can promptly elicit effective adapted reactions » (1982, p. 11). Également, Fischbein (1987) écrit :

> Dans le cours même de notre raisonnement, de nos tentatives par essais-erreurs, nous devons nous appuyer sur des idées et représentations qui apparaissent, subjectivement, comme certaines, cohérentes et intrinsèquement claires. On ne peut douter de tout à tout moment. Cette attitude serait paralysante. On doit tenir pour acquises certaines représentations et conceptions. Celles-ci doivent apparaître, subjectivement, comme d'autonomes et cohérentes connaissances, totalement et directement acceptables, de manière à ce que le processus de raisonnement continue de fonctionner productivement. (Op. cit., 10e page de la préface ; traduction Tanguay, 2010, p. 70).

Pour en arriver à l'intuition, le 2e type de connaissances, Fischbein la considère comme ne demandant pas d'explication, pouvant synthétiser des expériences précédemment acquises et le tout, de façon inconsciente. Comme mentionné précédemment, c'est ce type de connaissances qui facilitera le choix des chemins à prendre car elles aident à guider les actions de l'individu.

Toujours selon Fischbein (1982), les structures intuitives d'un individu sont des composantes essentielles de la compréhension et de la pensée actives. Ces structures forment les connaissances principales lorsque les savoirs analytiques requis ne sont pas développés. Il est important de souligner que, même si les structures analytiques sont ultérieurement formées, les structures intuitives seront encore utiles. Par ailleurs, celles-ci sont influencées par les structures analytiques en formation et évoluent parallèlement à ces dernières.

L'aspect qui semble central à l'intuition, au sens qui sera utilisé dans ce texte, est que l'intuition provient des expériences et des connaissances de chaque individu. En effet, « [the intuitive component and the knowledge component of the mathematical equipment] are difficult to separate, particularly since the intuitive component is dependent for its growth on the knowledge component » (Wilder, 1967, p. 609). Fischbein (1982) apporte des précisions à ce sujet. Selon lui, généralement, les intuitions sont profondément enracinées dans les expériences précédentes, autant mentales que pratiques. Elles proviennent d'expériences passées dans lesquelles l'individu s'est investi, quand il a atteint un niveau de compréhension d'un concept à un point tel qu'il est convaincu de la véracité de ses propriétés et peut ainsi conserver les intuitions associées. À ce moment-là, la connaissance deviendra « active » et pourra surgir subséquemment dans l'esprit de l'individu sous forme d'intuition. À ce sujet, toujours selon Fischbein, il existe plusieurs types de conviction, dont deux nous intéresseront dans ce travail. Tout d'abord, il y a la conviction extrinsèque formelle[6] qui est issue d'une argumentation formelle. Ensuite, il y a la conviction intuitive intrinsèque[7], appelée aussi conviction interne intuitive[8] par Weber et Alcock (2004), qui est issue de la structure de la situation en elle-même. Fischbein met également l'accent sur les images mentales, qui sont aussi une forme d'intuition.

Un autre point crucial de l'étude des intuitions est que certaines d'entre elles, acquises lorsque l'individu est convaincu de la véracité d'un certain énoncé, peuvent être erronées mathématiquement, comme le souligne Tanguay à la fin de sa définition de l'intuition : l'application d'un théorème-en-acte issu de l'intuition est assujettie au domaine de validité de ce théorème-en-acte, c'est-à-dire que s'il est utilisé à l'extérieur de ce domaine, ce théorème-en-acte n'est pas valide. Par exemple, il est très intuitif de croire que toute fonction continue est dérivable, ce n'est cependant pas le cas (Poincaré, 1905). Il s'agit d'une intuition qui s'applique à une grande classe de fonctions, mais pas à toutes les fonctions. De ce fait, il est très probable qu'un individu ait cette intuition et qu'il utilise ce résultat dans une démonstration. Il s'agit ici bel et bien d'un théorème-en-acte, qui a un domaine de validité assez grand. Les intuitions sont donc faillibles. Elles peuvent être fausses, comme pour celle qui induirait à utiliser le fait que les fonctions continues sont toutes dérivables, ou bien elles peuvent guider le raisonnement mathématique vers un chemin qui n'est pas le bon. Ces deux aspects se reflètent dans les deux types d'intuitions donnés par Fischbein (1982). Il y a les

[6] ma traduction de « formal extrinsic type of conviction » (Fischbein, 1982, p. 11).
[7] ma traduction de « intuitive intrinsic type of conviction » (Fischbein, 1982, p. 11).
[8] ma traduction de « internal intuitive conviction » (Weber et Alcok, 2004, p. 231).

intuitions anticipatives, auxquelles se réfère un individu aux moments où il a l'impression d'avoir trouvé la solution à un problème sans toutefois être capable de proposer une explication rigoureuse pour le moment. Et il y a les intuitions affirmatives, qui représentent les explications, les interprétations ou les représentations qui sont acceptées comme étant évidentes en soi, comme un simple fait donné. Ces deux types d'intuitions peuvent intervenir à différents moments dans la production de démonstrations.

L'intuition prend une place prépondérante dans cette étude, non seulement parce qu'elle est omniprésente dans la production de mathématiques mais aussi parce qu'elle prend racine dans les connaissances et expériences de chaque individu. Cette idée concernant l'importance de l'expérience sera reprise plus loin.

2.3.1 L'intuition chez les étudiants

Comme exposé précédemment, raisonner sur des concepts mathématiques assez poussés demande à l'individu d'utiliser rigueur et intuition. Les définitions et propositions formelles des mathématiques avancées comportant du symbolisme demandent une certaine dose de rigueur pour être adéquatement manipulées, mais plusieurs considèrent qu'il est indispensable d'utiliser des représentations non formelles des concepts pour être en mesure de réfléchir efficacement (Weber et Alcock, 2004). Par contre, dans un contexte où des étudiants sont considérés, leurs intuitions sont plus souvent une des causes de certaines erreurs (une connaissance opératoire utilisée hors de son domaine de validité) qu'une source d'aide importante. On peut croire que les étudiants ont peut-être de la difficulté à valider leurs intuitions. Ainsi, il est possible d'affirmer que les intuitions font partie intégrante du travail des étudiants, et pas seulement de celui des mathématiciens, et peuvent aussi les éloigner d'arguments valides (Weber et Alcock, 2004). Une étude menée par Tanguay et Grenier (2010) tire des conclusions similaires en montrant que certains étudiants font des inférences, par raisonnement analogique et en ayant recours à leurs intuitions, d'une manière inadéquate. De plus, comme mentionné précédemment, les intuitions peuvent être faillibles de sorte que s'y fier aveuglément peut être une source d'erreur pour les étudiants moins expérimentés. En effet, malgré l'insistance de plusieurs mathématiciens sur l'importance de l'intuition, il reste que de s'y fier inconditionnellement lorsque celle-ci a trait à des concepts et résultats encore peu solides n'améliore pas nécessairement le travail mathématique.

2.4 Production sémantique et syntaxique

Il est possible de comparer deux façons d'aborder les démonstrations ou de travailler sur elles : certaines approches de la démonstration se font de manière syntaxique et d'autres de manière sémantique. De façon générale, la syntaxe représente ce qu'est un énoncé ainsi que ce que sont les règles de formation, de transformation et de combinaison des énoncés. La sémantique représente, elle, ce dont parle un énoncé donné. Quant aux deux manières de faire, syntaxique et sémantique, elles se situent quelque part entre les deux extrêmes de l'étendue des méthodes d'obtention d'une démonstration, soit la reproduction intégrale d'une méthode déjà rencontrée et la création de nouvelles mathématiques pour la résolution (Weber et Alcock, 2004). Weber et Alcock (2004) illustrent la différence entre les deux types d'approche des démonstrations, syntaxique et sémantique, qui résultent en des réalisations à tendance qualitativement différentes.

Tout d'abord, il semble impératif de clarifier que tout individu œuvrant dans le monde des mathématiques recherche ultimement à produire des preuves logiquement valides[9]. Comme dit précédemment, le produit final qui sera transmis à la communauté devra être conforme aux standards de rigueur. Cependant, même si le but reste le même, il existe plusieurs façons de s'y rendre.

Weber et Alcock (2004) font une distinction entre une production de démonstration dans laquelle l'individu travaille à partir des propositions prises directement et celle dans laquelle l'individu utilise sa compréhension intuitive des concepts. La première est appelée une construction syntaxique car elle est produite en manipulant strictement les définitions, relations et propriétés (données sous forme de théorèmes ou d'axiomes) suivant des règles logiques formelles. Les auteurs caractérisent ce type de productions comme étant celles où

[9] Je réfère ici aux individus qui utilisent ce que l'on pourrait appeler les « mathématiques du monde académique ». En d'autres mots, ce sont les mathématiques sur lesquelles s'entendent les étudiants et les professeurs d'un programme de mathématiques universitaire.

l'individu ne fait que « déballer les définitions » et « pousser les symboles » (Weber et Alcock, 2004, p. 210, ma traduction). La seconde est appelée une construction sémantique car elle est produite par un individu qui utilise des instanciations des objets mathématiques en jeu afin de guider les inférences formelles utilisées. Par *instanciations*, les auteurs font références à :

> « [...] a systematically repeatable way that an individual thinks about a mathematical object, which is internally meaningful to that individual. (We prefer instantiation to the more general term representation since we wish to exclude cases in which an individual represents a mathematical concept by rephrasing its definition or with an inscription to which they cannot attach meaning) ». (Op. cit., pp. 210-211)

Ainsi, dans le contexte de cette recherche, il s'agit de n'importe quelle représentation utilisée par les étudiants d'un objet mathématique qui démontre la manière qu'il a de réfléchir à l'objet, soit pour mieux le comprendre, soit pour utiliser ses propriétés. Dans le cadre du présent travail, les termes « représentation signifiante » seront utilisés pour désigner une « instanciation » au sens de Weber et Alcock, afin de ne pas confondre cette idée avec l'instanciation existentielle ou universelle qui prend aussi une place importante dans cette recherche.

Il semble légitime de formuler la conjecture qu'afin de se créer des représentations signifiantes (instanciations), un individu devra avoir compris adéquatement le concept, au même titre que, dans les termes de Fischbein (1982), un individu doit s'être investi dans un problème afin d'en retirer des intuitions. En fait, Leron et al. (1995, cité dans Weber et Alcock, 2004) ont démontré que même si des étudiants étaient en mesure de donner une description formelle juste, l'aspect syntaxique, d'un objet mathématique (des groupes isomorphes, dans ce cas-ci), leur compréhension intuitive n'était pas nécessairement au point et ils pouvaient posséder de fausses conceptions par rapport à la notion. De plus, Weber et Alcock ont mené une expérimentation en continuation de celle de Leron et de ses collègues auprès d'étudiants américains du premier cycle de l'université (environ 18-22 ans) ayant complété un cours d'algèbre abstraite et deux cours d'algèbre linéaire, et de futurs doctorants travaillant sur une thèse en algèbre abstraite. Les auteurs mettent en évidence que certains étudiants ne possèdent pas une compréhension intuitive assez poussée pour guider la partie formelle de la production de démonstrations, malgré qu'ils possèdent les connaissances formelles reliées aux objets mathématiques en jeu, à l'inverse de certains futurs doctorants capables d'utiliser plusieurs représentations signifiantes. Aussi, les auteurs discutent de l'éventualité que les étudiants doctoraux utilisent des techniques de démonstration qu'ils auraient en quelque sorte apprises comme étant plus efficaces, ce qui justifierait leur plus grande réussite dans l'expérimentation. En d'autres mots, leur expérience leur dicterait quel chemin prendre car c'est celui qui se serait montré le plus fructueux dans le passé. Encore une fois, l'expérience ressurgit comme étant un facteur important, notamment comme ferment de l'intuition. J'y reviendrai dans la prochaine section.

Weber et Alcock (2004), en appui sur l'étude de deux séries d'expérimentations, ont réussi à mettre en évidence les différences entre des productions sémantiques et des productions syntaxiques de démonstrations. Tout d'abord, les auteurs soulignent que la production de démonstrations requiert des notions ou du moins, une compréhension des notions qualitativement différentes selon que cette production se fait sémantiquement ou syntaxiquement. En effet, ils qualifient de « modestes » les savoirs dits formels requis pour réaliser une démonstration de manière syntaxique. Ils font référence aux définitions et aux règles d'inférence valides associées aux concepts en jeu et aux propriétés de ce concepts requises pour la démonstration. Les individus qui ont ces capacités ont une connaissance dite syntaxique, ou encore une compréhension formelle du concept[10].

En ce qui concerne les démonstrations produites de façon sémantique, les auteurs affirment que les qualités requises comportent la capacité à représenter de manière signifiante et de façon juste des objets mathématiques, et ce en produisant des représentations signifiantes assez riches et significatives pour guider le raisonnement vers la conclusion, sans oublier de connecter la définition formelle du concept avec ces représentations signifiantes qui servent ultimement à l'individu pour raisonner. Toujours selon Weber et Alcock (2004), l'individu qui répond à ces critères aura une compréhension dite sémantique ou encore, une compréhension intuitive efficace[11].

Un élément qui est mis en évidence par Weber et Alcock est qu'une approche strictement

---

[10] *formal understanding* (Weber et Alcock, 2004, p. 229).
[11] *effective intuitive understanding* (Weber et Alcock, 2004, p. 229).

syntaxique n'est généralement pas suffisante, idée qui est reprise dans l'article de Durand-Guerrier et Arsac (2003). Par exemple, en ce qui concerne la négation d'un énoncé dans le calcul des prédicats, la règle syntaxique dit qu'il suffit d'échanger les quantificateurs existentiels et universels pour faire passer la négation de l'extérieur à l'intérieur de l'énoncé quantifié. Par contre, Durand-Guerrier et Arsac soulignent les limites de cette règle à l'aide de cet exemple : $\forall x \forall y\ ((\forall z\ Fxyz) \Rightarrow Gxy)$. La négation de cet énoncé, $\neg(\forall x \forall y\ ((\forall z Fxyz) \Rightarrow Gxy))$, équivaut à $\exists x \exists y\ ((\forall z\ Fxyz) \wedge (\neg Gxy))$ car il y a une « sous-formule quantifiée, antécédent d'une formule conditionnelle » (p. 311), de sorte que ce ne sont pas tous les quantificateurs qui doivent être modifiés afin d'obtenir la négation. Selon Durand-Guerrier et Arsac, « à cette difficulté d'ordre syntaxique, s'ajoutent des difficultés d'ordre sémantique » (p. 311). En effet, la négation d'un énoncé fait appel à la « fonction » qui échange le vrai et le faux de sorte que l'aspect sémantique, sur la signification, est aussi important que l'aspect syntaxique, un peu plus technique. Les auteurs attribuent à cette difficulté les multiples erreurs d'un même type : affirmer que la négation de « *tout A est B* » est « *aucun A n'est B* ».

2.5 Pratiques, savoir-faire et savoirs contextualisés

Précédemment, j'ai avancé plusieurs considérations vis-à-vis de l'apport de l'expérience mathématique d'un individu dans son travail lors de l'élaboration d'une démonstration. En effet, à la suite de ma propre expérience en mathématiques avancées, il me semblait y avoir une forte influence de l'expérience sur les manières de faire et surtout, sur la justification du choix de ces manières de faire chez mes collègues étudiants ou chez les professeurs que je côtoyais. Je me suis aussi questionnée sur l'existence de ce que j'ai appelé une « logique de secours », qu'auraient des gens habiles en démonstration, sans toutefois qu'ils aient les connaissances logiques associées. Dans les termes adoptés dans ce chapitre, la logique de secours serait formée de connaissances opératoires et certains étudiants n'auraient pas les connaissances prédicatives associées. À ce sujet, Durand-Guerrier et Arsac (2003) discutent, pour leur part, en termes de *savoirs contextualisés* ou encore de *règles de raisonnement contextualisées*.

En comparant différents domaines mathématiques, Durand-Guerrier et Arsac ont pu constater ce qui se fait et comment dans chacun des domaines et ils sont arrivés à la conclusion que les considérations logiques sont absentes ou presque, au profit de règles de raisonnement contextualisées propres au domaine. Par exemple, en ce qui concerne la démonstration de niveau universitaire à partir d'un exemple générique, différentes approches sont utilisées selon le domaine. Tout d'abord, en géométrie, les démonstrations semblent toutes être réalisées avec des exemples génériques et cette méthode, datant d'Euclide, ne semble plus avoir besoin d'être précisée ou discutée, autant par les éducateurs que dans les manuels, tellement elle semble naturelle. En ce qui concerne les démonstrations faites en calcul littéral (algèbre), les soucis de généralité sont plus récents dans l'histoire, datant de l'époque de Viète (1540-1603). La notation littérale « est tellement passée dans les mœurs qu'aucun commentaire relatif à la généralité de la démonstration n'apparaît plus dans les textes contemporains du niveau qui nous intéresse » (Durand-Guerrier et Arsac, 2003, p. 302), le niveau discuté ici étant le début des études universitaires. Les auteurs remarquent par contre que les soucis de généralité apparaissent dans le discours des éducateurs, surtout envers les étudiants débutants. Finalement, les démonstrations faites en analyse comportant un exemple générique sont souvent de la forme « $\forall\varepsilon\ \exists\delta$ ... », de sorte que ε est l'élément générique à considérer. Dans les manuels scolaires, Durand-Guerrier et Arsac ont remarqué que l'aspect générique du ε est plus ou moins bien mis en évidence et lorsque c'est fait, la manière est significativement différente selon qu'il s'agisse d'une limite ou d'une fonction, malgré que la logique sous-jacente soit la même. Dans le discours des éducateurs, les caractéristiques du ε sont abordées à l'aide d'expressions le qualifiant d'« imposé » ou encore, par le fait qu'« on ne peut pas le choisir ». Finalement, l'exemple générique est utilisé de la même manière qu'en géométrie, mais la quantification est presque toujours implicite en géométrie alors qu'elle est explicite en analyse, ce qui crée une différence considérable pour les apprenants. Une autre différence significative entre ces deux domaines est le traitement de la dépendance entre deux objets. En géométrie, les supports visuels et les notations (triangles *ABC* et *A'B'C'*) rendent la dépendance en quelque sorte « évidente », ou du moins tangible. Aussi, le fait de dessiner comme support au raisonnement un triangle quelconque en s'assurant que celui-ci ne soit ni rectangle, ni isocèle, est une précaution destinée à éviter les erreurs et n'a pas en soi de statut théorique. Il s'agit d'une précaution dictée par l'expérience de l'individu.

En analyse, la dépendance n'est pas si bien transmise dans la notation « $\forall\varepsilon\,\exists\delta$... ». Il existe des notations du type δ_ε ou $\delta(\varepsilon)$ pour montrer que δ dépend de ε, qui sont introduites mais n'ont pas non plus un statut théorique en soi. C'est une précaution qui découle ici aussi de l'expérience. Il s'agit donc d'une connaissance opératoire, telle que Vergnaud (2001) l'a décrite.

Ainsi, il semble s'être créé des routines, face aux obstacles engendrés par le choix d'un exemple générique ou par la dépendance de deux objets, qui n'ont pas de lien apparent avec la logique. Dans certains cas, les éducateurs et les manuels évitent le sujet, introduisent une astuce qui n'a pas de statut théorique ou encore, expriment la situation en langage courant. En fait, Durand-Guerrier et Arsac vont jusqu'à dire que « la rigueur des raisonnements est assurée par des routines très contextualisées propres à chacun [des domaines mathématiques] » (p. 308), qu'« il ne s'agit pas uniquement d'une connaissance logique universelle, indépendante du contexte dans lequel on l'applique » (p. 308). Ainsi, l'éducateur fait référence, explicitement ou non, à ces savoirs, qui remplacent alors une référence explicite à la logique.

En d'autres mots, Durand-Guerrier et Arsac proposent que ce sont ces routines ou règles qui se substituent à la logique absente, dans la pratique mathématique ou encore dans le discours des éducateurs. Ces savoir-faire sont transmis souvent implicitement, par imitation plutôt que par enseignement direct, et n'ont donc pas de statut théorique. Leur utilisation serait guidée par le savoir mathématique de l'individu ou encore, par son expertise mathématique. Par exemple, plusieurs individus faisant des mathématiques utilisent l'astuce d'exposer la dépendance de δ envers ε, par exemple, en mettant ε en indice (δ_ε), histoire de ne pas perdre de vue la dépendance lors de la résolution. Cependant, il semble difficile de délimiter précisément les situations dans lesquelles le risque de faire une erreur due à l'omission de la dépendance entre deux variables serait assez élevé et requerrait d'expliciter la dépendance entre deux variables à l'aide d'une quelconque notation, et encore plus difficile d'établir une règle systématique à cet égard. Ainsi, cette méthode n'a pas de statut théorique et repose bel et bien sur l'expertise mathématique de l'individu. L'apparente importance de cette expertise mathématique et les connaissances opératoires qui en découlent dans un contexte de démonstration vis-à-vis l'utilisation de ces savoirs remplaçant la logique apportent une piste de réponse aux questionnements liés aux difficultés des étudiants face aux démonstrations. Ainsi, nous faisons l'hypothèse qu'il existe des savoirs, savoir-faire et pratiques contextualisés qui ne sont pas nécessairement liés à la logique mais qui sont tout de même propres à un domaine mathématique. Ceux-ci seraient également dépendants de l'expertise mathématique de l'individu.

Dans un contexte de validation d'une démonstration, Durand-Guerrier et Arsac ont remarqué que le savoir mathématique est l'outil principal qui aide un individu à vérifier la validité d'une production proposée. Ainsi, il semble que les pratiques, savoir-faire et savoirs contextualisés sont aussi présents dans la validation de démonstrations. En effet, les auteurs précisent ce qui suit, à la suite d'une expérimentation où des enseignants avaient à vérifier une démonstration erronée provenant d'un étudiant et à exprimer comment ils interviendraient :

> Il est remarquable de constater que certains enseignants disent n'avoir pas détecté, à la première lecture, d'erreur dans la démonstration. Ceci confirme la faible distance, en ce qui concerne le contrôle logique de la démonstration, entre la pratique experte et celle de l'étudiant, et met en évidence que ce sont les connaissances mathématiques des enseignants (et non pas l'analyse de la démonstration) et leur pratique de la démonstration qui leur donnent d'abord la certitude d'une erreur de raisonnement et les orientent ensuite vers le problème de la dépendance des variables. On comprend mieux alors le fait que l'étudiant, ne disposant pas de ce contrôle, puisse ne pas voir son erreur. (Op. cit., p. 323)

En d'autres mots, c'est leur expérience qui leur a dicté que le résultat démontré était faux, et la plupart ont exhibé un contre-exemple (une pratique que l'on peut qualifier d'opératoire), souvent avant même d'avoir constaté où se situait l'erreur dans la démonstration (ce qui requiert une connaissance prédicative), ou même d'avoir constaté qu'il y en avait tout simplement une. Cet extrait appui également l'hypothèse qu'il y a des savoirs, savoir-faire et pratiques contextualisés qui ne sont pas nécessairement liés à la logique mais qui sont tout de même issus de l'expertise mathématique.

Selon les auteurs, la démonstration est un savoir-faire, une pratique pour les mathématiciens, c'est-à-dire qu'il n'est pas nécessaire de connaître la théorie de la démonstration ou encore une théorie logique pour être apte à démontrer. En effet, tel que mentionné précédemment, la pratique de la démonstration s'est stabilisée préalablement à l'avènement des théories logiques. Par contre, ces pratiques qui amènent une « économie de logique », expression utilisée par les auteurs, ont leurs limites. Celles-ci sont partiellement exposées dans leur article. Ce qui semble pertinent à retenir est que ces limitations se font voir lorsque les élèves ou les mathématiciens sont exposés à des tâches non routinières, c'est-à-dire qui ne sont pas vues explicitement en classe, et donc pour lesquelles les pratiques ou savoir-faire associés ne seraient pas explicitement enseignés, ou encore disponibles à des fins de mise en œuvre ou même d'imitation.

Finalement, il semble nécessaire de faire le lien entre ces savoirs, savoir-faire et pratiques dits contextualisés et l'intuition, telle qu'elle a été décrite dans la section 2.3. Durand-Guerrier et Arsac n'utilisent pas le terme « intuition » dans leur texte. Cependant, ils discutent de l'expertise mathématique utilisée par les éducateurs et qui manque aux novices. Cela résonne avec l'idée de l'intuition, qui prend racine dans les expériences de l'individu, et donc dans l'expertise mathématique qu'il a construite au cours de l'expérience. On peut donc croire que l'intuition a sa place dans cette idée de savoirs, pratiques et savoir-faire contextualisés. De plus, j'utiliserai l'expression « connaissances contextualisées » pour discuter de l'ensemble des savoirs, savoir-faire et pratiques contextualisées se rapportant à un certain sujet ou une certaine situation. Cette expression a été choisie non seulement par souci de concision mais aussi parce que le mot « connaissance » semble adéquat pour rendre l'idée retenue que les savoirs, pratiques et savoir-faire contextualisés sont issus de l'expérience. La distinction entre savoirs et connaissances est maintenant bien établie en didactique francophone : les savoirs sont les connaissances **institutionnalisées**, bien identifiées, explicitées et établies, prédicatives dirait Vergnaud. Or institutionnaliser des connaissances (pour en faire des savoirs), c'est, entre autres, le plus souvent les **dé**contextualiser. Ainsi, la locution « connaissances contextualisées » nous a semblé plus appropriée que la locution « savoirs contextualisés » pour synthétiser le groupe « savoirs, savoir-faire et pratiques contextualisés ».

2.6 Questions revisitées

Ainsi, il a été mis en évidence que la démonstration fait intervenir la rigueur et l'intuition, les aspects sémantiques et syntaxiques de même que des savoirs, savoir-faire et pratiques contextualisés. Les travaux de recherche montrent que les connaissances contextualisées peuvent dispenser l'étudiant de l'utilisation (explicite) de la logique formelle lors du travail sur les démonstrations, soit les connaissances prédicatives. À la lumière de ces fondements théoriques, mes questions de recherches se divisent maintenant en trois points :

- Y a-t-il des différences dans la façon dont les étudiants produisent des démonstrations, selon qu'ils aient ou non des connaissances prédicatives en logique formelle ou encore, qu'ils aient ou non fait un cours sur la logique formelle ? Comment cela se traduit-il par rapport aux aspects syntaxique et sémantique, rigueur et intuition, mobilisation ou non de connaissances contextualisées ?
- Y a-t-il des différences dans la façon dont les étudiants valident une démonstration qui leur est proposée, selon qu'ils aient ou non des connaissances prédicatives en logique formelle ou encore, qu'ils aient ou non fait un cours sur la logique formelle ?
- Que se passe-t-il quand l'étudiant ne peut puiser dans des connaissances contextualisées reliées aux objets mathématiques en jeu dans une démonstration ?

CHAPITRE III

MÉTHODOLOGIE

3.1 Description globale

L'expérimentation que je conduirai prendra la forme d'une activité en deux temps, soit un test diagnostique suivi d'entrevues semi-structurées. Le test diagnostique sera administré à tous les participants volontaires, participants dont la description est donnée dans la prochaine section (3.2). Les entrevues se dérouleront en dyades. Elles s'inspirent du modèle de Goldin (1997) sur le « task based interview » (cf. section 3.3). Afin de répondre à mes questions de recherche, j'ai cerné certaines connaissances liées à la logique formelle (cf. section 3.4). Ces connaissances seront évaluées sous leur forme prédicative dans le test diagnostique, puis leur mise en œuvre dans un contexte de démonstration sera étudiée lors des entrevues. Il est important de souligner qu'entre deux et trois semaines s'écouleront entre le test diagnostique et les entrevues. Cependant, cet intervalle de temps est considéré comme très court de sorte que son influence sur la manière d'agir des participants lors des entrevues nous semble négligeable.

Afin de clarifier le déroulement de mon expérimentation, je décrirai tout d'abord ce qu'est le « task based interview » (cf. section 3.3), suivi par un protocole général qui servira lors de la passation des entrevues (cf. section 3.4). Je mettrai ensuite en évidence les trois catégories de connaissances choisies (cf. section 3.5), puis les tâches sélectionnées pour l'entrevue, accompagnées de leur analyse a priori et du sous-protocole conçu pour chacune d'elles (cf. section 3.6). Finalement, les questions proposées dans le test diagnostique seront exposées (cf. section 3.7). Le contenu du test diagnostique est présenté à la suite du contenu des entrevues, malgré la chronologie inverse dans l'expérimentation, parce que les questions proposées dans le test ont été formulées en conséquence de ce que les tâches de l'entrevue exigent.

Note : d'un point de vue pratique, j'utiliserai le terme « tâche » pour dénommer ce qui sera proposé aux étudiants dans les entrevues et par « question » ce qui sera demandé lors du test diagnostique (sauf lorsqu'il s'agit des questions de recherche). Également, j'ai attribué un titre à chaque tâche afin de pouvoir faire référence à chacune d'elle plus facilement, ultérieurement dans le texte. De plus, je ferai référence aux six questions du test diagnostique dans les analyses *a priori* des tâches, pour bien faire le lien entre les deux, à l'aide des raccourcis *Q1* à *Q6*. Ainsi, si j'écris *Q1* quelque part dans l'analyse *a priori* d'une des tâches, cela signifie que la connaissance dont il est question à cet endroit sera traitée dans la première question du test diagnostique.

3.2 Participants

Tel que mentionné précédemment, l'expérimentation sera proposée à des étudiants québécois d'un programme de baccalauréat en mathématiques[12] de 90 crédits. Ces étudiants auront complété entre 45 et 90 crédits du programme. Le choix de cette clientèle, plutôt que celle des mathématiciens (professionnels), est motivé par le besoin d'un certain contrôle sur l'expérience et les connaissances des participants. En effet, comme explicité précédemment dans le cadre théorique, l'expérience est à la source d'une grande partie des intuitions et des règles de raisonnement contextualisées, deux éléments qui occupent une place importante dans la production de démonstrations. Ainsi, le but n'est pas d'évaluer si cette expérience, avec les intuitions et connaissances contextualisées qui lui sont rattachées, compense d'éventuelles lacunes en logique. Le but est de voir comment les étudiants réagissent dans une situation de démonstration, selon leurs acquis personnels en logique formelle, sachant qu'ils n'auront pas tous les outils et tout le contrôle d'un mathématicien de profession. Également, il sera plus facile de trouver des tâches non routinières, choisies dans le but de trouver les limites des « économies de logique » dont parlent Durand-Guerrier et Arsac (2003), en ayant affaire à des étudiants qu'en ayant affaire à des mathématiciens.

[12] Voir la description du système scolaire québécois à la page 1.

Comme mentionné précédemment, tous les volontaires rempliront le test diagnostique et c'est ce test qui permettra de sélectionner les participants aux entrevues. Ce choix se base sur deux points. Tout d'abord, je veux prendre en considération le fait que les étudiants sélectionnés ont préalablement passé ou non un cours de logique. En effet, le fait qu'un étudiant ait été exposé à différentes tâches reliées à la logique pourrait résulter en différentes connaissances contextualisées, de sorte qu'il semble indispensable de considérer la variable qu'est le cours de logique dans la sélection des participants. Notons brièvement que tous les candidats ayant suivi un cours de logique qui rempliront le test diagnostique ont suivi le même cours de logique dans un seul et même groupe et, conséquemment, donné par le même professeur. Par contre, des études remettent en question la réelle utilité des cours de logique réguliers dans l'apprentissage de celle-ci, dans un but d'application à divers contextes mathématiques (par ex. Cheng et al., 1986). Ainsi, je désire également prendre en considération les acquis ***réels*** en logique des étudiants, que je tenterai d'évaluer via le test diagnostique. Finalement, puisque je désire comparer la manière de produire une démonstration selon le niveau de connaissances en logique, je dois sélectionner des individus ayant une bonne connaissance des notions prédicatives de logique formelle, en ayant ou non suivi un cours de logique, et des individus ayant une connaissance plus lacunaire de ces notions prédicatives, en ayant ou non suivi un cours de logique. Ainsi, quatre catégories de participants sont mises en évidence. Une première regroupe des étudiants ayant un haut niveau de connaissances prédicatives en logique et ayant passé un cours de logique. La deuxième regroupe des étudiants ayant un niveau de connaissances prédicatives en logique moindre et ayant également passé un cours de logique. La troisième et la quatrième regroupe des étudiants n'ayant pas suivi de cours de logique et ayant un haut niveau de connaissances prédicatives en logique pour l'une et un niveau moindre pour l'autre. Ces catégories sont évidemment théoriques. Ainsi, il se peut qu'une ou l'autre des catégories ne soient pas représentée par un des étudiants volontaires. Cependant, cela ne veut pas dire que l'un ou l'autre de ces profils n'existe pas dans la réalité. Les dyades réelles seront présentées au chapitre 4. Il semble pertinent de préciser à nouveau que les étudiants participant à l'étude auront tous suivi le même cours de logique au même trimestre, dans le même groupe-cours.

Évidemment, il est pertinent de s'attarder sur le cours de logique que certains étudiants ont suivi. Le cours ne porte pas strictement que sur la logique mais comporte aussi une partie sur les fondements des mathématiques. On peut certainement penser que ces ajouts sur les fondements des mathématiques aident les étudiants à avoir une image plus globale de l'avènement de la formalisation mathématique. Voici différents points qui sont étudiés dans le cours :

- Rapport entre le langage mathématique et les structures mathématiques : processus mathématisant.
- Calcul des propositions et calcul des prédicats : syntaxe et sémantique.
- Conséquence et déduction (syntaxiques et sémantiques).
- Éléments de la théorie des modèles; applications, notamment à l'analyse non standard.
- Théories du premier ordre : systèmes axiomatiques de Peano et de Zermelo-Fraenkel.
- Incomplétude : théorèmes de Gödel et de Kirby-Paris.
- Origine et nature du problème moderne des fondements des mathématiques : étude des systèmes de Frege et de Russell.
- Propriétés des langages de premier ordre : théorèmes de complétude et de compacité.

3.3 « Task based interview »

La méthodologie pour la passation des entrevues de la présente étude s'appuie sur la méthodologie du « task based interview » (Goldin, 1997). Celle-ci se prête bien à une étude qualitative, à la description de l'apprentissage et de la résolution d'un problème donné en mathématiques, comme un problème de démonstration par exemple. On peut alors aller au-delà de la compréhension restreinte offerte par l'étude de productions papier-crayon, à elle seule. Selon Goldin,

> « such structured interviews are used in research for the twin purposes of (a) observing the mathematical behavior of children or adults, usually in an exploratory problem-solving context, and (b) drawing inferences from the observations to allow something to be said about the problem solver's possible meanings, knowledge structures, cognitive processes, affect, or changes in these in the course of the interview ». (Op. cit., p. 40)

Cette méthodologie est cohérente avec les buts de mon expérimentation, qui sont de déterminer si des connaissances en logique formelle changent la manière de faire et de valider des démonstrations chez des étudiants, en lien avec les aspects mis en évidence dans le cadre théorique (chapitre 2). En effet, pour ce faire, je devrai tirer des conclusions sur les significations possibles de leurs actions et explications, à partir de mes questions et observations. Également, un individu ne se souvient pas toujours, après l'obtention d'une démonstration achevée, du chemin par lequel il est passé. Il se souviendra probablement du travail déductif mais pas nécessairement de ses intuitions ou encore, des représentations signifiantes utilisées. Il est primordial, pour retracer ce cheminement, d'étudier la démonstration à l'étape de production et non seulement le produit fini. Je dois donc mener mon expérimentation de sorte que les étudiants explicitent à voix haute leurs choix. Cependant, il semble difficile pour un étudiant seul d'exprimer tout ce qui lui passe à l'esprit, sans être dans une situation d'interaction. Ainsi, il a été décidé que la meilleure façon d'obtenir des résultats serait de mettre les étudiants en groupe de deux et de leur demander de discuter à voix haute de la tâche. La décision de créer des dyades au lieu de proposer des entrevues individuelles provient en grande partie de multiples discussions que j'ai eu avec plusieurs chercheurs qui ont déjà expérimenté la passation de ce type d'entrevues et qui m'ont unanimement conseillé de placer les participants en petit groupes. Dans ce cas, les étudiants pourront tenter de se convaincre mutuellement ou encore de résoudre les tâches en mettant leurs connaissances à profit. Un temps pour que les étudiants lisent la tâche individuellement sera également mis en place afin que chacun prenne connaissance de la question avant d'échanger.

Goldin propose des principes de base dans l'élaboration d'entrevues structurées selon le « task based interview ». Ces principes s'appliqueront même si les étudiants sont placés en dyades. Tout d'abord, il prône l'accessibilité relative aux amorces de solutions du problème par le sujet, en ce sens que, confronté à une tâche trop complexe ou faisant appel à des connaissances qu'il ne possède pas, un individu ne peut aborder la tâche avec assez de profondeur pour produire des données significatives pour les chercheurs. Les analyses *a priori* des tâches (section 3.6.2) montreront que les difficultés mathématiques sont raisonnables, rendant donc les tâches accessibles. Ensuite, des tâches ayant une structure représentationnelle riche devraient être sélectionnées :

> « mathematical tasks should embody meaningful semantic structures capable of being represented imagistically, formal symbolic structures capable of notational representation, and opportunities to connect these. Tasks should also suggest or entail strategies of some complexity and involve planning and executive-control-level representation ». (Op. cit., p. 61)

Tout de suite après la présentation des tâches, il devrait y avoir un temps pour ce que l'auteur appelle du « free problem solving », où le chercheur pourra étudier le comportement spontané des participants ainsi que les raisons de leurs actions plutôt instinctives ou intuitives. Cette étape peut ralentir le déroulement de l'entrevue mais l'éliminer amènerait une perte d'information importante pour le chercheur. En ce qui concerne la planification de l'entrevue, les principales avenues dans la résolution du problème devraient être anticipées, afin de distinguer ensuite les bonnes des mauvaises réponses, et de relancer avec des questions supplémentaires permettant à l'individu de se corriger, le cas échéant. Il s'agit d'un aspect important quant à la reproductibilité et à la généralisation des expérimentations du « task based interview ». Finalement, il faut que les participants puissent avoir accès à des modes de représentation externes, comme un dessin par exemple, afin d'augmenter l'accès du chercheur aux représentations internes de l'individu.

En résumé, les entrevues dans le cadre de cette recherche, basées sur le « task based interview », se déroulent de la manière suivante : le chercheur propose aux duos d'étudiants une tâche écrite sur papier. Ils ont par la suite un court moment pour prendre connaissance de la question de manière individuelle. Le but ici n'est pas qu'ils s'approprient complètement la question mais qu'ils aient le temps pour la lire en entier de manière individuelle. Par la suite, ils répondent par écrit tout en verbalisant et échangeant leurs raisonnements à voix haute. Le chercheur peut intervenir à différents moments dans la résolution, en suivant les protocoles et sous-protocoles exhibés dans les prochaines sections. En effet, il y aura un protocole plus général (cf. section 3.4) qui s'appliquera en tout temps durant les entrevues, puis un sous-protocole sera associé à chacune des tâches (cf. section 3.6.2) pour guider les interventions du chercheur selon la spécificité de chaque tâche proposée. Également, des notes pourront être prises sur le vif par le chercheur à partir de ses premières impressions ou observations de la résolution de l'étudiant, qui seront combinées au moment de l'analyse avec des données audio.

3.4 Protocole général des entrevues

Comme le propose le « task based interview », dans une optique de reproductibilité, un protocole d'entrevue doit être mis en place et suivi pour chacune des séances avec les participants. Le premier protocole concerne toutes les questions et sera jumelé avec les sous-protocoles qui seront décidés pour chacune des tâches. Notons que ces protocoles n'ont pas comme but de faire ressortir à tout prix la « bonne » réponse à la tâche, mais bien que les étudiants explicitent leur raisonnement face à la tâche soumise.

Inspirées des protocoles discutés dans Goldin (1997), j'explicite ici les grandes étapes à suivre et communes à toutes les tâches :

1. Donner l'énoncé de la tâche et laisser du temps pour que les étudiants s'approprient la question (voir le sous-protocole pour le temps alloué). Donner ensuite du temps pour que les étudiants expriment leurs pensées premières et mettent en œuvre leurs comportements spontanés.
2. Si les étudiants n'amorcent pas de résolution dès le départ ou s'ils semblent bloqués dans un processus de démonstration entamé, leur demander s'ils sont convaincus de la véracité de l'énoncé ou de la validité de la démonstration proposée et éventuellement, les raisons pour lesquelles ils pensent cela.
3. À tous moments, si une explication ne semble pas adéquate ou pas assez explicite pour le chercheur, il pourra demander aux étudiants s'ils peuvent lui *montrer* ce qu'ils veulent dire, afin de faire appel à d'autres représentations. Le chercheur peut aussi demander d'en dire plus.
4. À tous moments, si les étudiants restent muets, leur rappeler de penser à voix haute et de décrire leurs pensées. Aussi, si le chercheur juge qu'une idée émise par un étudiant n'est pas claire, il doit demander des précisions.

5. À la fin d'une résolution, demander aux étudiants des questions réflexives sur les choix qui ont été faits, quand le chercheur le juge pertinent (Pensez-vous pouvoir m'expliquer comment vous avez réfléchi à ce problème ? Pouvez-vous m'aider à mieux comprendre comment vous avez résolu ce problème ? Pensez-vous avoir réussi la tâche ?) Également, interroger les grandes orientations choisies, que ce soit le fait d'avoir pris un exemple générique ou encore, d'avoir réalisé une preuve par contradiction.
6. Même si les étudiants n'ont pas fourni d'explications complètes sur la validité de la démonstration, à valider ou à rédiger, à la suite de ces questions et de celles identifiées dans les sous-protocoles, le chercheur passera à l'autre question ou à la conclusion.

En guise de conclusion à l'entrevue, le chercheur peut proposer les différentes questions réflexives suivantes :

- Qu'avez-vous pensé des tâches proposées ?
- S'agit-il de tâches dont vous avez l'habitude ?
- Avez-vous trouvé difficile d'exprimer vos pensées à voix haute ?

3.5 Catégories de connaissances évaluées pour l'ensemble de l'expérimentation

Comme exprimé précédemment, j'ai mis en évidence différentes catégories de connaissances à évaluer pour l'ensemble de l'expérimentation. Premièrement, je veux évaluer les connaissances liées à la manipulation et la compréhension des symboles auxquels j'ai associé la logique précédemment dans ce travail, conformément à l'interprétation de Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp et Tanguay (2012, p. 370) : « when we refer to logic as a subject, we mainly restricts ourselves to the mathematical uses of the words and, or, not and if-then, especially in the statements that involve variables, as well as for-all and there-exists ». Je parle donc ici des symboles $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\forall$ et $\exists$. J'ai également ajouté l'équivalence ($\Leftrightarrow$).

La seconde catégorie de connaissances est reliée aux principales difficultés et erreurs relevées dans la littérature en lien avec la logique. En particulier, j'ai choisi de discuter de l'utilisation d'une quantification universelle et existentielle (par ex. Epp, 2003), de la compréhension de la preuve par contradiction (par ex. Epp, 1997), de la négation d'un énoncé (par ex. Epp, 2003; Fabert et Grenier, 2011) et de l'instanciation existentielle (par ex. Epp, 2009).

La troisième catégorie est reliée à des connaissances strictement théoriques en lien avec certains termes ou locutions. En effet, un étudiant rencontrera dans ses activités mathématiques, implicitement ou explicitement, le *modus ponens* et le *modus tollens*, ainsi que la contraposée, pour ne nommer que ceux-ci.

3.6 Les tâches

Les entrevues sont la principale source de données de cette étude et serviront donc comme base pour répondre aux questions de recherche, d'où l'importance du choix des tâches proposées dans ces entrevues. Puisque cette recherche ne vise pas à tester des connaissances mathématiques, autres que celles directement liées à la logique, les tâches ne font pas intervenir des concepts mathématiques très poussés ou très ardus. En effet, le but des entrevues est d'examiner la façon dont les étudiants traitent des démonstrations, à l'égard de certains contenus logiques. Également, dans le but d'être cohérent avec le « task based interview » (cf. section 3.3), les tâches sont accessibles.

Quatre tâches différentes sont proposées et analysées. On remarquera qu'aucune tâche n'est reliée à la géométrie. Ce choix découle du fait que les démonstration en géométrie utilisent presque toujours des éléments génériques, sans que ce soit explicité, ce qui empêche de se pencher sur ce qui est recherché dans ce texte, où la question des quantifications est centrale. En somme, la géométrie, quoiqu'un sujet extrêmement intéressant en mathématiques, ne se prête pas bien aux buts de cette recherche.

En raison de contraintes de temps, il se peut que certaines dyades ne puissent répondre aux quatre tâches. Conséquemment, les questions sont placées dans un certain ordre afin de pouvoir recueillir un maximum d'informations pour chacun des trois types de tâches, reliées aux trois questions de recherche, et qui seront exposés à la section suivante. Cela suppose que toutes les dyades feront les trois premières tâches. Si le temps le permet, elles feront la quatrième.

En réalité, les étudiants répondront au test diagnostique préalablement à la réalisation des tâches. Cependant, les tâches sont présentées dans ce texte avant les questions pour maintenir la cohérence. En effet, les questions du test diagnostique ont été conçues pour repérer chez les participants les connaissances disponibles parmi celles requises par les tâches, de sorte que l'analyse des tâches doit être exposée en premier.

3.6.1 Les catégories

Il y aura trois catégories de tâches, une catégorie pour chacune des trois questions de recherche qui guident la présente recherche (cf. section 2.6).

La première catégorie demandera à l'étudiant de construire une démonstration relative à un énoncé donné. Ce type de tâche permettra de recueillir des informations sur la construction de démonstrations et les manières d'y arriver. Cette catégorie a été pensée afin de voir la mise en œuvre des techniques et des stratégies de démonstration, en prenant en compte les connaissances contextualisées discutées dans le chapitre précédent (cf. section 2.5). Elle est donc associée à la première question de recherche.

La seconde consistera à valider ou invalider une démonstration déjà rédigée, ce qui n'est pas en soit un type routinier de tâches. Cette catégorie exigera des étudiants de « déballer » la structure logique de certains énoncés qui seront présentés de manière informelle. Selon Selden et Selden (1995), les étudiants qui ont de faibles capacités à déballer une structure logique auront de grandes difficultés à poser les bonnes questions et à répondre à ces questions, visant à valider ou invalider une démonstration. Les auteurs utilisent l'expression « déballer la structure logique d'énoncés mathématiques[13] » en référence à l'action d'associer un énoncé informel à un énoncé formalisé (symbolisé) logiquement équivalent, mettant ainsi

[13] *unpacking the logic of mathematical statements* (Selden et Selden, 1995).

en évidence les caractéristiques logiques qui sont souvent passées sous silence dans les démonstrations parce que ce sont des éléments considérés comme allant de soi. Cette catégorie aidera à répondre à la deuxième question, à savoir si des connaissances prédicatives en logique modifient la façon dont un étudiant valide des démonstrations auxquelles il est exposé.

La troisième catégorie sera celle qui permettra d'examiner les manières de faire lorsqu'un étudiant n'a aucune connaissance contextualisée sur laquelle s'appuyer, et donc à répondre à la troisième question de recherche. En effet, une tâche faisant partie de cette catégorie ne fera référence à aucun objet mathématique standard, requérant seulement les règles de raisonnement mathématique, de sorte que l'étudiant ne pourra utiliser les pratiques relatives à un domaine mathématique spécifique. Cette question permettra d'examiner les manières de résoudre des étudiants en mettant de côté, autant que possible, les connaissances contextualisées et l'expérience.

3.6.2 Analyse *a priori* et sous-protocoles associés aux tâches proposées en entrevue

L'analyse réalisée dans la présente section aborde principalement les idées mathématiques contenues dans chacune des tâches et les éventuelles stratégies et erreurs anticipées de la part des participants. Les aspects sémantique et syntaxique, rigueur et intuition ainsi que les connaissances contextualisées seront abordés en profondeur lors de l'analyse des productions des participants (cf. section 4.3) ainsi que lors de l'analyse *a posteriori* des tâches (cf. section 4.4).

3.6.2.1 Tâche #1 : La preuve par contradiction

Un étudiant de niveau universitaire a fourni cette production. Faire un commentaire à son intention.

Théorème : Le double de tout nombre irrationnel est irrationnel.

Démonstration : Supposons que ce n'est pas le cas. Ainsi, supposons que le double de tout nombre irrationnel est rationnel. Par contre, nous avons préalablement démontré que $\sqrt{2}$ est irrationnel et aussi que $2\sqrt{2}$ est irrationnel. Ces résultats contredisent notre supposition. Par conséquent, le théorème est vrai.

Cette tâche appartient à la deuxième catégorie présentée précédemment et elle provient de Epp (1997). La consigne (en italique) n'était pas spécifiée dans l'article. Elle a été ajoutée dans le but de donner une indication aux étudiants sur le but de la tâche, sans toutefois leur dire directement que l'enjeu de la tâche est la validité de la démonstration. En ce qui concerne la démonstration, il s'agit d'une version assez commune des productions que peuvent fournir les étudiants en tentant de démontrer des théorèmes analogues. Epp la propose pour mettre en évidence les difficultés que les apprenants rencontrent lors de l'introduction de la preuve par contradiction, à savoir comment cette démarche fonctionne et comment faire adéquatement la négation des énoncés pour réussir à démontrer selon cette méthode.

Ainsi, Epp propose pour fin de discussion une démonstration par contradiction qui est erronée. En effet, la négation de l'énoncé universel à démontrer « le double de tout nombre irrationnel est irrationnel », est l'énoncé existentiel « il existe un nombre irrationnel dont le double est rationnel ». Or, la démonstration proposée par l'étudiant fictif donne comme négation « le double de tout nombre irrationnel est rationnel », qui est un énoncé universel. L'erreur commise est donc d'avoir mal réalisé la négation. Conséquemment, l'étudiant n'a pas démontré ce qui devait l'être. Par contre, si l'on acceptait que la négation a été réalisée correctement, la suite de la démonstration serait valable par rapport à ce que propose de réfuter l'étudiant. En effet, un contre-exemple suffit pour invalider un énoncé universel, et c'est ce que l'étudiant met en avant. On peut aussi souligner que le « contre-exemple » donné par l'étudiant constitue en fait un *exemple* à l'énoncé initial qui est universellement quantifié, et donc à ce titre il ne devrait pas en constituer une preuve.

On voit apparaître dans une telle tâche quatre connaissances indispensables qui peuvent rapidement devenir les difficultés principales. Il y a d'abord la capacité à « déballer la logique » des énoncés (*Q1, Q6*)[14], car cette tâche appartient à la deuxième catégorie (cf. section 3.5.1). Encore une fois, selon Selden et Selden (1995), les étudiants qui ont de faibles capacités à déballer une structure logique auront de grandes difficultés à poser les bonnes questions ou à répondre à ces questions qui visent à valider ou à invalider une démonstration.

Ensuite, il y a la capacité à réaliser la négation d'un énoncé, étape primordiale à la réalisation de la démonstration par l'absurde. En effet, la clé de ce type de démonstration est de supposer que l'énoncé est faux, donc de considérer sa négation comme vraie, et de démontrer qu'une telle supposition mène à une contradiction. Cependant, faire la négation d'un énoncé (*Q1, Q5*), qu'il soit affecté d'une quantification universelle ou existentielle, n'est pas toujours une tâche simple et allant de soi. Par exemple, un étudiant n'ayant pas eu d'enseignement sur le sujet peut facilement penser que la négation de $\forall x, P(x)$ est $\forall x, \neg P(x)$. C'est ce qui a été mis en scène dans la tâche.

Par la suite, il y a tout le fonctionnement de la preuve par contradiction. L'étudiant doit bien comprendre quel est l'énoncé à valider, et par le fait même doit être capable d'en faire la négation, afin de démontrer le résultat. Mais cela ne signifie pas qu'il comprenne le fonctionnement logique de cette méthode, la connaissance prédicative (*Q3*), c'est-à-dire pourquoi exactement il est possible de dire que ce qui devait être démontré l'a été. En d'autres mots, il s'agit de bien comprendre que pour montrer que A est vrai, on suppose que $\neg A$ est vrai et on veut montrer que $\neg A \Rightarrow B$ est vrai. Par la suite, on montre que B est faux, d'où la contradiction $B \wedge \neg B$. Par *modus tollens*, on conclut que $\neg A$ est faux et donc que A est vrai. Donc, dans la tâche, il aurait fallu arriver à une contradiction à partir de la négation de l'énoncé initial, à savoir « il existe un nombre irrationnel dont le double est rationnel », afin de bien faire fonctionner la preuve par contradiction.

---

[14] *Rappel :* il s'agit d'une référence aux questions du test diagnostique, dans ce cas-ci aux questions 1 et 6. En d'autres mots, la connaissance discutée à cet endroit fera l'objet dans le test diagnostique de deux questions, dont les numéros sont signalés entre parenthèses.

Finalement, un dernier élément crucial est le contrôle sur les quantificateurs existentiels et universels (*Q1*). Il est primordial, pour bien saisir l'énoncé du théorème, de bien comprendre ce que des quantifications universelles et existentielles signifient lorsqu'il est question de la négation, notamment dans le cas précis de cette démonstration. Cela nécessite en particulier qu'on soit capable de repérer ces quantifications même quand elles sont implicites. Par exemple, il faut bien comprendre que la négation inverse les quantificateurs lorsqu'ils sont en début de formule, même si la quantification est implicite. Dans ce cas précis, la négation de « le double de tout nombre irrationnel est irrationnel », énoncé implicitement quantifié de manière universelle, est l'énoncé existentiel « il existe un nombre irrationnel dont le double est rationnel ».

Évidemment, ces quatre connaissances sont profondément interreliées dans cette tâche, en ce sens qu'elles sont utilisées simultanément dans la résolution, que ce soit de manière prédicative ou de manière opératoire. Cependant, pour bien comprendre la logique sous-jacente, l'étudiant doit tout maîtriser.

On peut s'attendre à ce que certains étudiants clament cette démonstration fausse en disant qu'un exemple n'est pas valable pour démontrer la généralité du théorème, sans toutefois que ceux-ci puissent expliquer avec plus de détails la logique sous-jacente à cette erreur; en d'autres mots, sans qu'ils puissent affirmer que la négation de l'énoncé de départ n'est pas adéquate et en quoi elle n'est pas adéquate. Il se peut aussi que les étudiants acceptent comme vraie cette démonstration car, comme explicité au début de l'analyse, si l'on accepte que la négation a été réalisée correctement, la suite de la démonstration est valable par rapport à ce que propose de réfuter l'étudiant. Dans tous les cas, à la suite de l'analyse de la démonstration proposée, les étudiants seront dirigés vers la rédaction d'une démonstration valide de l'énoncé. S'ils considèrent valide la démonstration proposée, ils seront invités à en produire une autre également valide. S'ils la considèrent invalide, ils seront invités à en produire une qui serait valide. Ces éventualités sont prises en compte dans le sous-protocole.

A priori, démontrer que le double de tout nombre irrationnel est irrationnel n'est pas une démonstration qui devrait causer d'énormes difficultés aux étudiants. Ils peuvent attaquer la démonstration par la contraposée (« si le double d'un nombre n'est pas irrationnel, alors le nombre n'est pas irrationnel », ce qui bien sûr revient à « si le double d'un nombre est rationnel, alors le nombre est rationnel ») assez facilement.

Sous-protocole

Le temps d'appropriation pour cette tâche est fixé à 60 secondes. Cette période de temps est jugée suffisante par la simplicité des concepts mathématiques en jeu (nombres irrationnels et rationnels). Dans les cas où les étudiants n'offrent pas de réponse à la suite du temps d'appropriation alloué, ou s'ils offrent une explication mathématiquement insatisfaisante ou incomplète vis-à-vis l'erreur aux yeux du chercheur, et ce à la suite de la deuxième étape du protocole général (questionnement sur la validité de la démonstration), celui-ci sera amené à poser les questions suivantes :

- De quel type de démonstrations s'agit-il ?
- Quel est le fonctionnement d'une démonstration par contradiction ?
- Est-ce que le contre-exemple donné par l'étudiant vous convainc ?

Si certains étudiants affirment que cette démonstration est valable, deux questions s'ensuivront :

- Expliquer en quoi cette démonstration est juste.
- Comment pourriez-vous expliquer cette démonstration à un autre étudiant qui ne la comprend pas ?

Si certains étudiants clament cette démonstration fausse en disant qu'un exemple n'est pas valable pour démontrer la généralité du théorème, sans mentionner l'erreur de négation, relancer l'étudiant :

- Qu'est-ce que l'étudiant veut dire par « Ces résultats contredisent notre supposition » ? Quelle est cette supposition ?

En conclusion, si les étudiants considèrent la démonstration proposée comme invalide, le chercheur demandera :

- Pourriez-vous me donner une démonstration valide de l'énoncé ?

Si les étudiants ne considèrent pas la démonstration proposée comme valide, le chercheur demandera :

- Pourriez-vous me donner une autre démonstration valide de l'énoncé ?

3.6.2.2 Tâche #2 : Les fonctions surjectives

Étudier la conjecture suivante : *La composition de deux fonctions surjectives est surjective.*

Cette tâche se rattache à la première catégorie (section 3.6.1). Il s'agit de produire la démonstration de cet énoncé (dont une proposition de solution se trouve dans l'encadré plus bas). Celle-ci est accessible aux étudiants dès la première année universitaire, car le seul concept mathématique (non logique) en jeu est celui de la composition et celui de la surjectivité d'une fonction : une fonction $f: A \to B$ est surjective si pour tout $b \in B$, il existe $a \in A$ tel que $f(a) = b$. Voici d'abord un exemple de solution que nous considérons adéquate :

Solution : Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$, deux fonctions surjectives. Considérons $g \circ f$. Soit $c_0 \in C$ un élément générique, quelconque mais fixé. Puisque g est surjective, $\exists\ b_0 \in B$ tel que $g(b_0) = c_0$. Mais f est aussi surjective, donc $\forall b \in B,\ \exists\ a \in A$ tel que $f(a) = b$ et en particulier pour $b_0 \in B$, $\exists a_0 \in A$ tel que $f(a_0) = b_0$. Ainsi, $g \circ f(a_0) = g(f(a_0)) = g(b_0) = c_0$, et $g \circ f$ est surjective.

Les difficultés de la démonstration d'un tel énoncé ont été étudiées dans Epp (2009) et sont principalement liées à l'instanciation existentielle (*Q4*). L'auteure propose tout d'abord une démonstration typique d'étudiants, à laquelle il est possible de s'attendre dans la présente recherche :

> « If f is any surjective function from X to Y and g is any surjective function from Y to Z, then the composition $g \circ f$ is surjective.
>
> [...] Proof: By definition of surjective, given any y in Y, there is an x in X with $f(x) = y$. Also by definition of surjective, given any z in Z, there is a y in Y with $g(y) = z$. So $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ ». (Op. cit., p. 3)

Notons d'abord que la seule différence entre la formulation de l'énoncé à démontrer proposée dans le texte de Epp et celle qui a été choisie pour la présente expérimentation est que les fonctions et les ensembles d'arrivée et de départ ont déjà été nommés dans l'article de Epp. Ce n'est en effet pas le cas dans ce qui sera proposé aux étudiants participant à la présente recherche. J'y reviendrai.

La démonstration fournie dans le texte de Epp est, en quelque sorte, « à l'envers ». En effet, la seule manière de démontrer l'énoncé de départ (« Si f est une fonction surjective de X vers Y et g une fonction de Y vers Z, alors la composition $g \circ f$ est surjective », ma traduction), est de commencer par instancier existentiellement un élément générique de Z (« soit un élément générique $z \in Z$, $\exists y \in Y$ tel que $g(y) = z$ »), puis ensuite de le relier à un élément de X qui a pour image cet élément de Z (« sachant que $\forall y' \in Y$, $\exists x \in X$ tel que $f(x) = y'$, en particulier pour y, il existe un x' tel que $f(x') = y$; ainsi $g(f(x')) = g(y) = z$ »), par la composée. Il est important de noter qu'il n'est pas suffisant de faire la démonstration « à l'endroit » pour qu'elle soit bonne, d'autres erreurs peuvent en effet surgir par rapport à l'instanciation existentielle et à la dépendance des variables.

Plus précisément, le problème relevé par Epp dans la démonstration qu'elle exhibe dans son article est que le y, instancié dans la première phrase (« given any y in Y, there is an x in X with $f(x) = y$ »), est un élément générique de Y, c'est-à-dire qu'il peut représenter n'importe quel élément de l'ensemble. Cependant, la deuxième phrase (« given any z in Z, there is a y in Y with $g(y) = z$ ») met en évidence un y qui, lui, dépend du z instancié juste avant, et qui n'est donc pas générique, qui est particulier. Ce n'est donc pas nécessairement le même objet. Il s'agit donc d'un problème dans la compréhension de l'instanciation existentielle et de la dépendance des variables qui pousse un élève à produire ce genre de démonstration. Ces deux aspects seront traités dans les prochains paragraphes. On peut s'attendre, dans la présente recherche, à obtenir des réponses similaires à celle proposée par Epp comme réponse fautive typique des étudiants à ce type de question.

A propos de l'instanciation existentielle (*Q4*) : si l'on sait qu'un objet (mathématique) existe, alors on peut lui donner un nom ou le désigner par un symbole, à condition que ce nom ou ce symbole ne soit pas déjà attribué à un autre objet dans le même « environnement ». Il est important de préciser que l'erreur en tant que telle ne se situe pas lors des deux instanciations des deux objets nommés y. En effet, ces deux instanciations sont indépendantes en ce sens que le domaine des quantificateurs qui leur sont associés, leur « environnement », se limite à la phrase elle-même. Ainsi, ces deux y peuvent « exister » de la manière dont ils ont été proposés dans la démonstration car les deux phrases sont distinctes. Le problème se situe lorsque l'auteur fictif de la démonstration les considère comme le même objet plus tard dans la démonstration.

En ce qui concerne la dépendance entre des variables (*Q4*) dans le cas des expressions du type « $\forall z\ \exists y$ ... », il est facile de perdre de vue que l'existence de ce y dépend directement du z choisi. En effet, « $\forall z\ \exists y$ » ne signifie pas que pour tous les z, il existe un et un seul y, qui fonctionne pour chacun d'eux mais bien qu'à chacun des z pris séparément, on peut associer un y qui lui convient, pas nécessairement toujours le même pour tous les z. La portée des quantificateurs est donc très importante ici (*Q4*, *Q5*, *Q6*). Finalement, pour des raisons similaires, un dernier élément crucial est le contrôle sur les quantificateurs existentiels et universels (*Q1*).

Dans les difficultés à anticiper, il y a le fait d'avoir à nommer deux fonctions génériques et leurs domaines, ce qui pourrait chez certains participants créer une difficulté supplémentaire. Cependant, il a été décidé de ne rien préciser en ce qui concerne la notation pour ne pas encourager une certaine technique de résolution ou une symbolisation précise. Par contre, à ce sujet, il est important de préciser que la solution proposée dans l'encadré ci-haut fait intervenir une fonction f qui a comme ensemble d'arrivée le même ensemble que l'ensemble de départ de la fonction g. Dans un contexte de composition, on a tendance à considérer qu'il va de soi que l'ensemble but de la première fonction est l'ensemble source de la deuxième fonction. Cependant, il se peut que les étudiants proposent quatre ensembles A, B, C et D distincts, et des fonctions telles $f : A \to B$ et $g : C \to D$. Dans ce cas-ci, il faut d'une part avoir $f(A) \subseteq C$ pour que la composition soit possible, mais aussi que $C \subseteq B$, sans quoi l'assertion initiale est fausse. En effet, considérons l'exemple suivant : f va de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^+$ et est donnée par $f(x)=x^2$, et g est l'identité de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Dans ce cas, les ensembles A, C et D correspondraient à $\mathbb{R}$ et l'ensemble B serait $\mathbb{R}^+$. Ainsi, $f(A) \subseteq C$ mais $C \nsubseteq B$. On constate que $g \circ f$ n'est pas surjective parce que les nombres négatifs n'ont pas de pré-image par $g \circ f$.

Également, il se peut que les étudiants ne se souviennent plus ou soient incertains face aux idées de fonctions surjectives ou fonctions composées. Dans le cas où un étudiant aurait ces difficultés, il aura beaucoup de difficulté à s'engager dans le problème. Le protocole prend cela en compte en proposant, en cas de besoin, de rappeler aux étudiants les définitions de fonctions, de la surjectivité et de ce que ça signifie pour deux fonctions d'être composées. Également, il se pourrait qu'un étudiant souligne le fait que deux fonctions ne peuvent se composer que si l'image de la première fonction est incluse dans l'ensemble de départ de la deuxième ($f(A) \subseteq C$, dans l'exemple plus haut) et donc que toutes les fonctions ne peuvent pas se composer. L'étudiant a évidemment raison mais la question porte sur deux fonctions qui peuvent se composer. Le but est tout de même d'engager les étudiants dans un processus de démonstration et donc de les amener à considérer deux fonctions qui peuvent être composées. Cette éventualité sera prise en compte dans le protocole.

Sous-protocole

Il n'y a pas de temps d'appropriation alloué pour cette tâche. Après la deuxième question du protocole général concernant la validité de l'énoncé à démontrer, les questions que le chercheur peut utiliser sont celles-ci :

- Que signifie pour deux fonctions que d'être composées ?
- Que signifie pour une fonction « être surjective » ?

Si jamais les étudiants ne se souviennent pas de la définition d'un fonction, de la surjectivité ou de la composition de fonctions, le chercheur pourra rappeler la définition à voix haute, encore une fois pour ne pas imposer de symbolisme :

- Une fonction est une relation qui à chaque élément de l'ensemble de départ associe au plus un élément de l'ensemble d'arrivée.
- Une fonction f est surjective si tout élément de l'ensemble d'arrivée est l'image par f d'au moins un élément de l'ensemble de départ.
- Deux fonctions sont composées si elles sont appliquées successivement.

Évidemment, cette partie du protocole est une précaution, en ce sens qu'il s'agit d'éléments de savoir qui devraient être maîtrisés par les étudiants du niveau de ceux qui répondront aux questions.

Dans le cas où un étudiant souligne que l'énoncé ne peut être démontré sans certaines conditions sur les domaines et images des fonctions, le chercheur lui demandera quelles sont ces conditions. Il précisera ensuite que l'étudiant peut supposer qu'elles sont respectées dans le cadre de l'entrevue, pour mener à terme la démonstration. D'un autre côté, si jamais un étudiant considère deux fonctions avec des domaines et images tous différents sans préciser les conditions nécessaires ($f(A) \subseteq C$ et $C \subseteq B$, selon les ensembles de l'exemple présenté ci-haut), le chercheur n'en fera pas la remarque et laissera l'étudiant continuer dans la résolution. Finalement, si l'étudiant tient pour acquis que l'ensemble d'arrivée de la première fonction est le même que l'ensemble de départ de la deuxième fonction et n'aborde pas la possibilité qu'il en soit autrement, aucune remarque ne sera faite, la tâche étant axée sur la production de la démonstration.

Si les étudiants sont bloqués à n'importe quel moment dans leur résolution, le chercheur peut poser les questions suivantes :

- Pourriez-vous me représenter l'énoncé par un dessin ?

3.6.2.3 Tâche #3 : Les chiens et les robots

Voici une question proposée à un étudiant universitaire :

À l'aide des axiomes suivants :

- *AX1*: Pour tout robot *L* et tout robot *J* distinct de *L*, il existe un seul chien *W* qui est ami avec *L* et avec *J*.

- *AX2* : Pour tout chien *W*, il existe au moins deux robots distincts qui sont amis avec *W*.

- *AX3* : Il existe trois robots distincts tel qu'aucun chien n'est ami avec ces trois robots simultanément.

Montrer que pour tout robot, il existe au moins un chien qui n'est pas son ami.

Voici ce qu'il a répondu :

Prenons un robot générique *R*.

Prenons *L1*, *L2* et *L3* les trois robots distincts tel qu'aucun chien n'est ami avec ces trois robots simultanément (*AX3*)

Si *R* est le même robot que *Li*, pour $i = 1$ ou 2 ou 3, le chien est facile à trouver : on considère l'unique chien ami des deux autres robots et dont l'existence est assurée par *AX1*. Ce chien ne peut être ami avec *Li* sans quoi on contredit *AX3*.

On peut donc supposer que *R* est différent de *L1*, *L2* et *L3*.

Complétez la démonstration.

Cette tâche est la seule qui appartient à la troisième catégorie (section 3.6.2) et une amorce valable de réponse est offerte dans l'encadré. La question (de même que les réponses possibles) est inspirée de l'axiomatisation de Hilbert, telle que proposée par Arsac (1996). Afin d'atteindre l'objectif de cette catégorie, qui est d'examiner, autant que cela est possible, les manières de faire une démonstration lorsqu'un étudiant n'a aucune connaissance contextualisée sur laquelle s'appuyer, les trois premiers axiomes de Hilbert ont été modifiés en changeant les termes *point*, *droite* et *être incident à* par *robot*, *chien* et *être ami avec*. J'ai tout d'abord choisi de remplacer *être incident à* par *être ami avec*, car il fallait trouver une relation qui soit mutuelle (ou plus mathématiquement *symétrique*), c'est-à-dire partagée par les deux éléments impliqués dans la relation. Par exemple, *A* est incident à *B* signifie que *B* est aussi incident à A. De même, si A est ami avec B, B sera également ami avec A. Ce détail pourra être précisé auprès des étudiants si le besoin s'en fait ressentir. Par la suite, j'ai remplacé les termes *point* et *droite* par des termes qui ne sont généralement pas liés aux mathématiques mais qui, dans le contexte d'amitié créé, portaient un certain sens : un *chien* ami avec un *robot.*

L'axiomatisation de Hilbert n'est pas un sujet étudié fréquemment ou encore en profondeur chez les étudiants qui participeront aux entrevues. Ceux-ci ne devraient donc pas reconnaître les axiomes cachés. Ainsi, la transformation de l'axiomatisation de Hilbert en une relation d'amitié entre des chiens et des robots porte à croire que cette tâche sera, autant que possible, exempte de connaissances contextualisées. La démonstration complète a été jugée trop longue et comportant trop d'éléments à mettre en place (le robot générique R, les trois robots distincts $L1$, $L2$ et $L3$ ainsi que les deux cas où R est ou non le même robot qu'un de ceux déjà exhibés). C'est donc pour cela qu'il a été décidé de fournir une première partie de la démonstration aux participants (voir l'énoncé de la tâche), qui auront par la suite à la terminer (voir prochain encadré). C'est aussi une façon de les engager dans la tâche, de débloquer la première impression spontanée, qui en est une d'étourdissement devant la difficulté de donner du sens au texte. Cependant, il est clair que le fait de demander aux étudiants de compléter une démonstration n'est pas le même travail que de leur demander de produire une démonstration du début. En effet, en leur proposant un symbolisme et une approche, les étudiants continueront très probablement dans le chemin qui leur est proposé malgré que d'autres approches soient possibles et que les étudiants puissent, s'ils le souhaitent, changer d'approche. Par contre, il a été décidé que ce qui est étudié, c'est-à-dire le type de connaissances utilisées dans un contexte exempt le plus possible de connaissances contextualisées, ne serait pas entravé outre mesure par ce choix. Il semble aussi important de préciser que le fait de demander aux participants de travailler sur un contexte complètement inconnu qui ne se rattache ni au monde des mathématiques ni à aucun autre référentiel connu, crée probablement une difficulté supplémentaire en comparaison à un contexte qui serait inconnu mais tout de même dans le champ des mathématiques.

Solution : *AX1* nous assure de l'existence d'un chien *W1* ami avec *L2* et *L3*, d'un chien *W2* ami avec *L1* et *L3* et d'un chien *W3* ami avec *L1* et *L2*. Ces trois chiens sont distincts sans quoi on contredirait *AX3*.

On cherche à trouver un chien qui n'est pas ami avec *R*. Montrons que *R* ne peut être amis avec les trois chiens *W1*, *W2* et *W3* et donc, qu'il en existe au moins un qui n'est pas son ami.

Si deux chiens parmi *W1*, *W2* et *W3* étaient amis avec *R*, alors on aurait deux chiens distincts amis avec *R* et avec un autre des trois robots *L1*, *L2* et *L3* : Par exemple si *W1* et *W2* sont amis avec *R*, *W1* et *W2* sont deux chiens distincts amis avec *R* et *L3*, ce qui contredit « l'unicité » dans *AX1* pour le couple *R* et *L3*. Le même raisonnement s'applique si *W2* et *W3* sont amis avec *R*, ou si *W1* et *W3* sont amis avec *R*. Donc il y a bien au moins deux chiens parmi *W1*, *W2* et *W3* qui ne sont pas amis avec *R* et donc on a trouvé un chien qui n'est pas ami avec le robot générique *R*.

Les connaissances logiques sous-jacentes à cette tâche sont l'instanciation existentielle (*Q4*), afin de démarrer la résolution, ainsi que l'utilisation du *modus ponens* et du *modus tollens* (*Q2*) et par le fait même, de la contraposée (*Q5*). Évidemment, la résolution de cette tâche amènera probablement plusieurs solutions différentes de la part des étudiants, de sorte qu'il est difficile de statuer dans cette analyse *a priori* sur ce qu'ils utiliseront. Toutefois, en prenant en compte le type d'axiomes qui leur sont fournis, il semble que ce soit une bonne hypothèse de croire que le *modus ponens* et le *modus tollens* seront utilisés et ce, de manière plus explicite que dans un raisonnement sur des objets mathématiques connus. En effet, le *modus ponens* est une règle utilisée de manière presque inconsciente chez plusieurs individus tout en étant très présente en mathématique, de sorte qu'elle est rarement explicitée dans les démonstrations. Certains étudiants ressentiront peut-être le besoin de transformer les relations exhibées dans les axiomes en implications, par exemple de transformer « prenons *L1*, *L2* et *L3* les trois robots distincts tel qu'aucun chien n'est ami avec ces trois robots simultanément » en trois implications du type « si un chien est ami avec *L1* et *L2*, alors il n'est pas ami avec *L3* », ce qui augmenterait probablement l'occurrence des *modus ponens* et *modus tollens*.

Un autre élément crucial dans cette tâche est le contrôle sur les quantificateurs existentiels et universels (*Q1*). En effet, puisque les objets en jeu dans cette tâche n'ont pas de fondement mathématique associé, la bonne compréhension des quantificateurs est primordiale pour mener la démonstration car l'étudiant ne peut s'appuyer sur ses connaissances antérieures, outre celle sur les quantificateurs, pour opérer une inférence.

Il y a également une difficulté importante en lien avec la dépendance des variables en jeu dans la démonstration. En effet, en posant un robot générique *R* et trois robots distincts *L1*, *L2* et *L3* tel qu'aucun chien n'est ami avec les trois, il est nécessaire de comprendre que *R* peut être un de ces trois robots distincts car il est générique, c'est-à-dire qu'il peut être n'importe quel robot existant. Il y a également une difficulté liée à l'unicité assurée par *AX1*, c'est-à-dire l'unicité du chien ami avec n'importe quelle paire de robots distincts, car l'axiome et ce qu'il engendre se trouvent vraiment au cœur de la tâche et ce n'est donc pas à négliger. En effet, l'existence unique ($\exists!$) entremêlée avec *AX3* qui interdit qu'un chien soit ami simultanément avec *L1*, *L2* et *L3* est une combinaison assez ardue qu'il ne faut pas présumer comme étant simple et allant de soi.

Finalement, il semble important de souligner que la démonstration proposée en tant que solution ne fait pas intervenir le deuxième axiome *AX2*. L'éventualité que cet axiome serve dans une démonstration proposée par les participants n'est pas écartée malgré que son rôle est impossible à anticiper à cette étape. Pour l'instant, il semble par conséquent essentiel de considérer que l'ajout de cet axiome pourrait causer problème aux étudiants. En effet, il s'agit d'une information qui ne sera peut-être pas utilisée, ce qui peut déstabiliser un étudiant qui s'attend à utiliser toutes les informations fournies, selon les contrats usuels vis-à-vis les problèmes de démonstration proposés en classe. Cette éventualité sera considérée dans le protocole.

Il est aussi intéressant de constater que cette tâche demande de démontrer un énoncé universellement quantifié. L'universalité peut s'avérer plus difficile à démontrer que l'existentialité, de sorte que tenter cette tâche en faisant une preuve par contradiction peut s'avérer une idée efficace.

Sous-protocole

Le temps d'appropriation pour cette tâche est fixé à deux minutes. Il est plausible que les étudiants ne sauront pas trop par où commencer. Le chercheur pourrait les guider avec les questions suivantes :

- Qu'est-ce que l'on cherche à prouver exactement ? (*attente*) Qu'il existe un chien qui n'est pas ami avec notre robot générique *R*.
- Pourriez-vous exhiber des chiens amis avec les robots que l'on connaît (*L1*, *L2* et *L3*) ?

Si les étudiants sont bloqués à n'importe quel moment dans leur résolution, le chercheur peut poser les questions suivantes :

- Pourriez-vous me représenter les axiomes par un dessin ?
- Pourriez-vous me représenter l'énoncé à démontrer par un dessin ? Comme par exemple les liens entre les différents chiens et robots dictés par les axiomes ?

Si le temps le permet, passer à la tâche #4. Sinon, passer à la conclusion.

3.6.2.4 Tâche #4 : L'intersection des images

Un étudiant de niveau universitaire a fourni cette production. Faire un commentaire à son intention.

Proposition : Soit E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F. Quelles que soient les parties A et B de E, on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Démonstration : Montrons tout d'abord que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$: si $f(x) \in f(A \cap B)$, alors $x \in A \cap B$; comme $x \in A$, $f(x) \in f(A)$, de même comme $x \in B$, $f(x) \in f(B)$ et donc $f(x) \in f(A) \cap f(B)$.

Montrons maintenant que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$: si $f(x) \in f(A) \cap f(B)$, $f(x) \in f(A)$ donc $x \in A$; de même $f(x) \in f(B)$ donc $x \in B$; comme $x \in A$ et $x \in B$, $x \in A \cap B$ et donc $f(x) \in f(A \cap B)$.

Cette tâche, qui appartient à la deuxième catégorie de tâches (cf. section 3.6.2), est inspirée d'une affiche présentée à ICME 12 par Viviane Durand-Guerrier, Thomas Barrier, Faïza Chellougui et Rahim Kouki. La consigne originale n'était pas présente sur l'affiche. Pour ce qui est de la présente recherche, la consigne a été ajoutée dans le but de donner une indication aux étudiants sur ce qui est attendu d'eux, sans toutefois leur dire directement que l'enjeu de la tâche est la validité de la démonstration.

Dans le cadre de la recherche originale, les auteurs ont proposé plusieurs démonstrations de plusieurs énoncés à des enseignants de niveau universitaire afin de déterminer de quelle manière ils valident ou invalident une démonstration et quels types de commentaires ils feraient à son rédacteur. Les auteurs ont proposé la démonstration suivante, différente de celle qui sera proposée aux étudiants de la présente recherche, en lien avec le même l'énoncé :

<u>Démonstration</u> : Montrons tout d'abord que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$: si x est un élément de $f(A \cap B)$, alors il existe un $y \in A \cap B$ tel que $f(y) = x$; comme $y \in A$, $x \in f(A)$ et de même, comme $y \in B$, $x \in f(B)$. Donc, $x \in f(A) \cap f(B)$.

Montrons maintenant que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$: si x est un élément de $f(A) \cap f(B)$, $x \in f(A)$ donc il existe y dans A tel que $x = f(y)$; de même, $x \in f(B)$ donc il existe y dans B tel que $f(y) = x$; comme $y \in A$ et $y \in B$, $y \in A \cap B$ et donc, $x \in f(A \cap B)$.

Il s'agit d'une production d'étudiant et sur 33 réponses obtenues de la part d'enseignants de niveau universitaire, les auteurs ont relevé deux réponses considérées comme acceptables et 31 réponses problématiques. Ainsi, cette tâche, peut-être simple en apparence, semble tout compte fait assez complexe.

L'énoncé à démontrer a été choisi dans le cadre de cette étude pour la facilité avec laquelle on peut se construire des représentations visuelles et parce que cette tâche fait intervenir une erreur fréquente liée à l'instanciation existentielle (*Q4*), comme explicitée dans l'analyse de la tâche sur les fonctions surjectives (tâche 2, section 2.6.2.2). La raison pour laquelle la démonstration pour la présente recherche a été modifiée par rapport à celle des auteurs originaux est que l'erreur a été jugée un peu trop évidente. En effet, dans la démonstration originale, le y instancié provenant de « $x \in f(A)$, $\exists y \in A$ tel que $f(y) = x$ », et celui provenant de « $x \in f(B)$, $\exists y \in B$ tel que $f(y) = x$ », peuvent « exister » de la manière dont ils ont été proposés. Le problème surgit à la phrase suivante : « comme $y \in A$ et $y \in B$, $y \in (A \cap B)$ et donc, $x \in f(A \cap B)$ ». En effet, cette inférence n'est pas valide dû à la portée des quantificateurs et la dépendance des variables (*Q4*, *Q5*, *Q6*). Autrement dit, il ne s'agit pas nécessairement « du même y », il pourrait y avoir deux valeurs distinctes à considérer mais elles sont pourtant traitées comme s'il s'agissait du même objet. De fait, l'inclusion $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ est fausse en général, il suffit par exemple de considérer deux ensembles A et B d'intersection vide et qui ont la même image par f. Somme toute, l'erreur semblait un peu évidente pour des étudiants du niveau sollicité dans la présente recherche. En effet, il nous a semblé que ces deux « y » identiques sautaient aux yeux.

Il a donc été décidé, dans le but de mieux « cacher » l'erreur, de modifier la rédaction de la démonstration proposée en s'inspirant d'une erreur trouvée dans une production d'étudiant, recueillie dans le cadre d'un cours indépendant de la présente étude. La modification qui a été à la source de la nouvelle démonstration change la forme de l'erreur mais reste liée à un problème de l'ordre de l'instanciation existentielle. L'erreur est la suivante : l'élément faisant partie de l'intersection des images ou bien de l'image de l'intersection est appelé $f(x)$. Cette appellation enlève la généricité de l'élément en lui attribuant un nom qui se rapporte directement à l'élément x. En effet, un élément de l'ensemble image peut se rapporter à plusieurs éléments de l'ensemble de départ. Par exemple, dans la première inclusion, l'inférence « $f(x) \in f(A \cap B)$ donc $x \in A \cap B$ » n'est pas valide car $f(x)$ peut avoir plus d'un antécédent et donc x peut se trouver à l'extérieur de $A \cap B$, malgré qu'il y ait au moins un antécédent dans l'intersection. Cette inférence est invalide, malgré que l'inclusion soit, elle, valide. L'erreur, selon moi, est mieux camouflée, spécialement dans l'argument visant la deuxième inclusion, qui est fausse. En effet, en disant « $f(x) \in f(A)$ donc $x \in A$ et $f(x) \in f(B)$ donc $x \in B$ », ce n'est pas clair que $f(x)$ est une valeur image qui pourrait provenir de deux antécédents distincts, de deux « x » distincts. Le lien entre $f(x)$ et x est visuellement (et psychologiquement) plus fort, de sorte que l'inférence « $f(x) \in f(A)$ donc $x \in A$ » semble aller de soi, malgré que ce ne soit pas le cas. En effet, le x pourrait être dans $E \backslash A$ et l'antécédent de

$f(x)$ dans A pourrait être un élément distinct de x, par exemple. De plus, en supposant que l'antécédent de $f(x)$ dans A soit bel et bien x, l'antécédent de $f(x)$ dans B n'a pas à être le même que dans A. Donc, le problème avec cette nouvelle démonstration provient à la fois de l'instanciation existentielle et du fait qu'une même image peut avoir plusieurs antécédents différents, car la fonction f n'est pas nécessairement injective.

Soulignons aussi que la capacité à « déballer la logique » des énoncés (*Q1, Q6*) est requise, car cette tâche appartient à la deuxième catégorie (section 3.6.2). Encore une fois, selon Selden et Selden (1995), les étudiants qui ont de faibles capacités à déballer une structure logique auront de grandes difficultés à valider ou invalider une démonstration.

En ce qui concerne les réponses anticipées, les étudiants pourraient proposer de « contourner » le problème, sans toutefois expliquer en quoi consiste l'erreur. Par exemple, une manière de contourner l'erreur serait de dire que si $f(x) \in f(A) \cap f(B)$, alors il existe $x' \in A$ et $x'' \in B$, ce qui empêcherait de conclure que x est dans A et dans B, tel que la démonstration le propose, car il y aurait désormais explicitement deux objets différents. Cette notation permet d'éviter les erreurs et d'imager la dépendance des variables. En effet, l'élément x, image de $f(x)$ pris dans A n'est pas (nécessairement) le même que l'élément pris dans B, et l'ajout des « ' » montre bien que c'est le cas, contrairement à ce qui est fait dans la démonstration proposée. Il s'agit ici d'une précaution, une manière de s'assurer de ne pas faire d'erreur. Cette suggestion a été faite par la plupart des enseignants qui ont répondu au questionnaire discuté dans l'affiche originale (Durand-Guerrier, Barrier, Chellougui, et Kouki, 2012). Ainsi, il semble plausible d'anticiper ce genre de réponse de la part des étudiants. Toutefois, cette suggestion démontre une connaissance opératoire reliée à l'instanciation existentielle et non la connaissance prédicative qui prend en compte la logique sous-jacente à l'erreur. On ne pourra donc pas conclure directement à la suite de cette suggestion qu'un individu comprend parfaitement l'instanciation existentielle. Le protocole propose une question supplémentaire pour cette éventualité.

Il est important de souligner que la proposition « *Soit E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F. Quelles que soient les parties A et B de E, on a* $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ » ne peut être démontrée correctement. En effet, elle est fausse. Plus précisément, la première inclusion $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ est vraie, comme le montre la première partie de la démonstration proposée dans l'affiche, mais l'inclusion $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ n'est pas toujours vraie. Par exemple, dans le cas où A et B sont d'intersection vide mais ont des éléments de même image par f. Prenons comme exemple la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, où $f(x) = 2$ pour toute valeur de x. Ainsi, pour n'importe quels sous-ensembles disjoints A et B de $\mathbb{R}$, $f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing$ et $f(A) \cap f(B) = 2$. Comme $\varnothing \subset 2$ et $2 \not\subset \varnothing$, on a donc $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et $f(A) \cap f(B) \not\subset f(A \cap B)$. En fait, l'inclusion $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ est vraie quels que soient les sous-ensembles A et B si et seulement si la fonction f est injective. Cela signifie donc que cette propriété pourrait être prise comme caractéristique d'une fonction injective. Ainsi, il est possible que les étudiants fournissent un contre-exemple, ce qui invaliderait par le fait même la démonstration. Le sous-protocole prend en considération cette éventualité afin de questionner un étudiant qui propose un contre-exemple à la proposition sans trouver ce qui ne fonctionne pas dans ce qui est proposé.

Cependant, tel que mentionné plus haut, la proposition est vraie si la fonction est injective. Il est donc également possible qu'un étudiant veuille démontrer cette proposition dans le cas injectif, à la place de trouver un contre-exemple. Toutefois, il ne faudrait pas perdre de vue que le but de la tâche est de statuer sur la validité ou l'invalidité de la démonstration. Ainsi, peu importe où les étudiants dirigent leurs pensées, le chercheur devra les relancer sur la démonstration proposée, afin d'obtenir une réponse sous la forme d'un commentaire à l'auteur de celle-ci.

Il semble intéressant de discuter de cette quatrième tâche en lien avec celle sur les fonctions surjectives. En effet, cette démonstration met en évidence une erreur qui selon Epp serait fréquente dans la réalisation de la deuxième tâche (section 3.6.2.2) : l'instanciation existentielle. Ainsi, il semble pertinent de placer la tâche sur l'intersection des images après celle sur les fonctions surjectives, pour ne pas influencer la réponse des étudiants dans cette dernière. On peut envisager que certains étudiants qui commettent l'erreur de l'instanciation existentielle à la tâche 2 se rendent compte de leur erreur en faisant la tâche 4.

Sous-protocole

Le temps d'appropriation pour cette tâche est fixé à 60 secondes. Dans les cas où les étudiants n'offrent pas de réponse, s'ils offrent une réponse erronée ou encore une explication mathématiquement insatisfaisante aux yeux du chercheur, celui-ci sera amené à poser les questions suivantes :

- Pourriez-vous me représenter par un dessin l'énoncé et/ou sa démonstration ?
- Que représente x et $f(x)$?

Dans le cas où les étudiants fourniraient un contre-exemple à la proposition ou encore la démonstration de la proposition avec la condition supplémentaire de l'injectivité de la fonction, le chercheur peut utiliser les questions suivantes :

- Quel impact a le contre-exemple/la nouvelle proposition sur ce que l'étudiant a fourni ?
- Pourriez-vous me dire ce qui ne va pas dans la démonstration de l'étudiant ?

Dans le cas où un étudiant proposerait que l'énoncé est vrai dans le cas de fonctions injectives après avoir expliqué pourquoi la démonstration est erronée, le chercheur pourra confirmer sa proposition à l'étudiant et passer à la conclusion de l'entrevue.

Dans le cas où un étudiant changerait de symbole pour un des deux x, par exemple en nommant x' et x'' les deux antécédents, afin de vérifier s'il a la connaissance prédicative reliée à l'instanciation existentielle, le chercheur posera la question suivante :

- Pouvez-vous identifier plus précisément la règle logique qui n'a pas été respectée ?

3.7 Questions proposées dans le test diagnostique

Dans ce test, on retrouvera des questions routinières et non routinières faisant intervenir directement les notions de logique classique présentes dans les tâches demandées en entrevue. Ces questions feront intervenir les connaissances prédicatives reliées aux concepts, et non la connaissance opératoire. En effet, aucune démonstration ne devra être complétée dans le test diagnostique. Le but est d'évaluer seulement les connaissances prédicatives en logique, en mettant à l'écart le plus possible les connaissances contextualisées, relatives à la population donnée, ces connaissances contextualisées qui permettent une « économie de logique » selon Durand-Guerrier et Arsac (2003). Notons tout de même qu'il peut exister des connaissances contextualisées en lien avec la branche des mathématiques qu'est la logique formelle, si un étudiant a suivi un cours qui l'a exposé à plusieurs tâches similaires. Cependant, les tâches non routinières qui seront également présentes dans le test diagnostique permettront de séparer les deux types de connaissances. Toujours selon Durand-Guerrier et Arsac (2003), ce sont ces tâches non familières qui font ressortir les limites des connaissances contextualisées, s'il y a lieu. Les consignes qui seront données pour la passation du test sont :

- Répondez au stylo à encre (ne pas effacer, toutes les traces doivent être lisibles).
- Le temps alloué est de 60 minutes.
- Aucun document de référence n'est permis.
- Si vous ne connaissez pas la réponse à une question, inscrivez « je ne sais pas ».

La première consigne a pour but de conserver le plus de traces de raisonnement possible. Je n'autorise pas la consultation de documents parce que ce sont les savoirs prédicatifs disponibles *a priori* chez les étudiants qui m'intéressent dans ce test. Par contre, il est nécessaire de préciser que les étudiants ont accès à de la documentation entre le test diagnostique et la passation de l'entrevue. En effet, tel que précisé précédemment, entre deux et trois semaines s'écouleront entre le test diagnostique et les entrevues. La quatrième consigne vise à faire la différence entre l'absence d'une réponse due à un manque de temps et celle due au fait que l'étudiant ne connaît pas la réponse.

3.7.1 Question 1

Traduire les énoncés suivants en utilisant les symboles de la logique...

(a) en utilisant le quantificateur universel,
(b) en utilisant le quantificateur existentiel.

1. Tous les oiseaux peuvent voler.
2. Certains nombres ne sont pas rationnels.

Cette question provient du livre *Logic for Mathematicians* de Hamilton (1988, pp. 47-48). Elle vise tout d'abord à vérifier les connaissances des étudiants en ce qui concerne les quantifications universelle et existentielle, autant au niveau de la maîtrise des concepts que de la capacité à les manipuler. On peut donc voir un lien plus ou moins direct avec ce qui est demandé dans les trois premières tâches (cf. section 3.6.2).

Solution. D'autres solutions sont possibles.
1. Considérons $O(x)$ vrai si x est un oiseau et $V(x)$ vrai si x peut voler.
(a) $(\forall x)(O(x) \Rightarrow V(x))$
(b) $\neg((\exists x)(O(x) \wedge \neg V(x)))$

Note : Il n'y a pas de précision sur la nature de l'objet x. Dans le cas ici, l'implication tient *pour tout objet x dans l'univers*. En effet, si x n'est pas un oiseau, le fait que x vole ou ne vole pas n'est pas pertinent dans le contexte.

2. Considérons $N(x)$ vrai si x est un nombre et $R(x)$ vrai si x est rationnel.
(a) $\neg((\forall x)(N(x) \Rightarrow R(x)))$
(b) $(\exists x)(N(x) \wedge \neg R(x))$

Plus précisément, un des enjeux potentiels de cette question est lié à la compréhension du fait que la quantification universelle $(\forall x)$ s'applique à toutes les instances concernées, de sorte que son équivalent existentiel doit être sous forme négative $(\neg\exists x)$. Également, il faut bien comprendre que le mot « certains » signifie quelques-uns, mais pas nécessairement tous, et que la quantification existentielle signifie « au moins un » et non « exactement un ». Il s'agit de connaissances qui peuvent aider à invalider la négation de la première tâche sur la preuve par contradiction, où l'étudiant fictif propose un énoncé universel comme négation d'un énoncé universel. Par contre, il est important de savoir que la négation d'un énoncé universel est un énoncé existentiel.

À ce sujet, cette question fait également intervenir la négation d'énoncés, puisque pour symboliser un énoncé universel du langage courant dans le langage symbolique utilisant une quantification existentielle, il faut être capable de faire correctement une négation. Par exemple, $(\forall x)(O(x) \Rightarrow V(x))$ devient $\neg(\exists x)(O(x) \wedge \neg V(x))$ sous la forme existentielle, de sorte que savoir comment faire la négation d'une implication $(\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B))$ devient crucial. Ici, les énoncés sont très simples, comportant un seul connecteur logique chacun. On voit donc un lien direct avec la tâche de la preuve par contradiction (tâche 1, section 3.6.2.1), car son analyse *a priori* montre que l'erreur principale dans la démonstration proposée est que son auteur donne un énoncé universel comme négation d'un autre énoncé universel.

De plus, cette question met à l'épreuve la capacité de formalisation des étudiants. En effet, on peut considérer cette question comme un cas très simple où l'on doit « déballer la logique ». La version plus complexe et moins routinière est la question 6 de ce même test. Enfin, il y a un lien direct avec les deux tâches de la seconde catégorie (tâche 2 et 4, sections 3.6.2.2 et 3.6.2.4), demandant de valider une démonstration, soit la preuve par contradiction et l'intersection des images.

En elle-même, la question comporte ses difficultés. Les étudiants devront introduire les lettres des prédicats, ce qui peut être difficile pour certains étudiants moins familiers avec l'opération. Cette étape peut être plus facile pour des étudiants ayant suivi un cours de logique, car c'est le genre d'exercice qui a pu être demandé dans le cadre d'un tel cours. On peut donc s'attendre à obtenir des réponses selon une multitude de symbolisations différentes. Par exemple on peut s'attendre, pour « Tous les oiseaux peuvent voler », à $\forall o \in O$, $o \in V$, où O est l'ensemble des oiseaux et V est l'ensemble des choses qui volent. L'enjeu de cette question est la logique, de sorte que même si la symbolisation utilisée ne cadre pas parfaitement dans le calcul des prédicats, la logique sous-jacente sera le point focal lorsqu'il sera temps d'évaluer les réponses.

3.7.2 Question 2

En utilisant un langage symbolique, donner un exemple de ce qu'est un...
(a) Modus Ponens,
(b) Modus Tollens.

Cette question fait appel à des connaissances purement théoriques, prédicatives. Il s'agit de règles de déduction utilisées fréquemment dans les démonstrations mathématiques, sans toutefois qu'il soit nécessaire de connaître les termes et la formalisation de ces règles pour les utiliser correctement. En effet, la connaissance opératoire peut être confortablement installée sans que la connaissance prédicative soit présente. Il s'agit, du moins pour le *modus ponens*, d'une notion très intuitive que plusieurs utilisent sans même s'en rendre compte. Ainsi cette question, combinée avec les tâches demandées, aidera à déterminer s'il peut exister chez certains étudiants des *modus-ponens*-en-acte ou des *modus-tollens*-en-acte.

Solution :
(a) $A \Rightarrow B$. Or A. Donc B.
(b) $A \Rightarrow B$. Or $\neg B$. Donc $\neg A$.

On peut s'attendre à plus de réponses justes pour le *modus ponens* que pour le *modus tollens*, car ce dernier est moins intuitif et moins connu car moins souvent évoqué par les enseignants de mathématiques. Également, le *modus tollens* fait implicitement intervenir la notion de contraposée (pour $A \Rightarrow B$, la contraposée est $\neg B \Rightarrow \neg A$), de sorte qu'on peut s'attendre à une réponse utilisant directement la contraposée : « $\neg B \Rightarrow \neg A$, or $\neg B$, donc $\neg A$ ». Cette règle de déduction est valide mais il s'agit d'un *modus ponens* sur la contraposée de $A \Rightarrow B$.

Ces deux règles de déduction pourront certainement intervenir dans la résolution des tâches à différents niveaux d'explicitation, tout dépendant du chemin choisi par chaque étudiant. Toutefois, l'utilisation de ces deux règles ne sera probablement pas un enjeu dans les tâches sur la preuve par contradiction, sur les fonctions surjectives et sur l'intersection des images (respectivement les tâches 1, 2 et 4, sections 3.6.2.1, 3.6.2.2 et 3.6.2.4). Cependant, je fais l'hypothèse qu'il s'agira d'un enjeu dans la tâche des chiens et des robots (tâche 3), tel qu'il a été mentionné dans l'analyse *a priori*, en particulier parce que celle-ci demandera probablement aux étudiants d'expliciter plus en profondeur leur raisonnement. En effet, ils raisonnent sur des axiomes et des objets qu'ils n'ont jamais rencontrés auparavant et qu'ils ne peuvent pas vraiment associer à d'autres connaissances, en lien avec d'autres objets mathématiques.

3.7.3 Question 3

Décrire les étapes d'une preuve par contradiction.

Cette question fait appel à la connaissance prédicative reliée à la preuve par contradiction. On pourra s'attendre à des réponses formulées en langage courant, sans trop de considérations logiques formalisées. En effet, il s'agit d'un type de démonstrations fréquemment utilisé par les étudiants mais les considérations logiques sous-jacentes leur sont peut-être inconnues. Le cas échéant, il s'agirait pour eux d'une connaissance opératoire. Cette question concerne évidemment la tâche sur la preuve par contradiction (tâche 1, section 3.6.2.1), dans laquelle une démonstration par contradiction erronée est proposée.

Solution : Il y a plusieurs possibilités.
Pour montrer que A est vrai, on suppose que $\neg A$ est vrai et on montre que $\neg A \Rightarrow B$ est vrai, mais que B est faux (la contradiction est alors $B \wedge \neg B$). Par *Modus Tollens*, on conclut que $\neg A$ est faux et donc que A est vrai.

On s'attend à voir plusieurs réponses différentes de la part des étudiants, dont la preuve par contraposition qui peut sembler similaire de prime abord. C'est effectivement dans le fonctionnement logique qu'elle diffère. Une démonstration par l'absurde mène à une contradiction ($B \wedge \neg B$) tandis qu'une démonstration par contraposée conduit à démontrer que la négation du conséquent implique nécessairement la négation de la prémisse (pour montrer $A \Rightarrow B$, on montre que $\neg B \Rightarrow \neg A$).

3.7.4 Question 4

Cette inférence est-elle valide ? Pourquoi ?
$[\forall x\, \exists y\, P(x,y) \wedge \forall x\, \exists y\, Q(x,y)] \Rightarrow [\forall x\, \exists y\, (P(x,y) \wedge Q(x,y))]$

Tout d'abord, l'inférence présentée dans la question est invalide. Prenons, en guise de contre-exemple, pour x et y dans les réels, la relation $P(x, y)$ correspondant à $x < y$ et la relation $Q(x, y)$ correspondant à $x > y$. Donc, l'inférence proposée dans la question 4 devient :

$$[(\forall x\, \exists y, x < y) \wedge (\forall x\, \exists y, x > y)] \Rightarrow [\forall x\, \exists y\, (x < y \wedge x > y)]$$

Cette implication est fausse. En effet, supposer que $x < y$ et $x > y$ sont vrais revient à supposer que $y < x < y$. Cependant, c'est faux, alors que dans l'implication ci-dessus, l'antécédent, lui, est clairement toujours vrai. Ainsi, ce contre-exemple invalide l'inférence proposée dans la question 4 du test diagnostique. Notons encore une fois que l'erreur n'est pas dans le fait d'avoir nommé deux objets avec le même nom, y dans l'exemple plus haut, mais bien d'avoir voulu faire une inférence avec ces objets instanciés par le même nom en dehors de la portée de leur quantificateur d'origine ($\forall x$). C'est à ce moment-là que celui qui commet l'erreur présume que les objets seraient les mêmes alors que ce n'est pas nécessairement le cas. Il y a donc aussi l'idée de la dépendance des variables qui intervient ici, c'est-à-dire que dans l'expression $\forall x\, \exists y$, le y dépend du x.

Cette question a pour seul et unique but de vérifier la compréhension par les étudiants de l'instanciation existentielle. Il s'agit d'une opération utilisée très fréquemment dans les démonstrations en mathématiques et comme les analyses *a priori* des tâches de la section précédente ont montré, il s'avère aussi un concept très présent dans les tâches sélectionnées.

L'inférence présentée dans la question est invalide. Certes, il existe des cas où l'antécédent et le conséquent sont vrais, mais il y a aussi des cas où l'antécédent est vrai et où le conséquent est faux, ce qui rend l'inférence invalide. Puisqu'il n'est pas permis de faire une instanciation existentielle en nommant l'objet avec le même nom qu'un objet déjà instancié, il n'est pas valide de faire une implication faisant intervenir ces deux objets en leur donnant le même nom.

Ces idées sont d'ailleurs l'enjeu principal de la quatrième tâche (section 3.6.2.4). En effet, l'erreur dans la démonstration de cette tâche est précisément la présence de cette inférence invalide. Il sera donc possible de voir avec cette question si les étudiants sont capables de trouver le problème dans cette inférence écrite formellement, c'est-à-dire s'ils ont la connaissance prédicative. S'ils ne peuvent répondre à cette question mais repèrent qu'il y a une erreur dans la tâche 4, alors ils auront la connaissance opératoire.

Il s'agit aussi d'un éventuel enjeu dans la deuxième tâche. En effet, cette inférence invalide est présente dans l'exemple de démonstration typique d'étudiants donné par Epp (2009). Une réponse similaire peut donc être attendue de la part des étudiants. Une réflexion similaire à celle de la quatrième tâche sur les connaissances prédicatives et opératoires s'applique également ici.

Finalement, l'instanciation existentielle en tant que telle devrait être utilisée dans la tâche des chiens et des robots, sans toutefois qu'il s'agisse d'un enjeu ou d'une source d'erreurs importante.

Puisqu'il n'y a pas de contexte mathématique explicite autre que celui de la logique propositionnelle dans la question 4, on peut s'attendre à ce que les étudiants ne proposent pas l'idée que ce n'est peut-être pas « le même y » (les deux y quantifiés existentiellement dans l'antécédent de l'implication ne sont pas nécessairement une même valeur et donc, on ne peut rassembler ces deux y peut-être différents en un seul y quantifié existentiellement dans le conséquent de l'implication), argument qui peut plus facilement ressortir dans un contexte. Il sera peut-être difficile pour les étudiants qui ne sont pas familiers avec une écriture formelle de voir ce qui ne fonctionne pas, de sorte qu'il est plausible qu'un étudiant affirme que cette inférence est valide et qu'il invalide tout de même la démonstration de la quatrième tâche, sous le prétexte que deux objets *a priori* distincts sont désignés par la même lettre y. Il s'agit ici encore une fois de la connaissance opératoire versus la connaissance prédicative.

3.7.5 Question 5

Considérons les énoncés suivants du calcul des prédicats : (1) $\forall x\,(D \Rightarrow \neg H)$ (2) $\forall f \exists a\,[(\forall u(F(u,a) \Rightarrow G(f,u,a)) \Rightarrow H(f,a)]$ (a) Quelle est la contraposée de … ? (1) (2) (b) Quelle est la réciproque de… ? (1) (2) (c) Quelle est la négation de … ? (1) (2)

Cette question demande de connaître ce que sont la contraposée, la réciproque et la négation de deux propositions. Cette connaissance est vérifiée grâce à un énoncé très simple (1) et un autre beaucoup plus complexe (2).

Solution : (a) (1) $\forall x\,(H \Rightarrow \neg D)$ (2) $\forall f \exists a\,[\neg H(f, a) \Rightarrow (\exists u\,(F(u, a) \wedge G(f, u, a)))]$ (b) (1) $\forall x\,(\neg H \Rightarrow D)$ (2) $\forall f \exists a\,[H(f, a) \Rightarrow (\forall u\,(F(u, a) \Rightarrow G(f, u, a)))]$ (c) (1) $\forall x\,(\neg H \wedge D)$ (2) $\exists f \forall a\,[\neg H(f, a) \wedge (\forall u\,(F(u, a) \Rightarrow G(f, u, a)))]$

En ce qui concerne le choix du deuxième énoncé, il provient d'un texte de Durand-Guerrier et Njomgang Ngamsop (2009). Les auteures ont repris un polycopié d'un cours d'Analyse d'une université. Elles y ont choisi puis formalisé un énoncé d'une démonstration qui demandait le recours à la contraposée. Voici ce que les auteures disent de cette opération par rapport à l'énoncé choisi :

> Ainsi, écrire la contraposée de cet énoncé suppose que l'on sache : 1- reconnaître la portée des différents quantificateurs; 2- repérer la hiérarchie des deux implications; 3- que la contraposée d'une implication universellement quantifiée est une implication universellement quantifiée; 4- construire la négation d'un énoncé conditionnel universellement quantifié. (Op. cit., p. 1040)

Il s'agit donc d'un énoncé assez complexe.

L'idée derrière le choix de deux énoncés présentant une grande différence dans le niveau de difficulté est le besoin de s'assurer que l'étudiant sache réellement ce qu'est la contraposée, la réciproque et la négation. En effet, $A \Rightarrow B$ est certainement l'une des formes les plus simples sur laquelle effectuer les transformations de contraposée, de réciproque et de négation. Un énoncé comme $D \Rightarrow \neg H$ ne cause pas vraiment de difficultés supplémentaires à un étudiant qui serait en mesure de traiter $A \Rightarrow B$. L'exercice non routinier sert donc à vérifier si les étudiants savent effectuer les mêmes transformations mais sur un énoncé beaucoup plus complexe. L'énoncé simple fera le point sur la présence ou non de la connaissance sur les concepts en jeu. Cependant, afin d'appliquer cette connaissance à l'énoncé non-routinier, il faudra aussi utiliser des connaissances sur la manipulation des symboles logiques. On se souviendra que les « économies de logique » trouveront leurs limites dans les tâches non-routinières (Durand-Guerrier et Arsac, 2003).

Également, dans le cadre d'une pré-expérimentation auprès de collègues, j'ai remarqué une confusion assez commune entre les termes « contraposée » et « réciproque ». Par exemple, pour $A \Rightarrow B$, j'ai reçu comme réponse que $\neg B \Rightarrow \neg A$ serait la réciproque (au lieu de la contraposée) et que $B \Rightarrow A$ serait la contraposée (au lieu de la réciproque). On aura compris que ce collègue a inversé les deux concepts. C'est pour cette raison que le concept de réciproque est présent dans les questions malgré qu'aucune tâche ne semble nécessiter son utilisation. Ainsi, dans le cas où un étudiant inverserait certains concepts, l'erreur pourra être repérée grâce au traitement de l'énoncé le plus simple et l'analyse de la réponse vis-à-vis l'énoncé plus complexe sera réalisée en conséquence. Par exemple, si le deuxième énoncé ($\forall f\ \exists a$ [($\forall u$ ($F(u, a) \Rightarrow G(f, u, a)$) $\Rightarrow H(f, a)$]) est transformé de manière adéquate en sa réciproque, mais que cette réponse est plutôt donnée dans la sous-question sur la contraposée, on vérifiera si l'étudiant a également fait la même erreur avec l'énoncé simple. Le cas échéant, on conclura que l'étudiant inverse les deux concepts, et l'on pourra conclure que la connaissance prédicative de la manipulation des symboles est présente, mais pas celle qui associe les bons termes à la bonne forme.

En ce qui concerne la troisième sous-question qui demande de réaliser la négation, les étudiants se buteront à la proposition avec trois quantificateurs ayant des portées différentes ainsi qu'une implication. Comme expliqué dans le texte de Durand-Guerrier et Arsac (2003) et mentionné à la section 2.4, la règle de base dans la négation des énoncés quantifiés est d'interchanger les quantificateurs universels et existentiels. Mais dans cet exemple, seulement deux des trois quantificateurs doivent être modifiés. En effet, il est requis de faire la négation d'une implication de la forme « $A \Rightarrow B$ » où A représente $(\forall u(F(u,a) \Rightarrow G(f,(u, a))))$ et B représente $H(f, a)$. La négation de l'implication « $A \Rightarrow B$ » est « $A \wedge \neg B$ », ce qui fait que la quantification universelle associée à l'énoncé A doit être conservée sans quoi la nature de la proposition est changée. Il est ici question de la portée des quantificateurs. Ainsi, on ne peut arriver à la bonne réponse en utilisant aveuglément la règle énoncée précédemment. Il faut aussi bien maîtriser la négation d'une implication, qui devient une conjonction. On pourra donc s'attendre à recevoir des réponses où les trois quantificateurs ont changé et aussi, où la négation de l'implication est demeurée une implication.

Cette question est directement reliée aux tâches de la preuve par contradiction et à celle des chiens et des robots. Tout d'abord à la première tâche parce que la négation reste une opération très importante dans la mise en œuvre d'une preuve par contradiction. L'analyse *a priori* a bien montré cette importance. Ensuite à la troisième tâche parce que les étudiants auront probablement recours à l'utilisation de la contraposée lors d'un *modus tollens*, quelque part dans la production de la démonstration. Avec l'idée de la portée des quantificateurs, c'est également lié, un peu moins fortement, aux tâches sur les fonctions surjectives et sur l'intersection des images.

3.7.6 Question 6

Symboliser (avec variables, connecteurs et quantificateurs logiques) autant que possible les énoncés discursifs (en mots) suivants.
Exemple : *Si f est définie en a, alors $\lim_{x\to a} f(x)$ existe implique que f est continue en a*
peut être symbolisé par
$\forall f\, \forall a$ *((f est définie en a) $\Rightarrow$ ($\lim_{x\to a} f(x)$ existe $\Rightarrow f$ est continue en a))*

(a) Pour $a < b$, il y a un c tel que $f(c) = y$ chaque fois que $f(a) < y$ et $y < f(b)$.
(b) Il y a une fonction g tel que $g' = f$ lorsque f est continue pour chaque x.

Cette question provient de Selden et Selden (1995) et fait partie de la catégorie « non-routinière ». En effet, « déballer la logique » d'un énoncé mathématique, comme le disent les auteurs, n'est pas une tâche réalisée fréquemment.

Solution :

(a) $\forall a \forall b\ \forall f \forall y\ \exists c\ [(a < b\ \wedge\ f(a) < y\ \wedge\ y < f(b))\ \Rightarrow f(c) = y\,]$

(b) $\forall f\,[(\forall x, f$ est continue en $x) \Rightarrow (\exists g$ tel que $g' = f)]$

Dans l'article d'où proviennent ces questions, des étudiants universitaires ont tenté d'y répondre. En ce qui concerne le premier énoncé, qui représente en quelque sorte le théorème de la valeur intermédiaire pour les fonctions continues, sur les 32 étudiants qui ont répondu, seulement un a réussi à déballer correctement la logique. Voici un exemple de ce que les auteurs ont recueilli comme réponses erronées d'étudiants et donc, quelque chose à quoi on peut s'attendre comme réponse au test :

$$\forall a < b\ \exists c\ \forall f \forall y\ [(f(a) < y \wedge y < f(b)) \Rightarrow f(c) = y].$$

Cette réponse, à un échange de quantificateurs près d'une réponse valable, dit essentiellement que dans chaque intervalle (a, b), il y a un certain c pour lequel chaque f qui lui est appliqué associe ce c à toutes les valeurs y entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors, f devient une relation car c est associé par f à une infinité de valeurs y entre $f(a)$ et $f(b)$; à moins peut-être que f soit une fonction constante, auquel cas l'implication est trivialement vérifiée puisqu'il n'y a aucun y vérifiant son antécédent, $f(a) < f(b)$ étant impossible pour une fonction constante. Il est aussi intéressant de remarquer que cette proposition de réponse traduit les quantificateurs dans l'ordre selon lequel ils apparaissent dans la question.

En ce qui concerne le deuxième énoncé, seulement deux étudiants sur un total de 19 l'ont traité avec succès dans l'étude de Selden et Selden. Les auteurs donnent en guise d'exemple d'une réponse erronée $\forall g\, \forall f\, [(g \text{ existe}) \Rightarrow [\forall x\, (f \text{ est continue en } x) \Rightarrow (g' = f)]]$, et donc à laquelle on peut s'attendre de la part des étudiants. Ce développement est erroné car l'énoncé à déballer dit qu'il existe une telle fonction g, pas nécessairement la même, pour chacune des fonctions f, qui serait continue; c'est donc l'énoncé selon lequel toute fonction continue f admet une primitive. Par contre, la production erronée quantifie universellement la fonction g et met l'existence de cette même fonction g comme condition suffisante à ce qui devrait être l'implication valable à savoir, $(\forall x\ f \text{ est continue en } x) \Rightarrow (\exists g \text{ tel que } g' = f)$.

Cette question a le potentiel d'informer sur la capacité des étudiants à bien formaliser, capacité qui pourrait éventuellement être altérée par la passation ou non d'un cours de logique. L'idée de formalisation est très près de l'action de « déballer la logique », c'est-à-dire d'associer un énoncé informel à un énoncé formalisé logiquement équivalent (Selden et Selden, 1995). Rappelons que les auteurs suggèrent que les étudiants ayant des difficultés à déballer la logique auront des difficultés à valider des démonstrations. En particulier, cette aptitude est requise dans la tâche de la preuve par contradiction et celle de l'intersection des images. En effet, les tâches de la deuxième catégorie, où le but est de valider ou invalider une démonstration, requièrent principalement la capacité à « déballer la logique ».

Cette question éclairera aussi sur la compréhension de la portée et de l'ordre des quantificateurs. On peut donc supposer qu'un étudiant qui ferait une erreur dans l'ordre ou la portée des quantificateurs en formalisant aura de la difficulté à comprendre l'erreur liée à l'instanciation existentielle.

CHAPITRE IV

ANALYSE

Dans ce chapitre, il sera question de l'analyse des données recueillies par le biais de la méthode de recherche exhibée dans le chapitre précédent, dans le but de répondre aux questions de recherche énoncées au terme du chapitre 2. Tout d'abord, je discuterai des résultats du test diagnostique qui ont mené à la création de quatre dyades (cf. section 4.1). Par la suite, je discuterai des axes d'analyse qui seront utilisés tout au long du traitement des données (cf. section 4.2). Je réaliserai ensuite la narration et l'analyse de chacune des séances avec chaque dyade et ce, pour chacune des quatre tâches (cf. section 4.3). Je terminerai avec quelques commentaires en guise d'analyse *a posteriori* des tâches ainsi que des commentaires plus généraux sur certains des axes, vis-à-vis une même tâche (cf. section 4.4).

4.1 Résultats du test diagnostique : création de quatre dyades

À la suite de la passation du test diagnostique (cf. section 3.7), au regard des réponses obtenues, des critères pour l'acceptation des réponses sont développés. Tout d'abord, à la question 1, ce sont les concepts logiques qui sont au centre de l'évaluation et non la symbolisation. Ainsi, une réponse formulée en mots, contrairement à une formulation conforme au calcul des prédicats, tel que proposée dans l'analyse *a priori*, mais comportant la bonne quantification et la bonne qualité (avoir la caractéristique ou ne pas avoir la caractéristique) est considérée comme bonne. Par exemple, la réponse « $\forall$oiseau, oiseau peut voler » est acceptée mais « $\exists x$: x ne peut pas voler, alors x n'est pas un oiseau » n'est pas acceptée car la structure logique n'est pas adéquate. À la question 2, seulement les réponses proposées dans l'analyse *a priori* sont acceptées.

En ce qui concerne la question 3, les réponses proposées par les participants sont principalement considérées comme des réponses opératoires, en ce sens que la structure logique de la preuve par contradiction n'a été exhibée dans aucun cas. Cependant, certains étudiants ont proposé des étapes qui, face à la plupart des énoncés à démontrer, sont suffisantes pour conduire une démonstration par contradiction avec succès. Par exemple, une étudiante a proposé « Supposons le contraire du résultat cherché, montrons que ça implique une contradiction ». Ainsi, les réponses jugées adéquates pour réaliser une démonstration sont acceptées et celles comportant des erreurs (« on veut montrer que $A \Longrightarrow B$, on suppose que l'on a $\neg A$ et B ») sont rejetées. Pour la question 4, des réponses de types opératoires ont également été fournies et acceptées comme bonnes.

En ce qui concerne la question 5, certaines réponses proposées par les participants sont ambiguës. Par exemple, le fait de mettre le symbole de la négation devant un énoncé complexe ($\neg$ ($\forall u$ ($F(u,a) \Rightarrow G(f,u,a)$)), par exemple) n'est pas ce qui était recherché mais est tout de même logiquement valide. Ce type de réponse, qui n'avait pas été anticipé dans l'analyse *a priori*, est considéré comme valide car il n'y a pas d'erreur au niveau logique, malgré qu'une telle réponse ne permette pas de déterminer si l'étudiant est capable ou non d'énoncer la négation. Par contre, une réponse faisant intervenir un symbole rayé ($\not\Rightarrow$, par exemple) au lieu de réaliser la négation (avec une conjonction dans ce cas-ci) est considérée comme erronée. En résumé, si l'écriture utilise des symboles logiques usuels et qu'il n'y a pas d'erreur dans la structure de l'énoncé, la réponse est acceptée. Finalement, en ce qui concerne la question 6, si un étudiant omet de quantifier une variable en jeu dans l'énoncé, cet élément à lui seul n'invalide pas la réponse.

Évidemment, une erreur de même nature réalisée à plusieurs questions ne compte que pour une seule. Par exemple, si un étudiant a réalisé la négation d'une implication toujours de la même manière, mais d'une manière erronée à trois reprises dans le test, ces trois erreurs sont comptées comme une seule. À l'aide de ces lignes directrices, il est possible de regrouper les répondants au test diagnostique et de créer quatre dyades selon les critères préalablement établis, c'est-à-dire la passation ou non d'une cours de logique et le niveau de connaissances prédicatives en logique formelle.

4.1.1 Dyade 1 : Anna et Michel

Cette dyade réunit Michel, un étudiant ayant suivi un cours de logique et ayant des connaissances prédicatives moyennes, et Anna, une étudiante n'ayant pas suivi de cours de logique et ayant démontré les connaissances prédicatives les plus faibles. En effet, elle a inscrit « je ne sais pas » à plus de la moitié des questions et compte plusieurs mauvaises réponses dans celles proposées. Elle éprouve des difficultés avec, en particulier, la négation de l'implication et la capacité à déballer la logique (question 6). Elle donne une idée raisonnable de la preuve par contradiction et répond correctement à une seule sous-question de la question 1. Le reste du questionnaire est vide. En ce qui concerne Michel, son profil est très similaire à celui des étudiantes de la dyade 2, et est considéré comme de niveau moyen. Il a de la difficulté avec la négation de l'implication mais semble à l'aise avec la négation de quantificateurs, du moins dans les cas simples. Il a commis une erreur dans la question 1 et une dans la question 6. Il propose également une méthode adéquate pour la preuve par contradiction ainsi qu'un contre-exemple à l'inférence proposée à la question 4.

Il est donc possible de qualifier cette dyade d'hétérogène. Cette situation paraît intéressante car de telles « situations provoquent des confrontations où chacun des partenaires explicite son raisonnement, argumente et cherche à convaincre l'autre de la pertinence et de l'adéquacité [sic] de son mode de résolution. Ainsi, à travers les résistances, les incompréhensions qui émergent de part et d'autre chez chacun des partenaires, se font voir les difficultés ou obstacles que ces étudiants rencontrent » (Schmidt, 1994, p. 152). Ainsi, il a semblé intéressant de voir quelles interactions ces deux étudiants auront, une fois confrontés à des tâches comportant des difficultés au niveau logique et demandant un consensus.

4.1.2 Dyade 2 : Jeanne et Lucie

Cette dyade homogène regroupe deux étudiantes ayant suivi un cours de logique. De plus, il s'agit de deux participantes ayant démontré des connaissances prédicatives moyennes et donc similaires à celles de Michel (dyade 1) et moins importantes que les étudiants formant la dyade 4 (cf. section 4.1.4). Lucie a à plusieurs reprises utilisé un raccourci faisant intervenir le symbole $\nRightarrow$. Ainsi, elle semble avoir de la difficulté avec la négation de l'implication mais être à l'aise, tout comme Jeanne, avec la négation de quantificateurs dans les cas simples, où il suffit de les interchanger. Lucie a éprouvé des difficultés à déballer le premier énoncé de la question 6. Elle a excellé à la question 1, tandis que Jeanne a commis une erreur. En ce qui concerne la preuve par contradiction, Lucie affirme que si l'on veut montrer $A \Longrightarrow B$, il suffit de supposer $A \Longrightarrow \neg B$ et d'obtenir une contradiction. Cela montre alors que $A \Longrightarrow \neg B$ est faux, et par conséquent, que $A \wedge B$ est vrai, ce qui montre plus, en fait, que $A \Longrightarrow B$. Jeanne a également proposé une méthode valide. À la question 4, les deux étudiantes ont fondé leur argumentation sur le fait qu'ils ne s'agit pas nécessairement des mêmes x et y de chaque côté de l'implication.

4.1.3 Dyade 3 : Éléanore et Paul

Cette dyade homogène regroupe des étudiants n'ayant pas suivi de cours de logique. En ce qui concerne leurs connaissances prédicatives, leur test diagnostique comporte plusieurs questions où ils affirment ne pas savoir la réponse, en particulier les questions 1 et 2. Pour Éléanore, elle a aussi affirmé ne pas savoir comment transformer un énoncé en sa contraposée. En ce qui concerne leurs réponses aux questions 5 et 6, leur taux de réussite est similaire à celui des étudiants des dyades 1 et 2. En effet, ils éprouvent des difficultés avec la négation de l'implication et ils sont à l'aise avec la négation des quantificateurs, du moins dans les cas simples où il suffit de les interchanger. Cependant, il est intéressant de constater que Paul a réalisé la négation d'une implication de manière valide à la question 3 mais il ne semble pas avoir fait le lien avec la négation de l'implication. Toujours en lien avec la question sur la preuve par contradiction, les deux étudiants ont proposé des méthodes adéquates et suffisantes. À la question 4, les deux étudiants ont affirmé que les deux y à gauche de l'implication n'étaient pas nécessairement les mêmes. Finalement, Paul a eu des difficultés à déballer la logique du premier énoncé de la question 6, contrairement à Éléanore.

4.1.4 Dyade 4 : Julie-Ann et Robert

Cette dyade homogène regroupe deux étudiants ayant suivi un cours de logique. De plus, il s'agit des deux participants ayant obtenu le plus haut taux de réussite dans les questions du test diagnostique et on peut donc dire qu'il s'agit des étudiants ayant les meilleures connaissances prédicatives en logique, parmi tous les étudiants ayant répondu au test. Julie-Ann n'a réalisé que quelques erreurs considérées mineures, par exemple elle a oublié de quantifier les fonctions ($\forall f$) dans la question 6 ce qui, en soit, ne montre pas une lacune d'une connaissance prédicative précise en logique. Robert, pour sa part, a commis la même erreur à trois reprises. En effet, à la question où il est demandé de décrire les étapes d'une preuve par contradiction, il affirme que pour montrer que $A \Longrightarrow B$, on suppose sa négation, qui est pour lui $\neg A \wedge B$. Il a réalisé les négations de la question 5 sous cette hypothèse et il a donc écrit que, par exemple, la négation de $D \Longrightarrow \neg H$ est $\neg D \wedge H$. Ainsi, puisque ses réponses sont cohérentes, ces erreurs sont considérées comme une seule. Pour ce qui est de la question sur la preuve par contradiction, les deux étudiants ont proposé des méthodes adéquates et suffisantes. Finalement, pour la question 4, les deux étudiants ont fourni des contre-exemples pour invalider l'inférence. Dans l'ensemble, il est intéressant de constater que Robert et Julie-Ann sont les deux seuls étudiants à avoir réussi à réaliser la contraposée de l'énoncé complexe dans le test.

4.2 Axes d'analyse

Afin d'analyser les données recueillies lors des entrevues, trois axes d'analyse ont été mis en place. Ces axes ont émergés du cadre théorique et des questions de recherches auxquelles s'intéresse ce travail.

Le premier axe discutera de la place de l'intuition, principalement pour mener la résolution, et discutera également du type de conviction atteint par les étudiants durant cette résolution (formelle extrinsèque ou intuitive interne, cf. section 2.3) ainsi que de la mise en œuvre de savoirs, savoir-faire et pratiques contextualisés, relatifs aux objets mathématiques en jeu dans les tâches ou encore, relatifs à la logique. Rappelons que par souci de concision, j'utiliserai l'expression « connaissances contextualisées » pour discuter de l'ensemble des savoirs, savoir-faire et pratiques contextualisés se rapportant à un certain sujet ou une certaine situation. La raison pour laquelle l'intuition et les connaissances contextualisées ont été regroupées dans un même axe d'analyse malgré qu'ils font l'objet de deux sections distinctes dans le cadre théorique est qu'il semble difficile, voire même impossible dans certaines situations, de séparer ou de distinguer ces deux aspects, du moins dans le cadre de ce travail. Par exemple, si un étudiant choisit de résoudre une certaine tâche par une preuve par induction par exemple, il est difficile de statuer sur la provenance de cette décision, s'il s'agit d'une intuition ou d'une pratique contextualisée ou encore des deux. En effet, comme mentionné précédemment, l'intuition et les connaissances contextualisées proviennent toutes les deux de l'expérience de l'individu. Ainsi, il a semblé plus judicieux de joindre ces deux aspects dans un même axe, tout en faisant une distinction entre les deux, si le contexte le permet.

Le deuxième axe se penchera sur les modes d'élaboration de la démonstration (s'applique donc seulement aux tâches où les étudiants doivent produire une démonstration), soit sémantique ou syntaxique, tout en considérant les représentations signifiantes qui donnent des indices sur la compréhension intuitive. En guise de rappel, les représentations signifiantes sont, dans le contexte de cette recherche, n'importe quelle représentation d'un objet mathématique utilisée par les étudiants et qui démontre la manière qu'ils ont de réfléchir à l'objet, soit pour mieux le comprendre soit pour utiliser ses propriétés. Finalement, le troisième axe étudiera les obstacles logiques rencontrés par les étudiants, les considérations logiques qu'ils auraient soulevées, et discutera également des obstacles mathématiques rencontrés.

Certains de ces axes d'analyse ont fait ressortir des caractéristiques différentes chez les différentes dyades. Ces caractéristiques seront traitées dans la section 4.3 à la suite de la narration et l'analyse de chaque tâche, pour chaque dyade. Cependant, certains axes ont fait ressortir des caractéristiques communes pour toutes les dyades, vis-à-vis une même tâche, ce qui justifie une remarque générale qui prendra place dans la section 4.4, avec l'analyse *a posteriori* des tâches. Il est important de préciser que certains axes se recoupent sur certains aspects de sorte que certains éléments relatifs à l'analyse se retrouveront discutés dans plus d'un axe.

4.3 Analyse des séances : narration et reprise des trois axes d'analyse

Dans les prochaines sections, je propose une narration de chaque résolution, par tâche et par dyade, entrelacée d'éléments d'analyse. La narration sera suivie de quelques remarques en lien avec les trois axes d'analyse, selon la pertinence. Dans la section précédente, j'ai mentionné certains axes dont l'analyse était identique pour toutes les dyades vis-à-vis une même tâche. Ces commentaires ne seront pas repris dans la présente section. En guise de rappel, voici la définition des axes en jeu dans l'analyse. Le premier axe discute de la place de l'intuition dans la résolution et du type de conviction atteint par les étudiants durant cette résolution (formelle extrinsèque ou intuitive interne, cf. section 2.3) et de l'utilisation de connaissances contextualisées. Le deuxième axe se penche sur les tendances de production de démonstrations, soit sémantiques ou syntaxiques, tout en considérant les représentations signifiantes. Finalement, le troisième axe étudie les obstacles logiques rencontrés par les étudiants et les considérations logiques qu'ils auraient soulevées.

Dans les extraits des entrevues, la première lettre du nom de celui qui parle est inscrite au début de la ligne. La lettre *S* représente les moments où je suis moi-même intervenue pour demander des précisions ou faire avancer le travail, selon le protocole établi dans le chapitre 2. Finalement, ce qui est entre crochets en caractères droits sont quelques précisions sur le discours des étudiants, qui en facilitent la lecture. Ce qui se trouve entre crochets en caractères italiques sont des indications sur les actions des étudiants, un long silence ou de l'écriture, par exemple.

4.3.1 Anna et Michel

Brièvement, Anna et Michel forment la dyade dite hétérogène. Anna est une étudiante qui n'a pas suivi de cours de logique et qui a démontré les connaissances les plus faibles au test diagnostique. Michel, pour sa part, a suivi un cours de logique et a des connaissances prédicatives considérées comme moyennes, équivalentes à celles des étudiantes de la deuxième dyade.

4.3.1.1 Tâche 1 (8 minutes)

Tout d'abord, les deux étudiants affirment que la démonstration est erronée. Dans les échanges qui ont suivi et qui sont transcrits ci-dessous, Michel essaie de justifier que l'étudiant n'a pas énoncé le *bon contraire* et propose « il existe un irrationnel tel que son double est rationnel ». Anna, en accord avec ce *bon contraire*, affirme que cela montrerait seulement que le théorème est faux. Michel a visiblement bien saisi qu'il s'agissait d'une preuve par contradiction, s'est attardé à la négation, partie cruciale de ce type de preuve, et a bien vu l'erreur qui s'y est glissée. Pour sa part, Anna semble avoir oublié le début de la démonstration pour s'attarder à l'exemple. Après un peu de confusion, Anna se rallie à l'idée de Michel et affirme être restée préoccupée par le fait que l'étudiant donne un exemple du théorème pour le prouver. Elle ne s'est pas attardée à l'énoncé qu'il voulait contredire mais bien à l'exemple qu'il donne en lien avec l'énoncé qu'il cherche à démontrer.

M : Il ne suppose pas le bon contraire. Il suppose que, dans le fond, pour montrer [...] « le double de tout nombre irrationnel est irrationnel », mais il suppose en disant « supposons le contraire, ainsi [le double de] tout nombre irrationnel est rationnel », ça serait « il existe un rationnel... un irrationnel [dont le double] est rationnel ».

A : Ben non mais ça servirait juste à montrer que le théorème est faux. Ça ne montrerait pas qu'il est vrai.

M : Non non mais il fait « supposons le contraire, ainsi supposons que le double de tout nombre irrationnel est rationnel » mais ce n'est pas, ici son « supposons le contraire » ça là, c'est pas le vrai contraire. Parce que dans le fond ce qu'il veut faire c'est qu'il veut arriver à une contradiction avec ça, il réussit à arriver à une contradiction mais il ne réussit pas à montrer le contraire de... dans le fond, ça ici cette phrase là c'est pas le contraire de cette phrase-là.

A : Ouais je suis d'accord.

M : Alors s'il changeait ici « supposons que le double de... » ben « supposons qu'il existe un irrationnel tel que son double est rationnel » puis il réussit à arriver à une contradiction, ben il aurait fini de montrer le théorème.

A : ben non, mais ça suffira pas à le montrer.

M : ... Pourquoi ?

A : Ben, tu ne peux pas juste prendre... exhiber un exemple, puis dire que c'est vrai. Tu peux exhiber un contre-exemple pour dire que c'est faux mais tu ne peux pas exhiber un exemple pour dire que c'est vrai.

M : mais là là... il veut montrer que « le double de tout nombre irrationnel est irrationnel. »

A : oui mais là il a pris un exemple...

M : oui

A : que c'était vrai.

M : C'est ça. Mais le reste non plus il est pas bon parce que ça, son reste, ça montre son... ça montre cette phrase là... le reste. Mais ça ne montre pas [l'énoncé à démontrer] parce qu'il n'a pas supposé le bon contraire. Vois-tu ce que je veux dire ?

[...]

A : Oh non non non, c'est beau, excuse-moi, t'as raison, moi je le voyais vraiment plus... moi ce qui m'avait juste frappée, c'est qu'il prenait un truc qui était vrai : un irrationnel que son double était irrationnel, puis il disait que c'était vrai. Mais c'est vrai, de la façon que toi tu le dis ça part du fait, il a bien compris... Il a bien montré la contradiction avec sa supposition, mais sa supposition était pas bonne.

Anna semble avoir mis en avant la connaissance (opératoire) qui dit qu'on ne peut démontrer un théorème par un exemple mais qu'on peut l'invalider à l'aide d'un contre-exemple. Michel semble avoir un meilleur contrôle sur l'entièreté de la proposition de démonstration qu'Anna à ce moment-ci de la résolution. Michel a tout de suite vu l'erreur dans la négation, la connaissance prédicative, tandis qu'Anna a vu le problème dans l'exemple. On peut se demander ici si Anna avait remarqué le problème au niveau logique de la négation, lorsqu'elle a affirmé au départ que la démonstration était erronée ou si ce qu'elle avait remarqué était seulement que le contre-exemple était en fait un exemple de l'énoncé initial. Anna semble avoir perdu de vue que la preuve proposée est une preuve par contradiction et pour elle, un exemple n'est pas suffisant. Également, elle semble ne pas avoir un contrôle complet sur la négation d'énoncés quantifiés. Dans son test diagnostique, Anna n'a pas réussi la question sur la négation, en proposant $\forall x\ (D \not\Rightarrow \neg H)$ pour la négation de $\forall x\ (D \Rightarrow \neg H)$. Ainsi, elle ne semble pas maîtriser la négation appliquée à des quantificateurs, ce qui est cohérent avec sa réponse à son évaluation de l'erreur de l'étudiant dans la tâche. La cohérence avec le test diagnostique est également présente pour Michel qui a, pour sa part, réalisé la négation de la quantification de manière adéquate.

Ensuite, lorsqu'il leur a été demandé de fournir, si possible, une démonstration adéquate, Anna affirme qu'elle essaierait tout d'abord une preuve par contradiction en supposant le contraire qu'ils avaient exhibé plus tôt. Il s'ensuit la construction d'une preuve qui semblait assez simple pour eux. Il s'agit en effet d'un type de démonstration assez commun lorsqu'il est question de rationnels et d'irrationnels : supposer que le rationnel s'écrit comme un quotient de deux entiers et en déduire une contradiction ; le plus souvent, qu'un irrationnel s'écrit comme le quotient de deux entiers, ce qui est faux pour tout irrationnel.

vrai. SLC

Supposons que $\exists\ n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
t.q. $2n \in \mathbb{Q}$.

par hyp $2n = \dfrac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$

$n = \dfrac{a}{2b}$ mais a et $2b \in \mathbb{Z}$

donc $n \in \mathbb{Q}$ et $n \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

#

Figure 4.1 Démonstration proposée pour la tâche 1

C'est Michel qui amène l'idée de commencer avec $2n = a/b$ tandis qu'Anna voulait commencer avec $n \neq a/b$. Le point de départ proposé par Anna n'est pas le plus efficace pour compléter la preuve et elle ne semble pas utiliser son intuition mais semble plutôt chercher un point de départ correct, c'est-à-dire adéquat mathématiquement, mais sans assurance d'atteindre le but. Également, le choix d'Anna de commencer avec $n \neq a/b$ démontre encore une fois un certain manque de contrôle sur les énoncés quantifiés. En effet, $n \neq a/b$ signifie que n ne peut s'écrire comme un quotient de deux entiers a et b, et ce $\forall a \in \mathbb{Z}$ et $\forall b \in \mathbb{Z}$. Ainsi, il s'agit d'un énoncé quantifié universellement et donc significativement plus difficile à démontrer que l'énoncé quantifié existentiellement proposé par Michel, c'est-à-dire que $2n$ peut s'écrire comme un quotient de deux entiers particuliers a et b. La proposition de Michel est certainement celle qui amènera les étudiants au but le plus rapidement et facilement. Il s'agit probablement d'une connaissance contextualisée à ce type de démonstration, tel que mentionné plus tôt, en lien avec les démonstrations faisant intervenir des rationnels et des irrationnels.

À la question de savoir s'ils auraient pu utiliser un autre chemin pour démontrer l'énoncé, Michel ne peut offrir de réponse et Anna précise qu'elle essaie souvent tout d'abord la preuve par contradiction parce que c'est, selon elle, plus facile et que « *juste en y pensant, on voit que ça va bien aller* ». Son intuition la guide vers la preuve par contradiction, il s'agit en effet du type de démonstration souvent le plus efficace vis-à-vis ce type de théorèmes et donc, l'hypothèse est qu'il s'agit d'un savoir-faire contextualisé. Anna affirme aussi avoir besoin de mettre à l'écrit une preuve par contraposée ou une preuve directe, contrairement à la preuve par contradiction, car elle trouve ces deux types de preuves plus difficiles.

Résumé

Axe 1 : Anna a utilisé une connaissance contextualisée pour choisir la preuve par contradiction. Elle ne semble pas avoir utilisé d'intuitions ou de connaissances contextualisées durant la résolution contrairement à Michel. En effet, celui-ci les utilise pour guider son travail lors de la démonstration.

Axe 2 : Puisqu'Anna ne semble pas utiliser sa compréhension intuitive des objets en jeu dans la démonstration ni de représentations signifiantes et qu'elle propose de commencer avec $n \neq a/b$, ce qui est un chemin juste mais pas nécessairement efficace, il est possible de qualifier sa résolution de syntaxique. En ce qui concerne Michel, il est difficile de statuer sur l'orientation de sa résolution vu la courte production et la courte verbalisation.

Axe 3 : Anna n'a pas démontré un contrôle complet sur la négation d'énoncés quantifiés. Elle a également manqué de vigilance à propos de la structure logique de la démonstration en début de résolution, où elle a visiblement oublié une partie de la démonstration pour porter son attention sur l'exemple exhibé à la fin de celle-ci. Également, Anna n'a pas remarqué qu'un énoncé universellement quantifié est généralement plus difficile à démontrer. Michel, de son côté, n'a pas exprimé de souci vis-à-vis les considérations logiques et n'a pas non plus commis d'erreur de cette nature. Il a rapidement vu et compris l'erreur et la démonstration a bien été menée.

4.3.1.2 Tâche 2 (9 minutes)

Tout d'abord, Anna ressent le besoin de faire un dessin pour se rappeler le principe de surjectivité. Cette représentation signifiante lui est nécessaire pour donner du sens à l'énoncé. Elle dessine les trois ensembles représentés par des cercles avec des points à l'intérieur.

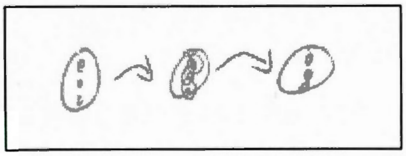


Figure 4.2 Dessin proposé par Anna pour illustrer la situation (représentation signifiante)

Elle proclame ensuite l'énoncé évident grâce à son dessin, et Michel est en accord. Ainsi, les étudiants pensent comprendre pourquoi l'énoncé est valide. Michel s'assure ensuite que la composition des fonctions en jeu est possible. Par la suite, il réalise une démonstration où il applique les fonctions aux ensembles et non à un élément générique des ensembles :

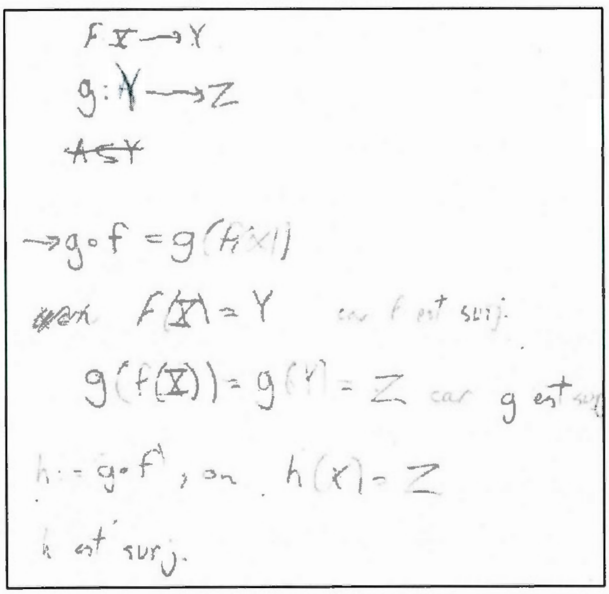


Figure 4.3 Démonstration proposée par Michel

Anna doute quelque peu de cette démonstration, elle dit avoir de la difficulté à voir s'il y aurait une condition qui ne serait pas respectée, et affirme qu'elle composerait une preuve d'une manière différente. Elle compose alors sa propre version de la preuve (voir figure 4.4) en disant qu'elle commence « de l'autre bord » (elle commence par instancier un élément de Z pour terminer dans l'ensemble X au lieu de commencer dans X pour terminer dans Z comme Michel a fait). Elle utilise des éléments génériques provenant des ensembles au lieu des ensembles au complet, comme Michel. Anna commence par exhiber les définitions de la surjectivité.

$\forall z \in Z;\ \exists\ y \in Y$ t.q. $g(y) = z$

$\forall y \in Y,\ \exists\ x \in X$ t.q. $f(x) = y$

$\Rightarrow$

En particulier pour un $z \in Z$ on a un y t.q $g(y) = z$ et pour ce y $\exists x \in X$ t.q $f(x) = y$

$\Rightarrow$

$(g \circ f)(x) = z$

Cela est vrai pour tout $z \in Z$ donc $g \circ f$ est surj.

Figure 4.4 Démonstration proposée par Anna

Il n'y a pas d'erreur d'instanciation dans la démonstration d'Anna. Elle utilise, à l'écrit, les mêmes lettres à plusieurs reprises mais elle ajoute des explications qui se rapportent aux variables comme « en particulier », « ce y fixé », de sorte qu'il n'y a pas de confusion en ce qui concerne l'instanciation existentielle. D'un autre côté, la démonstration proposée par Michel comporte d'éventuels problèmes. Dans ce cas précis, la démonstration proposée par

Michel est mathématiquement correcte, son écriture étant très condensée comparée à celle de la démonstration d'Anna. Anna a toutefois raison d'être mal à l'aise et de sentir que la démonstration est plus risquée. En fait, l'égalité d'ensemble que Michel utilise est correcte dans ce cas-ci. En effet, puisque f est surjective, si $f : X \rightarrow Y$, alors tous les points de Y sont rejoints par $f(X) := \{ f(x) \mid x \text{ parcourt } X\}$ et donc, l'image de X par f est bien l'ensemble Y (au complet), ce qui donne l'égalité ensembliste $f(X) = Y$. Également, puisque l'ensemble d'arrivée de la fonction f est le même que l'ensemble de départ de la fonction $g : Y \rightarrow Z$, il est possible d'écrire $g(f(X)) = g(Y) = Z$, sans oublier que la surjectivité de g joue également un rôle. Cependant, beaucoup d'étudiants utilisent ce type d'argument, c'est-à-dire une égalité entre ensembles, dans des contextes où c'est inadéquat (par exemple si les éléments d'un ensemble ne sont pas tous atteints) ou encore, sans véritablement bien distinguer ce qui s'applique à des ensembles et ce qui s'applique à des éléments, de sorte que l'on peut se demander si Michel contrôle vraiment ce qu'il fait. Par contre, à la tâche 4, Michel utilise une notation ensembliste qui démontre sa compréhension de l'application de fonctions à des ensembles :

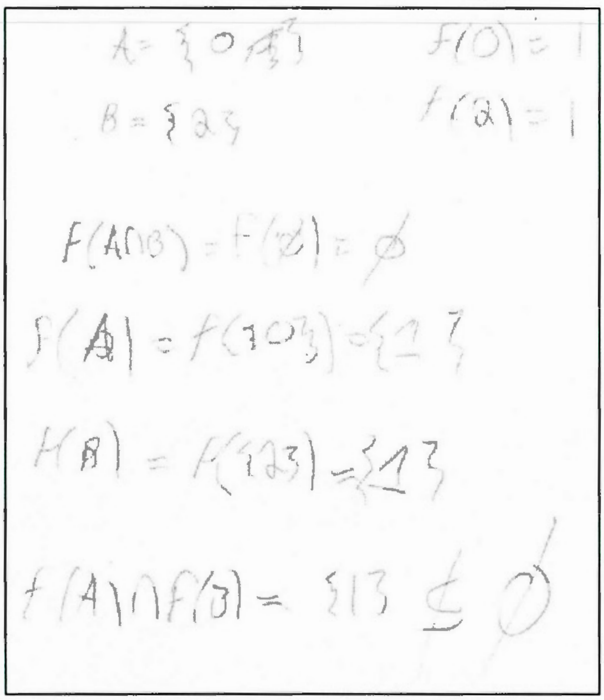


Figure 4.5 Utilisation adéquate de la notation ensembliste réalisée par Michel à la tâche 4.

On voit bien ici que Michel utilise une notation ensembliste adéquate, ce qui suggère qu'il a les connaissances requises pour bien contrôler la démonstration qu'il a proposée.

Plus globalement, Anna exprime et utilise fortement sa compréhension intuitive ainsi que des représentations signifiantes pour représenter la surjectivité. Elle ressent le besoin dès le départ de se faire un dessin (« *c'est évident juste en faisant un dessin* »). Aussi, elle discute à plusieurs reprises qu'elle voit la surjectivité de manière linéaire, comme un mouvement, à l'aide de gestes. Pour Anna, la surjectivité est représentée par un mouvement de l'ensemble d'arrivée vers l'ensemble de départ de sorte qu'elle n'est pas satisfaite de la proposition de Michel, de partir de l'ensemble X. Également, Michel utilise l'ensemble dans son entièreté, $f(X)$ par exemple, ce qu'Anna ne fait pas car elle a peur qu'une fausseté se glisse. C'est une précaution due à son expérience mathématique. Il s'agit d'une connaissance contextualisée, qu'elle ne semble pas pouvoir expliquer lorsque j'ai relancé les deux étudiants par rapport à la différence entre les deux méthodes :

M : D'après moi ça change rien.

A : Ben moi j'ai toujours un peu plus de misère... quoique là c'est vrai. Mais j'aime mieux... moi j'aime toujours mieux le faire en particulier parce que je suis sûre qu'il n'y aura pas de fausseté ou quelque chose... un contre-exemple qui va se glisser. Dans ce cas-là, c'est assez évident que ça marche. Mais je vais avoir plus tendance à utiliser un élément puis généraliser après.

S : Parfait. Et toi tu es partie comme... tu as dit ça juste avant de commencer : moi je partirais de l'autre bord...

A : oui, ben dans le fond ça change rien, j'aurais pu juste mettre cet énoncé-là, le « pour tout y dans Y il existe un x », le mettre dans l'ordre inverse, mais moi j'ai tendance...

La démonstration proposée par Anna est valide, mais elle ne peut mettre le doigt sur la différence entre les deux malgré son insistance sur le malaise qu'elle a face à la démonstration de Michel. Malgré cela, elle insiste pour partager sa démonstration car elle est plus sûre. Il s'agit d'un savoir contextualisé à ce type de démonstration, une précaution qu'elle prend afin qu'une erreur ne se glisse pas. Il est en effet facile de faire des erreurs d'instanciation dans ce type de démonstrations. Pour Michel, prendre les ensembles ou un élément générique ne fait aucune différence.

Également, Anna semble avoir une image mentale forte de l'injectivité et de la surjectivité lorsqu'elle dit : « *Puis j'ai un peu tendance à voir les choses un peu linéairement. Parce que* *disons surjectif, il faut toujours partir, moi je veux comme me ramener à l'ensemble de départ en me disant que tous les éléments peuvent se ramener à l'ensemble de départ et l'injectivité c'est [inaudible] je vois ça linéaire* ». Cette image l'aide à démarrer la résolution correctement.

Résumé

Axe 1 : Anna rejette la démonstration (faisant intervenir l'égalité d'ensembles) proposée par Michel. Ses intuitions ou encore une connaissance contextualisée provenant de son expérience lui dicte que ce qu'il a proposé a une très forte chance de comporter une erreur. Elle ne semble toutefois pas capable d'expliquer pourquoi elle est mal à l'aise ni pourquoi la démonstration pourrait avoir un problème.

Axe 2 : Anna utilise une représentation signifiante visuelle (figure 4.2) pour se remémorer la surjectivité. Elle exprime aussi sa compréhension intuitive en voyant la surjectivité comme un mouvement linéaire de droite à gauche. On peut donc supposer qu'elle manifeste une tendance sémantique dans l'élaboration de sa démonstration. Pour sa part, Michel ne donne pas d'indice sur sa compréhension intuitive et il semble avoir des difficultés à expliquer sa démonstration en profondeur, dans le contexte. Ainsi, il semble donc avoir utilisé une orientation plus syntaxique.

Axe 3 : Aucune erreur de nature logique n'a été commise ici. Michel a utilisé une notation ensembliste risquée mais on peut penser qu'il la maîtrise bien, tel qu'argumenté plus tôt.

4.3.1.3 Tâche 3 (19 minutes)

Anna démarre la résolution en expliquant d'abord à quoi elle a pensé durant le temps alloué à la lecture. Certaines des précisions entre crochets proviennent de gestes par lesquels des éléments écrits sur la feuille étaient pointés du doigt.

A : au début, je m'étais trompée, je pensais que [l'axiome 3] c'était [pour tout] trois robots distincts qui ne peuvent juste pas avoir un ami commun, donc quand R est différent [de *L1*, *L2* et *L3*], tu fais le même principe : tu en prends deux, tu prends *L2* ou *L3*. Mais là c'est « il existe » donc c'est vraiment juste [*L1*, *L2* et *L3*] simultanément. Donc j'essayais de faire une combinaison en prenant un chien qui est ami avec *R* et *L1*, selon ce qui existe et là on va supposer que... attends un peu... on veut montrer qu'il existe un chien qui n'est pas son ami... oui c'est ça, si je faisais ça, ce serait par contradiction mais hum sinon... si on le fait autrement, si on fait juste prendre n'importe quel chien qui est ami avec un de ces deux-là, il n'y a rien qui empêche qu'il soit ami avec *R*, un de ces trois-là je veux dire, mais il y a rien qui empêche qu'il soit ami avec *R*. Et disons qu'on rajoute, l'autre chose qu'on pourrait faire, c'est rajouter un chien *P* ou *W* et dire que le chien est ami avec *L1* et *W* et après ça on peut voir... [...] Hum... toi, [Michel] tu aurais fait quoi ?

M : moi je sais pas encore qu'est-ce que j'aurais fait dans ces circonstances.

Les réflexions spontanées d'Anna font ressortir des éléments très importants dans la tâche. Elle affirme tout d'abord avoir mal interprété l'axiome 3, qu'elle croyait pouvoir appliquer à tous les trios de robots, comme *L1*, *L2* et *R* par exemple. La difficulté se situe au niveau du quantificateur, qui fait la différence entre le fait que la propriété s'applique à tous les trios de robots ou à au moins un trio de robots. Anna mentionne également que « *si je faisais ça, ce serait par contradiction* », tout de suite après avoir dit vouloir prendre un chien ami avec *R* et *L1*. Le fait de vouloir prendre ce chien ne mène pas à une preuve par contradiction. Ce n'est pas clair si c'est à cela qu'elle fait référence mais compte tenu de ses difficultés dans la tâche 1 avec la preuve par contradiction, il est possible qu'elle se soit effectivement trompée. Par la suite, elle exprime qu'il est possible d'utiliser l'axiome 1 sur n'importe quelle paire de robots, ce qui est vrai et s'avèrera utile plus loin. Elle entame donc l'écriture selon cette hypothèse.

Soit un robot S.
Soit le chien ami avec S et L1 (AX1)
nommé W.

Figure 4.6 Amorce de démonstration par Anna

Il est intéressant de remarquer qu'Anna utilise un robot générique *S* au lieu de prendre le robot générique *R* donné au départ. Elle dit ensuite que s'ils trouvent un chien qui n'est pas ami avec *S*, alors ils n'ont qu'à remplacer *S* par *R*. Il semble ici qu'elle ait de la difficulté à comprendre le concept d'élément générique.

Déjà à cette étape-ci, il semblerait qu'Anna fasse la résolution un peu aveuglément, mais elle a tout de même des idées et n'a pas peur de les essayer. Elle semble aussi avoir bien compris les axiomes et la tâche de manière générale. Elle n'est pas figée vis-à-vis la tâche non liée à des connaissances contextualisées, elle ne sait pas si elle a une bonne piste mais elle essaie tout de même. De son côté, Michel semble attendre d'avoir une intuition ou du moins, une idée un peu plus claire du chemin à emprunter lorsqu'il affirme, « *moi je sais pas encore qu'est-ce que j'aurais fait dans ces circonstances* ». Il semble moins à l'aise de démarrer une résolution à l'aveugle, sans possibilité de s'appuyer sur le sens, sur le contexte.

Par la suite, Anna se questionne sur les autres liens d'amitié éventuels de *W*, qui est déjà ami avec *L1* et *S*. Elle affirme que *W* pourrait être ami avec *L2* ou bien *L3*, mais pas les deux simultanément, à cause de l'axiome 3. Elle décide, pour l'instant, de supposer que *W* est également ami avec *L2*, pour entamer une résolution par cas. Elle en déduit que *W* est le seul chien à pouvoir être ami avec *L2* et *S*, à cause de l'axiome 1. Elle tente de déduire autre chose de la situation mais elle n'y arrive pas tout de suite. Son but est de déduire du cas où *W* est ami avec *L2* (mais pas avec *L3*) que *W* n'est pas ami avec *R*, le robot générique du départ. Elle affirme qu'il resterait ensuite à examiner le cas où *W* est ami avec *L3* (mais pas avec *L2*) et le cas où *W* n'est ami ni avec *L2* ni avec *L3*. La manière dont Anna résout la tâche est syntaxique. Elle affirme qu'elle « *explore un cas et* [qu'elle] *essaie de faire des déductions* », ce qui est au cœur de la résolution syntaxique. Elle semble très à l'aise à travailler méthodiquement, en éliminant des cas et en se fixant des buts précis. Elle subdivise ainsi le problème en plusieurs cas, en partant de son hypothèse : soit *W* le chien ami avec *S* et *L1* dont l'existence est garantie par l'axiome 1. Anna et Michel introduisent, pour simplifier l'écriture, la flèche comme symbole de l'amitié : « $W \rightarrow L2$ » signifie que *W* et *L2* sont amis.

Cas $\boxed{\text{Si } W \rightarrow L_2}$, W est le seul chien
ami avec S, L_1 et L_2. (AX 1)

Figure 4.7 Premier cas traité : si *W* est ami avec *L2*

Par rapport à ce premier cas, Anna introduit un nouveau chien *X*, ami avec *L1* et *L3*, dont l'existence est garantie par *AX1* :

A : Disons que je prends... Ok! Ça veut dire que il n'y a pas de chien qui est ami avec... il n'y a pas d'autre chien qui sont amis avec *L1* et *L2* mais pour toute paire de deux robots distincts, il existe *au moins* un chien qui est ami avec et *W* ne peut pas être ami avec *L3*, donc ça veut dire qu'il existe *au moins* un autre chien qui est ami avec *L1* et *L3*.

$$\exists^{\text{chien}} \underbrace{X \rightarrow L_1 \text{ et } L_3}_{\text{AX 1}} \text{ mais } \underbrace{X \not\rightarrow L_2}_{\text{(AX 3) + Hyp}}$$

Figure 4.8 Introduction d'un nouveau chien *X*, ami avec *L1* et *L3*, mais pas avec *L2*

Ce chien *X* n'est pas ami avec *L2* à cause de l'axiome 3. Dans la réplique d'Anna, elle utilise à la fois l'unicité garantie par l'axiome 1 pour justifier qu'il n'y a pas d'autre chien ami avec *L1* et *L2*, et elle affirme que pour toute paire de deux robots distincts, il existe *au moins* un chien qui est ami avec. La spécification du « au moins », qu'elle utilise à deux reprises dans son intervention, est contraire au principe d'unicité. Il semble que ce soit une erreur d'énonciation, une confusion entre « au moins » et « au plus », car elle conserve l'unicité tout au long de sa résolution.

Anna et Michel insistent sur le fait que *X* ne peut être ami avec *L2* conséquemment à une hypothèse et à l'axiome 3, tel qu'ils l'ont écrit dans leurs traces. Ils ne précisent cependant pas de quelle hypothèse il s'agit. On peut imaginer qu'il s'agit de l'hypothèse que *W* n'est pas ami avec *L2*.

Par la suite, Michel souligne qu'il n'y a aucune information qui détermine si *X* serait ami ou non avec *S*. Anna affirme alors que s'ils réussissent à montrer que *X* n'est pas ami avec *S*, il reste seulement à changer *S* pour *R*, comme elle l'avait prévu au départ. Anna, après un court silence, a un éclair de génie et s'exclame que *X* ne peut être ami avec *S* à cause de l'axiome 1.

Comme $X \to L_1$ et $W \to S$ et L_1
par AX 1, $X \not\to S$ (unicité)

On change S pour le R défini
plus tôt.

Figure 4.9 Écriture brève de l'explication de la validité de l'énoncé

Elle explique que si *X* était ami avec *S*, alors *X* serait ami avec *L1* et *S* mais *W* est aussi ami avec *L1* et *S*, ce qui contredit l'unicité prescrite par l'axiome 1. Michel renchérit ensuite en assurant que *X* et *W* ne peuvent être le même chien car cela contredirait le fait que *X* n'est pas ami avec *L2*, car *W* est ami avec *L2* par hypothèse. Anna termine donc en disant qu'il reste à changer *S* par *R* car elle ne « savait pas où elle s'en allait » au départ, et elle avait donc choisi de réfléchir sur *S* au lieu de *R*. Cela confirme qu'Anna a de la difficulté à saisir le concept d'exemple générique.

Comme ~~X~~ W est ami simultanément avec S et L_1, et que l'axiome 1 dit qu'il existe un seul chien ami avec deux robots distincts simultanément le chien X ne peut pas être ami avec ces deux robots. Comme X est ami avec L_1, il ne peut donc pas être ami avec S.

Figure 4.10 Explication longue, en mots, des raisons de la validité de l'énoncé par Anna

Anna utilise l'unicité garantie par l'axiome 1 comme argument principal. Il est possible de se demander si cette unicité qu'elle avait préalablement mise de côté dans une de ses interventions a été comprise par Anna dès le départ et qu'elle ait seulement énoncé autre chose plus tôt, ou si elle l'a assimilée pendant une relecture des axiomes. Dans le deuxième cas, on peut croire qu'Anna a manqué un peu de vigilance à la première lecture mais cela n'a pas eu de répercussion sur la mise en œuvre de la démonstration.

Anna et Michel précisent ensuite que le cas « si *W* est ami avec *L3* » est similaire à celui qu'ils viennent de faire. Ils entament par la suite le cas « si *W* n'est pas ami avec *L2* ni avec *L3* » à l'aide de ce dessin :

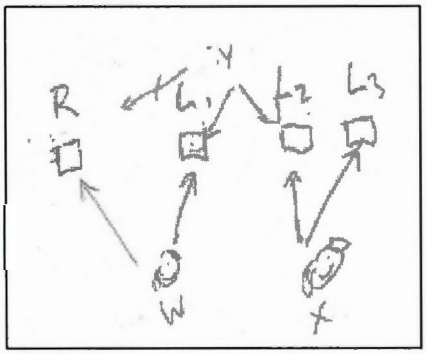


Figure 4.11 Représentation signifiante sur laquelle s'appuient Michel et Anna pour étudier le troisième cas

Tout d'abord, *W* est ami avec *R* et *L1* par hypothèse, mais nécessairement pas ami avec *L2*, ni avec *L3*, d'où les flèches entre *W* et *R* et *W* et *L1*. Ensuite, Anna et Michel se questionnent sur les relations d'amitié vis-à-vis du chien nommé *X* qui, par l'axiome 1, est le chien ami avec *L2* et *L3*. Premièrement, il ne peut être ami avec *L1* par l'axiome 3. Cependant, rien ne l'empêche d'être ami avec *R*. Ils concluent que ce n'est pas le chien qu'il leur faut pour arriver à conclure qu'il existe au moins un chien qui n'est pas ami avec *R*. Ils introduisent alors un nouveau chien *Y* qui serait ami avec *L1* et *L2*. Michel le proclame être le chien qui ne peut être ami avec *R*. Tout d'abord, il affirme que *W* et *Y* ne peuvent être identiques puisque *W* est l'unique chien ami avec *L1* et *R*. Cet argument à lui seul ne prouve rien puisque rien n'est spécifié sur l'amitié de *Y* avec *R* au départ. L'argument valable est celui que Michel avance en second lieu, à savoir que *W* n'est pas ami avec *L2* par hypothèse et que *Y* l'est, ils ne peuvent donc pas être le même.

3 $W \to L_3$ (similaire)

Cas $W \not\to L_2$ ni L_3

$\exists$ chien Y qui est ami avec L_1 et L_2 (AX1)
(Y est différent de W par Hyp.)
Comme W est le seul chien ami avec R et L
(AX 1), Y ne peut être ami avec R. $\blacksquare$

Figure 4.12 Explicitation des différents sous-cas

On peut remarquer ici que la locution « par hypothèse » (voir figure 4.12, « par Hyp. ») n'est pas utilisée à bon escient dans la production écrite, puisque *Y* n'est pas différent de *W* par « hypothèse », mais bien parce que dans le cas contraire, l'unicité dans *A1* serait contredite. Par la suite, Anna se demande pourquoi *Y* ne peut être ami avec *R* et Michel lui explique que c'est parce qu'il est ami avec *L1*. L'argument est toujours le même : si *Y* était ami avec *R*, il y aurait deux amis distincts de *L1* et *R* ce qui contredirait le volet « unicité » de l'axiome *A1*.

Au milieu de cette résolution, les étudiants ont une réflexion sur l'axiome 2. J'en parle ici car cette réflexion ayant été émise au milieu d'une suite d'idées importantes, elle empêchait de bien suivre cette suite d'idées des deux étudiants. Michel a souligné le fait qu'ils n'avaient pas encore utilisé l'axiome 2 et a ensuite affirmé qu'il faudrait l'utiliser, que ce serait « *brillant* ». Anna, pour sa part, proclame que l'axiome 2 est ce qui empêche de dire qu'il existe un chien qui n'est ami avec aucun robot, ce qui aurait terminé la tâche avant même de l'avoir entamée, et qu'en définitive, elle croit qu'il est juste inutile. Michel n'est pas convaincu, son argument étant que l'étudiant fictif, qui a entamé la démonstration, ne l'a pas utilisé non plus et que l'axiome doit être utilisé. Anna, pour sa part, voit vraiment pourquoi l'axiome 2 est important et elle ne semble pas s'en faire vis-à-vis le fait qu'elle ne l'utilise pas. À la toute fin, après avoir mis le petit carré indiquant la fin de la démonstration, Michel réitère son malaise face au fait que l'axiome 2 n'a pas été utilisé.

En somme, Anna et Michel ont étudié trois cas différents mais la considération de ces cas de manière séparée était inutile car ils n'utilisaient pas les hypothèses que *W* est ami avec *L2*, ou avec *L3*, ou ni avec l'un ni avec l'autre. En effet, dans les trois cas, une contradiction similaire apparaît et provient strictement du fait que *W* est ami avec *R* et *L1*, et non des hypothèses qui définissent les cas. Dans le premier cas, où il est tenu pour acquis que *W* est ami avec *L2*, les étudiants exhibent un chien *X* ami avec *L1* et *L3* et qui ne peut être ami avec *R* car il y aurait alors deux chiens amis avec *R* et *L1*. Ce n'est pas l'amitié avec *L2* qui est problématique ici, mais celle avec *L1*. Le deuxième cas, qu'ils n'ont pas détaillé, où *W* serait ami avec *L3*, est identique. Finalement, le troisième cas englobe les deux autres en ce sens qu'il suffit encore une fois de prendre un chien ami avec *L1* et un des deux autres chiens pour voir apparaître la même contradiction. On peut résumer les trois cas en prenant un chien qui est ami avec *L1* et un des deux autres pour voir ce qui ne fonctionne pas. Leur méthode n'est pas erronée, elle est seulement inutilement compartimentée et redondante. Il s'agit peut-être d'une précaution acquise au cours de l'expérience de compartimenter un problème afin d'oublier le moins de cas possible, même si cela peut s'avérer inutile. Par contre, cette précaution a servi dans la mesure où ils n'ont en bout de ligne pas oublié de cas. Les étudiants n'ont pas remarqué à la fin de la résolution qu'un argument plus direct était accessible mais il n'est pas impossible qu'ils l'auraient éventuellement compris s'ils avaient pu passer plus de temps sur la tâche. Dans le contexte de cette recherche, ils sont passés à la tâche suivante.

<u>Résumé</u>

Axe 1 : Michel semblait attendre d'avoir une intuition, un certain appui sur le sens ou le contexte, pour choisir un chemin, ce dont Anna n'avait visiblement pas besoin. Anna, pour sa part, était très confiante et tentait différentes approches. Elle essayait un cas et tentait de faire des déductions. Elle était à l'aise à réaliser une démonstration où elle ne possédait pas de connaissances contextualisées vis-à-vis les objets en jeu, et utilisait une méthode sûre qu'elle savait bonne, grâce à son expérience mathématique.

Axe 2 : En ce qui concerne la manière dont la résolution a été menée, c'est particulièrement Anna qui a été à la tête de la résolution. Il semble qu'Anna avait une tendance plus syntaxique dans cette résolution tandis que Michel recherchait à utiliser une voie plus sémantique, sans succès car les objets en jeu dans la tâche étaient nouveaux. Les étudiants se sont aussi grandement appuyés sur un dessin (figure 4.11), une représentation signifiante, représentant la situation pour réfléchir au dernier cas. Il n'a pas semblé que les étudiants aient eu besoin d'un but pour avancer dans la résolution.

Axe 3 : Anna a tout d'abord commis une erreur en croyant que l'axiome 3 était quantifié universellement mais elle s'est elle-même corrigée. Par la suite, en prenant un second robot générique *S*, on peut croire qu'elle a de la difficulté à bien comprendre ce qu'est un élément générique et comment l'utiliser. Également, elle utilise à voix haute l'expression « *il existe au moins* » pour un axiome où, en réalité, il est spécifié « *il existe exactement un* ». Elle se corrige par la suite mais on peut croire qu'elle possède un peu moins de vigilance au niveau des spécifications logiques sans toutefois commettre d'erreur. La démonstration est symbolisée adéquatement et fait intervenir une symbolisation combinée avec des mots.

4.3.1.4 Tâche 4 (23 minutes)

Michel semble avoir eu dès la première lecture l'intuition que c'est en particulier le 2^e^ argument qui cause problème, car il a dessiné une flèche vis-à-vis cet argument avant même de commencer la discussion, pendant le temps alloué à la lecture. Quand je l'ai interrogé sur la raison de cet ajout, il n'a pas semblé s'en souvenir. Après un silence, je les ai relancés sur ce qu'ils pensaient de la démonstration et ce qui ressort de l'échange qui a suivi, c'est qu'ils sentaient que quelque chose ne fonctionne pas, sans toutefois être capables d'emblée de dire exactement quoi. Anna remarque immédiatement qu'il n'y a pas d'information sur la surjectivité ou l'injectivité de la fonction tandis que Michel s'attarde à la formulation « $f(x)$ appartient à », qu'il qualifie de truquée (« *c'est pas nécessairement vrai que tu peux l'écrire de la façon f(x). C'est ça que je veux dire.* [...] *ce n'est pas nécessairement vrai que f(x) va être un f(x).* ») Il tente en vain d'expliquer son argument à Anna et il se souvient ensuite que c'est pour cette raison qu'il a mis une flèche vis-à-vis le 2^e argument. Ce que Michel semble, maladroitement, vouloir expliquer ici est que la notation porte à confusion vis-à-vis l'antécédent de l'élément choisi dans l'image. L'idée ne semble pas très claire encore pour lui.

À la suite de ces échanges, Anna semble avoir un éclair de compréhension et s'exclame que si l'application n'est pas injective, il est possible qu'il y ait un élément dans l'image qui provienne d'un autre antécédent que x. Elle a mis le doigt sur la raison pourquoi la conjecture est fausse. En effet, si $f(x)$ est dans $f(A)$ et si la fonction n'est pas injective, la valeur $f(x)$ peut avoir plus d'un antécédent que seulement x. Cependant, Anna ne semble pas très convaincue (« *mais ce n'est pas une application de la fonction ici, c'est une égalité entre deux ensembles et je reviens pas dans l'ensemble de départ, donc ça n'a pas de sens* »), son idée semble encore n'être qu'une intuition, de sorte qu'elle ne peut l'expliquer assez clairement pour convaincre Michel ou même pour construire un contre-exemple.

À la suite de l'intervention d'Anna, Michel doute désormais de son idée. Anna propose alors de faire un dessin. Elle semble privilégier cette technique, autant pour comprendre et se convaincre que pour se donner un coup de pouce lorsqu'elle est bloquée dans une résolution, et aussi pour se remémorer des concepts comme l'injectivité et la surjectivité. Le dessin aide Michel à régler le cas de l'ensemble vide, c'est-à-dire quand il n'y a aucun x ou aucun $f(x)$.

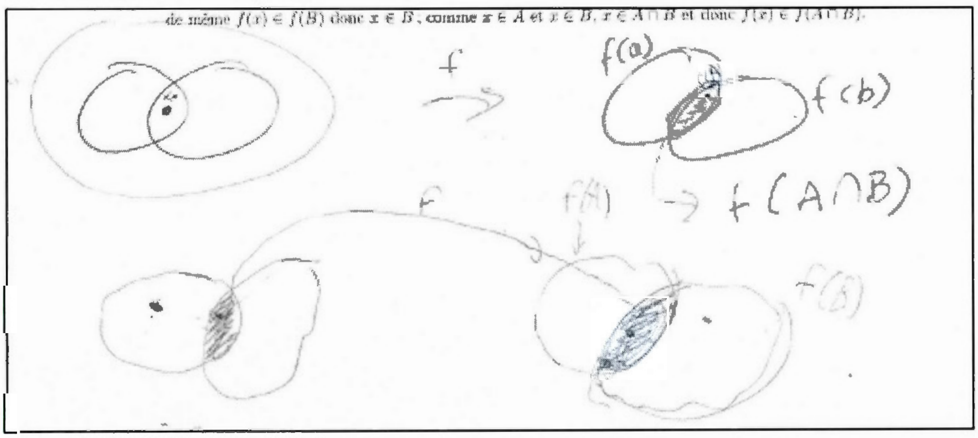


Figure 4.13 Représentation signifiante sur laquelle s'appuient les étudiants pour réfléchir à la tâche

Les deux étudiants tiennent à ce moment un discours assez confus. Ils croient qu'il y a un problème avec la démonstration et éventuellement avec l'énoncé, dû à l'ambiguïté vis-à-vis l'injectivité ou la surjectivité de la fonction. Ils tentent de construire une contre-argumentation de manière un peu aveugle, en ce sens qu'ils essaient d'utiliser des dessins et des définitions pour mieux comprendre l'énoncé (qu'ils ne semblent pas tout à fait maîtriser à ce moment-ci) et tenter de trouver un filon. Ils ne questionnent pour l'instant pas la démonstration mais bien l'énoncé. À l'aide du dessin représentant la situation, Michel se rend compte que la première inclusion est vraie mais ne commente pas la symbolisation utilisée. À l'aide du même dessin, Anna croit la deuxième inclusion vraie tandis que Michel doute encore. Ensuite, ils se questionnent sur le cas où un point dans $A \backslash B$ et un point dans $A \cap B$ serait envoyé vers le même élément dans $f(A) \cap f(B)$, à savoir si cela contredirait l'égalité recherchée. Selon Anna, même si un point, disons y, est situé dans $A \backslash B$ et si son image $f(y)$ est dans $f(A) \cap f(B)$, il n'y a pas de problème car il existe nécessairement un autre point, disons z, dans $A \cap B$ dont l'image $f(z)$ est égale à $f(y)$.

Ce point de vue est à nuancer. En fait, la présence d'un point dans $A \backslash B$ et un dans $A \cap B$ qui sont tous deux envoyés dans $f(A) \cap f(B)$ ne contredit pas l'égalité. Par contre, si un point dans $A \backslash B$ est envoyé dans $f(A) \cap f(B)$, cela ne signifie pas nécessairement qu'il existe un point dans $A \cap B$ ayant la même image. Ces questionnements montrent bien toutes les subtilités de cette tâche. N'étant pas convaincu, Michel cherche un contre-exemple à la deuxième inclusion.

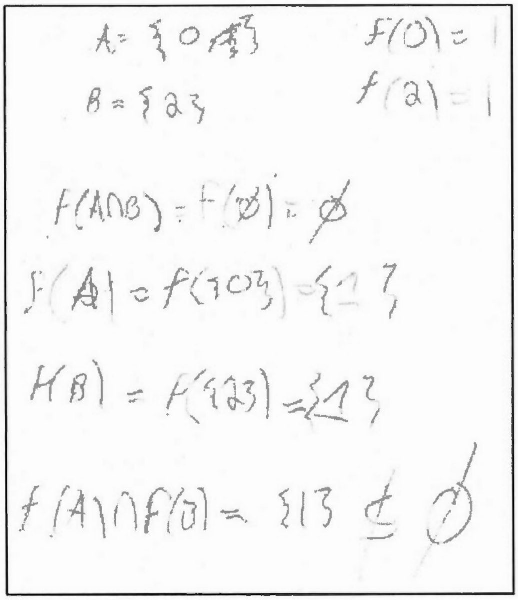


Figure 4.14 Contre-exemple exhibé par Michel pour contredire la deuxième inclusion.

Le contre-exemple qu'il exhibe le convainc mais Anna demande à savoir exactement ce qui ne fonctionne pas. Elle ne semble pas satisfaite du contre-exemple, elle veut comprendre pourquoi l'énoncé n'est pas vrai. Elle recherche une compréhension interne au problème. Pour Michel, son contre-exemple a confirmé ses doutes et il peut maintenant expliquer à Anna avec confiance ce qui ne fonctionne pas dans la démonstration :

M : ça ne marche pas parce que ici, il dit $f(x)$ est inclus dans $f(A) \cap f(B)$, alors $f(x)$ appartient à $f(A)$. Mais là... y peut appartenir à $f(A) \cap f(B)$ mais ce n'est pas nécessairement vrai qu'il va exister... que ça va être le même x [associé au y] dans $f(A)$ et $f(B)$.

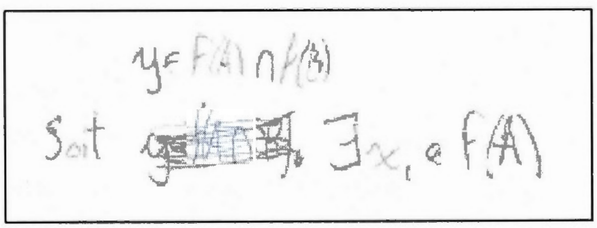
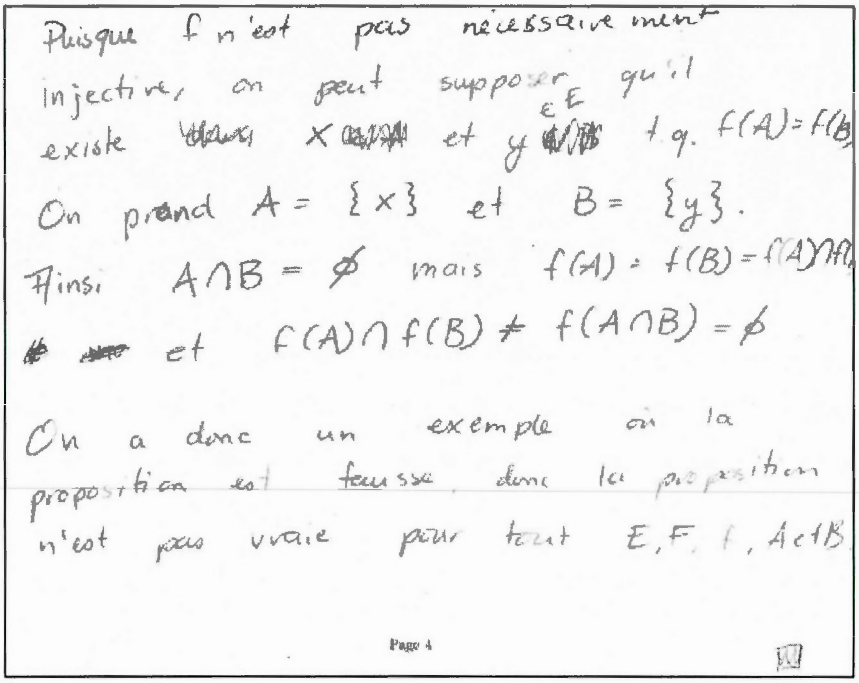


Figure 4.15 Notation proposée par Michel pour régler le problème

M : Parce que il l'a écrit... il s'est mis dans le trouble lui-même [...] et là, pourquoi sa preuve ne marche pas, c'est parce que le y est dans $f(A) \cap f(B)$ c'est pas nécessairement le même x qui fait que $f(y)$... c'est exactement comme ce qu'[Anna] dit ou comme mon exemple... il faut jamais prendre en considération que,

quand on fait des trucs avec des ensembles et les images, il ne faut jamais prendre [...] $f(x)$, il faut que tu prennes y et là quand tu es certain que c'est le même x... sinon tu le fais pas.

En d'autres mots, un élément $f(x)$ peut avoir plus d'un antécédent et il est donc prématuré de l'écrire $f(x)$ plutôt que y, puisqu'alors on présume en quelque sorte de ce que sera son antécédent. Anna ne semble pas tout à fait convaincue, elle ressent le besoin de composer son propre contre-exemple et de continuer à réfléchir sur l'énoncé.


Puisque f n'est pas nécessairement injective, on peut supposer qu'il existe $x \in E$ et y t.q. $f(A) = f(B$

On prend $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$.

Ainsi $A \cap B = \emptyset$ mais $f(A) = f(B) = f(A) \cap f($

et $f(A) \cap f(B) \neq f(A \cap B) = \emptyset$

On a donc un exemple où la proposition est fausse, donc la proposition n'est pas vraie pour tout E, F, f, A et B

Page 4

Figure 4.16 Contre-exemple proposé par Anna

Anna ressent le besoin de comprendre vraiment pourquoi l'énoncé est valide ou invalide. Une démonstration purement logique ou encore un contre-exemple ne lui suffit pas si la démonstration n'explique pas en quoi l'énoncé est faux. Anna semble avoir besoin de raisonner sur l'énoncé. Finalement, les deux étudiants statuent sur le fait que la proposition serait valide si la fonction était injective.

Encore une fois, Anna utilise un dessin pour se rappeler certains concepts, dans ce cas-ci celui de fonction. Ils ne soulignent pas l'erreur qui consiste à présumer que x dans $f(x)$ est nécessairement dans $A \cap B$. Ils trouvent cependant l'erreur dans le deuxième argument et sont capables d'expliquer à la fois l'erreur dans la formulation et aussi, pourquoi l'inclusion n'est pas toujours valide. Michel trouve l'erreur en particulier à cause de son intuition première que quelque chose clochait et du fait qu'aucune explication ne pouvait le convaincre, après quoi il est allé à la recherche d'un contre-exemple. C'est à ce moment qu'ils ont, pour la première fois, questionné la validité de l'énoncé. Michel a semblé dès le départ avoir l'intuition que quelque chose clochait mais il lui a fallu le contre-exemple pour confirmer. Pour Anna, elle était convaincue de la véracité de l'énoncé, jusqu'au contre-exemple exhibé par Michel. Après quoi elle a eu besoin d'explications supplémentaires pour vraiment comprendre ce qui ne fonctionnait pas. Il semble qu'elle ait besoin d'atteindre une compréhension intuitive pour être réellement convaincue.

Résumé

Axe 1 : Michel avait dès le départ l'intuition que quelque chose ne fonctionnait pas. Il s'est convaincu par le contre-exemple qu'il a exhibé et il a ensuite expliqué précisément l'erreur. Anna, pour sa part, n'a pas été convaincue par le contre-exemple. Elle ressent le besoin de comprendre précisément ce qui ne fonctionne pas, compréhension qu'elle atteint pour ensuite trouver un autre contre-exemple plus général, qui la convainc mieux. Les deux étudiants semblent donc avoir atteint une conviction intuitive interne.

Axe 2 : Anna et Michel utilisent un dessin pour représenter la situation (figure 4.13) et Anna en utilise d'autres pour se remémorer ce qu'est une fonction et ce qu'est l'injectivité. Le dessin de la situation et des différents rappels les aide à avancer.

4.3.2 Jeanne et Lucie

Brièvement, Jeanne et Lucie forment une dyade homogène. Les étudiantes ont toutes deux suivi un cours de logique et ont démontré des connaissances moyennes au test diagnostique, c'est-à-dire similaires à celles de Michel mais inférieures à celles démontrées par les étudiants de la quatrième dyade.

4.3.2.1 Tâche 1 (13 minutes)

Dès le départ, les deux étudiantes affirment que la démonstration est erronée, sans savoir exactement pourquoi. Jeanne affirme que l'étudiant fait une preuve par contradiction mais qu'il n'énonce pas le « *contraire* ». Elle affirme que le bon contraire serait « *le double de certains nombres irrationnels est rationnel* » et Lucie renchérit en disant que l'étudiant n'a pas changé son « *pour tout* » par un « *il existe* », ce qui cause le problème. Jeanne acquiesce à cette remarque en soulignant que cela s'applique « *si on procède méthodiquement pour énoncer un contraire* ». Cette remarque suggère qu'il y aurait, pour Jeanne, une autre manière de faire, qu'elle aurait peut-être fait autrement. J'y reviendrai.

Ensuite, les étudiantes soulignent que l'étudiant fictif exhibe l'exemple d'un irrationnel dont le double est irrationnel, ce qui n'est pas valable pour démontrer l'énoncé car il s'agit d'un exemple du théorème. Elles révèlent que cet exemple ($\sqrt{2}$ et $2\sqrt{2}$ sont irrationnels) est en effet contradictoire à ce que l'étudiant considère comme l'énoncé à contredire (*le double de tout nombre irrationnel est rationnel*), mais que ce n'est en somme pas ce qu'il faut contredire pour démontrer le théorème. De manière surprenante, même après que Jeanne ait formulé l'énoncé contradictoire correct du théorème, lorsque Lucie le met par écrit, elle énonce « il existe un irrationnel dont le double est irrationnel ». Il s'ensuit une discussion où Jeanne essaie de convaincre Lucie de changer son énoncé pour « il existe un irrationnel dont le double est rationnel ». Lucie semble donc avoir un contrôle plus faible sur la négation que Jeanne. Dans le test diagnostique, les deux étudiantes ont commis une erreur à la question sur la négation de l'énoncé. Malgré cela, Jeanne est tout à fait capable de mener la preuve par contradiction et de réaliser la négation adéquatement. Il est donc possible de croire que Jeanne a réalisé une négation en réfléchissant plus sur la sémantique de l'énoncé, c'est-à-dire qu'elle réfléchit sur ce que signifie pour un énoncé précis qu'il soit faux. Lucie, pour sa part, semble y aller plus syntaxiquement, ce que Jeanne appelle *procéder méthodiquement*, ce qui se reflète lorsqu'elle dit que l'étudiant n'a pas changé son « pour tout » pour un « il existe ». Cette méthode vraisemblablement syntaxique ne permet pas à Lucie de voir son erreur rapidement.

Face à la question de savoir comment elles vont mener la démonstration, elles ne sont pas certaines d'y aller par contradiction. Par la suite, Jeanne affirme qu'en y allant avec une preuve directe, il faudrait exhiber un irrationnel, ce qui serait trop difficile de sorte que la preuve par contradiction serait plus simple. Elles construisent la démonstration (voir figure 4.17), semble-t-il, de deux manières différentes. Lucie semble manipuler les symboles adéquatement sans vraiment savoir où aller. En effet, elle propose de transformer $2a = c/d$ en $2ad = c$, tandis que Jeanne semble avoir une meilleure idée du chemin le plus efficace à emprunter en proposant de transformer l'égalité en $a = c/2d$, qui mène directement à la contradiction. Il s'agit en effet d'un type de démonstration assez commun lorsqu'il est question de rationnels et d'irrationnels : supposer que le rationnel s'écrit comme un quotient de deux entiers et en déduire une contradiction. Le plus souvent, cette contradiction sera qu'un irrationnel peut être exprimé comme le quotient de deux entiers, ce qui est faux pour tout irrationnel. La manipulation suggérée par Jeanne peut donc être considérée comme un savoir-faire contextualisé à ce type de tâches.

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tq $2a \in \mathbb{Q}$.

$\exists\, c, d \in \mathbb{Z}, d \neq 0$ t.q $2a = \dfrac{c}{d}$

$$\Longleftrightarrow \quad a = \frac{c}{2d}$$

$$\frac{c}{2d} \in \mathbb{Q} \qquad \#$$

$$a \notin \mathbb{Q}$$

Donc le double de tout nb rationnel est rationnel.

$\square$

Figure 4.17 Démonstration proposée

En ce qui concerne le commentaire qu'elles donneraient à l'étudiant auteur de la démonstration, Jeanne et Lucie formulent une réflexion intéressante :

L : Je dirais pas mal qu'il n'a pas énoncé le bon contraire.

J : Moi ce que j'aurais envie de dire, ce que l'on pourrait dire rapidement c'est : écris ton énoncé dans un... en symbolique puis fais ton contraire sans réfléchir. Puis ça, ça fonctionne tout le temps sauf que moi j'ai un peu un problème aussi avec ça, parce que j'ai l'impression que tu comprends pas tandis que [*inaudible*]. Pour un étudiant qui aurait de la difficulté et qui voudrait passer les examens, ça peut-être que j'aurais envie de dire que c'est ça la méthode. Écris ton énoncé pour tout x appartenant aux irrationnels [écris le théorème en symbole] et là tu fais le contraire de ça. [...] Pour moi c'est évident, mais c'est peut-être pas assez symbolisé pour que ce soit clair de le faire sans réfléchir, quelqu'un pourrait me demander pourquoi tu as changé « irrationnel » pour « rationnel » et pourquoi tu ne l'as pas changé ailleurs mais c'est parce que la proposition ici c'est « pour tous les éléments des irrationnels » et le contraire de ça, c'est « il existe un élément des irrationnels ».

[...]

L : je pense que c'est plus simple de l'expliquer à quelqu'un en voyant plus le concept que juste la symbolique.

S : quel concept ?

L : Le concept de... juste lui montrer que ici, dans le fond, tout ce qu'il a fait c'est nous montrer un exemple qui... Dans le fond, que si on prend son contraire, « ainsi supposons que le double de tout nombre irrationnel est rationnel », ça se trouve à être juste un...

J : ben c'est ça. Lui tout ce qu'il nous montre, c'est qu'il existe un irrationnel tel que son double est irrationnel. [...] il a montré un cas au lieu de pour tous.

Ici, Jeanne voit certaines manipulations symboliques comme une manière de ne pas s'empêtrer dans des idées mathématiques complexes, comme un outil avec lequel on n'a pas explicitement besoin de réfléchir, seulement exécuter les bonnes manipulations correctement. Ces manipulations qu'il suffit d'exécuter semblent pour Jeanne une bonne manière de réussir une tâche, sans toutefois vraiment qu'elle comprenne le fond des choses, état qu'elle ne semble pas trouver souhaitable. Elle considère la négation de l'énoncé écrit en mots comme une tâche relativement évidente, mais elle comprend qu'un énoncé en mots est plus difficile à manipuler qu'un énoncé complètement symbolisé. On peut faire un lien entre ce discours et ce qu'elle a dit précédemment, à savoir que pour elle, changer le quantificateur sans trop y réfléchir est un chemin méthodique et qu'elle donne de la valeur à une compréhension profonde quoique, pour réussir, il faut parfois manipuler sans trop réfléchir. Cependant, Lucie ne semble pas satisfaite de cette explication, elle semble donner une plus grande importance à la compréhension derrière les manipulations. Ces étudiantes soulèvent ici la distinction, vue dans la section 2.3, que Fischbein fait entre la conviction formelle extrinsèque (conviction issue d'un argument formel) et la conviction intuitive intrinsèque (conviction issue de la structure de la situation en elle-même) (Fischbein, 1982, p. 11).

Après cet échange, Jeanne avance l'idée que ce que l'étudiant a énoncé est peut-être la contraposée de l'énoncé. Lucie énonce par la suite la contraposée, qui serait selon elle « *tout nombre rationnel implique son double est rationnel* », et elles laissent tomber la piste. Cette erreur réalisée d'une part par Jeanne lorsqu'elle croit qu'il s'agit de la contraposée, et d'autre part par Lucie qui réalise de manière inadéquate la contraposée, est surprenante, car elles avaient toutes deux énoncé correctement la contraposée d'un énoncé simple en langage symbolique dans le test diagnostique. L'hypothèse qu'il est possible d'émettre ici est qu'elles sont capables d'effectuer la contraposée d'un énoncé simple écrit en symboles, de type $A \Rightarrow B$, sans toutefois pouvoir étendre cette connaissance à un énoncé en mots faisant intervenir des concepts mathématiques. Cela contraste avec le fait que Jeanne a été capable de d'énoncer la négation de l'énoncé mathématique en mots avec une implication implicite (« *Le double de tout nombre irrationnel est irrationnel* »), sans toutefois avoir eu la bonne réponse dans le test diagnostique quand il était question de formuler la négation d'une implication. Ainsi, on peut voir que les étudiants peuvent avoir un contrôle différent, soit plus sémantique ou plus syntaxique selon le contexte, sur différentes notions logiques. En ce qui concerne Lucie, elle a éprouvé des difficultés à formuler la négation dans les deux cas.

<u>Résumé</u>

Axe 1 : Lucie ne semble pas utiliser son intuition ou ses connaissances contextualisées lors de la démonstration, tandis que Jeanne semble l'utiliser car elle a une idée plus claire du chemin le plus efficace.

Axe 2 : Lucie semble utiliser une méthode plus syntaxique en proposant des manipulations justes mais pas nécessairement les plus efficaces, tandis que Jeanne semble réfléchir à la sémantique de l'énoncé. Ainsi, Lucie semble avoir une orientation syntaxique et Jeanne une orientation plus sémantique.

Axe 3 : Lucie éprouve des difficultés à énoncer la négation. Il semble que Lucie ait un contrôle plus syntaxique sur la négation (interchanger méthodiquement les quantificateurs), tandis que Jeanne a un contrôle plus sémantique et réalise la négation en se basant plutôt sur la signification de l'énoncé. Elles offrent une réflexion intéressante sur la différence entre la compréhension de la manipulation et la seule manipulation pour réussir, réflexion qui sera commentée à la section 5.2.2.

4.3.2.2 Tâche 2 (7 minutes)

Dès le départ, Lucie démarre en disant qu'elle veut vérifier la validité de l'énoncé en essayant de trouver un contre-exemple :

L : moi la première chose que je fais dans ce temps-là, c'est essayer de penser à deux choses simples et hum… à deux exemples simples, et voir si c'est vrai ou pas. À voir si je suis capable de montrer, de trouver un contre-exemple rapidement, pour voir si c'est faux. Moi c'est toujours le premier réflexe que j'ai.

Finalement, l'équipe prend un autre chemin. Cependant, ce réflexe, issu d'une connaissance opératoire, peut provenir d'une connaissance contextualisée à ce type d'énoncés, où il est simple de générer des exemples pour éventuellement se convaincre de la validité ou de l'invalidité, ou du moins de générer une intuition. Il s'agit de l'application d'une pratique contextualisée à ce type de tâches, où des contre-exemples typiques peuvent facilement apparaître. Par la suite, Lucie exhibe ce qu'est la surjectivité par la définition symbolique, puis de manière orale, en disant qu'il s'agit de l'action d'*atteindre* tous les éléments de l'ensemble d'arrivée.

Soit $f : A \to B$
$\forall b \in B$, $\exists a \in A$ t.q $f(a) = b$

Figure 4.18 Surjectivité de *f*

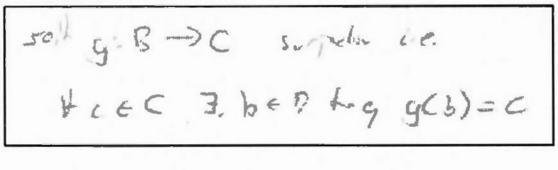


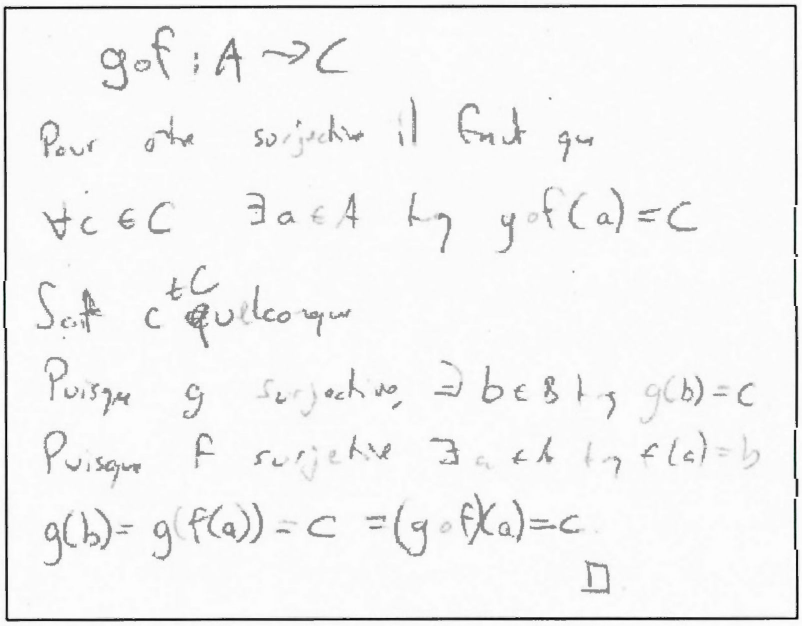
Figure 4.19 Surjectivité de g

Après avoir écrit ce que signifie pour f, g et $g \circ f$ d'être surjectif, les deux étudiantes sont convaincues de la véracité de l'énoncé. Ainsi, il semble qu'elles ont eu besoin d'entamer la démonstration, de discuter des idées mathématiques en jeu, pour s'en convaincre.

Elles utilisent plusieurs expressions qui suggèrent une forte image mentale ou compréhension intuitive de la surjection, comme « atteindre » ou « couvrir » (« *si tu veux t'en convaincre, c'est assez évident que si tu as une fonction qui couvre toute ton image, la composition va pouvoir couvrir toute l'image aussi* »). Pendant que Jeanne est capable d'expliquer que son image mentale est représentée par des cercles et des points et que c'est avec ces images qu'elle s'est convaincue de la véracité de l'énoncé, Lucie affirme qu'elle possède une image mentale mais n'est pas capable de l'exprimer : « *qu'est-ce que j'ai dans la tête quand je dis ça ?... je sais que j'ai de quoi* [dans la tête] *parce que je fais des maths pas mal visuellement, mais... non, je sais pas* ».

Cette situation ne peut indiquer avec certitude si Lucie possède une représentation signifiante assez solide pour raisonner sur la surjectivité et si elle ne peut tout simplement pas la décrire, ou bien si son image mentale n'est pas assez forte de sorte qu'elle ne peut la décrire ou encore s'y appuyer pour réfléchir.

Les étudiantes proposent alors une démonstration, à la suite des définitions, sur la même feuille. Au départ, elles définissent deux fonctions surjectives $f : A \to B$ et $g : B \to C$, de sorte que $\forall b \in B$, $\exists a \in A$ tel que $f(a) = b$ et $\forall c \in C$, $\exists b \in B$ tel que $g(b) = c$. Par la suite, elles infèrent que, pour un $c \in C$ quelconque, puisque g est surjective, $\exists b \in B$ tel que $g(b) = c$, et que puisque f est surjective, $\exists a \in A$ tel que $f(a) = b$. Finalement, que $g(b) = g(f(a)) = c$.



$g \circ f : A \to C$

Pour être surjective il faut qu

$\forall c \in C \quad \exists a \in A$ tq $g \circ f(a) = c$

Soit $c \in C$ quelconque

Puisque g surjective, $\exists b \in B$ tq $g(b) = c$

Puisque f surjective $\exists a \in A$ tq $f(a) = b$

$g(b) = g(f(a)) = c = (g \circ f)(a) = c$

$\square$

Figure 4.20 Démonstration proposée

On peut brièvement remarquer que les étudiantes ont utilisé les mêmes variables dans la définition de la surjectivité et dans la démonstration. Cela ne doit pas être évalué selon moi comme une erreur car il est clair que les étudiantes ont considéré les variables utilisées une deuxième fois comme étant « nouvelles », ce qui exclut les erreurs d'instanciations.

Dans le même ordre d'idées, elles ont commencé la preuve à partir du bon ensemble, c'est-à-dire l'ensemble d'arrivée de la fonction appliquée en deuxième, tel que la tâche l'exigeait, et elles ont manipulé des éléments génériques des ensembles au lieu de manipuler directement les ensembles (comme c'était le cas pour Michel, de la première dyade). Elles se sont questionnées à la toute fin sur le fait que ce ne sont pas toutes les fonctions qui peuvent se prêter à une composition et qu'il fallait s'en assurer, ce qui est une bonne précaution à prendre.

Finalement, il semble qu'elles étaient tellement convaincues de la véracité de l'énoncé, à l'aide de leur représentation mentale, leur représentation visuelle et leur intuition, qu'elles n'ont pas remis l'énoncé en doute. Certes, Lucie a exprimé vouloir essayer de trouver un contre-exemple au tout début mais elle n'a pas poursuivi dans cette direction.

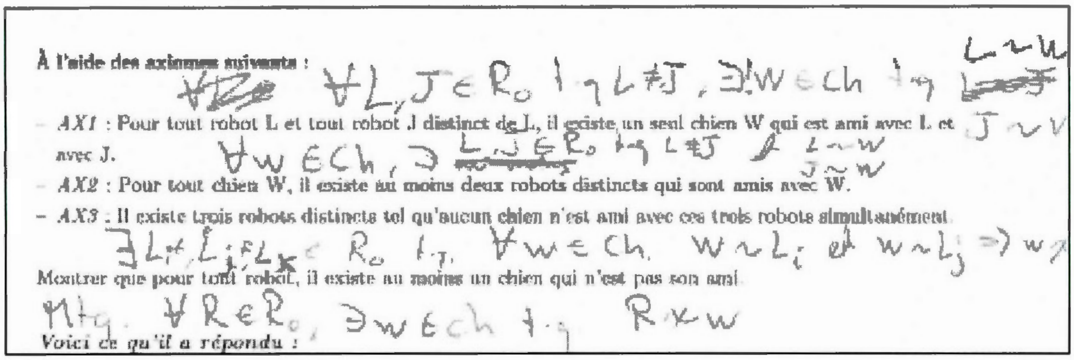
Résumé

Axe 1 : L'idée de Lucie de chercher un contre-exemple est probablement une pratique qu'elle a développée dans ce type de tâches, où un contre-exemple facilement trouvé peut économiser du temps puisque l'énoncé est alors invalidé dès le départ. Les deux étudiantes ont atteint une conviction interne intuitive.

Axe 2 : Les étudiantes discutent de la surjectivité en terme de « couvrir » et d'« atteindre », ce qui donne une bonne idée de leur compréhension intuitive. Jeanne explique qu'elle a une image mentale constituée de cercles et de points, tandis que Lucie dit faire des mathématiques de manière visuelle sans toutefois être capable d'exprimer quelle image mentale elle a à ce moment-là. Grâce à ces représentations, elles semblent utiliser une orientation plus sémantique.

4.3.2.3 Tâche 3 (48 minutes)

La résolution a démarré avec Lucie, qui affirme que la première chose qu'elle ferait est de mettre en symboles, et donc de trouver une représentation signifiante pour elle, des trois axiomes. À cela, Jeanne répond que c'était aussi ce qu'elle avait envie de faire au début, mais qu'après avoir relu les axiomes et le début de la démonstration, ce n'était peut-être pas nécessaire. Elle explique qu'elle a lu les axiomes deux fois et qu'elle n'arrive pas à comprendre, de sorte que de les exprimer à l'aide d'un autre symbolisme semble une solution attrayante pour le contrôle. Elle considère par contre qu'après ce qui a été fait dans la première partie de la preuve, ce qui reste à faire ne lui semble pas assez long et difficile pour nécessiter la réécriture. Elle considère que le mal qu'elle se donnerait n'est pas nécessaire car elle a pu comprendre le reste du problème à résoudre, et ce qu'il reste à faire semble négligeable. Ainsi, symboliser serait un moyen intéressant, mais seulement dans les cas où le travail est long, sinon elle préfère s'en passer. Pour Lucie, l'obstacle que posent les axiomes comme ils sont écrits semble plus important, car elle affirme ne pas avoir bien compris ce qu'il fallait démontrer ni le début de la preuve. Pour elle, la réécriture est essentielle, ce qu'elles entament ensemble.



À l'aide des axiomes suivants :

$\forall L, J \in R_o$ t.q. $L \neq J$, $\exists! W \in Ch$ t.q. $L \sim W$ $J \sim W$

– *AX1* : Pour tout robot L et tout robot J distinct de L, il existe un seul chien W qui est ami avec L et avec J.

$\forall W \in Ch$, $\exists$ $L, J \in R_o$ t.q. $L \neq J$ & $L \sim W$ $J \sim W$

– *AX2* : Pour tout chien W, il existe au moins deux robots distincts qui sont amis avec W.

– *AX3* : Il existe trois robots distincts tel qu'aucun chien n'est ami avec ces trois robots simultanément.

$\exists L_i \neq L_j \neq L_k \in R_o$ t.q. $\forall W \in Ch$, $W \sim L_i$ et $W \sim L_j \Rightarrow W \nsim L_k$

Montrer que pour tout robot, il existe au moins un chien qui n'est pas son ami.

Mtq. $\forall R \in R_o$, $\exists W \in Ch$ t.q. $R \nsim W$

Voici ce qu'il a répondu :

Figure 4.21 Symbolisation des axiomes

Ayant posé ~ comme symbole représentant l'amitié, elles ont proposé la symbolisation suivante que l'on retrouve dans la figure précédente :

- *AX1* : $\forall L, J \in R_0$ tels que $L \neq J$, $\exists!$ $W \in Ch$ tel que $L \sim W$ et $J \sim W$.
- *AX2* : $\forall W \in Ch$, $\exists L$, $J \in R_o$ tels que $L \neq J$ et $L \sim W$ et $J \sim W$.
- *AX3* : $\exists L_i \neq L_j \neq L_k \in R_o$ tels que $\forall W \in Ch$, $W \sim L_i$ et $W \sim L_j \Rightarrow W \nsim L_k$.

Ces symbolisations sont adéquates et respectent les spécifications d'existence, d'universalité et d'unicité présentes dans les différents axiomes. Elles ont tout de même pris quelques raccourcis d'écriture qui vont à l'encontre d'une formalisation usuelle, comme par exemple $\exists L_i \neq L_j \neq L_k \in R_o$, malgré que les idées qu'elles veulent transmettre soient valides. Cependant, durant la réalisation de la symbolisation, Lucie et Jeanne se sont butées à certaines difficultés liées à la quantification. En particulier, voici un extrait du moment où Lucie mettait à l'écrit une symbolisation de l'axiome 2, où elles ont dû revenir sur celle de l'axiome 1 :

L : est-ce qu'il existe un symbole pour représenter « au moins un » ?

J : oui, un point d'exclamation.

L : non ça c'est « un unique ».

J : ah oui, excuse-moi, tu as raison. Mais là, c'est à [*AX1*] que tu dois mettre un point d'exclamation. « Il existe » ça contient déjà « au moins un ».

Lucie a en effet dû changer le « ∃ » de la symbolisation de *AX1* pour un « ∃! ». Ces quelques interventions démontrent que les étudiantes ont des difficultés qui sont surprenantes d'après leur profil logique. Il ne semble pas que ce soit une erreur engendrée par l'originalité de la tâche. En effet, l'idée que le quantificateur existentiel sous-entend un « au moins » est un concept de base en logique et qui est utilisé en mathématiques en général. Selon Fabert et Grenier (2011), l'interprétation de la quantification comme étant « exactement un » au lieu de « au moins un » a été relevée fréquemment chez des élèves de Seconde (15-16 ans) mais pas chez des élèves plus avancés (Terminale et Classe préparatoire aux Grandes Écoles, 18 à 21 ans environ) dans la scolarité.

À la suite de la symbolisation, Lucie questionne Jeanne sur la différence entre l'axiome 1 et l'axiome 2 : « *pour toute paire de robots, il existe un chien qui est ami avec les deux et pour tout chien, il existe une paire de robots... Ce n'est pas la même chose ? C'est quoi le sens entre l'axiome 1 et l'axiome 2* ». Ce qu'il y a à remarquer ici, c'est qu'elle n'a pas assimilé que la quantification est échangée, ce qui change la signification de l'énoncé. En effet, dans l'axiome 1, la quantification universelle porte sur les robots et la quantification existentielle porte sur le chien, tandis que l'axiome 2 associe la quantification universelle au chien et la quantification existentielle aux deux robots. La différence est que l'axiome 1 garantit un (unique) chien ami à toute paire de robots et l'axiome 2 garantit à tout chien (au moins) une paire de robots dans ses liens d'amitié. Ils ne disent en effet pas la même chose. C'est ce que Jeanne explique à Lucie mais ce faisant, elle commet une erreur qui se répercutera sur le reste de leur résolution : Jeanne affirme que ces deux axiomes garantissent une bijection entre les chiens et les paires de robots distincts. Plus précisément, chaque axiome garantit un sens de cette bijection et qu'ainsi, l'ensemble des paires de robots distincts et l'ensemble des chiens ont la même cardinalité.

Cet échange est crucial pour le reste de la résolution. Malheureusement, ce que Jeanne semble avoir oublié, c'est que l'axiome 2 stipule que pour chaque chien, il existe **au moins** deux robots qui sont ses amis, de sorte qu'il peut y avoir plus de deux robots amis avec un même chien. Ce n'est donc pas une bijection. Il pourrait en effet exister un même chien ami avec trois robots différents (et donc trois paires de robots distincts), si ces robots ne sont pas ceux dictés par l'axiome 3. En fait, ce qu'on peut dire de la relation d'amitié entre l'ensemble des robots et l'ensemble des chiens, telle que décrite par les trois axiomes, c'est que tous les éléments sont touchés par la relation.

Par la suite, Lucie prend du temps en silence pour relire le début de la démonstration. Pour s'aider, elle trace des dessins sur la table avec ses doigts. Elle utilise donc une représentation visuelle signifiante pour elle. Elle a ensuite rédigé le début de la démonstration à sa manière pour bien l'assimiler. On voit que Lucie a besoin de faire pour comprendre. Lorsque cela est fait, les deux étudiantes attaquent le deuxième cas, c'est-à-dire le cas où *R* est différent de *L1*, *L2* et *L3*, mais Jeanne exprime d'abord ses doutes sur l'utilité de la première partie de la preuve. Ici, Jeanne prend en considération le cas où *R* ne serait pas *L1*, *L2* ou *L3* mais ferait partie d'un autre trio de trois robots, pour lequel aucun chien n'est ami avec les trois. Elle se questionne sur ce cas et sur la nécessité (ou non) de le considérer pour leur démonstration. Elle se rétracte plus loin en affirmant que les deux cas (si *R* est l'un des trois *L1*, *L2* ou *L3*, ou aucun des trois) couvrent bel et bien ce qui doit l'être.

En fait, ce n'est pas nécessaire dans cette tâche spécifique de savoir si *R* fait partie d'un trio tel que décrit dans l'axiome 3. L'important ici est que *L1*, *L2* et *L3* forment un de ces trios et que *R* soit distinct de chacun des trois.

Jeanne mentionne brièvement l'idée qu'il faudrait éventuellement utiliser l'axiome 2, puis propose l'idée de tenter une démonstration par contradiction où il faudrait supposer que tout chien est ami avec *R*. Lucie croit, avec cette supposition, pouvoir utiliser l'axiome 2. Elle démontre par contre une certaine difficulté à démarrer la preuve par contradiction, au moment de réaliser la négation, comme dans la première tâche. Elle a besoin de Jeanne pour se convaincre de la bonne formulation. Puisque l'énoncé à démontrer est « pour tout robot, il existe un chien qui n'est pas son ami », la négation adéquate est « il existe un robot tel que tout chien est son ami ». Dans la figure qui suit, « Mtq » signifie « montrer que » et « SLC » signifie « supposons le contraire ».

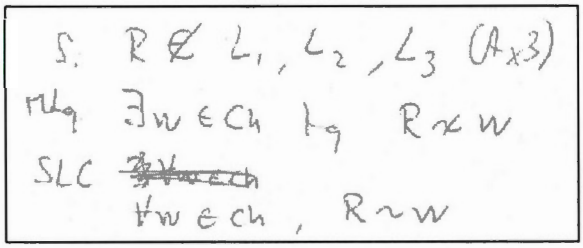


Figure 4.22 Formulation de la preuve par contradiction

Ainsi, les étudiantes veulent réussir à contredire « pour tout chien *W*, *W* est ami avec *R* ». Cependant, malgré la symbolisation qui avait été mise à l'écrit par les deux étudiantes et reproduite dans la figure précédente, Lucie affirme à voix haute vouloir démontrer que « *pour tous robots, ils sont amis avec tous les chiens* », ce qui n'est pas la négation de l'énoncé. Après un long silence, j'ai proposé d'exhiber les chiens qu'elles connaissent déjà. Par l'axiome 1, elles ont mis les chiens en paires puis leur ont associé un chien selon la notation suivante : W_{ij} est l'ami de L_i et L_j. De plus, par l'axiome 3, W_{ij} n'est pas ami ($\nsim$) avec L_k, pour *i*, *j*, *k* égaux respectivement à 1, 2 ou 3 :

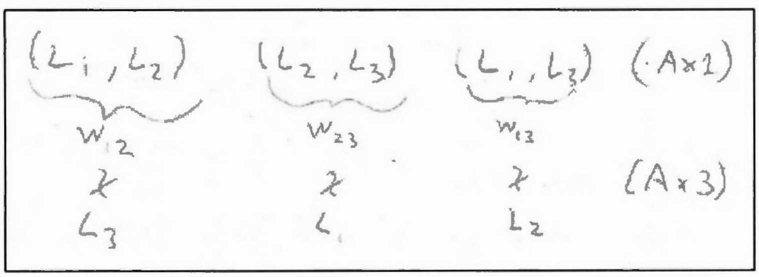


Figure 4.23 Représentation des liens d'amitiés entre *L1*, *L2* et *L3*

À ce moment-ci, j'ai voulu savoir dans quelle mesure Lucie utilisait la représentation symbolique des axiomes qu'elle avait décidé d'exhiber au départ. Elle a dit qu'elle utilisait strictement la version originale avec les mots. Ma question a généré une réflexion chez Lucie vis-à-vis son utilisation du symbolisme. Il ne semble pas que ce soit le meilleur outil pour réfléchir dans son cas :

L : Je ne sais pas pourquoi j'ai écrit [les symboles]. [..] Ça me fait réfléchir sur moi ! Moi, la première chose que je me suis dit en les lisant [les axiomes] c'est « il faut que je les mette en symboles », puis je ne les regarde pas du tout mes symboles !

J : Non mais, c'est comme ça que tu les as compris ! Moi, il a fallu que je les lise 2-3 fois.

Cette intervention semble intéressante en ce qui concerne la manière dont les étudiants utilisent la logique. Il semble ici que Lucie ait utilisé la symbolisation des axiomes, à l'aide des connecteurs logiques, comme outil de compréhension ou de contrôle, sans toutefois que ce soit ce qu'elle utilise dans la résolution en tant que telle.

Après mon intervention, Jeanne et Lucie exhibent les trois chiens amis avec R et chacun des trois autres robots $L1$, $L2$ et $L3$: $W1$, $W2$ et $W3$. S'ensuit un court échange :

L : Est-ce qu'il y a, dans ces 6 chiens-là, il y en a un qui ne peut pas du tout être le chien... qui ne peut pas du tout être un ami à R ? Il y a ces trois-là [$W1$, $W2$, $W3$] qui sont ses amis. Donc dans ces trois là [$W12$, $W13$, $W23$], est-ce qu'il y en a un qui ne peut pas du tout être son ami ? Parce que eux peuvent être le même, $W12$ et $W1$ peuvent être le même. Mais... si l'axiome 3 aurait été « pour tout », ça aurait été facile.

J : oui mais c'est pour ça qu'il y a l'axiome 2.

J : comment ça [se fait que] je ne vois pas [la solution] !

L : c'est juste parce que c'est des robots et des chiens.

Tout d'abord, Jeanne semble affirmer que l'axiome 2 est relié à l'axiome 3, mais ce n'est pas clair pourquoi. On peut supposer que c'est dû au fait que l'axiome 2 dit, en particulier, qu'il n'existe pas de chien ami avec aucun robot et aussi, que tout chien a « au moins deux » amis robots et non « au plus deux », ce que dirait l'axiome 3 s'il était quantifié universellement sur tous les triplets de robots, plutôt qu'existentiellement sur un triplet de robots. Également, Lucie semble dire que la raison pourquoi Jeanne, et elle-même, éprouvent des difficultés à trouver la solution à la tâche est qu'elle fait intervenir des robots et des chiens.

On peut penser qu'elle veut dire que la tâche fait intervenir des chiens et des robots, au lieu d'objets mathématiques connus. Ainsi, il semble que Lucie considère que l'absence de connaissances contextualisées vis-à-vis les objets en jeu dans la tâche est un obstacle et qu'elle ressente significativement la différence entre les difficultés liées à cette tâche, en comparaison d'une tâche qui ferait intervenir des objets mathématiques usuels.

À la suite de cet échange, les étudiantes explorent plusieurs pistes en rafale, qui ne font pas vraiment avancer le travail. Lucie semble avoir un éclair de génie lorsqu'elle s'exclame sur l'unicité garantie par l'axiome 1, mais Jeanne reprend immédiatement la parole et reporte son attention sur la bijection. Il s'ensuit un questionnement à savoir si certains des chiens qui ont été exhibés précédemment peuvent être identiques. Cependant, les étudiantes ne relèvent pas l'idée que si certains de ces chiens sont identiques, alors cela contredit la conjecture que la relation est bijective, compte tenu que, dans la bijection, toute paire de robots distincts doit être associée à un unique chien.

Ensuite, Jeanne réécrit sur sa feuille l'axiome 2 symbolisé. Elle croit qu'il faut absolument utiliser cet axiome et qu'il est la clé du problème. Elle dit avoir besoin de se remémorer l'axiome 2 et c'est pour cette raison qu'elle a besoin de l'écrire en symboles. La symbolisation logique ici conserve vraisemblablement son rôle d'outil de contrôle.

Après quelques réflexions, Jeanne et Lucie concluent que *W12* ne peut être le même que *W3*, *W23* ne peut être le même que *W1* et que *W13* ne peut être le même que *W2*, par l'axiome 3. Dans le but de faire avancer la résolution, elles supposent que *R* est ami avec *W12*.

$W_{12} \neq W_3$ Suppose $W_{12} \sim R$

$W_{23} \neq W_1$

$W_{13} \neq W_2$

Figure 4.24 Formulation d'un début de démonstration

Lucie continue de réfléchir un peu mais elle s'affirme perdue car il y a « *trop de robots et de chiens* » à considérer. Elle considère que de supposer *R* ami avec *W12*, puis avec *W23* et finalement avec *W13*, ne couvre pas tous les cas possibles et elle croit donc se diriger dans une impasse. À ce moment-ci, on remarque qu'elles ont complètement laissé tomber l'idée de la preuve par contradiction. Elles ne considèrent plus que tous les chiens sont amis avec *R*.

Jeanne laisse tomber l'idée que certains chiens pourraient être identiques et propose de généraliser l'axiome 3. Elle commence en disant qu'en considérant qu'il existe une bijection entre les paires de robots et les chiens, élément que Lucie croit qu'il serait sage de vérifier de nouveau, il est possible de conclure que l'axiome 3 s'applique à tous les trios de robots. Jeanne explique que comme il y a (pour elle) bijection, un chien ne peut être ami avec trois robots : ce chien serait alors ami avec plus d'une paire de robots distincts, ce qui contredirait la bijection.

Dans ces explications, le problème reste le même que lorsqu'elles ont tout d'abord discuté de la bijection : la relation prescrite par les axiomes n'est pas une bijection puisque l'axiome 2 ne garantit pas l'unicité de la paire de robots amie avec un certain chien. En fait, même si les étudiantes expriment parfois à voix haute qu'il existe **au moins** deux robots ami avec un chien, elles ne semblent pas avoir assimilé ce que cela signifie par rapport à leur bijection. Ne voyant pas ces subtilités, Jeanne et Lucie s'engagent dans cette piste de manière sérieuse.

Jeanne introduit φ, la bijection qui associe chaque paire de robots (*L* et *J*) à un chien (*W*) : φ(*L*, *J*) = *W* si et seulement si *W*~*L* et *W*~*J*, où ~ désigne le symbole de l'amitié (figure 4.25). Ainsi, elle affirme (figure 4.26) que si *W* est ami avec trois robots *L*, *J* et *K*, alors il existe trois paires, soit (*L*, *J*), (*L*, *K*) et (*J*, *K*), telles que φ appliquée à ces paires donne à chaque fois *W*, de sorte que la fonction n'est pas injective. Elle en déduit donc qu'à partir du moment où il y a un chien quelconque qui est ami avec trois robots différents, il n'y a pas de bijection entre les deux ensembles.

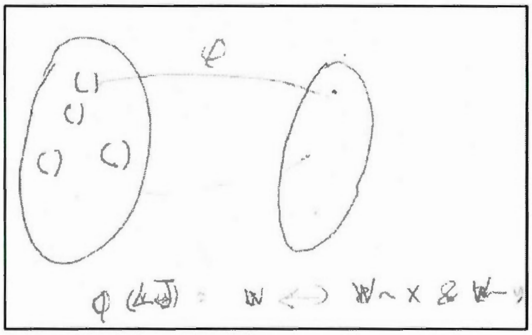


Figure 4.25 Relation bijective φ

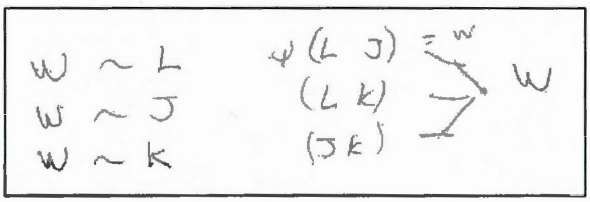


Figure 4.26 Preuve que la relation ne serait pas injective si *W* est ami avec *J*, *K* et *L*

Jeanne et Lucie amorcent ensuite une réflexion sur la situation où il y aurait seulement deux robots dans l'univers, discussion qui, elles s'en rendent compte en quelques minutes, ne sert techniquement à rien car l'axiome 3 garantit l'existence d'au moins trois robots.

Après avoir démontré que l'axiome 3 peut s'étendre à tout trio de robots, les deux étudiantes s'avouent confuses sur le chemin à emprunter à partir de là et elles résument ce dont elles sont certaines : les axiomes 1 et 2 garantissent une bijection par laquelle un chien ne peut être ami avec 3 robots simultanément et l'axiome 3 garantit l'existence d'au moins trois robots dans l'univers. De là, elles déduisent que si *R* est différent de *L1*, *L2* et *L3*, il existe un chien qui est ami avec *L1* et *L2* qui ne peut pas être ami avec *R* à cause de la bijection φ. Cette prise de conscience achève de convaincre les étudiantes de la validité de ce qu'il y a à démontrer.

Jeanne entame alors la rédaction de la réponse finale (figures 4.27 à 4.29). Elle nomme R_o' l'ensemble des paires de robots distincts. Par l'axiome 1, pour tout élément α dans R_o', il existe un unique chien *W* dans l'ensemble des chiens *Ch*. Elle utilise ensuite φ^{-1} en disant qu'elle se permet de l'écrire sachant que ce n'est pas démontré mais que c'est, selon elle, clairement l'inverse.

$$(Ax\,1)\ \forall\, \alpha \in R_o',\ \exists!\ w \in Ch :\ \alpha \sim w$$

$$\text{Soit } \varphi : R_o' \longrightarrow Ch$$
$$\alpha \longmapsto \varphi(\alpha) \longmapsto w$$
$$\varphi^{-1} \ Ch \longrightarrow R_o'$$
$$w \longmapsto \varphi^{-1}(w) = \alpha$$

Figure 4.27 Premier sens de la bijection (par l'axiome 1)

Par la suite, Jeanne affirme que l'axiome 2 dit que pour tout *W* dans l'ensemble des chiens, il existe un α dans R_o' qui va être en relation avec *W* :

(Ax2) $\forall$ $w \in Ch$, $\exists$ $\alpha \in Ro'$: $\alpha \sim w$
Clairement φ est une bijection entre Ro et Ch
d'inverse φ^{-1}.

Figure 4.28 Deuxième sens de la bijection (par l'axiome 2)

Pour Jeanne, à ce moment-là, l'existence de la bijection devient triviale et Lucie acquiesce. Par la suite, les étudiantes exhibent un chien *W* ami avec *L1* et *L2*, qui existe à cause de l'axiome 1. Elles supposent ensuite que *W* est ami avec *R* et déduisent la contradiction assez facilement en contredisant l'injectivité de φ, ce qui met fin à leur résolution.

Soit W $w \sim L_1$ et $w \sim L_2$ $\begin{pmatrix} R \neq L_1 \\ R \neq L_2 \end{pmatrix}$ $L_1 \neq L_2$
Supposons $w \sim R$
alors $\varphi(L_1, R) = W$
et $\varphi(L_2, R) = W$
mais $(L_1, R) \neq (L_2, R)$
injectivité de φ
$\Rightarrow w \not\sim R$

Figure 4.29 Démonstration de l'énoncé par contradiction

Si on suppose que cette bijection est valide, c'est-à-dire que pour tout chien, il existe exactement une paire de robots distincts qui sont ses amis, le raisonnement de ces étudiantes est adéquat.

Résumé

Axe 1 : Lucie a eu besoin de refaire la première partie de la démonstration pour être convaincue de sa validité et être capable de continuer. Aussi, Lucie fait la remarque, en réponse à la frustration de Jeanne de ne pas avoir trouvé la solution encore, que la raison pour laquelle elles n'ont pas encore résolu la tâche est qu'elle fait intervenir des robots et des chiens. Ainsi, Lucie est consciente que la tâche est plus difficile compte tenu de l'absence d'objets mathématiques connus, et donc de connaissances contextualisées.

Axe 2 : Lucie a tendance à tracer des dessins dans les airs pour visualiser des situations ce qui représente sa compréhension intuitive.

Axe 3 : Lucie ressentait au départ un besoin assez fort de formaliser les axiomes avec des symboles logiques. Elles ont momentanément buté sur quelques nuances logiques (∃ vs ∃!) et elles ont utilisé des raccourcis moins formels à quelques endroits ($\exists L_i \neq L_j \neq L_k \in R_o$) mais sinon, il n'y a pas d'erreur dans ce qu'elles ont fourni. Fait intéressant, Lucie affirme par la suite ne plus utiliser les représentations symboliques mais bien la version en mots. Jeanne affirme que les symboles ont aidé à comprendre les axiomes, mais la version symbolique est moins utile dans la résolution. Par exemple, lorsqu'elles ont besoin de se remémorer un axiome, elles le réécrivent en symboles sur leur feuille. Lucie a démontré quelques difficultés avec les énoncés quantifiés, à savoir la différence entre le premier et le deuxième axiome, et encore une fois lorsqu'elle a voulu faire la négation d'un énoncé. En ce qui concerne Jeanne, elle a perdu sa vigilance lorsqu'elle affirme que la relation est une bijection. En fait, elle a perdu de vue que l'axiome a une quantification existentielle régulière, c'est-à-dire, « *il existe au moins un* », de sorte que la bijection n'est pas respectée. Elles ont introduit une symbolique significative et assez compacte qui leur permettait de réfléchir efficacement sur le problème, et ont rédigé une démonstration (non valable) comportant beaucoup de symboles et peu de mots.

4.3.2.4 Tâche 4 (23 minutes)

Dès le départ, les étudiantes considèrent la démonstration comme erronée. Lucie a l'impression que la démonstration ne fonctionne pas. Elle affirme ne pas avoir trouvé l'erreur, mais elle croit que l'étudiant utilise le même argument pour les deux inclusions et que ça ne peut fonctionner. Jeanne, pour sa part, affirme que la dernière phrase est fausse mais elle ne termine pas son idée malgré mon questionnement, visant à lui faire préciser de quelle phrase elle parle. Par la suite, Lucie exprime ses doutes face au manque d'information sur la fonction (« *moi je suis pas sûre si on n'a rien sur f...* ») et questionne la validité de la proposition auprès de Jeanne. Cette dernière affirme être presque certaine que la proposition est vraie car elle ne fait intervenir que deux ensembles. Elle affirme ensuite que ce ne serait pas vrai s'il s'agissait d'une intersection non dénombrable, une partition de E en un nombre infini mais non dénombrable. Lucie accepte ce que Jeanne dit sans poser plus de questions.

Lucie a une bonne intuition en croyant qu'il manque de l'information sur la fonction pour pouvoir conclure l'égalité recherchée. Jeanne, pour sa part, a une intuition erronée par rapport à la proposition. Cette intuition, elle le précisera plus tard, provient d'un cours qu'elle a suivi la session précédente, cours auquel Lucie n'a pas assisté. Cette intuition erronée jouera un rôle dans le reste de la résolution car les deux étudiantes sont désormais convaincues de la véracité de l'énoncé, ce qui influencera ce qu'elles diront par rapport à la démonstration proposée.

Pour l'avancement de la résolution, l'intuition (erronée) de Jeanne par rapport à l'énoncé ne les aide pas à diriger leurs actions et elles se mettent à explorer différentes pistes qui n'ont pas de lien avec le nombre d'ensembles mis en intersection. Elles tentent de mettre en évidence ce qui fonctionne et ce qui ne fonctionne pas dans la démonstration selon elles. En examinant le premier argument, elles disent :

J : C'est correct, il prend un élément de $f(A \cap B)$. Si $f(x)$ appartient à $f(A \cap B)$ ça veut dire qu'il existe un x dans $A \cap B$ tel que x est égal à... en tous cas.

L : je suis pas sûre moi ! Ça, je suis pas sûre que ça marche parce que $f(x)$ peut appartenir à $f(A \cap B)$...

J : oui c'est ça qui ne marche pas !

L : Mais ça peut être, dans le fond...

J : x a pas à... ça n'implique pas que x appartient à $A \cap B$ du tout. Ça implique qu'il existe... je vais juste l'écrire autrement, ça m'énerve que ce soit écrit comme ça.

L : je vais faire un dessin.

Cet échange montre bien que les étudiantes ont mis le doigt sur une des erreurs de la démonstration, à savoir que si $f(x)$ appartient à $f(A \cap B)$, ça n'implique pas que x soit dans $A \cap B$, mais bien qu'il existe un certain antécédent à $f(x)$ dans $A \cap B$, qui peut être différent de x. On peut supposer que c'est ce que Jeanne voulait dire lorsqu'elle a commencé une phrase par « *ça implique qu'il existe...* » et qu'elle a voulu changer la notation.

Lucie ne fait finalement pas de dessin et assiste Jeanne, qui entreprend de refaire la démonstration à sa façon, dans le but de clarifier ses idées et de changer la notation, comme elle l'a précisé dans l'échange présenté plus haut. Pour la première inclusion, elle utilise a au lieu de $f(x)$ pour représenter un élément générique dans $f(A \cap B)$ et arrive à la même conclusion que l'étudiant, c'est-à-dire que l'inclusion $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ est valide :

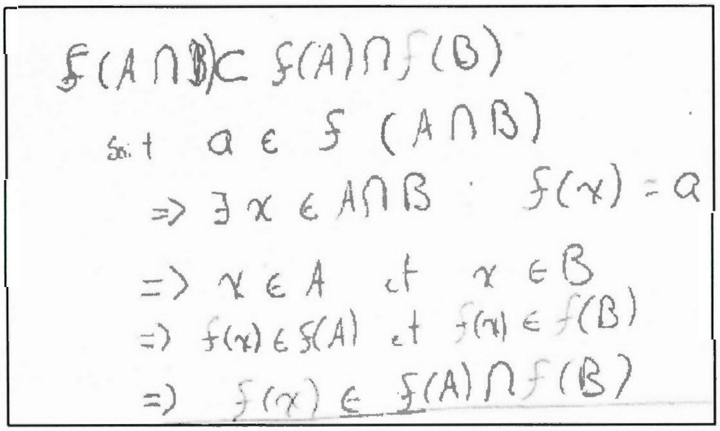


Figure 4.30 Démonstration de la première inclusion avec une nouvelle notation

Jeanne affirme que la technique qu'elle utilise provient de son expérience, que de tenter de prouver les deux inclusions ($\subset$ et $\supset$) pour montrer l'égalité de deux ensembles est généralement la méthode à suivre, plutôt que de tenter de montrer l'égalité directement. Elle affirme par la suite que la notation utilisée par l'étudiant, c'est-à-dire $f(x) \in f(A \cap B)$, là où elle-même a écrit $a \in f(A \cap B)$, rend l'inférence « *$f(x) \in f(A \cap B)$ donc $x \in A \cap B$* » fausse. Ainsi, selon elle, l'argumentaire de l'étudiant est faux (« *si tu supposes un élément de A et B et tu l'appelles f(x) c'est mêlant parce qu'il n'a pas... le x surgit de nulle part* ») mais la conclusion est bonne.

À cette étape-ci de la résolution, Jeanne semble plutôt dérangée par la notation, par ce x qui semble apparaître sans raison, plutôt que d'avoir mis le doigt sur la réelle raison de l'invalidité de l'inférence : l'absence de l'injectivité. En effet, s'il existait au plus un élément dans l'ensemble de départ relié à $f(x)$, l'antécédent de $f(x)$ n'aurait pas le choix d'être ce x. Fait intéressant, Jeanne dit à voix haute « A et B » là où elle a inscrit « $A \cap B$ ». Cette énonciation fait le lien entre « $A \cap B$ » et « $A \wedge B$ » et met en évidence qu'un élément dans « $A \cap B$ » est à la fois dans A et dans B. Cette énonciation suggère qu'elle utilise une représentation orale signifiante, qui rappelle ce que signifie considérer un élément dans l'intersection de deux ensembles.

Par la suite, Lucie propose de trouver un contre-exemple pour montrer que la notation est inadéquate dans le premier argument mais se décourage, et les étudiantes passent à l'étude du deuxième argument. Elles croient d'emblée qu'il y a une erreur car l'étudiant reprend le même argumentaire que pour la première inclusion, argumentaire qu'elles ont déjà qualifié d'inadéquat. Jeanne et Lucie tentent ensuite de démontrer la deuxième inclusion en utilisant la même notation que pour la première ($a \in f(A) \cap f(B)$ au lieu de $f(x) \in f(A) \cap f(B)$), et arrivent dans une impasse lorsqu'elles se retrouvent avec un certain x dans A et un certain y dans B et ne peuvent conclurent quoi que ce soit.

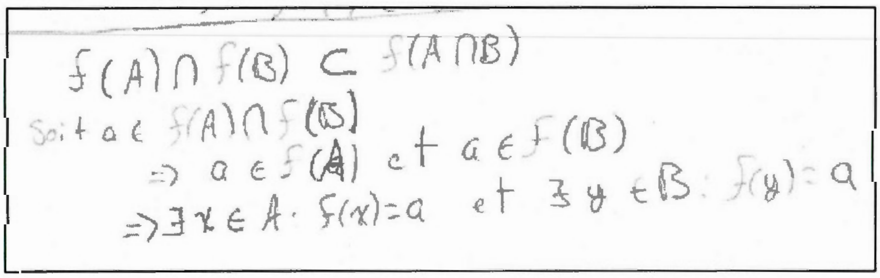


Figure 4.31 Échec de la démonstration de la deuxième inclusion avec une nouvelle notation

Jeanne vient alors à douter de son intuition précédente vis-à-vis la validité de la proposition, intuition fondée sur un cours qu'elle avait auparavant suivi. C'est une surprise pour Lucie qui avait aveuglément accepté la proposition comme vraie. Ainsi, elles ne sont désormais plus certaines de la validité de la proposition de départ. Il semble que ce soit la notation qui les ait poussées à reformuler la démonstration et c'est en reformulant qu'elles se sont rendu compte de l'erreur dans le deuxième argument. En fait, elles ont mené une démonstration de manière syntaxique, pour ensuite prendre conscience que la difficulté requiert qu'elles réfléchissent également sur la sémantique.

En examinant les différences et similitudes entre la démonstration proposée dans la tâche et celle qu'elles ont composée, Lucie s'avoue désarçonnée par la notation « $f(x) \in f(A) \cap f(B)$ », de sorte qu'elle affirme ne pas pouvoir réfléchir correctement sur ce qui est dit dans la deuxième inclusion. Elle réussit tout de même à formuler une objection à la démonstration proposée dans la tâche, à travers cet échange :

L : Ici, quand il écrit $f(x)$ [$\in f(A \cap B)$], on ne sait pas encore qu'il existe, il n'existe pas nécessairement de x tel que $f(x)$ est dans $f(A \cap B)$ parce que, quand on part avec son élément $f(x)$, son élément c'est supposé être l'intersection de... quand tu veux montrer que $f(A \cap B)$ appartient à $f(A) \cap f(B)$, il faut que tu partes d'un élément qui est dans $f(A \cap B)$, sauf qu'un élément dans $f(A \cap B)$ est pas nécessairement de la forme f de quelque chose. Parce que c'est ça qu'on veut montrer, qu'il est de la forme $f(A \cap B)$.[15]

J : oui c'est ça qui est le problème.

L : si on prend des éléments ... quand on prend a qui appartient à $f(A) \cap f(B)$, a appartient à $f(A)$ et a appartient à $f(B)$. Sauf que a... il n'y a rien qui nous assure qu'il existe un x tel que $f(x) = a$.

J : Oui [il en existe un]. Sauf qu'il est dans A et non dans $A \cap B$. Il existe quelque chose dans E qui va nous emmener dans $f(A)$, il existe quelque chose dans E qui va nous emmener dans $f(B)$ mais c'est pas nécessairement le même.

La première réplique de Lucie est un peu confuse. Cependant, on voit que Lucie semble croire qu'un élément dans l'ensemble image $f(A \cap B)$ n'est pas nécessairement de la forme « f de quelque chose ». En d'autres mots, l'élément n'aurait pas nécessairement d'antécédent.

En fait, il peut y avoir des points dans l'ensemble d'arrivée (F) qui n'ont pas d'antécédent (car la fonction n'est pas supposée surjective) par f, mais ça ne peut être le cas dans un ensemble qui est l'image par f d'un autre ensemble, comme par exemple $f(A)$, qui est l'image des éléments de A par la fonction f. Si un point est dans $f(A)$, il a nécessairement un antécédent dans A, sinon il ne serait pas dans $f(A)$. Cependant, cet antécédent n'est pas nécessairement unique et il peut y avoir d'autres antécédents dans l'ensemble $E \setminus A$.

Jeanne semble tout abord confuse par ce que Lucie avance, car elle acquiesce en disant « *oui, c'est ça le problème* », mais elle explique par la suite ce qui ne fonctionne pas dans le raisonnement de Lucie, et par le fait même ce qui ne fonctionne pas dans le raisonnement de

---

[15] Dans ce verbatim, les deux étudiantes pointent les ensembles sur la feuille au lieu de les expliciter à voix haute, c'est-à-dire au lieu de dire « *f de A inter B* », « *f de A inter f de B* ». J'ai traduit leurs gestes en texte pour rendre la lecture possible.

la démonstration proposée, c'est-à-dire qu'il peut y avoir plusieurs éléments de l'ensemble de départ qui sont envoyés vers un même élément de $f(A) \cap f(B)$.

Un autre échange survient par la suite, toujours dans le but de cerner les différences et similitudes entre la démonstration proposée dans la tâche et celle proposée par les étudiants :

J : [Ce que l'étudiant a fait], c'est comme si [il] avait réutilisé x et [qu'il] avait oublié qu'il pouvait être différent.

L : Regarde, lui il dit, disons, a appartient à $f(A)$ donc le fameux x qui est dans E [tel que $f(x) = a$], tout ce qu'on sait c'est qu'il est dans E. Lui il conclut tout de suite qu'il est dans A. Mais ça ne veut pas dire ça, ici quand a appartient à $f(A)$ ça veut juste dire qu'il existe un x qui appartient à E tel que $f(x) = a$. C'est tout ce que l'on peut conclure. Ça, ici, il n'a pas le droit de conclure ça.

J : je crois que c'est ça. Mais ça ne termine pas la preuve.

L : ça nous dit pas encore si la proposition est bonne. Ça nous dit juste que sa preuve ne fonctionne pas.

Ici, le problème semble être que Lucie est restée accrochée à son idée que si un point est dans $f(A)$, alors il n'a pas nécessairement un antécédent dans A. Comme précédemment, il peut exister un autre antécédent qui serait dans $E \setminus A$, mais si un élément est dans $f(A)$, il a nécessairement un antécédent dans A. L'ambiguïté est qu'en notant $f(x) \in f(A)$ pour débuter l'argument, x peut être dans $E \setminus A$ mais il doit nécessairement exister un autre antécédent dans A le cas échéant. Cependant, si Lucie décide d'utiliser la notation $a \in f(A)$, il existe sans aucun doute un élément dans A, appelons-le y, tel que $f(y) = a$. En fait, puisque f n'est pas injective, on ne peut garantir l'unicité de l'antécédent d'un élément de $f(A)$. Il pourrait y avoir une infinité d'antécédents dans $E \setminus A$, tout ce qui compte c'est qu'il y en ait au moins un dans A.

À la suite de ces réflexions, les étudiantes se rendent compte qu'elles n'ont pas réglé la totalité du problème et Lucie dit : « *ça nous dit pas encore si la proposition est bonne. Ça nous dit juste que sa preuve ne fonctionne pas* ». Ainsi, les étudiantes entament une discussion sur la validité de la totalité de la démonstration proposée dans la tâche en lien avec la validité de la proposition :

J : dans la première partie [de l'argumentation], [l'étudiant] court le risque de faire la même erreur [que dans la deuxième], mais la première partie est vraie je pense parce que …

L : c'est ça, elle est vraie ici sauf que comme il a réutilisé le même argumentaire dans le deuxième, ça ne marche pas.

J : C'est ça. Parce que ici dans le fond ce qu'il dit, c'est que si $f(x)$ est dans $f(A)$, donc x est dans A mais c'est pas le même x ces deux x là. C'est ça l'erreur.

L : alors que ici c'est le même x. Si $f(x)$ est dans $f(A \cap B)$, c'est certain que ton x est dans $A \cap B$.

Dans ces échanges, il n'est pas clair si les étudiantes pensent qu'il y a une erreur dans le premier argument malgré que l'inclusion soit valide. Lucie semble croire qu'il n'y a pas d'erreur dans la première inclusion et ce que Jeanne pense à ce sujet n'est pas clair. Lucie est encore confuse car x n'est pas nécessairement dans $A \cap B$ si $f(x)$ est dans $A \cap B$. Elles argumentent par la suite que dans la deuxième inclusion, $f(x)$ est dans $f(A)$ implique qu'il existe un x dans E et non un x dans A nécessairement, et que ce serait vrai si la fonction était injective.

Par la suite, Jeanne doute encore que la proposition soit fausse car tout ce qu'elles ont montré c'est que la démonstration telle qu'elle est proposée est fausse, et que si l'on rajoute l'injectivité de la fonction, la démonstration est vraie. Son intuition de départ, qui lui dit que la proposition est vraie appuyée par l'expérience vécue dans un cours, est probablement difficile à laisser aller et c'est pour cette raison qu'elle doute encore. Pour les deux étudiantes, la notation est dérangeante mais elles ne semblent pas dire qu'elle est complètement inadéquate. Il s'agit plus de l'argumentaire qui est inadéquat. Jeanne propose de trouver un contre-exemple pour assurer l'invalidité de la démonstration et Lucie propose, pour ce faire, de puiser dans des fonctions non-injectives. L'entrevue s'est close sur ces réflexions, ce qui amène à croire qu'elles ne comprennent pas nécessairement pourquoi la proposition est fausse, quoiqu'elles semblent satisfaites.

<u>Résumé</u>

Axe 1 : Jeanne a eu une intuition erronée qui a teinté toute la résolution. Pendant que Lucie avait l'intuition qu'il manquait de l'information, Jeanne affirme en début de résolution qu'elle est certaine de la véracité de l'énoncé car elle croit l'avoir rencontré dans le cadre d'un cours. À la fin, après s'être rendu compte que l'intuition de Jeanne était erronée, elles ne semblent pas avoir atteint une conviction profonde, ni formelle ni intuitive, sur la validité de la démonstration, après plusieurs échanges confus. Elles sont par contre convaincues qu'il y a une erreur dans la démonstration, mais les causes de cette erreur ne leur semblent pas très claires.

Jeanne affirme choisir de refaire la démonstration en conservant la même méthode (démontrer l'égalité en démontrant les deux inclusions) car son expérience lui dicte qu'ils s'agit de la meilleure méthode, une connaissance contextualisée ou une intuition associée à ce type de démonstrations.

Axe 2 : Lucie propose de faire un dessin pour tenter d'élucider la notation. Également, on voit qu'elles ont mené la reformulation de la démonstration de manière syntaxique, pour ensuite prendre conscience que la difficulté requiert qu'elles réfléchissent également sur la sémantique.

Axe 3 : Jeanne exprime l'intersection de deux ensembles en disant « et » à voix haute. Cette énonciation donne du sens à l'intersection. De son côté, Lucie démontre des difficultés, plus marquées que celles de Jeanne, avec les notions de fonction et d'ensemble.

4.3.3 Éléanore et Paul

Brièvement, Éléanore et Paul forment une dyade homogène. Aucun des deux étudiants n'a suivi de cours de logique et les connaissances prédicatives qu'ils ont déployées dans le test diagnostique sont considérées légèrement plus faibles que celles de Michel et des étudiantes de la deuxième dyade. Cette dyade est celle qui a complété les tâches le plus rapidement.

4.3.3.1 Tâche 1 (7 minutes)

Dès le départ, les deux étudiants sont convaincus que la démonstration proposée est erronée. Par exemple, Paul affirme : « *on a fait la négation d'un 'pour tout' par un autre 'pour tout' ; c'est supposé être un 'il existe'* ».

Après un court silence, je leur ai demandé de proposer un commentaire à donner à l'étudiant mais ils sont restés silencieux vis-à-vis cette question. Paul affirme à la place que pour faire la preuve par contradiction de manière adéquate, il aurait fallu utiliser un autre argument. Éléanore propose d'utiliser : « *il existe un irrationnel tel que son double est rationnel* ». Paul soutient qu'il sera probablement capable de proposer une démonstration adéquate et que cette nouvelle démonstration ressemblera à celle pour montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel, démonstration souvent vue au début des études universitaires. Éléanore affirme pour sa part que la démonstration qu'elle proposerait modifierait quelques éléments de la preuve déjà proposée par l'étudiant.

C'est Paul qui prend les devants pour construire la démonstration. Il entame une démonstration par contradiction. Il utilise un argument provenant de la théorie des corps, ce qui n'est finalement pas l'argument classique pour démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Il utilise le fait que l'ensemble des rationnels est un corps et donc, clos sous la multiplication :

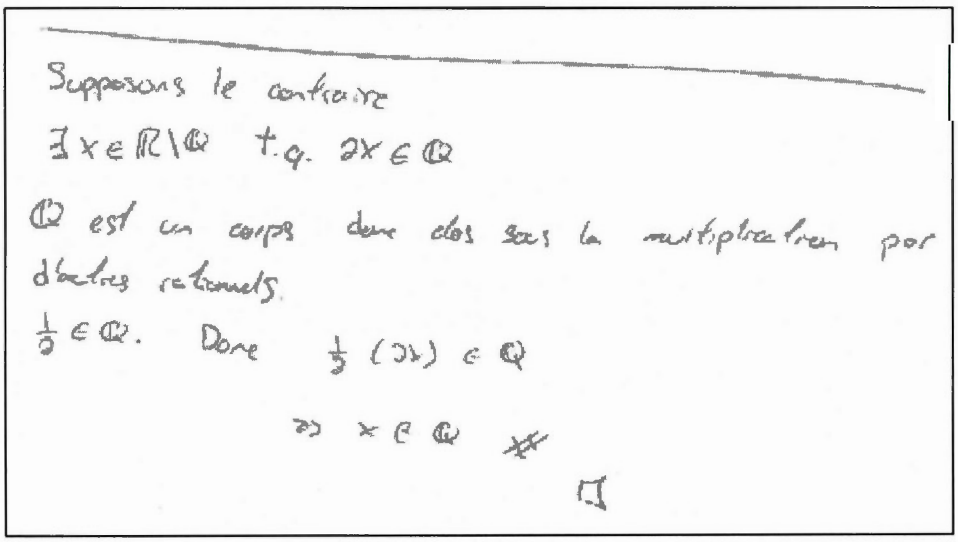


Figure 4.32 Reformulation de la démonstration

Il utilise ainsi une représentation signifiante des rationnels en les considérant comme un corps afin d'exploiter les propriétés de cette structure algébrique. Cette démonstration est plus implicite que celle qui commence par poser $2x$ comme égal à un quotient d'entiers, car les propriétés des nombres en cause sont cachées dans la clôture du corps. En explicitant la propriété, c'est-à-dire qu'un nombre rationnel peut s'écrire comme un quotient d'entiers, on a une meilleure prise sur le sens.

Cette preuve n'est pas intuitive pour Éléanore. Elle n'arrive pas à exprimer par quel chemin elle passerait si elle avait à composer une autre démonstration et conclut qu'elle aurait éventuellement fini par passer par le même chemin que Paul. Celui-ci affirme par la suite qu'il aurait pu utiliser la manière qu'il qualifie de « classique » pour faire ce type de démonstration, à savoir une preuve également par contradiction, mais en posant x comme étant égal à un quotient de deux entiers. Il s'agit en effet de la méthode classique pour démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et généralement utilisée pour démontrer des énoncés concernant des rationnels et irrationnels, une pratique contextualisée. Cependant, Paul utilise une méthode algébrique, ce qui résulte peut-être de l'influence du cours où sont vues certaines structures algébriques, et auquel il affirme être présentement inscrit.

Comme commentaire à l'étudiant, Éléanore et Paul diraient « *qu'il s'est emmêlé un peu dans sa négation* ». Les participants n'ont pas discuté d'emblée du reste de la démonstration, c'est-à-dire ce qui est subséquent à la négation mal réalisée. Pour eux, la mauvaise négation invalidait directement la démonstration et le reste n'était donc pas important. Lorsque je les ai questionnés sur le reste de la démonstration, Éléanore dit que l'étudiant avait seulement pris un exemple du théorème et donc que ce n'était pas recevable comme preuve que la propriété était vraie dans tous les cas. Paul affirme ensuite que l'étudiant a bien démontré ce qu'il croyait avoir à démontrer, en ce sens que son exemple contredisait l'affirmation qu'il considérait comme la négation à contredire.

Résumé

Axe 1 : L'intuition et les connaissances contextualisées ont joué ici un rôle lorsqu'il a été question du choix de la méthode de résolution. Paul fait référence à une démonstration qu'il croit similaire, celle qui démontre l'irrationalité de $\sqrt{2}$, une technique qu'il qualifie de classique.

Axe 2 : Paul a utilisé une représentation signifiante de l'ensemble des rationnels dans le but d'utiliser les propriétés d'un corps. Ce n'est pas certain que ce changement de représentation donne plus de sens à la tâche, principalement parce qu'elle s'inscrit dans une preuve par contradiction et qu'il s'agit d'une représentation des rationnels alors que l'énoncé fait intervenir des irrationnels. Cependant, on peut supposer que Paul utilise une orientation sémantique dans sa démonstration.

Axe 3 : Les étudiants n'ont pas démontré de difficulté au niveau logique.

4.3.3.2 Tâche 2 (6 minutes)

Dès le départ, Paul affirme qu'il est convaincu que la conjecture est vraie :

P : naïvement, une surjection c'est comme une projection. On noie l'espace d'arrivée, on le recouvre au complet avec notre fonction, l'image de notre fonction recouvre l'espace d'arrivée au complet. Donc si je fais ça deux fois, que je recouvre mon image au complet et que je recouvre mon image au complet, je ne vois pas pourquoi ça ne serait pas surjectif.

Éléanore exprime une idée similaire vis-à-vis sa certitude de la validité de l'énoncé. Les étudiants semblent bien comprendre pourquoi la conjecture est valide grâce à leur intuition et leurs images mentales. Ils discutent en termes de « recouvrir » ou encore de « noyer » l'ensemble d'arrivée, ce qui représente leur compréhension intuitive.

Ensuite, Éléanore et Paul proposent une démonstration. Paul affirme à voix haute : « *on veut montrer que n'importe quel c dans C peut être atteint par un certain a dans A par g∘f* ». Paul énonce à voix haute ce qu'il désire montrer avant de décider par où commencer et le symboliser sur papier. C'est son énonciation à voix haute qui le mène à l'instanciation d'un c dans C pour commencer. Par la suite, la démonstration (voir figure 4.33) semble couler de source pour Paul et Éléanore. Ils semblent familiers avec ce type de démonstrations, ils l'énoncent de manière très fluide, sans hésitation.

Soit $f: A \to B$ et $g: B \to C$ deux fonctions surjective

$g \circ f: A \to C$

Soit $c \in C$, $\exists b \in B$ t.q. $g(b)=c$

f surjective, $\exists a \in A$ t.q $f(a)=b$

$g(f(a))=c$

Donc $g \circ f$ est surjective. $\square$

Figure 4.33 Démonstration proposée

Dans la démonstration proposée, il ne semble pas y avoir d'erreur d'instanciation. En effet, n'ayant pas énoncé explicitement ce que signifiait pour les deux fonctions d'être surjectives, les variables instanciées dans la démonstration (« *soit* $c \in C$, $\exists b \in B$ *t.q.* $g(b)=c$, *f surjective*, $\exists a \in A$ *t.q.* $f(a)=b$ ») l'étaient pour la première fois, ce qui permet d'éviter les erreurs d'instanciations anticipées dans l'analyse *a priori*. À la question de savoir s'ils auraient pu trouver une autre manière de démontrer l'énoncé, Paul affirme ceci : « *une* [fonction] *surjective est inversible à gauche ou à droite. Je ne me souviens plus.* [Donc,] *on aurait peut-être pu y aller avec la composition des inverses. Mais il aurait fallu vérifier l'inversion, je ne me souviens jamais si c'est à gauche ou à droite.* »

Résumé

Axe 2 : Paul a utilisé une représentation signifiante de la surjection comme une projection et les deux étudiants s'expriment avec des termes comme « recouvrir » ou « noyer », ce qui représente leur compréhension intuitive. On peut donc supposer une construction sémantique.

4.3.3.3 Tâche 3 (22 minutes)

Dès le début, la première remarque de Paul est que l'axiome 2 n'a pas été utilisé. Il s'agit de la première chose qu'il a remarqué et il croit que c'est dans cette direction qu'il faut creuser pour résoudre la tâche. Pour sa part, Éléanore exprime sa difficulté à visualiser les axiomes avec des mots à la place des symboles logiques. Elle voudrait transformer les axiomes en symboles où l'amitié serait une relation, et elle espère pouvoir définir une relation d'équivalence entre les chiens et les robots. Paul, pour sa part, n'est pas certain qu'il s'agisse d'une stratégie qui les aiderait, alors il préfère « *continuer à digérer les axiomes* ». Malgré cela, Paul répète à plusieurs reprises les axiomes tout au long de la résolution, comme s'il ne les avait pas suffisamment digérés au départ.

Pour commencer la résolution, Éléanore utilise l'axiome 1 pour garantir l'existence d'un chien ami avec chacune des paires de robots entre *L1*, *L2* et *L3*, et Paul affirme pouvoir faire la même chose en ajoutant les paires comportant *R*. Il propose par la suite de tenter une preuve par contradiction, en supposant que tous les chiens sont amis avec *R*. Son but, avec cette technique, est d'obtenir la forme « *pour tout chien* », pour être capable d'utiliser l'axiome 2. Ici, Paul suit son intuition que le problème doit être réglé par l'utilisation de l'axiome 2. Par la suite, Paul explicite les chiens amis avec *R* et chacun des trois robots *L1*, *L2* et *L3*, chiens dont l'existence est assurée par l'axiome 1. Il nomme donc W_{ri} le chien ami avec *R* et L_i.

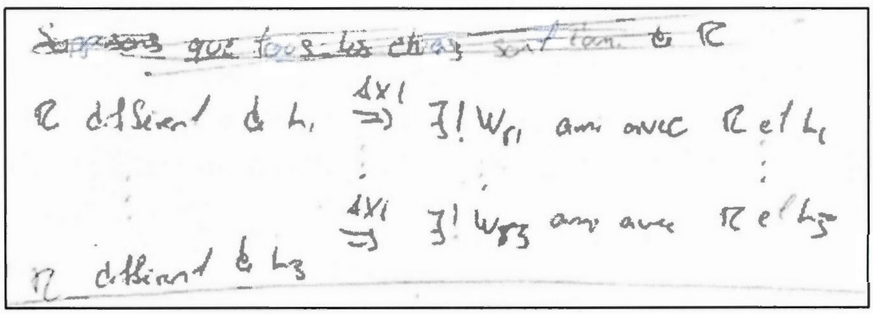


Figure 4.34 Création de trois nouveaux chiens dont l'existence est garantie par l'axiome 1

Paul essaie par la suite, tel que prévu, d'appliquer l'axiome 2, mais il se rend compte que tous les chiens ont déjà au moins comme amis deux robots distincts. Il s'agissait donc d'une fausse piste.

De son côté, Éléanore soutient qu'un seul chien est ami avec *L1* et *L2* (par *AX1*) et qu'aucun chien n'est ami avec *R*, *L1* et *L2* simultanément (par *AX3* d'après elle). Ainsi, une contradiction émerge selon elle, à cause du chien qui est ami avec *L1* et *L2* par rapport à *R*, car *R* est ami avec tous les chiens selon l'hypothèse absurde qu'elle pose pour mener sa preuve par contradiction.

En fait, Éléanore utilise l'axiome 3 de manière erronée sans s'en rendre compte lorsqu'elle applique l'axiome 3 à tous les trios de robots, et non seulement à *L1*, *L2* et *L3* qui sont les seuls dont l'existence est garantie et qui n'ont simultanément aucune amitié avec un chien commun. Éléanore a mis plusieurs minutes ici à bien comprendre la quantification qui intervient dans l'axiome 3, avec l'aide de Paul.

Après avoir exhibé les chiens présentés dans le dernier encadré, les étudiants sont un peu perdus et ne savent plus quel chemin utiliser. Paul revient sur la tentative de preuve par contradiction et se rend compte qu'il n'a pas utilisé la négation qu'il avait supposé dans son argumentation, c'est-à-dire que tous les chiens sont amis avec *R*. Il se penche de nouveau sur cette idée en utilisant l'axiome 1 et le fait que *R* est différent de *L1*, *L2* et *L3*. Il introduit donc trois nouveaux chiens *W12* (ami avec *L1* et *L2*), *W13* (ami avec *L1* et *L3*) et *W23* (ami avec *L2* et *L3*), et il affirme par la suite que tout ce qui lui manque est un « *pont* » pour arriver à contredire l'axiome 3.

Paul a donc changé de stratégie. Il ne vise plus à utiliser l'axiome 2 mais bien maintenant à contredire l'axiome 3. Après quelques échanges d'évidences entre Paul et Éléanore sur les six chiens connus (*Wr1*, *Wr2*, *Wr3*, *W12*, *W23*, *W13*), Paul a un éclair de génie et s'exclame « *ah! Mais il est unique!* ». Il explique alors que *W13* est l'unique chien ami avec *L1* et *L3*, et qui est aussi ami avec *R* par l'hypothèse absurde de la preuve par contradiction. Il existe également un unique chien, *Wr3*, ami avec *R* et *L3*. Ainsi, *W13* et *Wr3* sont le même chien par l'unicité forcée par l'axiome 1 (il existe un seul chien ami avec *R* et *L3*). Une réflexion similaire s'applique pour déduire que *W23* est le même chien que *Wr3*. On peut donc en déduire que *W12* et *W23* sont le même chien, ce qui contredit l'axiome 3 car il y aurait un chien ami simultanément avec *L1*, *L2* et *L3*.

Supposons que tous les chats sont amis avec R

R différent de L_1 $\overset{AX1}{\Rightarrow}$ $\exists!\ W_{r1}$ ami à la fois avec R et L_1

L_1 différent de L_2 $\overset{AX1}{\Rightarrow}$ $\exists!\ W_{12}$ ami à la fois avec L_1 et L_2

L_1 différent de L_3 $\overset{AX1}{\Rightarrow}$ $\exists!\ W_{13}$ ami à la fois avec L_1 et L_3

Or, tous les chats sont amis avec R

$\Rightarrow$ W_{12} est ami avec R.

Comme W_{12} est ami avec L_1 et $\exists!$ chat ami à la fois avec R et L_1 (à savoir W_{r1}) alors $W_{12} = W_{r1}$

De même, $W_{13} = W_{r1}$

Donc W_{r1} est ami avec L_1, L_2 et L_3

Figure 4.35 Démonstration par contradiction proposée

Paul semble surpris de voir qu'après avoir tenté d'utiliser *AX2* et de contredire *AX3*, l'argument clé se situe finalement dans l'unicité prescrite par l'axiome 1. Paul explique par la suite pourquoi il croit avoir mis du temps à trouver ce qui clochait dans la tâche : « '*il existe un unique'. Je l'ai lu, je l'ai écrit* [∃!] *mais je l'ai pas pris en compte. C'est pour ça que ça nous a pris du temps à conclure* ». Ici, on peut penser qu'il a manqué de vigilance, en ce sens qu'il a vu l'information, sans bien l'assimiler, peut-être une conséquence de la difficulté à établir des repères intuitifs dans cette tâche ou encore, de son manque d'expérience avec les notions de logique formelle.

Résumé

Axe 2 : Éléanore et Paul n'ont pas utilisé de représentations signifiantes. Il a semblé que les étudiants avaient besoin d'un but pour avancer dans la résolution.

Axe 3 : Éléanore propose de transformer les axiomes en symboles mais Paul croit qu'il suffit de les relire quelques fois pour les assimiler. Leur démonstration est un peu moins symbolisée que celle des autres équipes et comportent plus de mots. Éléanore utilise l'axiome 3 par la suite de manière erronée. Elle croyait qu'il s'appliquait à tous les trios de robots et elle a eu besoin de l'aide de Paul pour comprendre son erreur. On peut penser que si elle avait pris le temps de symboliser les axiomes, elle n'aurait peut-être pas commis cette erreur. À la fin, Paul affirme avoir lu et écrit que l'axiome 1 requérait l'unicité sans toutefois avoir pris l'information en compte, ce qui l'a retardé. Paul a donc transcrit l'information logique sans bien l'assimiler. Les deux ont fourni une démonstration principalement en mots.

4.3.3.4 Tâche 4 (12 minutes)

Dès le départ, Paul considère la preuve erronée et semble avoir une idée très claire de la situation :

P : on n'a aucune hypothèse sur l'injectivité de f. Il dit « si $f(x)$ appartient à $f(A\cap B)$, alors x appartient à $A\cap B$ ». Pas nécessairement. Il pourrait y avoir un y dans $A\cap B$ pour lequel $f(x) = f(y)$, puis x est quelque part [d'autre].

Il explique aussi une erreur similaire en ce qui concerne le deuxième argument : « *si f n'est pas injective, il pourrait y avoir un y dans A pour lequel f(x) et f(y) sont égaux, on n'a pas de supposition sur l'emplacement de x* ». Il affirme aussi qu'il est peut-être possible de « *contourner* » le fait qu'il manque de l'information pour affirmer que si $f(x)$ appartient à $f(A)$ ou $f(B)$, alors x appartient à A ou x appartient à B, comme l'étudiant l'a proposé. À ce moment-ci, aucun des deux étudiants n'a questionné la validité de la proposition, se contentant de dire que, pour l'instant, seule la démonstration est à remettre en question.

Paul entame alors la démonstration en utilisant le même point de départ, c'est-à-dire en séparant les deux inclusions pour démontrer l'égalité, mais en partant de y dans l'ensemble d'arrivée plutôt que de $f(x)$.

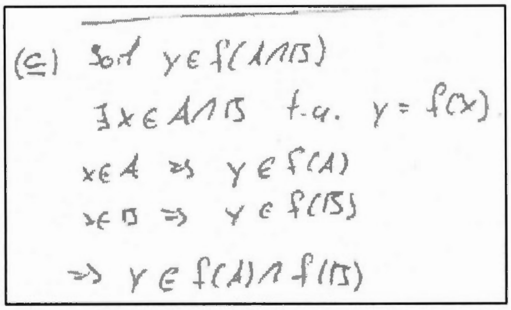


Figure 4.36 Démonstration de la première inclusion avec une nouvelle notation

C'est au milieu de la démonstration de la deuxième inclusion (voir figure) qu'il commence à douter de sa capacité à terminer la démonstration, lorsqu'il est confronté à l'existence d'un x_1 dans A et d'un x_2 dans B.

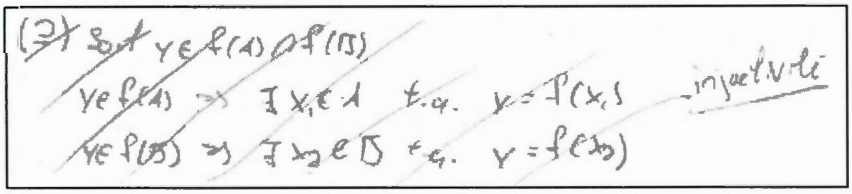


Figure 4.37 Échec de la démonstration de la deuxième inclusion avec une nouvelle notation

Il se rend compte alors que si la fonction était injective, il aurait $x_1 = x_2$ et donc, qu'il pourrait conclure que l'inclusion est respectée. On peut voir ici que c'est la manipulation strictement syntaxique qu'il mettait en œuvre au départ qui l'a amené à comprendre ce qui cloche dans la preuve. Le travail syntaxique a ici déclenché sa compréhension, lorsqu'il a exhibé x_1 et x_2, et c'est donc purement de l'ordre du symbolisme.

Éléanore propose alors de chercher une fonction non-injective comme contre-exemple et Paul propose la fonction x^2, qui est un exemple classique pour lui de non-injectivité. Ainsi, on remarque que dès qu'ils réalisent qu'il manque l'hypothèse de l'injectivité pour pouvoir conclure sa démarche syntaxique, leur expérience leur dicte de chercher un contre-exemple qui nie l'hypothèse manquante. Paul énonce donc un contre-exemple, à voix haute, faisant intervenir un domaine bien choisi de la fonction quadratique, pour le formaliser ensuite sur papier.

contre-exemple : $f(A) \cap f(B) \not\subseteq f(A \cap B)$

Soit $E := \mathbb{R}$ $\qquad f : E \longrightarrow F$

$F := \mathbb{R}_{\geq 0}$ $\qquad x \longmapsto x^2$

Soit $A := \mathbb{R}_{<0}$

$B := \mathbb{R}_{>0}$ $\qquad f(A) \cap f(B) = \mathbb{R}_{>0} \not\subseteq \emptyset = f(\emptyset)$

$= f(A \cap B)$

$f(A) = f(B) = \mathbb{R}_{>0}$

Page 4

$A \cap B = \emptyset$

Figure 4.38 Formulation d'un contre-exemple, en utilisant la non-injectivité

Le contre-exemple, pour Éléanore et Paul, était suffisant pour montrer que le deuxième argument était faux, sans toutefois qu'ils ressentent le besoin d'expliciter en détails quelle était l'erreur. On peut remarquer dans cette courte séance le passage du syntaxique au sémantique, où Paul a rédigé une démonstration purement syntaxique et, une fois face à un obstacle à cette méthode, a traversé du côté sémantique pour trouver un contre-exemple.

Je les ai par la suite questionnés au sujet de la notation et Paul a répondu ceci :

P : En précisant $f(x)$, tu forces ton choix de représentant, [mais] tu pourrais être l'image de plusieurs x différents. Tu forces le choix de la pré-image. Quand tu n'as pas l'injectivité, la pré-image peut-être plusieurs choses.

Les étudiants sont en mesure d'expliquer pourquoi l'inférence est inadéquate et en quoi l'injectivité règle le problème.

Résumé

Axe 1 : Paul était certain dès le départ que la démonstration était erronée, probablement grâce à son intuition. On peut remarquer que lorsque Paul a réalisé qu'il manquait l'hypothèse de l'injectivité, Éléanore a tout de suite proposé d'aller chercher un contre-exemple qui nie cette hypothèse. Cette pratique est due à leur expérience en mathématiques, d'essayer de contredire une hypothèse que l'on repère comme manquante (figures 4.37 et 4.38). Il semble aussi qu'Éléanore et Paul aient bien compris, à l'aide du contre-exemple, pourquoi l'absence de l'injectivité causait problème. On peut croire que Paul a atteint une conviction intuitive interne. Éléanore n'a pas participé beaucoup à la résolution de la tâche, alors il n'est pas possible de statuer sur sa conviction.

Axe 2 : On remarque que Paul a utilisé une méthode plus syntaxique au départ et c'est cette méthode strictement syntaxique qui l'a amené à comprendre ce qui cloche dans la preuve. Après cela, il s'est dirigé vers une méthode sémantique pour construire un contre-exemple. Finalement, ces étudiants n'ont pas fourni de représentation signifiante de la situation.

4.3.4 Julie-Ann et Robert

Brièvement, Julie-Ann et Robert forment une dyade homogène. Les étudiants ont suivi un cours de logique et ils ont atteint le plus haut taux de réussite au test diagnostique.

4.3.4.1 Tâche 1 (6 minutes)

Dès le départ, les deux étudiants sont en accord avec le fait que la démonstration est erronée dû au raisonnement invalide déployé par l'étudiant. Pour Robert, supposer le contraire serait de supposer qu'il existe un irrationnel pour lequel la propriété ne fonctionne pas et montrer que cela résulte en une contradiction, mais l'étudiant suppose que ce n'est pas le cas pour tous les nombres irrationnels, ce qui est erroné. Pour Julie-Ann, il est évident que la démonstration ne fonctionne pas car l'étudiant donne un exemple plutôt que de montrer la propriété pour chaque instance. Il est donc clair pour ces étudiants que la démonstration est invalide.

Ensuite, Robert propose que l'étudiant a peut-être réalisé la contraposée au lien de la négation, mais se ravise après avoir symbolisé le théorème ($x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow 2x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). Il énonce oralement ensuite la bonne négation : « *il existe une irrationnel tel que son double est rationnel* ». Pour Robert, supposer que ce n'est pas le cas n'est pas équivalent à la négation que l'étudiant propose. Ensuite, par rapport à la troisième phrase (« *Par contre, nous avons préalablement démontré que* $\sqrt{2}$ *est irrationnel et aussi que* $2\sqrt{2}$ *est irrationnel* »), ils affirment qu'elle concorde avec la deuxième (« *Ainsi, supposons que le double de tout* *nombre irrationnel est rationnel* ») en ce sens que la suite des idées est correcte, mais elle démarre avec une affirmation erronée, car ce n'est pas la bonne négation.

Lorsque les étudiants tentent de fournir leur propre démonstration, Robert propose ceci : « *Je ne sais pas si on peut y aller comme lui* [par contradiction], *mais en faisant la bonne supposition. Je ne sais pas si ça marcherait. Mais sûrement pas, parce que lui, il trouve un contre-exemple.* »

Ici, il fait référence au contre-exemple ($\sqrt{2}$ et $2\sqrt{2}$) qui est finalement un exemple du théorème. Ainsi, sa crainte n'est pas fondée car en supposant la bonne négation, le contre-exemple de l'étudiant ne s'applique plus. Robert a perdu de vue ce que le contre-exemple proposé montrait par rapport au théorème.

Julie-Ann commence la démonstration (figure 4.39) en mettant à l'écrit le théorème symbolisé, à la suite de l'expression abrégée « M. q. » qui signifie « montrer que », puis la négation du théorème « $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et on suppose $2x \in \mathbb{Q}$ ». Ensuite, elle affirme qu'elle n'utiliserait pas ce qui a été proposé et trouve à la place une contradiction en supposant que le double de l'irrationnel s'écrit comme un quotient de deux entiers et en déduisant que l'irrationnel s'écrit comme le quotient de deux entiers.

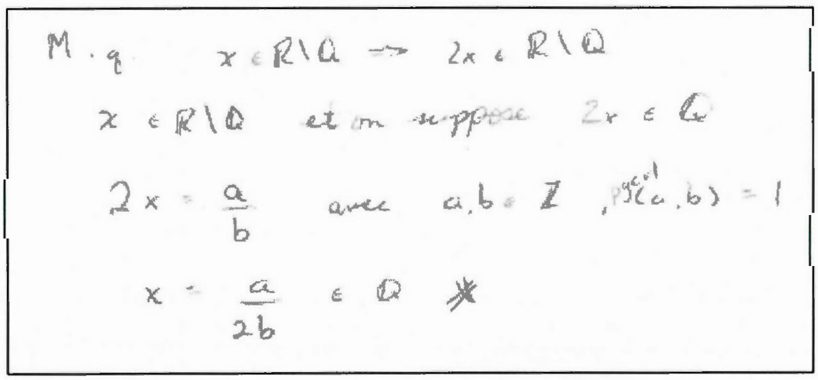


Figure 4.39 Démonstration par contradiction proposée

Puis, Julie-Ann ramène l'idée de la contraposée.

J : Finalement, ça serait fait par contraposée.

R : oui

S : par contraposée ou par contradiction ?

J : Ben la... ben la elle est faite par contradiction, mais la faire par contraposée aurait été, comme, exactement la même chose, sauf qu'on aurait mis un carré [à la fin] au lieu d'une chose de contradiction [#]

R : mais tsé, mettons on aurait dit... oui c'est ça, si tu supposes que $2x$ est dans $\mathbb{Q}$ au lieu de... tu es même pas obligé de parler de ça ; $2x$ est dans $\mathbb{Q}$, tu pars de là, et là t'arrives à x est dans $\mathbb{Q}$, ça n'a pas vraiment le choix.

Julie-Ann semble avoir un bon contrôle sur la preuve par contraposée et la preuve par contradiction car elle a remarqué que les deux démonstrations seraient similaires. En considérant que l'énoncé à démontrer est $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow 2x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, la contraposée est $2x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$ et la démonstration par contraposée revient à supposer que $2x$ s'écrit comme le quotient de deux entiers a/b, et donc que x s'écrit comme $a/2b$, ce qui montre que x est rationnel, ce qu'il fallait démontrer. Cette démonstration est presque identique à celle proposée plus tôt.

Julie-Ann et Robert sont les seuls des huit étudiants à avoir réussi à faire la contraposée de l'énoncé complexe dans le test diagnostique (voir question 5 du test diagnostique, section 3.7.5). Robert, malgré sa légère confusion du début, s'en sort très bien à la fin pour parler de la contraposée. Il a également semblé que la preuve par contraposée pour Robert lui a donné la chance de vraiment bien comprendre pourquoi l'énoncé est valide, et pas seulement de le croire à cause de la preuve par contradiction, lorsqu'il dit en verbalisant la démonstration que « [l'énoncé] *n'a pas vraiment le choix* » d'être vrai.

Élément intéressant, Julie-Ann n'utilise pas de quantification, ni à l'oral ni à l'écrit. Robert en utilise peu, seulement au tout début. Même s'ils insistent préalablement sur le fait qu'il ne faut pas faire la démonstration pour tous les cas de x, que le contraire d'un « *pour tout* » est un « *il existe* », et qu'ils semblent ainsi donner une importance aux quantificateurs, ils ne posent aucune quantification dans leur démonstration.

Résumé

Axe 2 : Il est difficile de statuer sur une orientation de la production de la démonstration.

Axe 3 : Les étudiants proposent une démonstration très symbolisée mais exempte de quantificateurs. Ils ont donc mis en œuvre une quantification implicite, ce qui est surprenant car ils ont souligné l'importance de la quantification au départ. Ils ont rapidement trouvé ce qui clochait dans la démonstration proposée, Robert à cause du quantificateur qui n'a pas été modifié et Julie-Ann à cause de l'exemple qui se voulait une contradiction. Ils ont fait preuve d'un bon contrôle logique en discutant adéquatement de la contraposée.

4.3.4.2 Tâche 2 (5 minutes)

Le premier réflexe de ces deux étudiants a été d'utiliser une représentation visuelle. Julie-Ann, après avoir hésité quelques secondes, a affirmé à voix haute qu'elle voulait faire un dessin tandis que Robert a tracé des cercles dans les airs puis a affirmé qu'il était convaincu de la véracité de l'énoncé. C'est à la suite de la courte étude d'un dessin (voir figure 4.40), avec l'aide de Robert, que Julie-Ann s'est convaincue du résultat. Les deux étudiants utilisent des représentations visuelles. Ils expliquent leurs idées à voix haute et estiment que leurs explications orales sont suffisantes comme démonstration. Ils utilisent le mot « couvrir » pour discuter de la surjectivité, ce qui donne une indication sur leur compréhension intuitive.

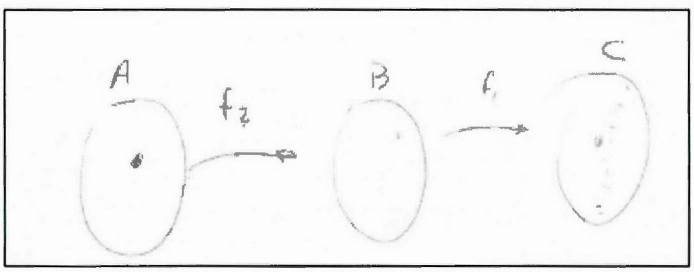


Figure 4.40 Représentation de la composition de fonctions

Je leur ai tout de même demandé de formaliser leurs explications à l'écrit, malgré que leur intuition était bonne :

Soit $c \in C$, puisque f_1 est surj. $\exists b \in B$ t.q.
$f_1(b) = c$. Puisque f_2 est surj, $\exists a \in A$ t.q.
$f_2(a) = b$

$$f_1(f_2(a)) = f_1(b) = c$$
$$\equiv$$
$$(f_1 \circ f_2)(a) = c \quad \square$$

Figure 4.41 Démonstration proposée

La démonstration a semblé facile à composer. Les étudiants ont commencé par un élément générique de l'ensemble *C*, évitant donc une erreur anticipée dans l'analyse *a priori*. Également, ils n'ont pas commis d'erreur d'instanciation, erreur également anticipée dans l'analyse *a priori*. Ils précisent aussi que leur *c* dans *C* est quelconque et donc que ça fonctionne pour tous les *c* dans *C*. Comme a dit Robert, « *le* c *était quelconque et on a trouvé un* a *qui fait la job* ». Ils n'ont pas questionné la validité de l'énoncé, leurs premier dessin et premières réflexions ont achevé de les convaincre. La démonstration s'est construite en examinant le dessin et en exprimant à voix haute les raisons de la validité de la conjecture. Il leur a suffi par la suite de symboliser le tout pour avoir une démonstration. Ainsi, les étudiants semblent avoir réellement compris les raisons pour lesquelles la conjecture est toujours vraie.

<u>Résumé</u>

Axe 1 : leur conviction est très forte et a été atteinte rapidement. Celle-ci ne s'appuie pas sur des arguments formellement exhibés.

Axe 2 : Les étudiants ont réfléchi à l'aide d'un dessin (figure 4.40) et de représentations mentales (« *couvrir* »). De plus, leur conviction profonde de la validité de l'énoncé porte à croire à une production sémantique.

4.3.4.3 Tâche 3 (38 minutes)

Tout d'abord, Robert s'étonne de la formulation « *un robot générique* », qui apparaît au début de la preuve de l'étudiant fictif. Il semble surpris que l'attribut « générique » soit associé à un objet non-mathématique. Julie-Ann le rassure en lui disant qu'il s'agit seulement d'un robot quelconque. Par la suite, les étudiants s'expriment sur les axiomes. Julie-Ann affirme qu'elle a eu besoin de les relire et Robert dit que ça lui semble être beaucoup de petites informations à traiter, quoique rien ne lui paraisse vraiment compliqué.

Julie-Ann et Robert prennent ensuite le temps de discuter des axiomes, de les reformuler et de se donner des exemples afin de bien les maîtriser et les comprendre, avant de commencer la résolution. Tout ce que les étudiants ont fait jusqu'à maintenant a servi à se familiariser et à assimiler la tâche à accomplir en reformulant les axiomes et l'énoncé dans leurs propres mots. Il est certain que ce temps passé à étudier les informations fournies les a aidés à assimiler les subtilités entre les axiomes et ainsi éviter des erreurs. En effet, ils soulignent l'unicité exprimée dans l'axiome 1 et la présence du « *au moins* » dans l'axiome 2. Aussi, Robert explique la présence de l'axiome 2 en justifiant son utilité, à savoir qu'il n'y a pas de chien qui n'a aucun ami.

Julie-Ann ressent par la suite le besoin de se faire un dessin, d'utiliser une représentation visuelle signifiante afin de mieux s'imaginer la relation. Il lui a cependant semblé difficile de trouver une manière de dessiner la situation. Dans son dessin, les points représentent des robots et les x des chiens. Sur le dessin, l'axiome 1 est représenté.

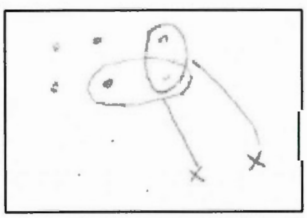


Figure 4.42 Schéma de la situation

Robert renomme les chiens *L1* par *1*, *L2* par *2* et *L3* par *3*, de sorte que l'on fera référence au chien ami avec les robots *R* et *L1* par le chien ami avec *R* et *1*, qui sera noté *R-1*. Il propose de construire l'ensemble minimal de chiens et de robots pour que les trois axiomes soient satisfaits. Julie-Ann et lui sont conscients qu'il peut exister d'autres robots et que les chiens exhibés pourraient être amis avec ces robots mais pour leur objectif, ces considérations ne sont pas importantes.

Figure 4.43 Liste des robots existants à ce moment de la résolution

Les quelques échanges qui ont suivi, qui n'ont pas fait avancer la résolution, ont tout de même démontré que Julie-Ann et Robert ont bien saisi les enjeux des trois axiomes : l'existence de deux robots pour chaque chien, l'unicité d'un chien pour toute paire de robots distincts et l'existence potentielle d'autres robots en dehors des quatre préalablement exhibés par l'étudiant. Le fait qu'ils aient pris du temps en début de résolution pour bien assimiler les axiomes semble avoir porté fruit.

Julie-Ann suggère par la suite de tenter une preuve par contradiction sans trop savoir si elle va fonctionner. Robert ne semble pas interpellé par cette suggestion et continue à la place avec son idée d'exhiber une configuration minimale de chiens. Son point de départ est qu'il y a un chien ami avec *R* et *1* (*R-1*). Il précise ensuite qu'il pourrait démarrer sa configuration avec le chien *R-1-2* ou encore *R-1-3*. Pour l'exercice, il commence avec *R-1*. Sa technique, qui est très méthodique et qui lui permet de minimiser les chances d'erreurs, sera de mettre en évidence des chiens qui existent nécessairement à cause de l'axiome 1, puis de voir s'il peut rajouter des robots aux liens d'amitié. Il démarre donc avec *1-2*, qui ne peut recevoir l'amitié de *3* (par l'axiome 3) ni de *R* (unicité du chien ami avec *R* et *1* par *AX1*). Il conserve donc *1-2*. Il recherche ensuite un chien ami avec *2* et *3*. À celui-ci, on pourrait ajouter *R* mais pas *1* (par l'axiome 3). Il y a donc deux possibilité différentes en partant de *R-1* : *R-1* | *1-2* | *2-3* et *R-1* | *1-2* | *R-2-3* :

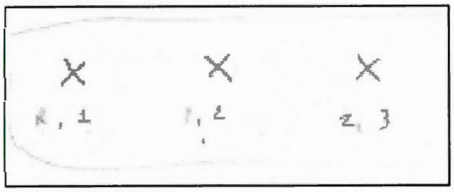


Figure 4.44 Première partie d'une configuration possible

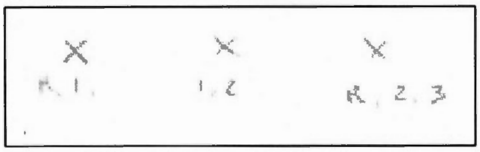


Figure 4.45 Première partie d'une autre configuration possible

Robert continue ensuite avec *1-3*. Il ne peut lui rajouter l'amitié de *2* (AX3) ni l'amitié de *R* (*AX1*, l'unicité du chien ami avec *R* et *1*). Le même scénario se produit avec *R-2* et *R-3* pour obtenir une configuration complète :

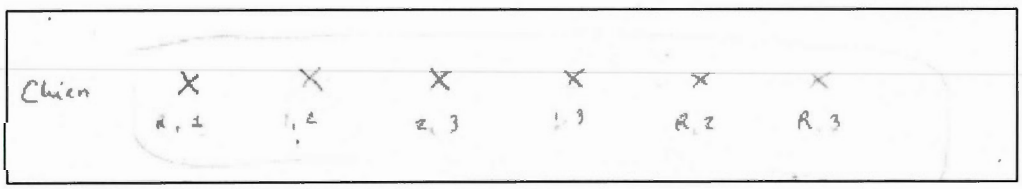


Figure 4.46 Configuration complète possible

Cette idée de construire une configuration minimale est valable car si les deux étudiants sont capables de construire une telle configuration et qu'il est possible d'y trouver un chien qui n'est pas l'ami de *R*, ce chien sera présent dans toutes les configurations possibles répondant aux trois axiomes.

La manière dont Robert construit cette configuration lui garantit de ne pas contredire l'axiome 1 et l'unicité qu'il prescrit, ce qui est exactement le nœud de la tâche. Robert met continuellement en évidence ce nœud dans ses réflexions en disant, par exemple que le chien *1-2* ne peut être ami avec *R* car le chien *R-1* existe déjà et un chien *R-1-2* contredirait l'axiome 1. Ainsi, Robert expose sans s'en rendre compte ce qui fait que *R*, le robot générique, n'est pas ami avec tous les chiens en conséquence des axiomes donnés. Il ne le relève cependant pas à ce moment-ci, Julie-Ann non plus.

Par la suite, Julie-Ann essaie d'introduire une relation (« *R est en relation avec R' si un chien est ami avec les deux* ») car elle considère qu'introduire une relation peut souvent être utile, selon son expérience. Robert l'interrompt cependant avant qu'elle ait eu le temps de creuser l'idée pour revenir sur la preuve par contradiction que Julie-Ann avait préalablement tenté de commencer. Il essaie d'énoncer ce que serait la négation de ce qui doit être démontré, mais il éprouve des difficultés :

R : je viens de penser à quelque chose, je ne sais pas si ça marche mais, si tu supposes que ce n'est pas vrai. Tu veux montrer que pour tout... oui tu supposes le contraire. Donc pour tout robot...

J : le contraire de quoi ?

R : attends un peu...

J : tu voudrais supposer qu'il existe un robot qui est ami avec tous les chiens ?

R : hum, non. « Montrer que pour tout robot, il existe au moins un chien qui n'est pas son ami. » Donc tu voudrais montrer qu'il existe un robot pour lequel il y a aucun chien qui soit ami.

J : le « il existe » devient « pour tout » et « qui n'est pas son ami » devient « qui est son ami ».

R : il existe au moins un chien... qu'est-ce qui fait que ce serait pas vrai... il existe au moins un chien qui n'est pas son ami. Il n'existe pas de chien... pour tout chien, il est son ami. Donc tu vas supposer qu'il existe un robot pour lequel... qui est ami avec tous les chiens.

La difficulté avec laquelle les deux étudiants transforment l'énoncé en sa négation est surprenante compte tenu du niveau de connaissances logiques que ces deux étudiants ont démontré dans le test diagnostique. Il s'agit de la dyade ayant démontré le plus de connaissances prédicatives en logique. L'énoncé est quantifié à deux reprises de sorte que les deux quantificateurs doivent être modifiés et la qualité (être ami ou ne pas être ami) de l'énoncé doit aussi être changée : « *pour tout* robot, *il existe* un chien qui <u>n'est pas son ami</u> » devient « *il existe* un robot tel que *tout* chien <u>est son ami</u> ». Robert propose tout d'abord un énoncé dont la qualité n'a pas été modifiée. Il énonce qu'« aucun ($\neg\exists$) chien n'est son ami » et donc, en d'autres mots, que « pour *tout* chien, le chien n'est pas son ami ». Julie-Ann, pour sa part, énonce la bonne négation à sa première intervention mais oublie que l'énoncé est quantifié à deux reprises dans sa deuxième intervention. Elle modifie ainsi seulement la première quantification et la qualité de l'énoncé.

Pour démarrer la preuve par contradiction, Robert refait la démonstration du premier cas déjà démontré dans l'énoncé de la tâche, c'est-à-dire si *R* est *L1*, *L2* ou *L3*, en supposant qu'il existe un robot qui est ami avec tous les chiens. Il conclut que *R* ne peut pas, encore une fois, être *L1*, *L2* ou *L3* car l'axiome 3 empêche un chien d'être ami avec ces trois robots simultanément. Finalement, Robert conclut que le robot ami avec tous les chiens doit être *R* et donc, que chacun des chiens *R-1-2*, *R-1-3*, *R-2-3* et aussi *R-1*, *R-2* et *R-3*, existe et est distinct des autres. À ce moment-là, les deux étudiants expriment ouvertement ne pas savoir où leur résolution se dirige mais ils espèrent pouvoir arriver à une contradiction sous peu. Ce n'est pas clair pourquoi Robert ressentait le besoin de montrer le premier cas de nouveau.

Avec les robots précédemment exhibés, Robert vérifie s'ils répondent à l'axiome 2. Julie-Ann affirme alors que cet axiome est plus « *subtil* » à utiliser que les autres et qu'il serait judicieux de tenter de le contredire en montrant qu'il existe un chien qui serait seulement ami avec *R*.

La résolution par la suite est fractionnée par de longs silences et quelques interventions démontrant la frustration des étudiants face à cette tâche qui leur résiste. Julie-Ann, au travers de ces quelques échanges, revient sur l'importance de la relation d'amitié en se questionnant sur les propriétés de celle-ci, à savoir s'il s'agirait d'une relation d'équivalence par exemple. Cette piste reste en suspens et les étudiants se tournent de nouveau vers la preuve par contradiction. Robert propose de considérer deux des trois axiomes, de construire les chiens et les robots qui en découlent puis de tenter de contredire l'axiome qui n'a pas été utilisé au départ. Robert propose de contredire l'axiome 2 et Julie-Ann s'y oppose quelque peu car, comme elle l'a exprimée plus tôt, elle considère qu'il est plus difficile à utiliser.

Julie-Ann décide de prendre un chien au hasard, soit *1-2*, et demande à Robert si ce chien pourrait être ami avec *R*. Il lui répond que non car, le cas échéant, il y aurait deux chiens amis avec *R* et *1* simultanément. Julie-Ann renchérit en demandant directement si ce chien est ami avec *R* et Robert soutient qu'il ne l'est pas. Julie-Ann affirme ensuite que c'est ce qu'il fallait montrer. Il s'ensuit un silence.

Cet échange est un peu surprenant car Julie-Ann a clairement compris le problème et vient tout juste d'exhiber la raison pour laquelle l'énoncé à démontrer est vrai, mais Robert ne semble pas voir les conséquences de ces dernières interventions. Pour Julie-Ann, par son intonation, le problème est réglé et elle tente de l'expliquer à Robert. L'explication et les traces écrites fournies par Julie-Ann semblaient se diriger dans la bonne direction pour fournir une explication claire mais Robert a changé de sujet pour revenir à la configuration qu'il a exhibé plus tôt. Il continue de croire que c'est la seule manière d'y arriver.

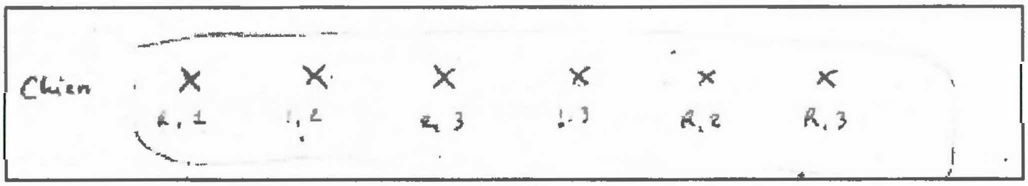


Figure 4.47 Configuration considérée par Robert comme démontrant l'énoncé

Il affirme que cette série de chiens respecte les trois axiomes. De plus ces chiens ont les caractéristiques suivantes : tous les chiens ne sont pas amis avec *1*, *2*, *3* ou *R*, c'est-à-dire qu'aucun robot n'est ami avec tous les chiens simultanément. Il affirme donc avoir exhibé une liste de chiens qui répond aux critères nécessaires, en contredisant la négation de l'énoncé à démontrer, ce qu'ils cherchaient à faire. Julie-Ann n'est pas convaincue et propose l'idée que si l'on considère seulement *R-1*, *1-2*, *2-3* et *1-3*, il est possible de montrer qu'il y en a un qui ne peut nécessairement pas être ami avec *R*, ce qui revient à l'idée qu'elle essayait d'expliquer à Robert précédemment. Robert n'est pas d'accord car selon lui, il y a plusieurs cas qui ne sont pas englobés par ces quatre robots, situation que Julie-Ann défend comme étant valide car ces chiens existent nécessairement.

Robert ne semble pas convaincu et il revient à l'idée qu'il a été capable d'exhiber une configuration qui fonctionne, en ce sens qu'il n'y a pas de robot qui soit ami avec tous les chiens, contredisant la négation de l'énoncé de départ, et qu'il suffit de supposer que tous les chiens sont différents. Il résume et justifie sa réponse de la manière suivante :

R : dans le fond, c'est comme pas écrit mais là, la configuration n'est pas décrite dans le problème. Tu as plusieurs configurations mais là, c'est comme montrer que... tu as comme le « pour toute configuration » en quelque part qui n'est pas dit. Ça n'a pas le choix que pour tout robot, il y a au moins un chien [qui n'est pas son ami], mais si tu décides de te faire une configuration pour laquelle ça marche pas. Je ne vois pas pourquoi... ça montre que c'est pas vrai, tu es obligé d'avoir ça. [...] le début de la preuve est écrite et là on suppose que *R* est différent de *L1*, *L2*, *L3*, on montre que *L1* ne peut pas être ami avec [tous les chiens] parce que ça prend [un chien] ami avec *L2* et *L3*. *L2* par le même raisonnement ne peut être ami avec [tous les chiens]. Donc le dernier candidat qui reste serait *R*. Après tu fais juste montrer qu'il existe une configuration de chiens et de robots où *R* n'est pas ami avec [tous les chiens]. Donc on s'est fait une configuration et *R* n'est pas ami avec tout le monde. Moi je serais satisfait.

Ainsi, ce que Robert a montré, c'est qu'en considérant les chiens et les robots qui n'ont pas le choix d'exister selon les trois axiomes et en ajoutant *R*, il n'existe pas de robot ami avec tous les chiens. Ainsi, l'énoncé à contredire, c'est à dire la négation de l'énoncé à démontrer au départ, est effectivement contredit. Cependant, il est difficile de statuer sur le fait que Robert ait compris toutes ces nuances. À la toute fin de l'entrevue, lorsque l'enregistrement audio a été arrêté, Robert a raconté une anecdote reliée à un examen qu'il avait passé récemment et où il avait été confronté à la différence entre montrer qu'un énoncé universellement quantifié n'était pas vrai dans tous les cas (i.e. un contre-exemple suffit) et montrer que l'énoncé est faux pour tous les cas. Il a comparé la configuration qu'il a offerte à cette tâche avec le cas où un contre-exemple suffit. On peut donc supposer que pour Robert, il réalisait jusqu'à la fin une preuve par contradiction, de sorte qu'il supposait jusqu'à la fin que *R* était ami avec tous les chiens. Le fait que sa configuration rende cette proposition fausse lui a donc suffi.

<u>Résumé</u>

Axe 2 : Julie-Ann ressent le besoin de faire un dessin de la situation (représentation signifiante).

Axe 3 : Ils prennent le temps de reformuler les axiomes et l'énoncé pour bien comprendre, ce qui les aide énormément tout au long de la résolution par rapport aux subtilités logiques. Ils ne transforment pas les axiomes en symboles. Robert et Julie-Ann démontrent cependant quelques difficultés lorsqu'ils désirent faire la négation de l'énoncé dans le but de faire une preuve par contradiction. Finalement, tel que mentionné précédemment, la démonstration a été réussie, malgré qu'il soit difficile de statuer si Robert a compris toutes les nuances de la démonstration qu'il propose par rapport à la tâche.

4.3.4.4 Tâche 4 (11 minutes)

Au tout début, Robert souligne qu'il y a un problème lorsque l'étudiant passe à la fonction inverse, c'est-à-dire quand il passe de « *f(x) est dans quelque chose* » à « *x est dans quelque chose* ». Pour Julie-Ann, ce qui saute aux yeux, c'est qu'il manque l'injectivité parce qu'« *il pourrait y avoir, dans le deuxième argument, un* x_1 *qui est dans A et un* x_2 *qui est dans B, tels que* $f(x_1)=f(x_2)$, *mais* x_1 *et* x_2 *sont différents et ils ne seraient pas dans* $A \cap B$ ».

Julie-Ann fait ensuite un dessin pour illustrer et confirmer son idée, car elle était légèrement hésitante. Sa représentation visuelle signifiante de la situation les aide, elle et Robert, à réfléchir.

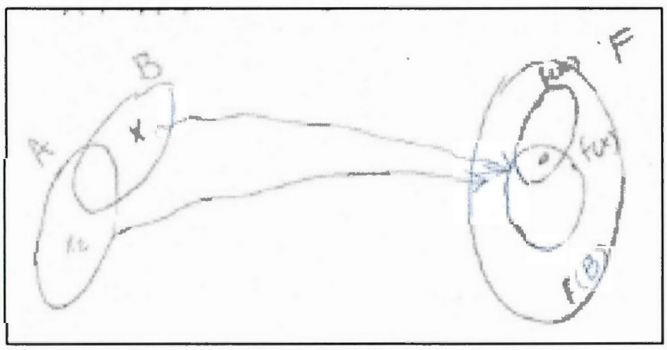


Figure 4.48 Schéma de la situation

De manière plus générale, leur avis sur le premier argument est qu'il est correct car l'injectivité n'y est pas une nécessité. Ils n'ont donc pas soulevé l'erreur — ou disons le raccourci abusif — dans cet argument, qui est de présumer que le x de $f(x)$ est nécessairement dans $A \cap B$, même si l'on sait que tout élément de $f(A \cap B)$ a toujours au moins une pré-image dans $A \cap B$. Ils continuent leurs réflexions vis-à-vis le deuxième argument, en le comparant tout d'abord au premier argument :

J : peu importe il y a combien de pré-images à $f(x)$, si $f(x)$ est dans $f(A \cap B)$, les pré-images ont pas le choix d'être dans l'intersection de A et B.

R : mais c'est surtout quand tu dis « $f(x)$ est dans $f(A)$ », tu te dis que ...

J : tu te dis qu'il existe un x dans A...

Les étudiants disent que si $f(x)$ est dans $f(A \cap B)$, les pré-images sont nécessairement dans l'intersection de A et B, ce qui n'est pas le cas pour le deuxième argument, dans le cas où $f(x)$ est dans $f(A)$. Ce n'est pas clair ici si les étudiants ont compris que si $f(x)$ est dans $f(A \cap B)$, il existe au moins une pré-image dans $A \cap B$, mais les pré-images ne sont pas toutes nécessairement dans cet ensemble quand il y en a plusieurs, et que dans ce cas il n'y a qu'une seule de ces pré-images qui peut être désignée par x.

Dans les échanges qui suivent, Robert propose deux écritures différentes pour représenter le lien entre l'antécédent et son image, afin d'élucider l'écriture $f(x) \in f(A)$:

R : « un x_1 dans A tel que $f(x_1)$ est dans $f(A)$ »... c'est pas plus « il existe un y dans $f(A)$ tel que $f(x_1) = y$ ».

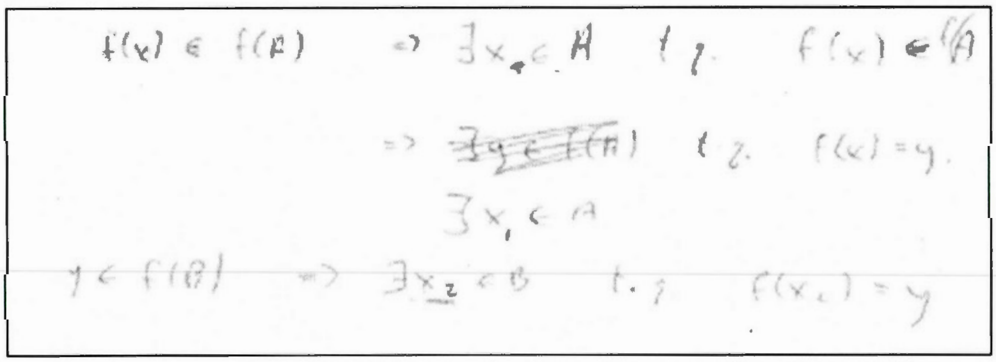


Figure 4.49 Tentative de démonstration de la deuxième inclusion

J : je suis pas sûre de voir la différence.

R : c'est certain qu'on a fait ça à peu près neuf fois dans le dernier cours d'analyse.

J : je pense que les deux formulations sont correctes. Si $f(x)$ est dans $f(A)$, ça veut dire qu'il y a un élément dans A tel que son image est dans $f(A)$. Écrivons le : $f(A) := \{f(x) \in F \mid x \in A\}$. Alors si y est dans $f(A)$, ça veut dire qu'il existe un x dans A avec $f(x) = y$.

Robert propose soit « [il existe] *un* x_1 *dans A tel que* $f(x_1)$ *est dans* $f(A)$ », soit « *il existe un y dans* $f(A)$ *tel que* $f(x_1) = y$ ». Pour clarifier la situation, Julie-Ann suggère d'écrire plus formellement ce qu'est l'ensemble $f(A)$ et quels sont ses éléments (voir verbatim ci-dessus). Ainsi, Julie-Ann s'appuie sur une écriture formelle plutôt que sur sa compréhension intuitive pour clarifier la situation ambiguë. Notons brièvement que Robert a exprimé sa frustration face à cette tâche, qu'il affirme avoir déjà réalisée à plusieurs reprises dans le cadre d'un cours. Il tentait visiblement d'aller puiser dans ses connaissances contextualisées et n'en était pas capable.

Par la suite, les étudiants réussissent à mieux exprimer leur malaise vis-à-vis la notation dans le deuxième argument :

R : Dans le fond, ton $f(x)$ tu peux l'appeler y. Quand tu prends $f(x)$ et que tu appliques f^{-1} de chaque côté [de $f(x) \in f(A)$], tu as comme envie de garder ton x. Mais si tu l'appelles y, « y est dans $f(A)$ » donc il existe un x dans A tel que ... [...] tu dis « y est aussi dans $f(B)$ », c'est le même y, alors il existe un x_2 dans B tel que $f(x_2) = y$. Mais tu n'es pas obligé d'avoir $x_1 = x_2$ car la fonction n'est pas injective.

À la suite de ces réflexions, ils affirment ne pas pouvoir démontrer l'énoncé tel qu'il est proposé car il n'est pas valide. Ils voudraient supposer que la fonction est injective. De plus, les étudiants ne ressentent pas le besoin de fournir un contre-exemple. Se contenter de dire que ce n'est pas injectif, avec comme seul appui la démonstration proposée, est suffisant pour eux. J'ai dû leur demander, les pousser un peu. Julie-Ann propose la fonction x^2 car elle n'est pas injective.

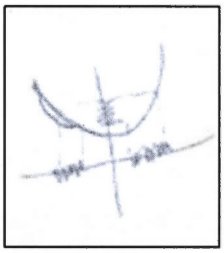


Figure 4.50 Représentation de la fonction utilisée comme contre-exemple

Robert explique alors que le dessin rend la proposition fausse de manière évidente : les parties hachurées montrent bien que $A \cap B$ est vide (où $A = [-1/2, -1/3]$ est l'ensemble hachuré sur l'axe des abscisses à la gauche de l'origine et $B = [1/3, 1/2]$ est l'ensemble hachuré sur l'axe des abscisses à la droite de l'origine), et donc que $f(A \cap B)$ est vide, tandis que $f(A) \cap f(B)$, qui est l'ensemble hachuré sur l'axe des ordonnées, n'est pas vide. Ainsi, l'égalité de la proposition est contredite, ce qui met fin au travail de cette dyade. Le contre-exemple, pour Robert, a été révélateur quant aux raisons de l'invalidité de l'énoncé, même s'il n'en ressentait pas le besoin au départ. En effet, son enthousiasme lorsqu'il a résumé le contre-exemple en le liant à l'énoncé à l'aide de gestes pointant les ensembles montre qu'il a non seulement compris plus en profondeur la tâche mais également, qu'il est content d'avoir compris.

Résumé

Axe 1 : Dès le départ, les deux étudiants ont l'intuition que quelque chose ne fonctionne pas dans la démonstration et l'énoncé. Le contre-exemple exhibé à la fin a vraiment été révélateur pour Robert en ce sens que c'est après l'avoir vu qu'il a réellement pu expliquer ce qui ne fonctionnait pas dans l'énoncé. Il a donc pu atteindre une compréhension et une conviction plus profonde, malgré qu'il ne ressentait pas le besoin d'exhiber un contre-exemple tellement ils étaient déjà convaincus. Les étudiants ont donc atteint ainsi une conviction intuitive interne.

À un certain point, Robert expose sa frustration face à cette tâche qu'il affirme avoir réalisé à plusieurs reprises dans le cadre d'un cours. Il est donc conscient qu'il possède des connaissances contextualisées à ce type de tâches, sans toutefois être capable à ce moment-ci de les atteindre.

Axe 2 : Julie-Ann fait un dessin de la situation et du contre-exemple qui les aide à réfléchir. Leur reformulation de la démonstration semble plus syntaxique.

4.4 Analyse *a posteriori* des tâches et commentaires généraux sur certains axes

La passation des entrevues a mis en évidence certaines caractéristiques des tâches que l'analyse *a priori* n'avait pas fait ressortir. Il a semblé important de souligner ces caractéristiques qui ont émergé, principalement en lien avec la manière dont les étudiants ont traité et résolu les tâches. Également, certains aspects des trois axes d'analyse trouvent leur place dans cette section car les approches des dyades ont des caractéristiques communes vis-à-vis certains des axes pour une même tâche, ce qui justifie une remarque générale.

En guise de rappel, voici la définition des axes en jeu dans l'analyse. Le premier axe discute de la place de l'intuition dans la résolution et du type de conviction atteint par les étudiants durant cette résolution (formelle extrinsèque ou intuitive interne, cf. section 2.3) et de l'utilisation de savoirs, savoir-faire et pratiques contextualisés (connaissances contextualisées). Le deuxième axe se penche sur les tendances décelées à travers la production de démonstrations, soit sémantique ou syntaxique, tout en considérant les représentations signifiantes utilisées. Finalement, le troisième axe porte sur les obstacles logiques rencontrés par les étudiants et les considérations logiques qu'ils auraient soulevées.

4.4.1 Tâche 1 : La preuve par contradiction

Il est intéressant de souligner une formulation dans l'énoncé de cette tâche. Pour les étudiants qui ont participé aux entrevues, de manière générale, une démonstration par contradiction débute par la formulation « *supposons le contraire* » ou encore l'acronyme « *SLC* », que j'ai retrouvé à plusieurs endroits dans les traces écrites. Cependant, dans la démonstration proposée, j'ai utilisé la formulation « supposons que ce n'est pas le cas », en guise de traduction à « suppose it is not » (Epp, 1997, p. 78). Durant la résolution de la tâche, les étudiants n'utilisaient généralement pas la formulation que j'avais proposée mais transformait à tous coups le début de la preuve par l'expression « supposons le contraire ». Tous les étudiants, sauf Paul. Notons qu'en logique aristotélicienne, le contraire et la négation ne coïncident pas. La négation d'un énoncé comme « tous les chats ont quatre pattes » est « il existe des chats qui n'ont pas quatre pattes » alors que son contraire (en logique aristotélicienne) serait « aucun chat n'a quatre pattes » (Armengaud, non daté). Cette distinction, quoique très intéressante, n'est pas significative par rapport à ce que je désire étudier dans ce projet. En effet, il ne s'agit pas, à mon sens, d'une erreur de logique mathématique mais bien d'une mise au point terminologique à faire.

Il est aussi intéressant de remarquer qu'aucun étudiant n'a remis en doute la validité de l'énoncé. En effet, il s'agit d'un énoncé assez simple mathématiquement et donc il se peut que leur intuition (axe 1) mathématique ait été assez développée pour qu'ils soient instantanément convaincus. Plus spécifiquement en ce qui concerne l'axe 1, la démonstration ne semblait pas difficile pour eux. Cela peut être dû au fait qu'il s'agit d'un type de démonstrations qu'ils ont souvent réalisées, un savoir-faire ou une pratique acquis au cours de leur expérience.

En ce qui concerne le 2^e axe, il est difficile de statuer sur le mode de composition de la démonstration, soit plus syntaxique ou plus sémantique, compte tenu de la longueur de celle-ci. Cependant, il a été possible d'émettre des hypothèses sur quelques orientations. Également, sauf pour Paul, les concepts en jeu n'ont pas semblé faire ressortir des représentations signifiantes chez les étudiants.

4.4.2 Tâche 2 : les fonctions surjectives

Pour ce qui est de l'axe 1, pour toutes les dyades, la conviction interne de la validité de l'énoncé a été atteinte instantanément ou du moins rapidement, grâce principalement à diverses représentations signifiantes (axe 2) qui ont été relevées dans la section 4.3.

Toujours concernant l'axe 1, la démonstration a été construite très facilement pour toutes les dyades. Elle ne semblait pas difficile pour eux. Cela peut être dû au fait qu'il s'agit d'un type de démonstrations qu'ils ont souvent réalisées, un savoir-faire acquis au cours de leur expérience. Cependant, il a été possible d'émettre des hypothèses sur quelques orientations.

En ce qui concerne l'aspect syntaxique ou sémantique de l'axe 2, la démonstration à fournir était un peu trop courte, à notre avis, pour évaluer adéquatement le mode d'élaboration. Finalement, pour ce qui est de l'axe 3, cette tâche s'est avérée très facile pour tous les étudiants. En effet, aucun étudiant n'a commis d'erreur significative.

4.4.3 Tâche 3 : les robots et les chiens

Tous les étudiants ont considéré l'amitié entre les chiens et les robots comme une relation mathématique et lui ont associé un symbole. Une relation mathématique a, par définition, un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée. En d'autres mots, la relation a ce que l'on pourrait appeler un sens; la relation R allant de l'ensemble A vers l'ensemble B n'est pas la même relation que la relation R allant de B vers A. Ainsi, les concepts de surjectivité et d'injectivité s'applique difficilement à la tâche 2 puisqu'il n'y a pas en soi d'ensemble prédéfini comme étant celui de départ et celui d'arrivée, pour les robots et les chiens. Le fait de définir un sens à la relation d'amitié permet d'utiliser ces concepts, mais n'est pas entièrement fidèle à la tâche.

Les axes d'analyse de l'intuition et des savoirs contextualisés (1) n'ont pas été présents dans cette analyse. En effet, cette tâche a été conçue dans le but de mettre de côté les connaissances contextualisées et l'intuition, de sorte qu'il était impossible pour un étudiant d'atteindre une conviction intuitive interne face à la validité de l'énoncé parce que les objets en jeu dans la situation ne donnent pas lieu à une compréhension intuitive ou ne font pas référence à des connaissances contextualisées.

Cependant, des connaissances qui ne semblent pas être contextualisées à un certain domaine mathématique mais qui semblent, de manière plus générale, contextualisées aux mathématiques, sont apparues. Par exemple, un obstacle que cette tâche présentait est la présence de l'axiome 2, qui n'est pas utilisé dans le début de démonstration donné dans l'énoncé de la tâche, et qui n'intervient pas non plus dans la solution, pas plus d'ailleurs que dans ce que les étudiants ont composé. L'envie des étudiants Michel, Jeanne, Paul, Julie-Ann et Robert d'utiliser cette information (l'axiome 2) jusqu'à maintenant laissée de côté et le malaise de certains à le laisser ainsi est probablement issue de leur expérience, un savoir-faire contextualisé, dans leur parcours mathématique : l'idée que toutes les hypothèses doivent être utilisées dans une preuve et que de manières générales, un théorème, un lemme ou une proposition doivent énoncer seulement les hypothèses minimales. Sinon, dans l'esprit de l'étudiant, c'est que soit sa preuve n'est pas bonne, soit le problème est mal posé. Dans leur compréhension de la tâche, il est naturel pour ces étudiants de considérer les trois axiomes comme les hypothèses de ce qu'ils doivent montrer, et ils s'attendent donc à ce que l'axiome 2 intervienne dans la preuve. En fait, tous les chemins que les étudiants ont choisis pour mener la résolution de la tâche 3 pourraient être une connaissance que l'on pourrait qualifier de « contextualisée aux mathématiques ». En effet, les étudiants ne pouvaient pas vraiment choisir un chemin à prendre en se basant sur les objets en jeu dans la tâche, alors ils ont dû choisir des chemins qu'ils connaissent comme valides et comme ayant une bonne possibilité de réussite. Ces choix prennent racines dans les expériences des individus. Ainsi, il existe des connaissances que possèdent les étudiants, propres aux mathématiques, mais qui se transportent d'un domaine à l'autre, des connaissances qu'on pourrait qualifier de « transversales » aux mathématiques (Azrou et al., 2009).

4.4.4 Tâche 4 : l'intersection des images

En ce qui concerne l'axe 1, qui s'intéresse à la conviction, la notion de contre-exemple a été spécifiquement présente dans la réalisation de cette tâche. En effet, l'énoncé n'étant pas valide, la démonstration qui ne l'est pas non plus pouvait faire l'objet de la construction d'un contre-exemple. L'enjeu a été de savoir si un contre-exemple est suffisant pour un étudiant pour invalider un énoncé ou une démonstration, ou bien s'il ressent le besoin d'avoir une compréhension plus profonde des raisons de l'invalidité de l'énoncé ou de la démonstration. Également, certains contre-exemples donnent plus d'informations sur l'essence d'un problème, de sorte qu'il est possible d'atteindre un niveau de compréhension élevé sur les raisons de l'invalidité d'un énoncé ou d'une démonstration avec un contre-exemple bien choisi.

La tâche 4 s'est avérée celle comportant le plus de subtilités mathématiques. Malgré qu'elle fasse intervenir des concepts mathématiques simples, comme les fonctions et les inclusions d'ensembles, certains étudiants ont éprouvé plusieurs difficultés à réfléchir sur ces concepts dans le contexte proposé.

En considérant l'axe 3, les difficultés des étudiants proviennent principalement de concepts qui n'ont pas de lien avec la logique : les ensembles et les fonctions. En effet, malgré que la notion de fonction soit une notion étudiée depuis le début des études secondaires et utilisée constamment dans les études collégiales et universitaires en mathématiques, les étudiants ont éprouvé des difficultés reliées à cette notion. En effet, la tâche proposée n'est pas routinière et a mené les étudiants à se poser beaucoup de questions sur les subtilités des fonctions et des ensembles de départ et d'arrivée. Il y a aussi éventuellement des problèmes avec des notions liées à la théorie des ensembles. Ainsi, la majorité des difficultés n'étaient pas d'ordre logique, mais l'enjeu que visait cette tâche, soit l'instanciation existentielle, a tout de même demandé un travail de la part des étudiants. En effet, tous les étudiants mentionnent à un moment ou à un autre que les deux x ne sont pas les mêmes et qu'il faudrait les nommer avec deux noms différents. Il s'agit d'une manière de donner du sens au problème. Les étudiants arrivent à la conclusion que le problème réside dans le fait qu'il ne s'agit pas nécessairement « du même élément », sans expliquer formellement où réside l'erreur, c'est-à-dire sans discuter des subtilités de la portée des quantificateurs lors de l'instanciation existentielle.

CHAPITRE V

DISCUSSION ET RÉSULTATS

Ce chapitre fera le point sur l'analyse des données réalisée dans le chapitre précédent. Tout d'abord, je présente une analyse par dyade, selon chacun des axes d'analyse. Ensuite, j'expose des thèmes qui ont émergé de ce travail de recherche, au regard de l'analyse des données recueillies. Finalement, je propose des pistes de réponses aux questions de recherche qui ont guidées ce travail.

5.1 Analyse par dyade selon les trois axes d'analyse

Je propose ici de mettre en parallèle, pour une même dyade, les différents éléments qui ont émergés dans les entrevues pour chacun des trois axes étudiés. Les différences et similitudes entre les différentes dyades selon les différents axes seront plus spécifiquement discutées lorsque les questions de recherche seront abordées (section 5.3).

5.1.1 Dyade 1 : Anna et Michel

À titre de rappel, Anna et Michel forment une dyade hétérogène. Anna est une étudiante qui n'a pas suivi de cours de logique et qui a démontré les connaissances les plus faibles au test diagnostique. Michel, pour sa part, a suivi un cours de logique et a des connaissances prédicatives considérées comme moyennes, équivalentes à celles des étudiantes de la deuxième dyade. Cette dyade hétérogène a permis de mettre à l'avant-plan plusieurs éléments qui diffèrent entre les deux étudiants, et qui pourront par la suite être réinvestis dans l'analyse des autres dyades pour tenter d'en expliquer la provenance. Plus spécifiquement, savoir si l'hétérogénéité peut être à la source de ces différences.

Axe 1 : Intuition, conviction et connaissances contextualisées

Dans la tâche 1, Anna semble avoir utilisé une pratique contextualisée pour choisir la preuve par contradiction mais elle ne semble pas avoir utilisé d'autres connaissances contextualisées durant la résolution. En ce qui concerne la résolution de la tâche 2, Anna rejette la démonstration proposée par Michel car son intuition lui dicte que ce qu'il a proposé a une très forte chance de comporter une erreur. Elle ne semble toutefois pas capable d'expliquer pourquoi elle est mal à l'aise, ni pourquoi la démonstration pourrait poser un problème. En fait, Anna ne semble pas ressentir le besoin de recourir à ce type de connaissances ou encore à ses intuitions dans la production d'une démonstration, pour toutes les tâches confondues.

Par exemple, quand on examine sa résolution de la tâche 3, Anna apparaît très à l'aise de mener le travail sans trop savoir où aller, ce qui n'était pas le cas pour Michel, qui semblait ne pas vouloir se « mouiller » sans avoir une idée d'où il voulait se rendre et comment, c'est-à-dire sans avoir d'appui sur ses intuitions ou connaissances contextualisées. Pour Michel, celles-ci prennent une plus grande importance dans les mathématiques qu'il fait. Par exemple, en lien avec la tâche 2, Michel met en œuvre des connaissances contextualisées lorsqu'il tente une preuve par contradiction sachant qu'elle est bien adaptée à ce type d'énoncés, et lorsqu'il démarre la démonstration en écrivant le rationnel comme un quotient de deux entiers. Ses connaissances contextualisées l'ont d'ailleurs également bien servi dans la tâche 4, où il a su dès le départ que l'énoncé comportait quelque chose qui ne fonctionnait pas. Il s'est alors convaincu avec un contre-exemple. Anna, pour sa part, n'a pas été convaincue par ce contre-exemple et a ressenti le besoin de comprendre précisément ce qui ne fonctionne pas, compréhension qu'elle atteint ensuite en s'appuyant d'un autre contre-exemple plus général, qu'elle a composé elle-même.

Plus précisément en ce qui concerne l'idée de conviction, Anna semble avoir besoin d'atteindre une conviction profonde et elle doit souvent « *faire* » pour l'atteindre. Elle ne se laisse pas convaincre par une démonstration ou un contre-exemple qu'elle ne comprend pas, par une conviction qui serait plutôt formelle et extrinsèque. En effet, elle a à quelques reprises voulu construire elle-même une démonstration (tâche 2) ou un contre-exemple (tâche 4), même si Michel l'avait déjà fait. Les deux étudiants semblent avoir besoin d'une conviction intuitive, conviction que Michel semble atteindre plus rapidement car il travaille déjà avec ses intuitions et connaissances contextualisées, ce qui lui apporte un support supplémentaire.

Somme toute, la principale différence entre ces deux étudiants se situe vis-à-vis leur besoin d'appui sur des intuitions ou des connaissances contextualisées lors du travail mathématique. De son côté, Michel, qui s'appuie de manière générale sur ses intuitions et connaissances contextualisées, semble être mal à l'aise d'avancer sans ces appuis dans la tâche 3. Anna, pour sa part, semble avancer commodément sans cet appui globalement dans les tâches.

Axe 2 : Production sémantique et syntaxique et représentations signifiantes

En ce qui concerne la manière dont les résolutions ont été menées, Michel a pris les devants la plupart du temps, sauf pour la tâche 3 où Anna a mené le travail. Dans cette tâche, il semble qu'Anna ait eu une tendance plus syntaxique tandis que Michel cherchait à utiliser une voie plus sémantique, sans succès car les objets en jeu dans la tâche étaient nouveaux. En ce qui concerne les deux autres tâches (1 et 2) demandant une démonstration, il est difficile de statuer d'une orientation pour Michel, alors qu'Anna semble avoir agi de manière syntaxique pour la première et sémantique pour la deuxième.

En ce qui a trait aux représentations signifiantes, Anna en utilise plusieurs pour se remémorer différents concepts ou se représenter des situations pour mieux avancer, comprendre et se convaincre dans une résolution. Par exemple, elle réfléchit à l'aide de représentations signifiantes de la surjectivité (tâche 2), de l'injectivité (tâche 4) ou encore, de ce qu'est une fonction (tâche 4). Elle a également représenté les tâches 3 et 4 à l'aide de supports visuels. Michel, pour sa part, n'a pas utilisé explicitement des représentations signifiantes.

Axe 3 : Considérations et difficultés mathématiques et logiques

De son côté, Michel a utilisé une notation ensembliste risquée à la tâche 2 mais on peut penser qu'il la maîtrise bien, tel qu'argumenté plus tôt. Sinon, le reste de son travail n'a pas comporté d'erreur. Il a également montré une bonne vigilance vis-à-vis les caractéristiques logiques des tâches. Par exemple, il a rapidement vu et compris l'erreur dans la tâche 1 et il a pu aider Anna lorsqu'elle a rencontré quelques obstacles dans les subtilités logiques de la tâche 3.

Anna n'a pas démontré un contrôle complet sur la négation d'énoncés quantifiés tout au long de l'entrevue. Elle a également manqué de vigilance en lien avec la structure logique de la démonstration de la tâche 1, en début de résolution. Également, lors de la tâche 3, elle a tout d'abord commis une erreur en croyant que l'axiome 3 était quantifié universellement mais elle s'est elle-même corrigée rapidement. Par la suite, en prenant un second robot générique *S*, on peut croire qu'elle a de la difficulté à bien comprendre le concept d'élément générique et comment l'utiliser. Également, elle utilise à voix haute l'expression « *il existe au moins* » pour un axiome où, en réalité, il est spécifié « *il existe exactement un* ». Elle se corrige par la suite mais on peut croire qu'elle a été un peu moins attentive aux spécifications logiques que Michel, sans toutefois commettre d'erreur.

5.1.2 Dyade 2 : Jeanne et Lucie

En guise de rappel, Jeanne et Lucie forment une dyade homogène. Les étudiantes ont toutes deux suivi un cours de logique et ont démontré des connaissances moyennes au test diagnostique, c'est-à-dire comparables à celles de Michel mais inférieures à celles démontrées par les étudiants de la quatrième dyade.

Axe 1 : Intuition, conviction et connaissances contextualisées

Dans la tâche 1, Lucie ne semble pas utiliser de connaissances contextualisées lors de la démonstration tandis que Jeanne en utilise parce qu'elle a une idée plus claire du chemin le plus efficace. L'intuition de Jeanne a également joué un rôle important dans les résolutions. Par exemple, dans la tâche 4, une intuition erronée de la part de Jeanne vis-à-vis la validité de l'énoncé a teinté la totalité de la résolution. En effet, Jeanne a affirmé en début de résolution qu'elle était certaine de la véracité de l'énoncé. À la fin, après s'être rendu compte que l'intuition de Jeanne était erronée, les deux étudiantes n'ont pas semblé avoir atteint une conviction profonde. En fait, malgré que Jeanne et Lucie aient cherché à atteindre un bon niveau de conviction tout au long des tâches 1, 2 et 3, elles ont laissé tombé lors de la tâche 4, où leur manque de contrôle sur la situation n'a pas permis d'atteindre un niveau de conviction comparable. On peut penser qu'à la fin de cette quatrième et dernière tâche, les étudiantes n'avaient plus la motivation de mener la résolution de manière à se convaincre profondément.

Dans un autre ordre d'idées, Lucie a parfois eu besoin de « *faire* » pour comprendre, comme lorsqu'elle refait la première partie de la démonstration de la tâche 3 dans le but de se convaincre de la validité et être capable de continuer. Comme Anna, elle ne se laisse pas convaincre par une conviction qui serait formelle et extrinsèque. Lucie a aussi à plusieurs reprises le réflexe de fournir un contre-exemple à un moment de la résolution pour se convaincre, particulièrement dans la tâche 2 et la tâche 4. Elle précise d'ailleurs qu'il s'agit d'une pratique régulière dans son travail mathématique : « *moi c'est toujours le premier réflexe que j'ai* ». Il s'agit probablement d'une pratique contextualisée, qu'elle a développée dans le type de tâches où un contre-exemple est facilement trouvé et peut économiser du temps, si l'énoncé est invalidé dès le départ. Elle semble donc utiliser des connaissances contextualisées de manière consciente. Dans le même ordre d'idées, en réponse à la frustration de Jeanne de ne pas avoir encore avoir trouvé la solution à la tâche 3, Lucie fait la remarque qu'elles n'ont pas encore résolu la tâche parce qu'elle fait intervenir des robots et des chiens. Ainsi, Lucie est consciente que le niveau de difficulté de la tâche peut être modifié en raison de l'absence d'objets mathématiques connus et donc, de connaissances contextualisées.

Axe 2 : Production sémantique et syntaxique et représentations signifiantes

Il a été impossible de statuer sur une orientation claire d'un chemin syntaxique ou sémantique dans la production des démonstrations pour cette dyade. Cependant, on peut avancer sous toutes réserves que Jeanne a semblé prendre une orientation sémantique dans les deux premières tâches et Lucie une orientation syntaxique dans la première et sémantique dans la deuxième. Par contre, dans la tâche 4, elles esquissent une petite partie de démonstration et on voit qu'elles utilisent une orientation syntaxique. Elles restent bloquées après cette tentative, et ont tendance à continuer à chercher via le syntaxique pour trouver la solution plutôt que de s'orienter vers la sémantique pour chercher un autre type de solution.

En ce qui concerne les représentations signifiantes, les deux étudiantes en utilisent fréquemment. Par exemple, dans la tâche 2, les étudiantes discutent de la surjectivité en terme de « couvrir » et d'« atteindre ». Aussi, Jeanne explique qu'elle a une image mentale constituée de cercles et de points tandis que Lucie dit faire des mathématiques de manière visuelle, sans toutefois être capable d'exprimer quelle l'image elle a à ce moment-là. Dans la tâche 3, Lucie trace des dessins dans les airs pour visualiser des situations et elle propose aussi, dans la tâche 4, de faire des dessins pour tenter d'élucider la notation, ce qui montre qu'elle ressent le besoin d'un support visuel.

Axe 3 : Considérations et difficultés mathématiques et logiques

Plusieurs considérations logiques ont émergé de l'entrevue avec cette dyade. Par exemple, Lucie a démontré quelques difficultés avec les énoncés quantifiés, à savoir la différence entre le premier et le deuxième axiome de la tâche 3 où les quantifications universelles et existentielles sont inversées, et une fois de plus lorsqu'elle a voulu faire la négation d'énoncés (par exemple dans la tâche 1). Il semble que Lucie ait un contrôle plus syntaxique sur la négation (interchanger méthodiquement les quantificateurs) tandis que Jeanne a un contrôle plus sémantique et réalise la négation en se basant plutôt sur la signification de l'énoncé. Elles proposent d'ailleurs une réflexion intéressante sur la différence entre la compréhension de la manipulation et la seule manipulation pour réussir, qui sera discutée dans la section 5.2.2.

En ce qui concerne la résolution de la tâche 3, Lucie ressent au tout début un besoin assez fort de formaliser les axiomes avec des symboles logiques. Fait intéressant, elle affirme par la suite ne plus utiliser les représentations symboliques mais bien la version en mots. Jeanne affirme que les symboles l'ont aidée à comprendre les axiomes, mais que la version symbolique lui est moins utile dans la résolution. En ce qui concerne Jeanne, elle a montré une vigilance logique déficiente lorsqu'elle affirme que la relation de la tâche 3 est une bijection. La même chose peut être dite de Lucie, qui ne s'y est pas opposée.

Finalement, dans la tâche 4, Jeanne exprime l'intersection de deux ensembles en disant « et » à voix haute. Cette énonciation donne du sens à l'intersection, ce qui démontre son contrôle sémantique sur le concept.

Malgré des profils logiques considérés comme identiques, Lucie et Jeanne n'ont pas fait intervenir les considérations logiques dans la résolution des tâches proposées de la même manière. Lucie a peut-être un meilleur contrôle théorique (test diagnostique) en contexte strictement logique qu'en contexte mathématique où la logique est plus « appliquée », mais Jeanne a somme toute un contrôle plus complet que Lucie.

5.1.3 Dyade 3 : Éléanore et Paul

En guise de rappel, Éléanore et Paul forment une dyade homogène. Aucun des deux étudiants n'a suivi de cours de logique et les connaissances prédicatives qu'ils ont déployées dans le test diagnostique sont considérées légèrement plus faibles que celles de Michel, Jeanne et Lucie. Cette dyade est celle qui a complété les tâches le plus rapidement. Avant d'entrer dans le vif du sujet, il est important de préciser qu'Éléanore n'a pas participé activement tout au long de l'entrevue, alors il est globalement difficile de commenter son travail.

Axe 1 : Intuition, conviction et connaissances contextualisées

Dès la tâche 1, une connaissance contextualisée a vraisemblablement joué un rôle lorsqu'il a été question du choix de la méthode de résolution. En fait, Paul parle souvent d'erreur classique ou de méthode de résolution classique. Il semble être conscient qu'il existe des connaissances contextualisées relatives à certaines situations, et sait qu'il est judicieux de s'y appuyer. Il s'agit probablement aussi d'un réflexe issu de leur expérience, un savoir-faire contextualisé, que Paul et Éléanore décident de rechercher un contre-exemple lorsque la méthode de résolution syntaxique de la tâche 4 les amène à réaliser qu'il manque l'hypothèse de l'injectivité. On peut croire que Paul a atteint une conviction intuitive interne dans toutes les résolutions grâce à son appui sur ses connaissances contextualisées, ses intuitions et les représentations signifiantes utilisées.

Axe 2 : Production sémantique et syntaxique et représentations signifiantes

En ce qui concerne l'orientation des productions de démonstrations, dans la tâche 4, on remarque que Paul utilise une méthode plus syntaxique et c'est cette méthode strictement syntaxique qui l'amène à comprendre ce qui cloche dans la démonstration proposée, et déclenche sa compréhension sémantique. Après cela, il s'est dirigé vers une méthode sémantique pour construire un contre-exemple. Paul a donc montré un bel exemple des allers et retours qui peuvent être faits entre la syntaxe et la sémantique, et comment cela peut aider la résolution en favorisant la compréhension et l'attribution de sens. En ce qui concerne les autres tâches, il est impossible de statuer pour Éléanore tandis que Paul semble s'orienter de manière sémantique dans ses productions.

En ce qui a trait aux représentations signifiantes, dans la tâche 1, Paul a utilisé une représentation signifiante de l'ensemble des rationnels dans le but d'utiliser les propriétés d'un corps. Il s'agit de la seule dyade ayant utilisé une représentation signifiante pour cette tâche. Dans la tâche 2, Paul a utilisé une représentation signifiante de la surjection comme étant une projection et Éléanore et lui s'expriment avec des termes comme « recouvrir » ou « noyer ». Ils ont été capables à plus d'une reprise d'utiliser des représentations signifiantes des objets mathématiques en jeu dans les tâches, pour donner du sens et utiliser des propriétés propices à mener vers une résolution rapide.

Axe 3 : Considérations et difficultés mathématiques et logiques

Cet axe intervient principalement dans la résolution de la tâche 3, car les autres résolutions sont exemptes d'erreur logique. En effet, dans cette tâche, Éléanore propose de transformer les axiomes en symboles mais Paul croit qu'il suffit de les relire quelques fois pour les assimiler. Éléanore utilise l'axiome 3 par la suite de manière erronée. Elle croit qu'il s'applique à tous les trios de robots et elle a besoin de l'aide de Paul pour comprendre son erreur. On peut penser que si elle avait pris le temps de symboliser les axiomes comme elle se proposait de le faire (peut-être d'ailleurs parce qu'elle savait que c'était nécessaire à sa compréhension), elle n'aurait peut-être pas commis cette erreur. À la fin, Paul affirme la chose suivante : « '*il existe un unique*'. *Je l'ai lu, je l'ai écrit* [∃!] *mais je l'ai pas pris en compte. C'est pour ça que ça nous a pris du temps à conclure* ». Ainsi, il dit avoir lu et écrit que l'axiome 1 requérait l'unicité, sans toutefois avoir pris l'information en compte, ce qui l'a retardé dans sa résolution. Paul a donc transcrit l'information logique sans bien l'assimiler, probablement une conséquence du peu d'appui possible sur le sens dans cette tâche, et qu'on peut en partie attribuer à une vigilance pas tout à fait assez soutenue de la part de Paul vis-à-vis les considérations logiques.

5.1.4 Dyade 4 : Julie-Ann et Robert

En guise de rappel, Julie-Ann et Robert forment une dyade homogène. Les étudiants ont suivi un cours de logique et ils ont obtenu le plus haut taux de réussite au test diagnostique.

Axe 1 : Intuition, conviction et connaissances contextualisées

À deux reprises, dans la tâche 2 et dans la tâche 4, les étudiants ne ressentaient pas le besoin de démontrer ou encore, d'exhiber un contre-exemple. Ils étaient convaincus de la véracité de leurs idées à un point tel qu'ils ne ressentaient pas le besoin de compléter la résolution. Ils font donc fortement confiance à leurs intuitions pour se convaincre. De manière générale, Julie-Ann semble vouloir atteindre une conviction intuitive interne. À Robert, une conviction un peu plus formelle suffit, malgré qu'il semble atteindre parfois une conviction interne aussi.

En ce qui concerne l'utilisation de connaissances contextualisées, au cours du travail sur la tâche 4, à un certain moment, Robert expose sa frustration et affirme avoir réalisé ce type de tâches à plusieurs reprises dans le cadre d'un cours. Il est donc conscient qu'il a des savoirs contextualisés à de telles tâches, sans toutefois être capable, à ce moment-ci, de les mobiliser.

Axe 2 : Production sémantique et syntaxique et représentations signifiantes

En ce qui concerne le type de productions, seule la tâche 4 a donné lieu pour cette dyade à une démonstration d'une longueur assez importante pour qu'on puisse juger de l'orientation, mais la confusion des étudiants entourant le résultat empêche de statuer. Cependant, la conviction avec laquelle ils ont abordé la tâche 2 suppose une production sémantique.

En ce qui concerne les représentations signifiantes, les étudiants ont réfléchi beaucoup à l'aide d'un dessin dans la tâche 2 et ils ont utilisé une représentation signifiante de la surjectivité, avec le terme « *couvrir* ». Dans les tâches 3 et 4, Julie-Ann s'appuie partiellement sur un dessin. Cependant, cette dyade apparaît celle qui a le moins utilisé de représentations signifiantes dans son travail. En fait, les deux étudiants ont réalisé plusieurs schémas mais ceux-ci ne semblent pas avoir été au centre de leurs résolutions.

Axe 3 : Considérations et difficultés mathématiques et logiques

Cet axe d'analyse intervient principalement dans les tâches 1 et 3. Dans la tâche 1, les étudiants proposent une démonstration très symbolisée, sauf qu'elle est exempte de quantificateurs. Ils ont donc mis en œuvre une quantification implicite, ce qui est surprenant dans la mesure où les deux étudiants soulignent l'importance de la quantification lors de leur analyse de l'erreur. On peut penser que leur niveau de connaissance en logique leur donne le contrôle nécessaire pour utiliser la quantification implicite sans risque. Ils ont fait preuve d'un bon contrôle logique en discutant adéquatement de la contraposée.

Lors de l'étude de la tâche 3, ils prennent le temps de reformuler les axiomes et l'énoncé, pour bien les comprendre, ce qui les aide énormément tout au long de la résolution par rapport aux subtilités logiques. On peut supposer qu'ils ont réalisé ce travail dans le but d'atteindre le même niveau d'aisance que lorsqu'ils font face à une tâche mathématique comportant des objets mathématiques usuels. Remarquons qu'ils ne transforment pas les axiomes en symboles. Robert et Julie-Ann démontrent cependant quelques difficultés lorsqu'ils désirent faire la négation de l'énoncé, visant une preuve par contradiction.

5.2 Thèmes et réflexions émergents

Cette section a pour but de mettre en évidence les thèmes et les réflexions qui ont émergé des entrevues rapportées dans le chapitre précédent. Cette section n'a pas pour but d'aborder directement les questions de recherche. Celles-ci seront abordées à la section 5.3.

5.2.1 La passation d'un cours de logique ou l'acquisition de connaissances prédicatives en logique formelle rendent-elles les étudiants plus attentifs aux considérations logiques, et plus vigilants vis-à-vis les complications qu'elles peuvent receler ?

Les idées d'« attention » ou de « vigilance » telles que je les utilise ici sont intimement liées à l'idée de « déballer la logique » de Selden et Selden (1995), lorsqu'il s'agit de valider une démonstration ou un énoncé, dans le but de le démontrer ou de l'utiliser dans une démonstration. À titre de rappel, « déballer la logique » réfère à la mise en évidence d'un énoncé logique équivalent à un autre en y rendant plus explicites les caractéristiques logiques conventionnelles (cf. section 1.7). Selden et Selden introduisent l'idée qu'un étudiant qui ne peut pas déballer la logique des énoncés correctement aura des difficultés à produire et à valider des démonstrations.

À titre d'exemple, considérons la tâche 3, qui présente des axiomes rédigés en mots qu'il est nécessaire de « déballer » pour bien comprendre les considérations logiques sous-jacentes. Dans ce contexte, un individu qui serait vigilant ou attentif remarquerait les spécificités logiques rapidement à la lecture des axiomes, comme par exemple l'unicité prescrite par l'axiome 1, et ce, de manière presque inconsciente. Par là, je veux dire sans avoir besoin de se donner soi-même explicitement comme but d'investiguer les caractéristiques logiques de l'énoncé ; et dans le cas précis de la tâche 3, malgré le peu d'appui possible sur le sens dans cette tâche.

La vigilance et l'attention sont des concepts qui ont émergé dans les entrevues rapportées au chapitre précédent. Elles me sont apparues un enjeu important. Certains étudiants semblaient assimiler ou « déballer » les subtilités logiques des énoncés dès la première lecture, ou du moins assez rapidement, tandis que d'autres, après quelques lectures, n'avaient pas encore assimilé ou remarqué toutes les caractéristiques logiques et finissaient par omettre une information, causant parfois une erreur. Il ne s'agit pas ici d'un manque de connaissances prédicatives puisque tous les étudiants ont saisi leurs erreurs après plus amples réflexions et ont bien compris la réelle caractéristique logique, après quelques explications. C'est ce qui m'amène à penser que certains étudiants ont une capacité à voir les spécificités logiques des énoncés de manière presqu'inconsciente, comme si celles-ci sautaient aux yeux. Pour d'autres, le besoin de se donner consciemment le but d'investiguer les considérations logiques pour atteindre la même vigilance serait peut-être nécessaire.

Les étudiants les moins vigilants, ceux qui n'ont pas semblé assimiler les aspects logiques rapidement, sont Anna, Paul et Éléanore. Par exemple, Anna a eu des difficultés au départ à identifier l'erreur logique comprise dans la tâche 1, Paul n'a pas pris en considération l'unicité de l'axiome 1 dans la tâche 3 malgré avoir longuement réfléchi à cet axiome, et Éléanore n'a pas assimilé que l'axiome 3 de la tâche 3 ne garantissait que l'existence d'un trio de robots et non que la caractéristique s'appliquait à tous les trios robots. Ces trois étudiants ont en commun de ne pas avoir suivi de cours de logique.

Les autres étudiants, qui ont en commun la passation d'un cours de logique, semblaient assimiler très rapidement les considérations logiques, comme l'unicité, l'existence et l'universalité. Jeanne et Lucie ont cependant démontré des difficultés vis-à-vis le contrôle des considérations logiques qu'elles remarquaient. Dans la tâche 3, Lucie a particulièrement eu de la difficulté à assimiler les spécifications logiques des axiomes, mais elle a symbolisé les axiomes afin de les maîtriser. Toujours vis-à-vis la même tâche, Jeanne et Lucie ont, après avoir adéquatement symbolisé les axiomes, commis l'erreur d'affirmer que ceux-ci définissaient une bijection. On peut donc conclure que ces étudiantes sont attentives aux considérations logiques sans toutefois les maîtriser complètement. Dans le même ordre d'idées, Julie-Ann et Robert ont également pris le temps de discuter longuement des axiomes pour bien avoir le contrôle, malgré qu'ils aient dès la première lecture remarqué les spécifications logiques. Autrement, ils utilisaient les informations adéquatement et réfléchissaient adéquatement à partir des informations dès le départ. Pour sa part, Michel n'a pas commis d'erreur logique ou encore, omis de caractéristiques logiques.

Ainsi, il semble plausible de dire que la passation d'un cours de logique, et probablement les intuitions et les connaissances contextualisées qui y sont liées, aident les étudiants à développer une attention vis-à-vis les considérations logiques et une vigilance vis-à-vis les complications qu'elles peuvent receler. La vigilance s'avère aidante pour diminuer le risque d'omission de certaines caractéristiques, et donc le risque d'une utilisation erronée de tel ou tel argument. Par contre, comme l'ont montré Jeanne et Lucie, le risque est diminué mais non éliminé, car le fait de remarquer rapidement les considérations logiques ne garantit pas une compréhension ou une maîtrise totale.

Finalement, la vigilance et l'attention ne semblent pas être influencées par la possession de connaissances prédicatives en logique formelle. En effet, au test diagnostique, la différence entre les réponses de Paul et Éléanore et celles de Michel, Jeanne et Lucie était minime.

Somme toute, avoir suivi un cours de logique augmente la vigilance, mais ce n'est pas lié au fait d'avoir plus de connaissances prédicatives. Cela suggère que cette vigilance serait de l'ordre de **connaissances contextualisées à la logique** et que ces connaissances, plus opératoires que prédicatives, seraient développées dans les cours de logique suivis. J'y reviendrai à la section 5.3.1.

5.2.2 Contrôle sémantique et syntaxique : avoir ou non un appui sur le sens est-il un enjeu pour les étudiants ?

Durant leur entrevue, Jeanne et Lucie ont fait une remarque et ont soulevé par celle-ci une problématique importante en mathématiques, et particulièrement en logique : est-il souhaitable que les élèves/étudiants comprennent en profondeur les raisons et explications mathématiques sous-jacentes aux manipulations ou est-il suffisant de leur apprendre les manipulations, d'une manière plus procédurale et qui est suffisante pour mener à terme une manipulation valide ?

Plus précisément, la remarque énoncée par Jeanne et Lucie, durant la résolution de la première tâche, suggère une réflexion intéressante sur deux manières d'utiliser les manipulations symboliques : avec ou sans contrôle sur le sens. Cette idée peut être reformulée en termes de manipulations sémantiques ou syntaxiques. Pour développer la remarque, qui a été rapportée telle quelle dans la section 4.3.2.1, Jeanne voit certaines manipulations symboliques procédurales comme une manière de ne pas s'empêtrer dans des idées mathématiques complexes, comme un outil avec lequel on n'a pas explicitement besoin de réfléchir, seulement d'exécuter les bonnes manipulations correctement. Ces manipulations (syntaxiques) qu'il suffit d'exécuter semblent pour Jeanne une bonne manière de réussir une tâche, sans toutefois que cela donne accès à une compréhension profonde des choses. Pour sa part, Lucie donne une plus grande importance à la compréhension (sémantique) derrière les manipulations. Cette réflexion m'a amenée à poser d'autres questions liées au contexte de cette recherche. Par exemple, est-ce que les étudiants considèrent qu'ils ont besoin d'appui sur le sens dans une tâche ? Est-ce que selon la tâche, la recherche d'appui sur le sens peut varier ?

Une réflexion similaire a d'ailleurs été abordée plus tôt (section 2.4), en discutant de la manipulation syntaxique sans considération sémantique. Dans le contexte de la négation d'un énoncé dans le calcul des prédicats, la règle syntaxique dit qu'il suffit d'échanger les quantificateurs existentiels et universels pour faire passer la négation de l'extérieur à l'intérieur de l'énoncé quantifié. Par contre, Durand-Guerrier et Arsac (2003) soulignent les limites de cette règle à l'aide de l'énoncé suivant : $\forall x \forall y\ ((\forall z\ Fxyz) \Rightarrow Gxy)$. La négation de cet énoncé, $\neg(\forall x \forall y\ ((\forall z Fxyz) \Rightarrow Gxy))$, équivaut à $\exists x \exists y\ ((\forall z\ Fxyz) \wedge (\neg Gxy))$ car il y a une « sous-formule quantifiée, antécédent d'une formule conditionnelle » (p. 311), de sorte que ce ne sont pas tous les quantificateurs qui doivent être modifiés pour obtenir la négation. Dans cette situation, la règle syntaxique n'est pas suffisante. Ainsi, les réflexions sur l'apport d'un appui sur le sens se retrouvent ailleurs que dans le contexte de la présente recherche.

À savoir si les étudiants ont besoin d'un appui sémantique pour mener les démonstrations, il a été impossible, compte tenu des tâches choisies, de trouver un lien entre l'orientation des démonstrations des étudiants et leurs connaissances en logique ou encore, la passation ou non d'un cours de logique.

Aussi, on remarque que ce n'est pas seulement la syntaxe ou bien la sémantique qui donnera du sens aux problèmes. On peut penser à la résolution de la tâche 4 faite par Éléanore et Paul, où la résolution syntaxique a déclenché leur compréhension sémantique de la tâche, ce qui les a amenés par la suite à terminer la résolution selon une orientation sémantique. En fait, une orientation peut nourrir l'autre, et les étudiants peuvent bénéficier d'un tel changement d'orientation ou encore de plusieurs allers et retours, comme cela est bien décrit et mis en évidence dans Barrier et al. (2009).

En ce qui concerne l'appui sur le sens selon les tâches, lors des entrevues, le contexte a semblé avoir un impact sur cette idée de contrôle ou d'appui sur le sens. On peut en effet étudier la difficulté de certains étudiants à réaliser des manipulations logiques selon le type de contexte : mathématique connu (tâche 1, 2 et 3), strictement formel symbolisé (comme dans le test diagnostique) ou encore, inconnu mais répondant aux règles mathématiques (tâche 3). Par exemple, en ce qui concerne la réalisation de la négation d'une implication, un étudiant qui a de la facilité à faire la négation d'un énoncé strictement formel symbolisé ($A \Rightarrow B$) n'a pas nécessairement de la facilité à effectuer la même manipulation en contexte connu (*si un nombre est divisible par 5, alors il se termine par 5 ou 0*) ou encore en contexte inconnu (*pour tout robot, il existe au moins un chien qui n'est pas son ami*), et vice versa. À titre d'exemple, dans la résolution de la tâche 1, Jeanne réalise une négation en réfléchissant sur la sémantique de l'énoncé, c'est-à-dire qu'elle réfléchit sur ce que signifie pour cet énoncé précis d'être faux. Également, on remarque qu'elle a échoué à la question sur la négation d'un énoncé strictement formel symbolisé dans le test diagnostique. Il semble donc que, pour Jeanne, il soit plus facile de trouver la négation d'un énoncé dans un contexte mathématique connu. D'un autre côté, Julie-Ann, dans la tâche 3, a eu de la difficulté à réaliser la négation de l'énoncé de la tâche sur les chiens et les robots, tandis qu'elle a réussi la négation formelle dans le test diagnostique. Toujours en ce qui concerne Julie-Ann, elle a eu de la facilité à faire la négation d'un énoncé dans un contexte mathématique connu, comme dans la tâche 1 par exemple. Ainsi, pour Julie-Ann, ce sont les contextes qui ne sont pas liés à des intuitions ou des connaissances contextualisées qui causent le plus de difficultés.

Puisque Jeanne et Julie-Ann ont toutes deux suivi un cours de logique et que la différence entre leurs résultats au test diagnostique est minime, il ne semble donc pas y avoir de lien évident entre certaines difficultés liées au contexte et les variables à l'étude dans ce projet de recherche, soient la passation ou non d'un cours de logique, de même qu'avec le niveau de connaissance en logique formelle. Somme toute, le contexte peut avoir une influence sur l'aisance des étudiants à effectuer des manipulations logiques sans qu'il y ait de lien apparent avec les variables à l'étude.

5.3 Pistes de réponse aux trois questions de recherche

Cette section propose des pistes de réponse aux questions de recherche énoncées en fin de chapitre 2, à la lumière des données recueillies et analysées dans le cadre de ce projet de recherche.

5.3.1 Première question de recherche : *Y a-t-il des différences dans la façon dont le étudiants produisent des démonstrations, selon qu'ils aient ou non des connaissances prédicatives en logique formelle ou encore, qu'ils aient ou non fait un cours sur la logique formelle ? Comment cela se traduit-il par rapport aux aspects syntaxique et sémantique, rigueur et intuition, mobilisation ou non de connaissances contextualisées ?*

Cette question de recherche vise spécifiquement la production de démonstrations (contrairement à la validation traitée dans la deuxième question de recherche, section 5.3.2) de sorte que les tâches 1 et 2 lui sont particulièrement associées. Ces tâches sont celles où l'on demande aux étudiants de produire une démonstration. Cependant, comme on a pu constater dans le dernier chapitre, le niveau de difficulté de ces tâches a été mal évalué, rendant les productions des étudiants très courtes. Par le fait même, les explications fournies par les participants, qui auraient pu aider à répondre à cette question, sont également très courtes, tant les résolution allaient de soi pour eux. On remarque toutefois que les tâches 3 et 4 peuvent aider à amener des éléments de réponse compte tenu des démonstrations courtes ou partielles fournies. Ainsi, il semble impossible, avec les données recueillies, de répondre adéquatement à cette question. Des éléments de réponses partielles seront tout de même discutés et ceux-ci qui pourront être réinvestis dans de futurs travaux sur un sujet connexe.

La première partie de la question de recherche concerne la manière dont les connaissances prédicatives en logique interviennent dans la production de démonstrations (pour causer un changement ou non dans les manières de faire) et quelles connaissances les remplacent si elles ne sont pas disponibles chez un étudiant. Un exemple intéressant à considérer pour cette première partie est celui de la négation de l'implication. Aucun étudiant n'a réussi cette question dans le test diagnostique, sauf Julie-Ann. Pourtant, toutes les dyades ont réussi à faire la négation de l'énoncé de la tâche 1, comportant une implication implicite. Seulement Anna a démontré un peu de difficulté à réaliser cette négation. Dans le travail de ces étudiants qui ne possèdent pas la connaissance prédicative de la négation de l'implication, tout porte à croire qu'ils utilisaient une connaissance opératoire. En effet, ils ont résolu la tâche sans utiliser la notion prédicative de la négation de l'implication. Il est aussi possible qu'ils aient réfléchi au contexte, c'est-à-dire à ce que signifiait pour cet énoncé particulier d'être faux, dans ce contexte précis. Les étudiants ont donc visiblement un certain contrôle sur ce que signifie pour un énoncé d'être faux, mais ils ne semblent pas avoir généralisé cette idée à la manipulation syntaxique de la négation. Dans l'exemple dont il s'agit ici, il est impossible de savoir si Julie-Ann a réfléchi à l'aide de sa connaissance prédicative pour réaliser la négation ou si elle a utilisé une connaissance opératoire ou son contrôle sur le sens. Somme toute, il ne semble pas si simple de savoir si les étudiants qui ont les connaissances prédicatives vont les utiliser devant un problème comportant un contexte mathématique, ou s'ils utilisent une connaissance opératoire, ou encore leur contrôle sur le sens, du moins dans le cas d'une tâche simple, comme la tâche 1 proposée.

En ce qui concerne la deuxième partie de la question de recherche, elle concerne les trois axes d'analyse qui ont été étudiés dans ce travail. Ils sont repris un à un ci-dessous.

Axe 1 : Intuition, conviction et savoirs, savoir-faire et pratiques contextualisés[16]

Tous les étudiants tentent d'atteindre une conviction personnelle, qu'elle soit formelle ou intuitive, à toutes les tâches. Cependant, certaines équipes étaient prêtes à ne pas avoir de conviction profonde si la tâche leur semblait trop difficile. Par exemple, Jeanne et Lucie ont laissé tombé lors de la tâche 4, où leur manque de contrôle sur la situation ne leur a pas permis d'atteindre une conviction profonde. Elles ont pourtant semblé à l'aise avec la situation. D'un autre côté, compte tenu des tâches choisies pour l'expérimentation, il a été difficile la plupart du temps de statuer sur le type de conviction, formelle ou intuitive des étudiants. En effet, les deux premières étaient trop simples et semblaient très évidentes pour toutes les dyades. Ainsi, ce que les étudiants exprimaient à voix haute n'était pas toujours

[16] Rappel : j'utiliserai l'expression « connaissances contextualisées » pour représenter l'ensemble des savoirs, savoir-faire et pratiques contextualisés.

suffisant pour inférer un lien entre les connaissances prédicatives en logique formelle et le type de conviction recherchée par les étudiants.

Globalement, tous les étudiants utilisent leurs intuitions ainsi que des savoirs, savoir-faire ou pratiques contextualisés, issus de leur expérience, mais certains semblent en être plus conscients que d'autres. Par exemple, Robert et Paul expriment très clairement qu'ils se réfèrent à des tâches qu'ils ont déjà résolues dans le passé dans différents contextes, et ils affirment qu'ils devraient être capables de les résoudre s'ils pouvaient atteindre ou appliquer ces connaissances. De son côté, Lucie affirme que la présence des robots et des chiens, objets non usuels en mathématiques, est une des raisons pourquoi la tâche 3 est ardue.

Finalement, il semble que tous les étudiants utilisent à un moment ou à un autre, leurs intuitions ainsi que des connaissances contextualisées. Plus précisément, les étudiants qui utilisent le plus leurs intuitions et leurs connaissances contextualisées (Paul, Michel, Jeanne, Julie-Ann et Robert) sont des étudiants ayant de bonnes connaissances en logique formelle, selon le test diagnostique et le nombre minime d'erreurs logiques commises durant les entrevues. Julie-Ann et Robert utilisent, à toutes les étapes de la production, leurs intuitions et connaissances contextualisées et leur font plus confiance que ne le fait n'importe quelle autre dyade. Pour Michel, il semble très difficile d'avancer dans une résolution sans avoir d'intuition ou de connaissances contextualisées le guidant vers le chemin à prendre, ce qui montre l'importance que son expérience prend dans son travail mathématique. À la différence de Michel, Jeanne semble assez à l'aise d'avancer dans une résolution sans savoir quel chemin prendre. De leur côté, Anna, Lucie et Éléanore sont les étudiantes dont les intuitions et connaissances contextualisées sont les moins présentes lorsqu'il s'agit de produire la démonstration. Dans les deux catégories, on retrouve des candidats ayant ou non passé un cours de logique. Il ne semble pas que la possession de connaissances prédicatives en logique influence cette utilisation, que ce soit en ce qui concerne une utilisation juste ou non ou bien en ce qui concerne la fréquence d'utilisation. Cependant, on peut dire que, vraisemblablement, avoir des connaissances en logique formelle contribue au développement de l'intuition logique, et peut-être des intuitions en général. Cela appui l'idée que les intuitions évoluent et se développent avec les connaissances, et que chaque étudiant a un degré de développement relatif à ses intuitions différent. En fait, tous les étudiants n'ont pas développé les mêmes intuitions. Certains ont des intuitions logiques ou ***connaissances contextualisées à la logique***, dont ne disposent peut-être pas les autres.

Tel que mentionné dans la section 5.2.1, l'attention et la vigilance peuvent être le fruit de connaissances et d'intuitions développées dans les cours de logique. Ainsi, les connaissances contextualisées issues du cours de logique ont vraisemblablement aidé les étudiants dans leurs résolutions, et ne semblent mobilisables que chez les étudiants ayant suivi le cours de logique. Tout compte fait, ces idées d'attention et de vigilance semblent être les seuls aspects reliés aux savoirs, savoir-faire et pratiques contextualisés qui diffèrent lorsqu'il est question de la production de démonstrations par les étudiants ayant ou non passé un cours de logique. Cependant, il faut préciser que les étudiants ont des niveaux de développement de ces intuitions et connaissances contextualisées différents selon leur exposition à la logique. Évidemment, l'échantillon étant restreint et constitué d'étudiants dont les connaissances contextualisées propres aux différents contextes sont à des niveaux différents, le départage entre « connaissances contextualisées reliées à une certain tâche » et « connaissances contextualisées à la logique » (ou connaissances opératoires en logique) est difficile à faire.

Axe 2 : Production sémantique et syntaxique et représentations signifiantes

Il a été difficile ou même impossible de statuer sur une orientation syntaxique ou sémantique dans la résolution des tâches tout au long des entrevues, les démonstrations des tâches 1 et 2 étant trop courtes et simples, la tâche 3 portant sur des objets exempts d'aspects sémantiques, la tâche 4 ne requérant pas explicitement de démonstration et ne fournissant donc que des bribes de démonstrations. Il a été possible de repérer quelques tendances mais sans plus, ce qui permet seulement d'offrir quelques pistes de réponses.

Tout d'abord, dans la tâche 3, les étudiants ont tous mené une résolution plus syntaxique, mais certains étaient mal à l'aise vis-à-vis cette situation et cherchaient à trouver une avenue sémantique, malgré que la tâche n'en donnait pas la possibilité. On remarque donc que l'apport d'une compréhension sémantique ou d'une élaboration sémantique, où l'on peut s'appuyer sur ses intuitions, n'a pas la même importance pour tous les étudiants : certains recherchent vivement cet apport et d'autres non. Rappelons-nous que la tâche 3 a été accomplie le plus facilement par Anna, Paul et Éléanore, car ceux-ci ne cherchaient pas à tout prix un contrôle sur le sens. Sachant qu'il s'agit des trois étudiants n'ayant pas suivi un cours de logique et ayant démontré les connaissances prédicatives en logique les plus faibles, on pourrait donc supposer un lien entre la passation ou non d'un cours de logique et le besoin d'appui sur la sémantique dans une résolution. Cette idée sera discutée plus en profondeur dans la section 5.3.3. Cependant, il semble hasardeux de supposer un tel lien, entre posséder des connaissances prédicatives en logique et la recherche d'un contrôle sémantique dans une résolution, puisque la différence entre les résultats au test d'Éléanore et de Paul, comparés à ceux de Michel, Jeanne et Lucie, était minime.

En ce qui concerne les représentations signifiantes, elles étaient très présentes tout au long des entrevues. Tous les étudiants, sauf Michel, en ont utilisé dans leurs résolutions, démontrant leur compréhension intuitive et la recherche de celle-ci. Julie-Ann et Robert ont utilisé quelques représentations signifiantes mais moins que chez les autres dyades. On peut remarquer qu'il s'agit, avec Michel, des trois étudiants qui ont semblé avoir les intuitions les plus fortes (et aussi ceux qui leur faisaient le plus confiance), de sorte que l'on peut croire qu'ils ont moins ressenti le besoin de s'appuyer sur des représentations signifiantes, du moins explicitement, pour résoudre les tâches. En ce qui concerne Éléanore, toujours compte tenu de sa participation limitée tout au long de l'entrevue, elle n'a pas non plus exprimé fréquemment sa compréhension intuitive à l'aide de différentes représentations.

Pour leur part, Paul, Anna, Jeanne et Lucie utilisent, de manière marquée, plusieurs représentations signifiantes pour se remémorer différents concepts ou représenter des situations, et ainsi mieux avancer ensuite dans la résolution. Par contre, il semble que les représentations signifiantes utilisées par Paul et Jeanne n'avaient pas le même but que celles utilisées par Anna et Lucie. Par exemple, Paul et Jeanne ont utilisé des représentations signifiantes d'objets mathématiques en jeu pour résoudre la tâche rapidement. Pour leur part, Anna et Lucie ont semblé utiliser leurs représentations plus dans le but d'assimiler les questions et se remémorer les concepts en jeu.

Puisque Jeanne, Lucie et Michel ont un profil considéré comme identique et qu'ils ne sont pas vus ici comme utilisant les représentations signifiantes d'une manière similaire, il n'est pas possible d'inférer un lien absolu entre le profil logique et l'utilisation des représentations signifiantes. Par contre, on peut inférer qu'une bonne connaissance de la logique formelle ou encore la passation d'un cours de logique ne remplace pas l'appui que peuvent apporter les représentations signifiantes dans le travail mathématique, mais que par ailleurs passé un certain seuil, ces connaissances réduisent la nécessité ressentie d'avoir recours à de telles représentations.

Axe 3 : Considérations et difficultés mathématiques et logiques

Tel que discuté précédemment, certains étudiants ont commis des erreurs de nature logique dans les entrevues. Les erreurs logiques provoquent bien sûr des démonstrations invalides, mais elles ont également une influence sur la compréhension des tâches, des objets et des relations mathématiques en jeu. Cela peut éventuellement causer des problèmes à plus long terme si une incompréhension d'un théorème ou d'un axiome engendre des intuitions erronées, qui émergeront ensuite dans le travail mathématique des étudiants. On peut constater que Jeanne et Lucie ont commis des erreurs logiques, ce qui va dans le même sens que l'étude de Cheng et al. (1986), dans laquelle les étudiants d'une expérimentation ayant passé un cours de logique ne montraient pas d'amélioration significative dans leurs productions de démonstrations. Elles sont d'ailleurs responsables de la seule erreur majeure parmi les 16 résolutions présentées dans le chapitre précédent. Ainsi, on peut éliminer un lien de cause à effet absolu entre la passation d'une cours de logique et la production de démonstrations exemptes d'erreur, ou encore entre la maîtrise de connaissances prédicatives en logique formelle et la réussite de démonstrations en mathématique.

5.3.2 Deuxième question de recherche : *Y a-t-il des différences dans la façon dont les étudiants valident une démonstration qui leur est proposée, selon qu'ils aient ou non des connaissances prédicatives en logique formelle ou encore, qu'ils aient ou non fait un cours sur la logique formelle ?*

Cette deuxième question de recherche concerne directement la validation de démonstrations. Elle sera traitée selon les trois axes d'analyse. Mais tout d'abord, j'aimerais aborder l'idée de « déballer la logique » (Selden et Selden, 1995) discutée à quelques reprises dans ce texte, et qui a un lien direct avec la validation de démonstrations. En effet, il s'agit de faire ressortir les considérations logiques d'énoncés. Ainsi, « déballer la logique » fait référence aux idées d'attention et de vigilance que j'ai mises en évidence dans la section 5.1.2. Comme j'ai mentionné précédemment, les étudiants les moins attentifs ou vigilants vis-à-vis les considérations logiques étaient Anna, Paul et Éléanore, et les trois ont en commun de ne pas avoir suivi de cours de logique. Les autres étudiants, qui ont en commun la passation d'un cours de logique, semblaient assimiler très rapidement les aspects logiques, comme l'unicité, l'existence et l'universalité. Ces idées ne sont pas nécessairement liées à la manière de valider mais mettent tout de même au jour des facteurs qui influencent le travail de validation, particulièrement à travers l'action de « déballer la logique », qui semble être favorisée par la passation d'un cours de logique.

Axe 1 : Intuition, conviction et connaissances contextualisées

Dans le contexte de la validation, ce qui semble ressortir en lien avec l'intuition est l'importance que les étudiants donnent à leurs intuitions et à quel point ils leur font confiance. En particulier, Julie-Ann et Robert ont accordé une grande importance à leurs intuitions, ne ressentant pas à deux reprises le besoin de démontrer l'énoncé tellement il semblait trivial pour eux. Également, Jeanne s'est vivement fiée à son intuition vis-à-vis la validité de l'énoncé de la tâche 4, intuition qui était erronée mais qui a tout de même teinté la résolution. Toujours concernant la tâche 4, Lucie a eu dès le départ l'intuition que quelque chose clochait, sans trop savoir quoi, et elle a commencé à douter de la validité de la proposition et de la démonstration. Lucie ne semble donc pas se fier à ses intuitions aveuglément. En effet, dans le cas de la tâche 4, son intuition lui dicte que quelque chose cloche mais elle continue de travailler pour valider ou invalider cette intuition, ce que Julie-Ann et Robert ne faisait pas en acceptant leurs intuitions directement comme valides. De son côté, l'intuition de Michel l'a servi dans la tâche 4, où il a su dès le départ que l'énoncé comporte quelque chose qui ne fonctionne pas. Il s'est alors convaincu avec un contre-exemple. Ensuite, il y a Anna qui rejette la démonstration proposée par Michel dans la tâche 2, car son intuition lui dicte que ce qu'il a proposé a une très forte chance de comporter une erreur. Elle ne semble toutefois pas capable d'expliquer pourquoi elle est mal à l'aise et semble incertaine de cette intuition. Finalement, le travail effectué par Paul lors de la validation de démonstrations était trop court pour pouvoir déterminer la place de l'intuition.

Ainsi, il semble que pour Michel, Anna et Lucie, les intuitions sont présentes et ils les suivent mais ne tiennent pas pour acquis qu'il s'agit de la vérité : ils continuent le travail pour valider ou invalider ce que leurs intuitions dictent. Dans les cas de Jeanne, Julie-Ann et Robert, il semble que ceux-ci accordent une confiance significative à leurs intuitions en général. Finalement, on ne peut faire de conjecture vis-à-vis le lien entre le rôle de l'intuition dans la validation de démonstrations et la passation de cours de logique ou encore la possession de connaissances prédicatives en logique formelle.

Tel que mentionné à quelques reprises précédemment, l'attention et la vigilance dans le processus de validation peuvent être le fruit de connaissances et intuitions développées dans les cours de logique. Ainsi, les connaissances contextualisées issues du cours de logique ont vraisemblablement aidé les étudiants dans leurs résolutions, et ne semblent mobilisables par les étudiants de l'expérimentation que chez ceux ayant suivi le cours de logique.

Axe 2 : Production sémantique et syntaxique et représentations signifiantes

Selon cet axe d'analyse, seulement l'étude des représentations signifiantes se prête à un croisement avec la validation de démonstration. À ce sujet, on peut exhiber les mêmes résultats que dans la section sur la production, c'est-à-dire que Michel, Julie-Ann et Robert sont les étudiants ayant le moins utilisé de représentations signifiantes, et que Jeanne, Lucie et Paul ont utilisé des représentations signifiantes à plusieurs reprises.

Axe 3 : Considérations et difficultés mathématiques et logiques

Finalement, les principales difficultés qui ont émergé dans les situations de validation ont été discutées dans la section 5.2.1 sur l'attention et la vigilance. En effet, lorsque que les étudiants omettent certaines caractéristiques logiques lors de la validation d'un énoncé ou d'une démonstration, c'est à ce moment-là qu'ils commettent des erreurs dans leurs inférences. Ce manque de vigilance ou d'attention se rattache à l'idée de « déballer la logique » (Selden et Selden, 1995), en ce sens que les étudiants ont eu des difficultés à faire ressortir les considérations logiques, phase très importante de la validation. Et tel que mentionné précédemment, la passation du cours de logique semble avoir augmenté cette vigilance.

5.3.3 Troisième question de recherche : *Que se passe-t-il quand l'étudiant ne peut puiser dans des connaissances contextualisées reliés aux objets mathématiques en jeu dans une démonstration ?*

La tâche 3, faisant intervenir des robots et des chiens, a été créée pour permettre de répondre à cette question de recherche. Les résolutions proposées par les étudiants étaient très intéressantes et ont fourni beaucoup d'éléments de réponse.

En ce qui concerne les connaissances contextualisées, contrairement a ce qui a été anticipé, elles ressortent dans la tâche 3, malgré qu'elle ait été conçue spécifiquement pour les éliminer le plus possible. Ne sachant pas comment résoudre cette tâche, les équipes ont tenté plusieurs chemins, certains avec des buts précis (utiliser l'axiome 2 par exemple) et d'autres sans but précis (Anna : « *j'explore un cas et j'essaie de faire des déductions* »). En fait, l'axiome 2 a été un obstacle dans cette résolution, car il n'est pas utilisé dans le début de démonstration donné dans l'énoncé de la tâche, et n'intervient pas non plus dans les démonstrations que les étudiants ont composées. L'intention de Michel, Jeanne, Paul, Julie-Ann et Robert d'utiliser cette information laissée de côté et leur malaise de la laisser ainsi sont probablement issus de leur expérience, un savoir-faire contextualisé, dans leur parcours mathématique : la règle implicite que toutes les hypothèses doivent être utilisées dans une démonstration et que de manière générale, un théorème, un lemme ou une proposition doivent énoncer seulement les hypothèses minimales. Sinon, dans l'esprit de l'étudiant, c'est que soit sa preuve n'est pas bonne, soit le problème est mal posé. Dans leur compréhension de la tâche, il est naturel pour ces étudiants de considérer les trois axiomes comme les hypothèses de ce qu'ils doivent montrer, et ils s'attendent donc à ce que l'axiome 2 intervienne dans la preuve. Ainsi, tel que discuté précédemment (cf. section 4.4.3), malgré qu'il n'y ait pas d'objets mathématiques connus (et donc de connaissances contextualisées reliés à ces objets), certains étudiants ont tout de même utilisé une connaissance contextualisée globalement à la résolution de problèmes mathématiques et au contexte de la recherche de démonstration, et non à un domaine mathématique précis.

On peut donc formuler de nouveau la remarque qu'il existe des savoirs, savoir-faire et pratiques contextualisés non seulement à un domaine mathématique particulier, mais aussi contextualisés à certains types de tâches, et par ailleurs transversales aux mathématiques de manière générale. Il y a en effet des règles qui sont générales aux mathématiques et aux manières de faire les mathématiques. On peut penser à des règles, tantôt implicites, tantôt explicites, respectant la culture mise en place dans les systèmes scolaires vis-à-vis les mathématiques, et qui s'appliqueraient à n'importe quelle branche des mathématiques. Ce type de connaissances contextualisées à certaines tâches est ressorti en contexte mathématique inconnu, mais on peut émettre l'hypothèse que de telles connaissances « transversales » aux mathématiques se retrouvent en contexte mathématique familier, sauf qu'il est alors moins évident de les cerner car elles y sont fortement entremêlées au contexte.

Il est aussi intéressant de relever que les étudiants ayant avancé dans la résolution de la tâche 3 avec le plus d'aisance ont été Anna, Paul et Éléanore, la résolvant avec le plus de confiance et aussi le plus rapidement. L'absence d'objets mathématiques ou de relations connues n'a pas semblé causer problème à ces étudiants. Ils ont mené la résolution visiblement comme s'il s'agissait de n'importe quels autres objets mathématiques dans un contexte familier. En plus, le temps d'appropriation de la tâche prévu dans le protocole d'entrevue (deux minutes) a paru suffisant pour ces étudiants.

Les autres étudiants, ceux ayant suivi un cours de logique, ont semblé avancer avec plus de précautions, parfois ne sachant pas du tout comment avancer, vers quoi se diriger et comment s'y rendre. Ils semblaient parfois vouloir trouver « le » bon chemin de sorte qu'ils ne voulaient pas s'aventurer avant d'être certains d'avoir trouver la bonne méthode. Ils ont aussi pris le temps de s'approprier les axiomes en les symbolisant (dyade 2), et en en discutant de manière assez étendue (dyade 4). En ce qui concerne le traitement des axiomes, dans le cas de la dyade 2, il est intéressant de constater que Jeanne et Lucie utilisent, lorsqu'elles réfléchissent au problème et cherchent des chemins pour le résoudre, la version des axiomes écrite en mots et non celle qu'elles ont formalisée en symboles. De plus, elles réécrivent en symboles sur leur feuille un axiome qu'elles veulent se réapproprier ou se remémorer. Ainsi, on peut voir que, pour le contrôle, la formalisation est un outil important mais il n'est pas nécessairement le plus adéquat lorsqu'il est question de réfléchir dans un but de résolution. La symbolisation aide à faire ressortir les caractéristiques logiques, en rendant compacte l'écriture. Elle permet en effet une synthèse qui facilite la mémorisation ou la saisie. Mais le traitement dans un but de démonstration n'est pas pour autant toujours facilité, en raison de l'opacité de la notation symbolique. Finalement, Julie-Ann et Robert se sont appropriés et ont donné du sens aux axiomes en faisant un dessin et en les manipulant et les reformulant pour créer des exemples. Cela leur a suffi pour donner du sens à la situation circonscrite par les axiomes. De son côté, Michel n'a pas transformé les axiomes mais a semblé avoir un besoin de sens pour se guider, d'où sa difficulté à résoudre la tâche.

Il semble donc se dessiner une tendance, à savoir que les étudiants ayant suivi un cours de logique recherchent plus à s'approprier les axiomes, soit pour s'approprier le contexte (1), soit pour s'approprier leurs spécificités logiques décontextualisées (2). Également, il semble que ces étudiants soient plus réticents à avancer dans une tâche (3) où ils ne peuvent s'appuyer sur des intuitions ou connaissances contextualisées à un domaine mathématique. Il est difficile d'expliquer les différences assez marquées, au regard particulièrement de la manière de traiter les axiomes et de la vitesse de résolution, entre les étudiants ayant et n'ayant pas suivi un cours de logique. Certaines hypothèses peuvent être émises.

Tout d'abord, la première hypothèse est que les étudiants donnent une grande importance à l'étape d'appropriation du contexte (1). Par là, je fais référence à la construction d'un semblant de sens autour des objets (chiens et robots) et de la relation (être ami). En d'autres mots, les étudiants recherchent à s'approprier la nature du problème pour être capable de réfléchir sur la situation, dans le but d'avoir un appui sur « ce qui est possible » dans ce « nouveau référentiel », dans le but de soutenir leurs inférence avec « le bon sens » dans le nouveau contexte. Par exemple, si la tâche était proposée dans sa forme initiale, c'est-à-dire en termes de *point, droite* et *être incident à,* les étudiants pourraient réfléchir sur ces objets « tangibles » au lieu de le faire seulement sur les axiomes, en tant que « règles à suivre », abstraites. Par exemple, en considérant l'axiome 3, il aurait été plus clair pour les étudiants qu'il existe trois points distincts pour lesquels aucune droite n'est incidente, mais que ce n'est pas vrai pour tout trio de points distincts (pensons à trois points alignés par exemple), qu'il est clair qu'il existe trois robots distincts tel qu'aucun chien n'est leur ami simultanément, mais que ce n'est pas (nécessairement) vrai pour tout trio de robots distincts. En effet, les étudiants peuvent réfléchir sur la situation, sur les objets qu'ils connaissent et maîtrisent très bien, plutôt que sur les exigences logiques, d'existence et d'unicité, des axiomes. Il est raisonnable de penser que cela les aide à retenir les informations car pour eux, c'est « normal » que l'axiome garantisse l'existence de ce trio de points distincts mais pas l'universalité de la caractéristique sur les trios de points. Cependant, lorsqu'il est question de chiens et de robots, on ne peut s'agripper à la situation pour réfléchir. En effet, pourquoi ne serait-il pas possible que pour tous les trios de robots, il n'y ait aucun ami chien en commun ? Pour comprendre, il faut considérer seulement les axiomes et leurs exigences logiques. Les étudiants semblaient vouloir retrouver la même assurance vis-à-vis le contexte que celle qu'ils ont dans des situations où ils sont normalement placés, c'est-à-dire en contexte connu.

Donc, au sujet de l'appropriation du contexte, on peut faire un lien avec la notion de vigilance, qui est ressortie comme une différence entre les étudiants ayant et n'ayant pas suivi un cours de logique. En effet, les étudiants ayant suivi un cours de logique semblent garder en tête diverses considérations logiques. Ainsi, il est possible que ces caractéristiques logiques qui prennent toute la place rendent l'appropriation de la situation plus difficile pour ces étudiants ; plus difficile que pour ceux qui n'ont pas toutes ces considérations logiques en tête. Parallèlement, compte tenu du temps qu'ils mettent à s'approprier le contexte, ces étudiants ayant suivi un cours de logique n'évaluent pas comme une stratégie profitable de mener une démonstration sans appui sur le contexte, c'est-à-dire une démonstration strictement syntaxique. Comme Weber et Alcock (2004) l'ont souligné, il n'est parfois pas suffisant d'avoir un contrôle strictement syntaxique et ces étudiants semblent penser de la même manière. Ils ont en effet utilisé de manière générale leur compréhension intuitive des concepts dans les autres tâches. Cependant, comme les résolutions des tâches 1, 2 et 4 ne permettent pas d'inférer sur un besoin ou non de ces étudiants d'avoir un appui sémantique dans une résolution, on ne peut conclure qu'ils recherchent, dans la tâche 3, le même appui sémantique qu'ils utilisent dans un contexte connu. On pourrait vérifier l'importance qu'ils accordent à un appui sémantique en leur proposant des tâches de production de démonstration similaires aux tâches 1 et 2, mais requérant une résolution plus étendue. Par contre, une courte remarque de la part de Jeanne et Lucie faite au cours de leur résolution de la tâche 3 porte à croire que le contrôle sémantique sur le contexte a une importance, du moins pour cette dyade :

Jeanne : comment ça [se fait que] je ne vois pas [la solution] !
Lucie : c'est juste parce que c'est des robots et des chiens.

Dans cet extrait, Lucie explique la difficulté avec laquelle Jeanne et elle-même avancent dans la tâche par le fait que le problème fait intervenir des chiens et des robots. Il s'agit clairement d'une référence au fait que ce ne sont pas des objets mathématiques connus. Cet extrait montre donc que les deux étudiantes voient l'absence de contrôle sur l'aspect sémantique comme un obstacle, et on peut penser qu'elles ne sont pas seules à avoir eu cette perception.

En ce qui concerne l'appropriation des spécificités logiques décontextualisées (2), en examinant la tâche, on se rend compte que tous les étudiants ne peuvent s'appuyer que sur leurs connaissances logiques décontextualisées. Ces connaissances sont rarement utilisées, dans les mathématiques que ces étudiants font dans le cadre scolaire, ailleurs que dans un cours de logique. Ainsi, pour la tâche 3, on serait porté à penser que les étudiants ayant fait un cours de logique vont mieux performer avec ces connaissances logiques hors contexte. Cependant, comme mentionné précédemment, la passation d'un cours de logique ne garantit pas des connaissances prédicatives en logique infaillibles, de sorte que ces étudiants peuvent tout de même être réticents à les utiliser de manière décontextualisée. Aussi, on peut croire qu'ils ont trouvé essentiel de s'approprier et de maîtriser toutes les considérations logiques de cette tâche exempte d'appui sémantique. En effet, dans ce type de tâches, il n'y a pas d'appui sémantique (ce qui se peut ou non dans la situation) pour valider les inférences logiques utilisées, et donc le risque d'erreur logique est plus grand. Pour avoir suivi un cours de logique, ces étudiants sont peut-être plus conscients des risques d'erreurs, et donc plus enclins à chercher un appui sémantique et plus conscients de l'importance qu'a cet appui.

Ces dernières idées sont plutôt étonnantes. En effet, dans le premier chapitre de ce travail, des éléments de la problématique portaient à croire qu'avoir de bonnes connaissances prédicatives en logique permet un contrôle qui serait uniquement logique et formel, ce qui favoriserait un détachement du sens, de l'intuition et du contexte. En effet, des étudiants familiers avec certains concepts logiques assez poussés et leurs applications puisent dans leurs connaissances logiques lorsque confrontés à des tâches où leurs connaissances mathématiques ne suffisent pas pour répondre à la question adéquatement (Epp, 2003). Cependant, dans le cadre des entrevues, le contraire s'est produit.

Finalement, en ce qui concerne la réticence avec laquelle les étudiants ayant suivi un cours de logique avancent dans la résolution (3) de la tâche 3, on peut croire que le contexte non mathématique a pu les ralentir. Cependant, il est difficile d'expliquer pourquoi ces étudiants ayant suivi un cours de logique étaient significativement plus réticents que les autres. D'un autre côté, il serait possible, encore une fois, de discuter de l'idée de la vigilance. En ayant toute cette attention portée sur les spécifications logiques, ils sont en quelque sorte bombardés de considérations logiques, ce qui les empêche d'avancer dans la résolution. Ils connaissent, remarquent et savent quels sont les enjeux, peut-être mieux que les étudiants moins vigilants, ce qui les rend plus prudents. On peut donc voir cette réticence à avancer sans repère dans la tâche et aussi, toutes les précautions prises, comme une prudence accrue vis-à-vis les potentielles erreurs de nature logique.

À ce sujet, j'aimerais ajouter comme dernier commentaire un parallèle avec une citation de Thom (1974) :

> Pour apprendre à marcher, il serait plus nuisible qu'utile de connaître l'anatomie de la jambe ; et avoir étudié la physiologie du système digestif n'est d'aucun secours pour digérer un repas trop lourd. [...] La connaissance explicite de la définition formelle de l'activité peut perturber cette activité, qui fonctionnait fort efficacement jusque-là sans théorie : à la manière de ces individus scrupuleux qui hésitent à parler une langue parce qu'ils en connaissent trop bien la grammaire et ont peur de commettre des fautes. (p. 45)

Je désire faire un parallèle entre les étudiants qui ont une connaissance prédicative élevée des considérations logiques et ces individus scrupuleux dont Thom parle, et qui hésite à parler une langue dont ils maîtrisent « trop » bien la grammaire, c'est-à-dire les aspects théoriques. Dans le cadre de cette recherche, les étudiants semblaient scrupuleux de faire avancer le travail mathématique. Dans la tâche 3, les considérations logiques étaient plus évidentes, ressortaient plus car les objets en jeu, les chiens et les robots, ne faisaient pas appel à une intuition ou encore à des connaissances contextualisées, de sorte que les considérations logiques prenaient toute la place, les aveuglaient. Cependant, les étudiants n'ayant pas suivi de cours de logique ne semblaient pas accaparés par ces éléments logiques, de sorte qu'ils pouvaient faire avancer le travail comme ils le faisaient pour les autres tâches. Peut-être ici voit-on apparaître l'aspect négatif de la vigilance accrue discutée précédemment (cf. section 5.2.1). Cette vigilance semble prendre toute la place dans cette tâche, pour ces étudiants scrupuleux.

Ainsi, on peut émettre la conjecture que la passation d'un cours de logique accroît la vigilance des étudiants vis-à-vis les considérations logiques présentes dans une tâche, faisant intervenir des objets mathématiques connus ou non. Cependant, cela semble les rendre plus réticents à s'engager dans une tâche où les objets mathématiques en jeu ne déclenchent pas d'intuition ou encore, n'enclenchent pas de connaissances contextualisées. Toutefois, il semble nécessaire de considérer qu'il y a peut-être un effet de la recherche elle-même sur ce dernier résultat. En effet, les étudiants savaient qu'il s'agissait d'une recherche sur la logique, que leur « performance en logique » allait être examinée. Et donc pour les meilleurs étudiants, il est possible que cette situation ait eu un effet paralysant ou à tout le moins, entravant. Ces étudiants, qui se considèrent « bons en logique et en démonstration », se trouvaient bloqués par la tâche des chiens des robots, se sachant « sous surveillance » à cet égard. Les étudiants plus faibles, eux, n'avaient en quelque sorte « rien à prouver » et n'ont donc probablement pas ressenti la pression de la même façon.

CHAPITRE VI

CONCLUSION

En guise de conclusion, je propose de revenir sur les éléments marquants de ce travail en considérant la mise en contexte, les contributions et retombées ainsi que les limites et prolongements à envisager pour ce projet de recherche.

6.1 Mise en contexte du projet

Dans la problématique, il a été mis en avant qu'il n'y avait pas, dans la communauté autant mathématique que didactique, un consensus sur l'importance de la logique dans les mathématiques faites autant par les mathématiciens que par les étudiants. Le but de cette recherche n'était pas d'offrir une réponse en statuant sur l'importance de la logique, mais bien de cerner l'influence des connaissances en logique chez les étudiants, qui n'ont pas la même expérience sur laquelle s'appuyer que les mathématiciens, et de mieux comprendre ce que font intervenir les étudiants qui n'ont pas ces connaissances, autant dans la production que dans la validation de démonstrations.

En construisant un cadre théorique pour cette recherche, j'ai mis en évidence la différence entre connaissances prédicatives et opératoires (Vergnaud, 1990), ce qui fournit un vocabulaire précis pour les connaissances en logique formelle, au cœur de la réflexion initiée dans la problématique. Il est donc question, à partir de ce moment, de l'étude de l'influence de connaissances prédicatives en logique. Par la suite, l'apport de l'intuition, en parallèle avec le formalisme, a été étudié avec les idées de Fischbein (1982, 1987), où l'expérience mathématique prend une place importante. Ensuite, les orientations syntaxiques et sémantiques dans la production d'une démonstration ont été discutées, comme des voies qu'il est possible d'emprunter dans le spectre des manières de faire des démonstrations. Ces manières de faire se différencient principalement en ce qui concerne le type de connaissances sur lesquelles s'appuient les étudiants, et s'ils s'appuient ou non sur des représentations signifiantes. Finalement, les assises théoriques incluaient également les idées de Durand-Guerrier et Arsac (2003) sur les savoirs, savoir-faire et pratiques contextualisés, que j'ai synthétisés par la locution « connaissances contextualisées ». Celles-ci, issues de l'expérience mathématique des étudiants, sont propres à un domaine mathématique spécifique et on remarque que des références aux règles de logiques sont remplacées par des règles (ou même des « techniques ») de raisonnement contextualisées à un domaine. Cette idée a orienté le projet à examiner, non seulement l'influence des connaissances, mais aussi l'impact de la passation d'un cours de logique. Ces fondements théoriques ont résulté en trois questions de recherche :

- Y a-t-il des différences dans la façon dont les étudiants produisent des démonstrations, selon qu'ils aient ou non des connaissances prédicatives en logique formelle ou encore, qu'ils aient ou non fait un cours sur la logique formelle ? Comment cela se traduit-il par rapport aux aspects syntaxique et sémantique, rigueur et intuition, mobilisation ou non de connaissances contextualisées ?
- Y a-t-il des différences dans la façon dont les étudiants valident une démonstration qui leur est proposée, selon qu'ils aient ou non des connaissances prédicatives en logique formelle ou encore, qu'ils aient ou non fait un cours sur la logique formelle ?
- Que se passe-t-il quand l'étudiant ne peut puiser dans des connaissances contextualisées reliées aux objets mathématiques en jeu dans une démonstration ?

Pour y répondre, une méthodologie en deux temps a été développée. Huit étudiants au baccalauréat en mathématiques ont accepté de participer. Ils ont, dans un premier temps, répondu à un test diagnostique visant à déterminer leur niveau de connaissances prédicatives en logique formelle. En considérant conjointement s'ils avaient ou non suivi un cours de logique et les résultats du test diagnostique, quatre dyades ont été formées. La première était hétérogène et regroupait une étudiante (Anna) n'ayant pas suivi de cours de logique et ayant des connaissances prédicatives faibles et un étudiant (Michel) ayant passé un cours de logique et ayant de bonnes connaissances prédicatives en logique. La deuxième joignait deux étudiantes (Jeanne et Lucie) ayant suivi un cours de logique et ayant de bonnes connaissances prédicatives en logique. La troisième regroupait deux étudiants (Éléanore et Paul) ayant des connaissances prédicatives légèrement plus faibles que la dyade précédente et n'ayant pas suivi de cours de logique. Enfin, la quatrième dyade était formée de deux étudiants (Julie-Ann et Robert) ayant démontré les meilleures connaissances prédicatives en logique et ayant suivi un cours de logique. Ces quatre dyades ont participé à des entrevues semi-structurées, basées sur des tâches. Ces entrevues, enregistrées de manière audio, on été analysées dans le but de répondre aux questions de recherche.

6.2 Contributions et retombées de cette recherche

À la suite de la mise en œuvre de la méthodologie[17], de la cueillette et de l'analyse des données, ce travail a contribué à mieux comprendre le rôle des connaissances en logique formelle et de la passation d'un cours de logique sur les mathématiques faites par les étudiants. Plusieurs réflexions et pistes de réponses aux questions de recherche ont émergé de l'analyse des données. Elles sont reprises ici.

6.2.1 Thèmes émergents

Tout d'abord, il est ressorti des données un lien assez marqué, qui porte à croire que la passation d'un cours de logique développe chez les étudiants une vigilance et une attention accrues vis-à-vis les considérations logiques lors du travail de production et de validation. En effet, les étudiants ayant suivi de cours de logique semblent avoir une capacité à assimiler et à « déballer » (Selden et Selden, 1995), presqu'inconsciemment, les caractéristiques logiques des mathématiques sur lesquelles ils travaillent, qu'elles soient sous forme symbolique ou discursive. Cette caractéristique s'est même révélée utile chez une étudiante (Lucie) qui, ayant fait un cours de logique, était à même d'identifier des éléments logiques à prendre en compte sans même bien les maîtriser. Cette vigilance lui permettait de faire ressortir les

[17] *A posteriori*, il nous a semblé un excellent choix d'avoir créé des dyades, au lieu de mener des entrevues individuelles. En effet, cette disposition a stimulé les échanges ce qui a, par le fait même, grandement enrichi les données soumises à l'analyse.

considérations logiques et elle devait ensuite travailler pour les maîtriser. À cet égard, il semble que les connaissances prédicatives en logique formelle ne remplacent pas cette attention, qui serait un apport du cours de logique. En effet, certains étudiants ont utilisé des énoncés de manière erronée parce qu'ils ne semblaient pas avoir remarqué ces caractéristiques logiques et non parce qu'ils n'avaient pas les connaissances prédicatives liées à ces caractéristiques. Il semble que ces derniers auraient avantage à rechercher ces caractéristiques logiques de manière consciente ou explicite.

Ensuite, une réflexion, mise en avant par deux étudiantes, a émergé des entrevues concernant l'importance d'un contrôle sémantique vis-à-vis les objets et manipulations mathématiques, et a soulevé deux autres idées reliées au contexte de cette recherche. Tout d'abord, l'importance du contexte dans la manipulation sémantique ou syntaxique a été étudiée. Certains étudiants sont plus ou moins à l'aise à réaliser des manipulations logiques, comme la négation par exemple, dépendant du contexte, selon que l'énoncé en cause soit mathématique connu, strictement formel symbolisé ou encore, inconnu mais répondant aux règles mathématiques usuelles. En d'autres mots, un contrôle sur des énoncés formels n'est pas une condition nécessaire et suffisante au contrôle sur des énoncés en contexte et, par le fait même, sur la sémantique de ceux-ci. Il n'y a pas eu de lien évident entre ces différences dans l'aisance à faire certaines manipulations dépendant du contexte et les deux variables considérées dans cette recherche, soit la passation ou non d'un cours de logique et le niveau de connaissance en logique formelle. Ensuite, la deuxième idée soulevée avec la réflexion de départ est que le besoin de contrôle sémantique (sur le sens) et syntaxique des étudiants varie beaucoup d'un étudiant à l'autre, sans lien apparent avec les variables considérées dans cette recherche. Aussi, on remarque que ce n'est pas seulement la syntaxe ou bien la sémantique qui donnera du sens aux problèmes. En effet, une orientation peut nourrir l'autre, et les étudiants peuvent bénéficier d'un tel changement d'orientation ou encore, de plusieurs allers et retours.

Finalement, cette étude a fait ressortir l'idée suivante : pour le contrôle, la formalisation est un outil important mais il n'est pas nécessairement le plus adéquat lorsqu'il est question de réfléchir en ayant comme but de résoudre une tâche. La symbolisation aide à faire ressortir les caractéristiques logiques, en rendant compact l'écriture. Elle permet en effet une synthèse qui facilite la mémorisation et la saisie. Par contre, le traitement dans un but de démonstration n'est pas pour autant toujours facilité, en raison de l'opacité de la notation symbolique.

6.2.2 Retour aux questions de recherche

En ce qui concerne les questions de recherche, malgré certaines tâches évaluées comme étant trop simples *a posteriori*, il a été possible d'identifier des éléments de réponse pour chaque question. Considérons d'abord les deux premières questions de recherche.

Tout d'abord, il n'a pas été possible de déterminer quels profils d'étudiants utilisaient de manière plus marquée des intuitions et des connaissances contextualisées (axe 1) dans la production et la validation de démonstrations. Cependant, la passation d'un cours de logique aide vraisemblablement à développer les intuitions et connaissances contextualisées reliées à la logique, ainsi que la vigilance vis-à-vis les considérations logiques. Évidemment, l'échantillon étant restreint et constitué d'étudiants dont les connaissances contextualisées propres aux différents contextes sont à des niveaux différents, le départage entre « connaissances contextualisées reliées à un certain domaine » et « connaissances contextualisées à la logique » (ou connaissances opératoires en logique) est difficile à faire, du moins dans la présente étude. L'étude de l'influence des connaissances contextualisées à la logique sur l'élaboration et la validation de démonstrations mériterait donc de plus amples recherches.

En ce qui concerne les productions sémantiques ou syntaxiques (axe 2), il était généralement difficile de statuer sur l'orientation des productions et donc, impossible de trouver un lien entre le type de production et les profils des étudiants. Du côté des représentations signifiantes, il n'est pas non plus possible d'inférer un lien absolu avec les variables à l'étude. Cependant, on peut inférer que des connaissances en logique formelle et la passation d'un cours de logique ne remplacent pas toujours l'appui que peuvent apporter les représentations signifiantes.

En considérant les erreurs mathématiques ou logiques (axe 3), il a été possible de constater, tel que mentionné par Cheng et al. (1986), que la passation d'un cours de logique n'élimine pas les risques d'erreurs de nature logique dans le travail mathématique, et que les étudiants ayant passé un cours de logique ne performaient pas nécessairement mieux dans leurs productions de démonstrations en ce qui concerne la réussite ou non, c'est-à-dire que leur performance n'était pas significativement meilleure. En fait, par la présente recherche, les cours de logique semblent avoir un impact sur le travail mathématique des étudiants mais cet impact ne se concrétise pas par l'élimination des erreurs, mais bien par l'accroissement de l'attention et de la vigilance, discuté abondamment dans ce qui précède.

Finalement, en ce qui concerne la troisième question de recherche liée à la tâche 3, la passation d'un cours de logique semble, encore une fois, accroître la vigilance mais aussi la réticence à s'engager dans une telle tâche, exempte d'objets mathématiques connus. En effet, les étudiants prennent un temps supplémentaire pour s'approprier le nouveau contexte et ses considérations logiques sous-jacentes. Également, les considérations logiques omniprésentes les amènent à faire preuve de beaucoup de prudence, voire même jusqu'à entraver leur engagement dans la tâche.

6.3 Limites

Tout d'abord, il est évident que les deux critères ayant permis la séparation des huit étudiants en quatre dyades (le niveau de connaissance en logique formelle et la passation ou non d'un cours de logique) ne sont pas les seuls facteurs influençant les manières de produire et de valider des démonstrations. De plus, les connaissances logiques visées dans le test diagnostique étaient directement reliées aux tâches choisies pour les entrevues. Ainsi, les connaissances prédicatives en logique évaluées auraient pu être différentes si les tâches choisies l'avaient été, et les profils d'étudiants auraient donc pu être autres. Il ne s'agissait pas non plus d'un inventaire exhaustif des connaissances reliées à la logique formelle. Tel que souligné tout au long de ce travail, l'expérience mathématique joue un rôle crucial dans les mathématiques que font les étudiants et chaque étudiant a un parcours bien à lui, de sorte que beaucoup d'autres variables entrent en compte lorsqu'il est question de ce qui pourrait influencer les manières de produire ou de valider une démonstration.

En ce qui concerne la méthode de recherche, les tâches proposées en entrevue n'étaient pas toutes adéquates. *A posteriori*, certaines se sont révélées trop faciles, ce qui a eu un effet négatif sur les données recueillies. Il serait donc intéressant de faire d'autres entrevues avec de nouvelles tâches d'un niveau de difficulté légèrement plus élevé et demandant une résolution plus élaborée. Également, malgré mon intention de recueillir des réponses prédicatives dans le test diagnostique, certaines questions ont principalement été traitées de manière opératoire. Il faudrait donc reformuler ces questions afin d'obtenir avec plus de certitude le pendant prédicatif de la connaissance sollicitée, s'il est disponible.

6.4 Prolongements

6.4.1 L'enseignement au baccalauréat en mathématiques : les étudiants bénéficieraient-ils de l'enseignement d'un cours de logique obligatoire ?

Cette recherche n'avait pas pour but de statuer sur l'importance de connaissances en logique formelle. Le but était plus de voir les différences et similitudes dans le travail mathématique réalisé par des étudiants ayant ou n'ayant pas fait un cours de logique, et ayant ou n'ayant pas de bonnes connaissances en logique formelle. Cependant, ce projet de recherche soulève tout de même une interrogation envers l'effet, bénéfique ou non, pour les étudiants, de suivre un cours de logique.

Les résultats de la présente étude suggèrent qu'un cours de logique n'est pas indispensable à la réussite académique en mathématique, comme le suggérait le premier chapitre de ce travail. Ce que ce travail semble apporter de plus à cette réflexion est que le cours de logique augmente la vigilance face aux considérations logiques, ce qui est un atout intéressant pour l'étudiant. Par contre, comme Jeanne et Lucie l'ont montré, ce n'est pas tout d'être vigilant si on ne maîtrise pas ce que la vigilance permet de remarquer. Ainsi, comme le suggérait Cheng et al. (1986), le cours de logique n'élimine pas toutes les erreurs de nature logique dans le travail mathématique. On peut alors étendre la question de départ au contenu et à l'enseignement des cours de logique, c'est-à-dire : quels types de contenus pourraient être couverts ou encore, quel type d'enseignement pourrait être dispensé dans les cours de logique offerts au baccalauréat pour favoriser la compréhension des étudiants et diminuer les erreurs de nature logique, de façon à rendre un éventuel cours de logique aussi bénéfique que possible ?

Un autre aspect souligné dans ce travail est la réticence des étudiants ayant suivi un cours de logique à s'aventurer dans un travail où ils ne peuvent s'appuyer sur des intuitions ou des connaissances contextualisées. Il serait donc intéressant de se pencher sur les raisons de cette réticence et d'y remédier dans le but de permettre aux étudiants de profiter pleinement de leur vigilance, sans toutefois que celle-ci les ralentisse.

Ainsi, cette étude n'a pas permis de statuer vis-à-vis la nécessité d'un cours de logique au baccalauréat mais a su soulever certaines idées qui, une fois approfondies par le biais d'autres études, pourront peut-être permettre d'arriver à une conclusion.

6.4.2 La poursuite des recherches

Cette étude n'avait pas pour but d'étudier les erreurs des étudiants mais plutôt d'étudier comment ils mènent la résolution de certaines tâches mathématiques, en ayant comme visée de déterminer la place et l'influence des connaissances en logique formelle et de la passation d'un cours de logique. Cette avenue de recherche ne visait pas à trouver les lacunes en logique mais bien de voir ce que ces connaissances peuvent apporter au travail mathématique et par quoi les étudiants les remplacent quand ils ne les ont pas. Cette vision semble intéressante pour ne pas entrer dans une vision négative du travail des étudiants. Sans vouloir dire que l'étude des erreurs et difficultés n'apporte pas à la recherche, il serait intéressant de continuer à étudier la logique dans cette optique, sachant déjà qu'il s'agit d'un domaine mathématique ardu, dont l'apport au travail mathématique est évalué de façon mitigée dans la littérature.

Tel que mentionné dans les limites de ce travail, l'utilisation, dans une étude similaire, de tâches de production de démonstrations demandant un travail plus élaboré serait intéressant pour créer l'opportunité d'étudier plus en profondeur cette partie du travail mathématique.

Il serait aussi intéressant de s'intéresser à des étudiants ayant suivi plusieurs cours de logique formelle, comme cela est possible dans certains établissements universitaires. Ces étudiants auraient donc probablement une connaissance plus profonde de cette branche des mathématiques et auraient été exposés de manière plus importante à son enseignement. Un tel projet permettrait de voir si la passation de plusieurs cours de logique aurait une influence sur la réalisation de tâches mathématiques hors du champ de la logique, comme celles proposées dans le cadre de la méthodologie du présent travail (tâche 1, 2 et 4). On peut imaginer que mettre en contraste le travail d'étudiants ayant suivi plusieurs cours de logique et celui d'étudiants n'ayant pas suivi de cours de logique permettrait de repérer des différences plus marquées que ce que la présente recherche a mis en évidence. Également, ce serait une occasion intéressante de se pencher plus longuement et en profondeur sur l'idée de « connaissances contextualisées à la logique », qui est ressortie de manière marquée dans la présente recherche.

BIBLIOGRAPHIE

Anderson, J. R. (1990). *Cognitive Psychology and Its Implications* (3rd ed.). New York : W. H. Freeman.

Armengaud, F. (non daté). Contraires et contradictoires, logique. *Encyclopædia Universalis.*

Arsac, G. (1996). *Interprétation, modèle et catégoricité : Commentaires sur les axiomes d'incidence.* http://www-cabri.imag.fr/abracadabri/GeoNonE/GNEIntro/HilArsac.htm: Consulté le 19 septembre 2013.

Azrou, N., Tanguay, D. et Vandebrouck, F. (2009). Bilan des travaux et discussions du GT7 : Enseignement des mathématiques aux niveaux postsecondaire et supérieur. Dans A. Kuzniak et M. Sokhna (dir.), *Actes du Colloque EMF 2009*, Université Cheikh Anta Diop, Dakar, Sénégal. Sur CD-Rom, 9 pages.

Barrier, T., Durand-Guerrier, V. et Blossier, T. (2009). Semantic and Game-Theoretical Insight into Argumentation and Proof. Dans F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna et M. de Villiers (dir.), *ICMI Study 19 Conference Proceedings*, vol. 1, pp. 77-82.

Cheng, P. W., Holyoak, K. J., Nisbett, R. E. et Oliver, L. M. (1986). Pragmatic versus Syntactic Approaches to Training Deductive Reasoning. *Cognitive Psychology*, 18(3), 293–328.

Dieudonné, J. (1987) *Pour l'honneur de l'esprit humain,* Paris : Hachette éditions.

Durand-Guerrier, V. (2008). What can we learn from logical analysis of mathematical tasks from a semantic perspective ? *Proposition de contribution au ICME-11, TSG 34.*

Durand-Guerrier, V. et Arsac, G. (2003). Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23(3), 295–342.

Durand-Guerrier, V., Barrier, T., Chellougui, F. et Kouki, R. (2012). An insight on university mathematics teaching practices about proofs involving multiple quantifiers. Corée : Affiche présentée à ICME-12.

Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. S. et Tanguay, D. (2012). Examining the Role of Logic in Teaching Proof. Dans H. Gina et M. de Villiers (dir.), *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study* (pp. 369–389). Springer.

Durand-Guerrier, V., et Njomgang Ngansop, J. (2009). Questions de logique et de langage à la transition secondaire-supérieur. L'exemple de la négation. Dans *EMF 2009 – Groupe de travail 7 Enseignement des mathématiques aux niveaux postsecondaire et supérieur* (Vol. 1, pp. 1033–1047).

Epp, S. (1997). Logic and Discrete Mathematics in the Schools. Dans D. Franzblau et J. Rosenstein (dir.), *American Discrete Mathematics in the Schools* (pp. 75–84). Providence: American Mathematical Society.

Epp, S. (2003). The Role of Logic in Teaching Proof. *The American Mathematical Monthly, 110*(10), 886–899.

Epp, S. (2009). Proof issues with existential quantification. Dans F. L. Lin, F. J. Hsieh, G. Hanna, et M. de Villiers (dir.), *ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education, Vol. 1* (pp. 154–159). Taipei, Taiwan: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Fabert, C., et Grenier, D. (2011). Une étude didactique de quelques éléments de raisonnement mathématique et de logique. *Petit X, 87*, 31–52.

Fischbein, E. (1982). Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics, 3*(2), 9–19.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics. An educational Approach* (p. 225). Dordrecht : D. Reidel Publishing Cie.

Goldin, G. (1997). Observing Mathematical Problem Solving through Task-Based Interviews. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, 9*, 45–62.

Hamilton, A. G. (1988). *Logic for Mathematicians* (p. 228). Cambridge University Press.

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of Proof. *For the Learning of Mathematics, 15*(3), 42–49.

Hanna, G., et Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM Mathematics Education, 40*(3), 345–353.

Jaffe, A., et Quinn, F. (1993) "Theoretical mathematics": toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics, *Bulletin of the American Mathematical Society, (N.S.), 29*(1), 1–13.

Knuth, E. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 379–405.

Kuiper, J. J. C. (2004). *Ideas and Explorations : Brouwer's Road to Intuitionism*. Université d'Utrecht.

Leron, U., Hazzan, O. et Zazkis, R. (1995). Learning group isomorphism: A crossroad of many concepts. *Educational studies in mathematics*, *29*(2), 153-174.

Marion, M. et Voizard, A. (1998). *Frege - Logique et Philosophie.* L'Harmatta.

Merri, M. et Pichat, M. (2007). *Psychologie de l'éducation: L'école, Volume 1* (p. 255). Editions Bréal.

Poincaré, H. (1905). *La valeur de la science*. (Flammarion, Ed.). Paris.

Rav, Y. (1999). Why Do We Prove Theorems? *Philosophia Mathematica*, *7*(1), 5–41.

Schmidt, S. (1994). *Passage de l'arithmétique à l'algèbre et inversement de l'algèbre à l'arithmétique, chez les futurs enseignants dans un contexte de résolution de problèmes.* Université du Québec à Montréal.

Selden, A. et Selden, J. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics*, *29*(2), 123–151.

Selden, A. et Selden, J. (1999). The role of logic in the validation of mathematical proofs. *Technical Report*. Department of mathematics, Tennessee Technological University.

Tanguay, D. (2010). *La géométrie : au carrefours du sensible et de l'intelligible*. Montréal : Édition Bande Didactique, collection (parenthèse).

Tanguay, D. et Grenier, D. (2010). Experimentation and proof in a solid geometry teaching situation. *For the Learning of Mathematics*, *30*(3), 36–42.

Thom, R. (1974). Mathématiques modernes et mathématiques de toujours, suivi de Les mathématiques « modernes », une erreur pédagogique et philosophique ? Dans R. Jaulin (dir.), *Pourquoi la mathématique ?* (pp. 39–88). Paris : Éditions 10-18.

Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *30*(2), 161–177.

Tirosh, D. et Tsamir, P. (2008). Intuition and rigor in mathematics education. Dans M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giarcardi et F. Arzarello (dir.), *The first century of the international Comission on Mathematical Instruction. Reflection and shaping the worls of mathematics education* (pp. 47–61). Rome, Italie.

Van Moer, A. (2007). Logic and Intuition in Mathematics and Mathematical Educatione. Dans K. François et J. P. Van Bendegen (dir.), *Philosophical Dimensions in Mathematics Education* (42nd ed., pp. 159–179). Mathematics Education Library, Springer.

Vergnaud, G. (non daté). Les compétences, Bravo! Mais encore? – Réflexions critiques pour avancer. http://www.pedagopsy.eu/competences_vergnaud.htm : Page consultée le 30 avril 2014.

Vergnaud, G. (1990). La théorie de champs conceptuels. *Recherche En Didactique Des Mathématiques*, *10*(2.3), 197–242.

Vergnaud, G. (2001). Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance. Dans J. Portugais (dir.), *La notion de compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation.* (pp. 1-22). Montréal.

Weber, K. et Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics*, *56*(2-3), 209–234.

Wilder, R. L. (1967). The Role of Intuition. *Science*, *156*(3775), 605–610.