UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

UNE ÉTUDE EXPLORATOIRE SUR L'INFLUENCE DE LA MODÉLISATION À L'AIDE DE NUAGES DE POINTS SUR LE CONCEPT IMAGE DE LA FONCTION

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

PAR

MARIE-OCTOBRE BLANCHARD

FÉVRIER 2013

REMERCIEMENTS

Je me suis inscrite à la maîtrise il y quelques années. J'étais alors loin de me douter de ce qui m'attendait. Trois congés de maternité plus tard et à l'aube d'une quatrième naissance, je dépose enfin mon mémoire. Les raisons et les occasions d'abandonner n'ont pas manqué. Heureusement, j'étais bien entourée.

Merci, tout d'abord, à mon directeur de maîtrise, Stéphane Cyr. S'il a su se montrer patient et compréhensif, il a toujours été honnête et critique envers mon travail. Il m'a accompagnée étroitement tout au long de la rédaction. Toujours disponible et ce, même à partir de l'Afrique. Il ne laissait rien passer. Merci!

Mon mari, Yves Tarrab, a cru en mon projet de maîtrise dès le début et s'est assuré que je n'abandonne pas. Dans le tourbillon du travail à temps plein et des enfants, il m'a libérée plus d'une fois pour ma rédaction en sortant les enfants de la maison. Merci Yves.

Finalement, merci à mon père : mon mentor. Que ce soit pour me corriger, me lire et relire, me critiquer et me féliciter, m'encourager à approfondir ma pensée, me téléphoner régulièrement pour s'assurer que je n'avais pas abandonné, me consoler lorsque je n'en voyais pas la fin, il était présent. Je le remercie d'avoir été honnête et sévère envers ma rédaction et ma pensée. Il disait noir lorsque je disais blanc, il mettait toujours en doute mes analyses, dans le seul but de m'aider à approfondir ma pensée. Autour d'une bouteille de rouge, on pouvait discuter toute une soirée sur les fondements philosophiques d'un article. Merci pour ces soirées mémorables. Certes, ce projet de maîtrise a été pour moi un moyen de prendre une pause pour réfléchir sur ma profession, pour penser à ma pratique d'enseignante, de perfectionner mon écriture, mais il a surtout été un grand moment de rapprochement entre une fille et son père. Mon seul regret c'est de ne pas avoir terminé avant que la maladie n'emporte mon père. Voilà papa, j'ai terminé tel que promis. Merci pour ton héritage : le plaisir d'apprendre et celui de l'effort intellectuel. En ton hommage, je tenterai, à mon tour, de le transmettre à mes enfants.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

RÉSUMÉ

La notion de fonction, de par sa double nature, sa diversité et ses multiples applications, est riche et complexe. Elle est parfois processus et, d'autre fois, objet incontournable dans l'étude de l'algèbre, la théorie des ensembles, la géométrie et le calcul différentiel. En science, elle permet la modélisation et l'analyse de situations réelles et signifiantes. La fonction permet, aussi, de faire le pont entre ces deux domaines d'études. En somme, le rôle de la notion de fonction est essentiel dans la compréhension des mathématiques.

Dans le curriculum scolaire, la notion de fonction occupe une niche importante. Son enseignement couvre plusieurs aspects : variables, covariations, graphiques, équations, dépendances etc. Le ministère de l'Éducation, en 2005, propose quelques changements quant à l'enseignement de la fonction au secondaire. L'introduction à la notion de fonction est dorénavant en première année du deuxième cycle. L'enseignement des fonctions linéaires et affines sera plus formel que dans l'ancien programme du même niveau. Les nuages de points sont proposés comme outil de modélisation et comme finalité à l'enseignement de la droite. Un nuage de points est créé à partir d'une table de valeurs issue de l'observation d'un phénomène, puis une droite est tracée à des fins de modélisation du phénomène. La table de valeurs et le nuage de points correspondant constituent en soi un système de représentations appartenant à l'observable qui vient se greffer à celui plus connu des fonctions : droites, tables de valeurs, équations... Le passage de l'un à l'autre des systèmes de registres de représentations se fait par la droite et dans un sens seulement. Il est impossible à partir d'une droite qui modélise un phénomène de retrouver le nuage de points correspondant. Est-ce que l'ajout de ce nouveau système de registres emprunté aux statistiques permettra une compréhension plus approfondie de cette notion ou sera-t-il source d'obstacles ? Quelle conception de la fonction, ce type de modélisation favorisera-t-il ? Cette étude exploratoire élaborée à partir de la pratique d'un enseignant de troisième secondaire, permet de voir quels sont les impacts d'une approche didactique basée sur les nuages de points et la modélisation dans la construction du concept de fonction chez l'étudiant.

Mots clés : modélisation, fonction, nuage de points, concept image.

CHAPITRE I

PROBLÈME DE RECHERCHE

1.1 Introduction

La modélisation occupe une place importante dans la recherche en didactique de la fonction. C'est donc, sans surprise, que le Ministère se tourne vers cette approche, dans le renouveau pédagogique, comme contexte d'enseignement au concept de fonction. La littérature didactique nous éclairant peu sur l'utilisation des nuages de points pour modéliser, malgré l'importance de la notion de fonction dans nos programmes scolaires québécois et toutes les difficultés inhérentes au concept de fonction, nous sommes en droit de nous demander si l'utilisation des nuages de points contribue à l'apprentissage de ce concept. Il nous semble important d'évaluer les effets des changements proposés dans les apprentissages. Nous ne mettons pas en doute la pertinence de l'enseignement de la modélisation, mais bien le type de modélisation proposé par le Ministère de l'Éducation et les objectifs sous-jacents à son enseignement.

Nous questionnons d'autant plus ce choix didactique, sachant que la notion de fonction est centrale et complexe et intiment liée à la modélisation. C'est pourquoi, dans un premier temps, nous proposons de faire toute la lumière sur la complexité de cette notion en cernant sa nature, ses fondements épistémologiques, les difficultés inhérentes, les obstacles et les conceptions. Dans un deuxième temps, nous tentons de tirer de la littérature en didactique les implications possibles de la modélisation à l'aide de nuages de points. Le vide didactique sur le sujet implique quelques détours. Nous proposons une revue de la littérature des concepts associés à la modélisation à l'aide de nuages de points : les représentations sémiotiques impliquées dans ce type de modélisation et la modélisation en soi. Finalement, notre questionnement de départ, quant à l'influence possible de la modélisation à l'aide de nuages de points sur le concept image de fonction, prend racine dans ce survol théorique du concept de fonction et de la modélisation présenté dans notre problématique et se raffinera et se complexifiera avec les données qui s'ajouteront avec nos outils de collectes de données.

1.2 Problématique.

1.2.1 Le concept de fonction dans le programme du ministère d'hier à aujourd'hui

Le contenu du programme de formation spécifique à la notion de fonction a évolué dans les dernières décennies. Afin d'évaluer les apports possibles de l'ajout au programme de la modélisation à l'aide de nuages de points, nous traçons, ici, l'historique de l'évolution de l'enseignement du concept de fonction à travers les programmes québécois. Avant 1993, le programme de mathématique du secondaire proposait un enseignement de la fonction largement influencé par la théorie des ensembles. La définition moderne de fonction était mise de l'avant : « une fonction f est une loi d'association entre deux ensembles tels qu'à tout élément x du premier ensemble, correspond un et un seul élément f (x) du second ». Cette dernière se distinguait de la définition classique de fonction donnée en termes de variations, à savoir qu'on appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette valeur variable et de constantes[1]. De la définition dynamique, on passait à la définition statique de fonction.

Le ministère de l'Éducation, en 1993, a choisi de mettre l'accent sur les modes de représentations et les transferts d'un mode à l'autre : changement qui persiste dans la réforme en vigueur dans nos écoles secondaires. De plus, le ministère décide d'évacuer la théorie des ensembles du programme des mathématiques. Par contre, quelques vestiges subsistent toujours puisque des représentations et des écritures liées à la théorie des ensembles sont encore présentes dans le programme de formation et les manuels scolaires. Dans certains manuels scolaires, on a maintenu les définitions à saveur ensembliste (Jacques, 2004) Déconnectées de leur théorie ad hoc, ces dernières sont maintenant sources de conflits épistémologiques. Ce conflit persiste dans la réforme présentement mise en place dans nos écoles secondaires. Quoique déjà entamée implicitement au secondaire III par l'étude des

---

Ministère de l'Éducation du Québec. 1995. *Programme d'études, enseignement secondaire, Mathématique 416. Gouvernement du Québec.*[1]

relations, celle des fonctions commençait officiellement au secondaire IV dans le cadre des mathématiques enrichies 436 par les équations du premier et du second degré. On étudie leurs différentes propriétés, à savoir : domaine, image, variation, extremum et leur signe. Au secondaire V, on en poursuit l'étude par les fonctions polynomiales, exponentielles, logarithmiques et trigonométriques.

La réforme, mise en place en 2005 dans nos écoles secondaires, propose une nouvelle séquence d'enseignement de la fonction, à savoir l'étude du concept de fonction en première année du deuxième cycle. Le contenu reste sensiblement le même à quelques termes près. Anciennement, l'étude des fonctions polynomiales de degré 0 et 1, se faisait à l'enseigne d'une autre terminologie. On préférait relation partielle et directe à fonction affine et linéaire, on parlait de « relations » et jamais de « fonctions ». Il n'y avait pas d'ordonnée à l'origine, mais bien une valeur initiale. Comme si les difficultés liées à la fonction provenaient du vocabulaire et non des concepts qu'ils définissent. Le vocabulaire lié à la fonction est maintenant rétabli dès la troisième secondaire en y ajoutant le concept de réciproque qui, avant, ne s'enseignait qu'au programme enrichi du cinquième secondaire. Le programme souligne que la notion de réciproque permet à l'élève de dissocier une fonction d'une relation.

> L'algèbre offre, pour sa part, un outil de généralisation qui permet, à partir de l'observation de régularités, de représenter des liens de dépendance entre des quantités. Le concept de réciproque permet de distinguer, entre autres, les concepts de relation et de fonction. L'interprétation et la représentation d'une situation conduisent parfois à la production de modèles réciproques selon le choix de la variable indépendante. (MELS, 2003 p.56)

On initie, maintenant, les élèves dès la 1ière année du 2ième cycle à la description des propriétés d'une fonction : domaine, image, variation, extremum, signe et coordonnées à l'origine pour terminer avec les nuages de points, interpolation et extrapolation.

> L'élève est initié à la description des propriétés d'une fonction : domaine, image, croissance, décroissance, extrémums, signe et coordonnées à l'origine. Il les dégage de façon non formelle, et ce, toujours en relation avec le contexte. La recherche de la règle qui traduit une situation pouvant être transposée par une fonction polynomiale de degré 0 ou 1 (fonction affine) ou rationnelle peut se faire, selon le cas, à partir d'un couple de valeurs et du taux de variation ou à partir de deux couples de valeurs. Cette

> règle est dégagée directement du contexte, d'une table de valeurs, d'un graphique ou d'une autre règle. (MELS 2003, p.55)
>
> L'étude des fonctions constitue un aspect important du processus de modélisation. La représentation graphique d'une expérimentation amène l'élève à constater que les données recueillies ne forment pas toujours une courbe qui correspond exactement à un modèle mathématique, en raison notamment d'erreurs de manipulation ou de mesure ou encore en raison du degré de précision de l'instrument utilisé. Lors d'expérimentations se rapportant à la fonction polynomiale de degré 1 ou rationnelle, il associe la courbe la mieux ajustée au nuage de points obtenu et effectue des interpolations ou des extrapolations. (MELS 2003, p. 56)

Le programme de mathématique se divise en trois séquences à la $2^{\text{ième}}$ année du $2^{\text{ième}}$ cycle: une séquence culture, société et technique, une séquence technico-sciences et une séquence sciences naturelles. Dans la séquence culture, société et technique, l'étude du concept de fonction se termine à la deuxième année du cycle avec les fonctions réelles : polynomiale de degré inférieur à trois, exponentielle, périodique, en escalier, définie par parties.

De toute évidence, cette séquence présente le même contenu que l'ancien programme régulier de mathématique 416 avec l'ajout de la réciproque et l'utilisation du vocabulaire lié à la fonction. Les programmes de la séquence technico-sciences et de la séquence sciences naturelles s'étalent sur les deux dernières années du $2^{\text{ième}}$ cycle. Ils ne diffèrent pas, en termes de contenu, des anciens programmes de mathématique 426-436 soit l'étude des différentes fonctions (exponentielle, sinusoïdale et rationnelle), des fonctions réciproques, des effets des paramètres et celle des opérations sur les fonctions.

La modélisation d'une situation réelle demeure l'utilisation la plus usuelle de la fonction. Or, un ajout important dans le nouveau programme est celui du processus de modélisation à l'aide de nuages de points en première année du deuxième cycle. Le programme de formation de l'école québécoise souligne que « La représentation graphique d'une expérimentation amène l'élève à constater que les données recueillies ne forment pas toujours une courbe qui corresponde exactement à un modèle mathématique… » et « Lors d'expérimentations se rapportant à la fonction polynomiale de degré 1 ou rationnelle, il associe la courbe la mieux ajustée au nuage de points obtenu et effectue des interpolations et des extrapolations. » En somme, l'élève doit être capable de « coller » la fonction la plus adéquate à un nuage de points. Puisque le programme propose la modélisation à l'aide de fonctions polynomiales de degré 0 ou 1 et rationnelle, nous supposons que l'enseignement des fonctions précède celui de la modélisation.

Ainsi le programme de formation de l'école québécoise prescrit la modélisation à l'aide de nuage de points comme finalité à l'enseignement de la fonction. Or, aucune étude dans la littérature didactique ne fait mention de ce type de modélisation comme contexte pertinent au développement du concept de fonction et aucune ne mentionne que la modélisation devrait être une finalité en soi. En effet, « [...] l'étude des fonctions constitue un aspect important du processus de modélisation.» (Ministrère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, 2003, p.56), mais historiquement l'un précède l'autre. O'Callaghan, (1998) souligne que « [...] débuter par la modélisation coïncide avec le développement historique de cette notion. » Nous nous questionnons sur la modélisation à l'aide de nuages de points comme contexte au développement du concept de fonction. L'épistémologie historique permet de voir la progression, les obstacles et les mutations d'un concept. Elle nous renseigne sur les passages obligés, les difficultés incontournables et des liens possibles avec les autres disciplines. L'apprentissage du concept de fonction pourrait en suivre l'évolution historique. En somme, en suivant une perspective historique, la fonction devrait être introduite par un type de modélisation qui permet l'étude des variations en tandem des grandeurs étudiées et la modélisation, selon cette perspective, ne devrait pas être une finalité.

1.2.2 Le concept de fonction : une notion complexe

C'est non seulement un cliché d'affirmer que la notion de fonction, de par sa nature abstraite, est difficilement accessible, mais réducteur de sa problématique. L'étude du concept de fonction dépasse largement l'apprentissage d'une définition puisqu'il est impossible d'en saisir l'essence et sa totalité (Sfard, 1992). L'appréhension de la fonction passe par la coordination de ses représentations sémiotiques (de ses graphiques, de ses tables) et, également, par une compréhension approfondie de la relation de dépendance entre les variables et le développement du raisonnement covariationel de celles-ci. Autant d'aspects de la notion de fonction et de son apprentissage qui nous permettent, sans aucun doute, d'affirmer que la fonction est une notion complexe.

1.2.2.1 Plusieurs définitions, un même concept

L'histoire nous informe sur l'origine, la genèse et la nature du concept de fonction. Or, la fonction a largement évolué depuis Descartes, Euler, Leibniz, Jean Bernouillie et leurs contemporains, qui prônaient une conception dynamique de la fonction en s'intéressant davantage aux changements des quantités observées plutôt qu'à la correspondance entre des valeurs prises par la fonction. Par exemple, Euler disait qu'une quantité est fonction d'une autre quantité si tout changement de celle-ci provoque un changement de cette quantité. L'histoire des mathématiques nous indique que c'est l'idée de dépendance qui fonde les concepts de fonction et de variable plutôt que celle de l'unicité de l'image et de la correspondance entre les valeurs.

Les définitions ensemblistes, apparues ultérieurement, mettent l'emphase sur quelques données, souvent illustrées par un diagramme sagittal. Du coup, l'ensemble des données n'est pas nécessairement considéré. L'aspect statique, ponctuel et discret de cette définition est évident puisqu'elle ne traite pas de la variation des quantités, mais bien de la correspondance entre les valeurs. La définition ensembliste favorise la discrétion et peut difficilement apporter une vision dynamique de la fonction. (Janvier, 1983) Le développement historique de la fonction démontre que l'unicité de l'image n'étant pas une nécessité, les mathématiciens et les physiciens pouvaient opérer et modéliser sans se soucier de celle-ci. Cet ajout est survenu plus tard afin de faciliter certains calculs (Even, 1993). La définition ensembliste modélisée, la plupart du temps par des diagrammes sagittaux, est souvent taxée par les chercheurs d'abstraite et dénuée de sens pour les élèves du secondaire (Selden et Selden, 1992 ; Sfard, 1992; Vinner, 1983). Plusieurs recherches ont d'ailleurs démontré que les élèves l'ignorent tout simplement et travaillent avec une définition plus proche de leur intuition et de leurs expériences de classe (Sfard, 1992 ; Vinner, 1983).

En somme, en travaillant avec la définition moderne de fonction, nous demandons aux élèves de faire un saut cognitif important. Nous leur proposons, d'une part, une définition qui présente la fonction comme un objet statique et discret et, d'autre part, nous leur donnons des problèmes à résoudre de nature plus dynamique nécessitant une vision plus globale et continue de la fonction (Fikrat, 1994). Comme nous le soulignerons plus tard, l'aspect dynamique et global de la fonction est à privilégier au départ. Il serait donc préférable de suivre le cours de l'histoire de la fonction et de privilégier une définition basée sur la dépendance entre variables et leurs variations.

1.2.2.2 La double nature de la fonction : objet et processus

La complexité de la notion de fonction découle aussi du fait que cette notion peut être conceptualisée en termes d'objets abstraits ou en termes de processus. Par exemple, on peut « voir » la fonction comme un ensemble de coordonnées ou l'aborder à l'enseigne de son opérationnalité. Considérer une entité mathématique en tant qu'objet implique la capacité de la « voir » comme un tout, en d'autres termes, comme une structure statique (conception structurale). Cela signifie qu'on peut manipuler cette entité dans sa globalité et en ignorer les détails. À l'opposé, percevoir une notion mathématique comme un processus implique que celle-ci ne peut exister que dans une séquence d'actions. La conception opérationnelle (processus) est dynamique, séquentielle et détaillée.

De prime abord, exclusives et incompatibles, ces deux conceptions sont, en fait, complémentaires (Sfard, 1992). L'habileté à « voir » une fonction comme un objet et comme un processus est indispensable à la compréhension profonde de ce concept. Par exemple, un graphique est souvent perçu comme un tout et abordé comme un objet. Pourtant, une équation peut être saisie comme une séquence opérationnelle ou un tout que l'on peut effectuer avec d'autres fonctions ou nombres.

Sfard (1992) affirme que les objets mathématiques ne sont visibles que par « les yeux de l'esprit ». Être capable de « voir » le concept de fonction est un élément important de sa compréhension. Nous croyons que l'habileté à « voir » le concept sous sa double nature, c'est-à-dire comme objet et processus, est nécessaire à la compréhension de la fonction. Selon Sfard (1992) également, les connaissances procédurales doivent précéder les connaissances objets. Le passage de la conception processus à la conception objet de la fonction exige, de la part de l'apprenant, un saut cognitif important. Le changement de paradigme est un processus complexe. De plus, historiquement et, en regard de la construction de la connaissance individuelle, on constate que les connaissances procédurales non seulement précèdent les connaissances objets mais doivent les précéder. Les objets mathématiques sont des produits de procédures mathématiques. Il faut donc, à un deuxième niveau, être capable d'opérer sur ces objets indépendamment des processus sous-jacents à ceux-ci. Un étudiant ayant une conception procédurale aura de la difficulté avec des tâches qui demandent une conception globale de la fonction. Les étudiants entrant au collégial, en calcul intégral, devraient déjà posséder cette conception globale de la fonction. Afin de dériver et d'intégrer, il est nécessaire de traiter la fonction en tant qu'objet. De la même façon, un étudiant possédant uniquement une conception objet aura de la difficulté avec une tâche nécessitant une perception procédurale de la fonction.

Par exemple, le raisonnement lié à la covariation nécessite une conception procédurale de la fonction afin de comprendre l'évolution des deux variables et de la nature de leur relation (Carlson et al., 2002). Or, l'habileté à coordonner deux variables variant en tandem est essentielle pour l'interprétation de modèles et, cela va de soi, pour la compréhension du concept de fonction. Pour cette raison, nous croyons que la modélisation est un contexte favorable à l'enseignement de la fonction. La covariation sera étudiée plus à fond ci-après, puisqu'elle est au centre même de la compréhension du concept de fonction.

1.2.2.3 Les différentes représentations de la fonction

L'appréhension du concept de la fonction s'avère d'autant plus complexe qu'on ne peut le saisir dans une seule représentation sémiotique. En effet, connaître et comprendre le graphique d'une fonction donnée ne nous permettent pas de prétendre « posséder » la notion de fonction dans sa globalité. Pour développer la capacité de « voir » le concept de fonction, on doit recourir à différentes représentations. Il existe plusieurs modes de représentations de la fonction : graphiques, tables de valeurs, équations et différents types d'exercices qui peuvent aider à cerner la notion de fonction. Par contre, lorsque nous travaillons le passage d'une forme à l'autre, des liens se créent et certaines caractéristiques émergent. Selon Duval (1993), l'acquisition d'un concept mathématique passe par la coordination des différents registres de représentation de ce concept. Plus l'élève sera exposé à des exemples variés de ce qu'est et n'est pas une fonction, meilleure en sera sa conception. Chaque représentation de la fonction peut être une source importante de difficultés. Le passage d'une représentation à l'autre augmente nécessairement le niveau de difficulté. Étant donné que la modélisation à l'aide de nuage de points nécessite des changements de registres, dans un chapitre ultérieur, nous développerons davantage le cadre théorique de Duval (1993) portant sur les changements de registres.

1.2.2.4 Conclusion : La fonction, une notion complexe

La complexité de la notion de fonction n'est pas qu'une conséquence de sa nature abstraite. Historiquement la fonction est passée d'une relation dynamique de covariation entre deux grandeurs à une correspondance entre valeurs prises et dont l'unicité de l'image est incontournable pour la définir. En classe, le passage d'une définition à l'autre sans tabler sur leur distinction est certainement à l'origine de quelques quiproquos didactiques. À cela, s'ajoutent les différentes conceptions possibles de la fonction. En effet, selon Sfard (1991), la fonction peut être « vue » comme un objet ou une procédure. Finalement, afin de « voir » la notion de fonction, il est nécessaire de passer par ses différentes représentations sémiotiques, ce qui ajoute à la complexité de son appréhension. Les représentations sont souvent confondues avec la notion elle-même. Pour éviter ce piège, il importe de varier les registres de représentations et la coordination des différents registres nécessaires à l'appréhension de l'objet conceptuel : tâche complexe, évidemment, qui ajoute aux obstacles pour atteindre un concept image de la fonction le plus près possible du concept définition de la fonction.

L'appréhension de la fonction est un objectif didactiquement accessible, toutefois, sous certaines conditions à savoir un traitement dynamique et une vision procédurale de la fonction dès les premières démarches. La modélisation en soi est un contexte riche et pertinent pour ce faire. Cependant, faut-il encore faire la preuve que la modélisation, plus spécifiquement à l'aide de nuages de points, est un terreau fertile pour l'émergence d'une conception de la fonction dynamique et globale et pour une vision plus vaste de la fonction.

1.2.3 La modélisation

La modélisation est l'une des utilisations les plus fréquentes de la fonction. La modélisation, selon O'Callaghan (1998), consiste à transposer, en un système de représentations de la fonction, une situation problème ou un phénomène physique. C'est un processus d'abstraction d'où naît un modèle : une version idéale de la réalité. À partir d'un phénomène observable, on déduit des relations entre les grandeurs. On obtient un modèle qui s'exprime en représentations sémiotiques : tableaux, équations et graphiques. Le modèle obtenu n'est ni la réalité, ni le concept en soi. En contrepartie, à partir d'un modèle, il est possible d'interpréter un phénomène observable.

En contexte scolaire, deux types de modélisation peuvent être proposés. On peut cueillir des données dans une table de valeurs lors d'une expérimentation mettant en jeu deux grandeurs et transposer point par point les couples obtenus dans un graphique. Dans ce cas, on s'intéresse à des valeurs précises du phénomène observé. Il est aussi possible d'observer la variation d'une variable par rapport à l'autre et d'en tracer un graphique sans avoir nécessairement de valeurs numériques. Cette dernière approche est celle que plusieurs préconisent dans la littérature didactique des mathématiques entre autres : Janvier (1983), Carlson et al. (2002), Cabana (1996), Hitt et Morasse (2009) et Passaro (2006) et met en jeu le raisonnement covariationnel essentiel au développement du concept de fonction.

1.2.3.1 La modélisation : un contexte pertinent au développement du raisonnement covariationnel

Le raisonnement *covariationnel* est essentiel au développement du concept de fonction (Carlson et al., 2002). Ce type de raisonnement réfère à l'activité cognitive impliquée dans la coordination de deux quantités variables lorsque nous observons la façon dont elles changent l'une par rapport à l'autre. Carlson et al., 2002 affirment que la modélisation étant une application courante du concept de fonction, cette approche devrait être préconisée comme contexte d'enseignement de la fonction d'autant qu'elle est plus naturelle « [...] puisque, dans la modélisation de phénomènes, ce sont les changements qui sont observés et étudiés. » (Smith, 2003). La modélisation doit permettre l'étude du

« comment » les variables changent afin d'enrichir le concept image de fonction. Le concept image est le résultat de l'expérience avec le concept de fonction. Il se construit graduellement avec la variété et la multiplicité des exemples et non-exemples de fonctions rencontrés par l'élève tout au long de son apprentissage (Vinner,1983).

Aborder le concept de fonction à l'enseigne du raisonnement covariationnel est récent dans la recherche en didactique des mathématiques. Prenant racine dans les éléments théoriques développés par Sfard (1992) et Thompson (1994), la conception procédurale versus la conception objet de la fonction et l'approche dynamique de l'enseignement de la fonction basée sur des tâches favorisant le développement d'un raisonnement covariationel sont en plein essor. Carlson et al. (2002), Hitt et Morasse (2009) et Passaro (2006), entre autres, s'intéressent à cette approche.

Carlson et al. (2002) proposent un cadre théorique décrivant cinq actions mentales observées chez des étudiants qui employaient des raisonnements covariationnels lors de tâches reliées à l'interprétation de graphiques et de leurs constructions dans un contexte de fonction dynamique. Ces actions mentales seront décrites ultérieurement dans le cadre théorique. Selon Carlson et al. (2002), l'appréhension du concept de fonction passe nécessairement par le développement du raisonnement covariationel. Ce cadre théorique qui a inspiré un mémoire (Passaro, 2006) et des projets de recherche (Hitt et Morasse, 2009) sera ultérieurement développé dans la section portant sur les éléments théoriques de cette recherche. Tout comme Carlson et al. (2002), ces derniers croient que la modélisation est un contexte favorable à l'épanouissement du raisonnement covariationnel et, par le fait même, à celui du concept de fonction. Ils soulignent que la modélisation ne peut se faire sans les représentations sémiotiques institutionnelles et, ajoutent-ils, les représentations spontanées. Selon eux, se restreindre aux représentations institutionnelles limite la créativité et la réflexion de l'élève. Le fait de ne pas imposer de mode de représentation laisse libre cours à la réflexion et à l'émergence du raisonnement covariationnel qui, autrement, est souvent entravée par des difficultés et de fausses conceptions intrinsèques aux modes de représentation. Effectivement, en imposant des modes de représentation, les élèves cherchent davantage à se rappeler les procédures s'y rattachant qu'à comprendre la tâche à faire et analyser les grandeurs en jeu. Leurs recherches démontrent qu'il est possible de proposer des tâches qui permettent une évolution du concept de covariation et, par le fait même, une évolution de leur propre concept image de la fonction. À la lumière de ces recherches, nous nous interrogeons sur le choix du ministère de l'Éducation de prendre la modélisation à l'aide de nuages de points comme contexte et finalité à l'enseignement de la fonction. Est-ce un contexte assez riche et suffisant pour assurer le développement du raisonnement covariationnel préalable à l'appréhension du concept de fonction ? Permet-il l'émergence de représentations diversifiées, voire spontanées de modèles ?

À titre d'analyse, à priori, pour répondre à ces questions, il est nécessaire de faire une analyse conceptuelle de la modélisation à l'aide de nuage de points. Cette dernière étant quasi-absente de la littérature, son analyse conceptuelle est brève et certainement non exhaustive. D'ailleurs, ce « blanc didactique » est à l'origine de notre intérêt pour cette recherche et justifie son caractère exploratoire.

1.2.3.2 Les implications didactiques de la modélisation à l'aide de nuages de points

La modélisation à l'aide de nuages de points implique un passage entre deux systèmes de registres de représentations sémiotiques c'est-à-dire du système spécifique aux nuages de points : nuage de points, droite de régression et table de valeurs expérimentales et celui spécifique à la notion de fonction : graphique, algébrique, verbale et numérique. Ce passage entre ces deux systèmes composés chacun de leurs registres propres est représenté par le schéma ci-dessous. Chaque système de représentations se construit en vase clos. Les données d'un phénomène observable sont notées dans une table de valeurs, puis transposées dans un graphique. Une courbe, ajustée au nuage de points, est tracée. Le nuage de points et la courbe modélisant le phénomène se retrouvent alors, dans un même graphique. C'est à partir de cette courbe que se fait le passage au système de registres de représentations sémiotiques spécifiques à la notion de fonction.

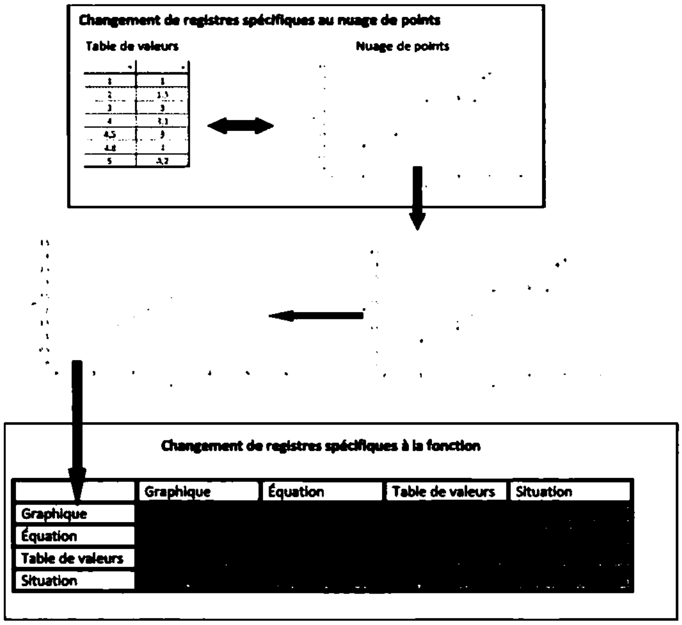


Figure 1.1 Deux systèmes de registres

Le chemin inverse est impossible. À partir d'une courbe qui modélise un phénomène, il est impossible de retrouver le nuage de points correspondant. C'est un retour à la case de départ : le nuage de points est alors oublié et seule, l'étude de la droite importe. C'est elle qui est la source des solutions: elle permet d'extrapoler ou d'interpoler. Le processus de modélisation peut être alors perçu comme un passage obligé mais sans intérêt. Ce faisant, il se peut que l'essentiel soit oublié à savoir le passage entre le phénomène observable et le modèle, la possibilité avec les nuages de points d'utiliser des situations concrètes et signifiantes, la facilité de donner des exemples de situations non fonctionnelles, la capacité de discuter de la relation d'indépendance entre les deux variables comme celle d'intégrer l'enseignement des statistiques à celui des fonctions.

Selon Duval (1993), la compréhension d'un concept passe par la coordination de différents registres de représentations. En effet, le concept de fonction étant complexe et abstrait, une seule représentation ne peut contenir toutes les propriétés s'y rattachant. Il faut donc développer des contextes de travail favorisant le passage entre différents modes de représentation afin d'acquérir une conceptualisation solide du concept. Duval nomme ce passage : conversion. C'est en passant d'une représentation à l'autre que les unités significatives se dégagent et renforcent le concept de fonction. Par contre, pour ce faire, il faut éviter que la conversion soit « algorithmisée » et ne devienne du codage au sens de Duval. Ce qui est, à notre avis le cas, dans la modélisation à l'aide de nuages de points. De plus, il s'agit d'un passage entre deux registres de représentations ; deux systèmes traités en vase clos. Donc, il ne s'agit pas de simple ajout de représentations sémiotiques, mais bien de l'ajout d'un système complet possédant ses propres règles symbolisant une autre facette de la situation qui est modélisée.

L'ajout de représentations peut sembler, à première vue, un enrichissement pour l'enseignement de la fonction. Or, le passage du registre spécifique à la modélisation à l'aide de nuages de points au registre spécifique du modèle se fait uniquement à l'aide de la courbe de régression et ce passage est à sens unique. De plus, la cohabitation, dans un même plan, de deux représentations : le nuage de points et la courbe peut porter à confusion et générer certaines difficultés. Comment coordonner le tout afin que le concept de fonction émerge ? Le coût en vaut-il la chandelle ? Reste à savoir si les recommandations du programme sur le sujet permettent cette émergence.

1.2.3.3 La modélisation et les nuages de points : une alliance naturelle ?

La modélisation est un incontournable dans l'enseignement de la fonction. Par contre, nous avons des réserves quant à l'utilisation des nuages de points comme représentation sémiotique à la modélisation lors de l'introduction de la fonction car elle peut entraîner de fausses conceptions et aggraver des difficultés déjà inhérentes à l'apprentissage de la fonction. Nous émettons l'hypothèse que ce choix didactique pourrait favoriser certains aspects et en défavoriser d'autres : le discret à celui du continu, le ponctuel à celui du global, le statique à celui de dynamique.

1.2.3.4 Les nuages de points et la table de valeurs : une discrétisation de la fonction ?

Au deuxième cycle, les nuages de points sont tracés à partir de tables de valeurs construites lors d'expérimentations. Les données recueillies dans une table de valeurs, lors d'une expérimentation, représentent un échantillon des couples possibles de deux variables ce qui peut entraîner une conception discrète de la fonction. Selon Coppé, Dorier et Yavuz, souvent, la table de valeurs est une représentation partielle, une discrétisation d'un phénomène continu et souvent infini. L'usage de tables de valeurs peut sembler propre à renforcer, chez les élèves, une conception discrète de la fonction.

La table de valeurs n'étant pas exhaustive, elle peut être associée à plusieurs fonctions. Moins elle contient de couples, plus il y a de fonctions appartenant à une famille de fonctions étudiées qui peuvent les satisfaire. Par exemple, par deux points, il peut passer une droite, une parabole, une valeur absolue alors que par quatre points le nombre de possibilités accessible par des élèves du secondaire diminue. En somme, le nuage de points qui est le résultat du passage de la table de valeurs à celui du graphique, peut laisser un flou sur les valeurs absentes et sur la fonction permettant le passage de x à f(x). Selon Coppé, Dorier et Yavuz (2007), le passage numérique-graphique est important, mais il ne faut pas s'enfermer dans ce duo. À lui seul, il ne suffit pas à la compréhension du concept de fonction. D'un point de vue théorique, la recherche de la courbe la mieux ajustée dans toute sa généralité est un sujet inabordable en secondaire trois puisque le nombre de courbes satisfaisant un nuage de points est infini. La table de valeurs est, certes, un registre sémiotique de la fonction dans le contexte de la modélisation à l'aide de nuages de points, mais le problème c'est qu'elle représente plus d'une fonction!! D'où l'importance de ne pas enfermer l'élève dans le duo table de valeurs – graphique. La table de valeurs, à elle seule, encore plus que les autres représentations sémiotiques, ne peut laisser envisager réellement ce qu'est une fonction.

Dans la modélisation à l'aide de nuages de points, la table de valeurs n'est utile que pour tracer le nuage de points qui, lui-même, est un passage obligé pour tracer la droite le modélisant. La table de valeurs et le nuage de points ne sont donc présentés que comme des outils pour tracer la droite Cette tâche répétitive peut développer une conversion naturelle entre la table de valeurs et la droite et, par le fait même, renforcer l'idée qu'une seule courbe est associée à la table de valeurs donnée. Notons, que ce travail algorithmique ne favorise, en aucun temps, un raisonnement conceptuel.

1.2.3.5 La modélisation à l'aide de nuages de points favorise-t-elle une conception statique ou dynamique de la fonction ?

La modélisation à l'aide de nuages de points met l'accent sur le passage de la table de valeurs au graphique, passage favorisant l'aspect statique de la fonction (Coppé, et al.). La tâche de modélisation à l'aide de nuages de points se limite à placer des points dans un plan cartésien et à y « coller » une droite. Selon nous, ce type de modélisation n'exigeant que peu de raisonnement pourrait difficilement amener l'élève à développer une conception de la fonction dans toute son intégralité. Ce modus operandi s'apparente à celui utilisé pour tracer une droite point par point Cette méthode critiquée par plusieurs (Cabana, 1996; Duval 1993, Janvier 1983) est qualifiée de statique.

> « Le point par point encourage un type d'interprétation local et discret du graphique et vient court-circuiter l'idée même de variation. Pour les élèves, le graphique n'est nullement perçu de manière globale et dynamique. Cette technique va être la source de mauvaises interprétations, en regard d'une situation qu'elle cherche à modéliser.» (Cabana, 1996, p.350)

Historiquement, la covariation est à l'origine du concept de fonction. On s'intéressait d'abord aux variations de deux grandeurs et à leurs relations avant l'apparition du concept de fonction chez les mathématiciens. D'ailleurs, les premières définitions de la fonction étaient en termes de relation entre deux grandeurs. Comme nous l'avons souligné dans notre analyse du concept, une vision statique et une vision dynamique de la fonction sont essentielles au développement d'une conception élaborée de la fonction. Les élèves ont de la difficulté face à ces derniers aspects présupposant l'habileté à coordonner deux variables lorsqu'elles changent en tandem, c'est-à-dire à produire un raisonnement covariationnel. La modélisation doit amener à réfléchir sur le « comment » du changement des var iables. L'étude de pattern est un exemple qui le permet. L'étude de ces problèmes est propice à la réflexion sur ce qui change et varie, l'objectif étant de faire ressortir leurs caractéristiques et extrapoler la suite du pattern (Smith, 2003). Ce type de situations est définitivement plus dynamique que ceux proposés par les nuages de points. D'autant plus, qu'il est peu probable que la méthode préconisée par ce type de modélisation, i.e. de « coller » une droite à un nuage, ne favorise le raisonnement covariationel. Cela reste à démontrer…

1.2.3.6 La modélisation à l'aide de nuages de points une vision locale de la fonction ?

L'omniprésence de la table de valeurs dans la modélisation à l'aide de nuages de points, pourrait affecter le concept image de la fonction de l'élève puisque celle-ci met en jeu le caractère local de la fonction. Un regard local de la fonction s'intéresse à un point en particulier et au traitement de son voisinage. Or, ce traitement de la fonction n'est pas nécessaire avant la notion de limite au collégial. Le traitement global de la fonction, quant à lui, porte davantage sur l'appréhension globale de la courbe tracée et de l'analyse de la courbe dans sa globalité. Encore une fois, les deux traitements sont nécessaires, mais l'un doit précéder l'autre. Comme le souligne Cabana (1996), le traitement global et dynamique de la fonction est préférable à une vision statique et locale lors de l'introduction du concept de fonction: « […] Ainsi, l'amélioration de l'enseignement par une approche plus globale. Au fait, nous nous sommes dit qu'il serait peut-être bénéfique pour les élèves s'ils avaient d'abord une vue d'ensemble des graphiques et qu'ensuite ils en fassent une étude détaillée.»

1.2.4 Conclusion

Un nouveau programme de formation est implanté dans nos écoles québécoises depuis septembre 2000 provoquant un certain émoi dans le milieu de l'enseignement. Il propose un changement de paradigme important : une pédagogie centrée sur l'élève plutôt que sur les objectifs à enseigner. Il prétend exprimer ce changement, en mettant l'accent sur le processus d'apprentissage. Ces changements s'inscriraient dans une perspective constructiviste et socioconstructiviste. En effet, le ministère de l'Éducation affirme que : «Beaucoup d'éléments du programme de formation, en particulier ceux qui concernent le développement de compétences et de maîtrise de savoirs complexes, font appel à des pratiques basées sur une conception de l'apprentissage d'inspiration constructiviste. Dans cette perspective, l'apprentissage est considéré comme un processus dont l'élève est le premier artisan.» (MELS, 2003, p. 5)

À ce changement de pédagogie s'ajoute un nouveau découpage des contenus mathématiques à enseigner. Ainsi, le MELS propose de commencer l'étude du concept de fonction en 1^{ière} année du 2^{ième} cycle avec les fonctions linéaires. La modélisation à l'aide de nuages de points est prescrite comme finalité à cet enseignement. Certes, la modélisation est un contexte favorable à l'appréhension de la fonction et est certainement en accord avec les principes pédagogiques mentionnés ci-haut, mais nous questionnons le type de modélisation proposé et le fait qu'elle soit considérée comme une finalité à l'enseignement de la fonction. L'abondance des recherches (Cabana, 1996 ; Carlson et al., 2002 ; Hitt et Morasse, 2009 ; Janvier, 1983 ; Passaro, 2006) favorables à la modélisation mettant en jeu l'étude des variations en tandem des grandeurs et l'absence d'études spécifiques à la modélisation à l'aide de nuages de points soulèvent un questionnement important sur cette proposition ministérielle. D'autant plus qu'il existe un « blanc didactique » concernant la modélisation à l'aide de nuages de points, cette dernière se résumant, souvent, à la transposition de valeurs dans un graphique et à y « coller » une droite. Nous doutons que ce soit un contexte assez riche pour « permettre à l'apprenant d'être l'artisan de ses savoirs. » En effet, réduire la modélisation à une séquence d'étapes bien définies ayant comme seul objectif de tracer une droite permettant d'extrapoler ou d'interpoler, c'est ignorer l'essentiel, soit l'étude de deux grandeurs pour un phénomène donné.

La modélisation à l'aide de nuages de points s'apparente à la méthode pour tracer une droite point par point évacuée des programmes en 1993 et déjà taxée de statique par certains chercheurs (Cabana, 1996 ; Duval, 1988 ; Janvier 1983). En effet, dans les deux cas, il s'agit de transposer des points dans un plan cartésien et de tracer la droite qui, dans le cas du point par point, passe par tous les points et, dans le deuxième cas, la droite qui représente le mieux le nuage de points. Dans les deux cas, le raisonnement covariationnel est absent et inutile à la production du graphique. Cabana (1996) conclut dans le cadre de sa recherche portant sur la possibilité d'aborder la fonction sous l'enseigne de la variation que la méthode du « point par point » favorise une conception locale, statique, discrète et ponctuelle de la fonction. Dans ce contexte, il est improbable qu'il y ait émergence du raisonnement covariationnel. Le raisonnement covariationnel, comme nous l'avons souligné à plusieurs reprises, est essentiel au développement du concept de fonction. Celui-ci prend racine dans un contexte de fonction dynamique. De plus, l'omniprésence de la table des valeurs dans la modélisation à l'aide de nuages de points pourrait contribuer à une vision discrète de la fonction. En effet, la table des valeurs est une représentation partielle, une discrétisation d'un phénomène souvent continu. Certes, afin de développer un concept image riche et juste du concept de fonction, il est nécessaire de le « voir » sous tous ses aspects. Par contre, nous doutons que la conception statique doive précéder la conception dynamique et que la conception discrète doive être favorisée au détriment de celle qui est continue. En plus du raisonnement covariationnel, la coordination de différents registres de représentations est essentielle à la compréhension du concept de fonction. Toutefois, il faut éviter que le passage d'un registre à l'autre soit du « codage » au sens de Duval (1993). Or, la modélisation à l'aide de nuages de points se fait selon une séquence d'étapes bien définies et à sens unique.

Ces divers points de vue sur la modélisation et le concept de fonction, relevés dans la littérature didactique, influencent nécessairement l'appréhension du concept image de la fonction. Le concept image est le résultat de l'expérience avec le concept de fonction. Considérant que la notion de fonction est centrale dans les programmes de formation québécois, qu'elle est complexe et que la modélisation est un contexte favorable à l'introduction du concept de fonction, nous nous interrogeons sur la pertinence du choix didactique du ministère de l'Éducation d'enseigner la modélisation à l'aide de nuages de points comme finalité à l'enseignement des fonctions linéaires. D'autant plus que cette approche pourrait favoriser une vision statique, locale et discrète de la fonction au détriment d'une conception dynamique et globale essentielle à l'émergence du raisonnement covariationnel et prémisse à l'appréhension du concept de fonction. Cette approche pourrait, en somme, réduire la modélisation à un passage algorithmique sans intérêt pour le phénomène étudié en s'enfermant dans le cul-de sac : tables de valeurs-nuages de points–droites. Reste à jauger de la justesse de ces hypothèses issues de notre problématique.

1.2.5 Questions de recherche

L'objectif principal de cette recherche est d'évaluer l'influence de la modélisation à l'aide de nuages de points comme contexte à l'enseignement de la fonction sur le concept image des élèves de la fonction. Il ne s'agit pas d'une étude exhaustive sur le sujet, mais bien d'une étude exploratoire à partir d'un cas particulier : un groupe de 1ère année du 2^{ième} cycle trois ayant le même enseignant. Nous tentons de dégager les influences de l'enseignement de la modélisation à l'aide des nuages de points tel que vu par le manuel et en regard de l'approche préconisée par l'enseignant sur le concept de fonction. Nous espérons que les retombées de cette recherche serviront de points d'appui pour des études plus larges sur le sujet.

1.2.5.1 Question générale de recherche

Comment la modélisation à l'aide de nuages de points comme contexte à l'apprentissage de la fonction influence-t-elle le concept image de fonction chez les élèves ?

1.2.5.2 Questions spécifiques

L'enseignement de la modélisation à l'aide de nuages de points favorise-t-il une conception dynamique et/ou statique, une vision locale et/ou globale, une vision discrète et /ou continue de la droite ?

Quels sont les éléments nécessaires à la compréhension de la fonction sollicités par les exercices portant sur les nuages de points ?

L'enseignant privilégie-t-il une approche dynamique de la fonction ou une approche statique et moderne de la fonction ?

Quels éléments du concept de fonction sont récupérés par l'élève pour modéliser une situation à l'aide d'un nuage de points ?

Quels sont les apports de la modélisation à l'aide de nuages de points au développement du concept image (Vinner) de la fonction chez l'élève ?

CHAPITRE II

CADRE THÉORIQUE

Le renouveau pédagogique implanté dans nos écoles québécoises depuis peu suppose des approches différentes et un nouveau découpage du contenu. Ainsi, les élèves d'aujourd'hui et ceux d'hier ont une expérience différente du concept de fonction. En effet, ils ne rencontreront pas les mêmes exercices et les mêmes tâches, le tout probablement dans un autre ordre et avec des objectifs différents. Par exemple, les élèves du nouveau programme aborderont plus tôt le concept de fonction et modéliseront des situations avec des nuages de points et les droites de régression correspondantes. Ils risquent de développer une autre conception de la notion de fonction que leurs prédécesseurs. Cette définition construite graduellement avec la variété et la multiplicité des exemples et non-exemples de fonctions rencontrés par l'élève tout au long de son apprentissage est au centre des recherches de Vinner (1983). Il la nomme concept image. Le décalage possible entre la définition formelle et le concept image de la fonction utilisé par les élèves pour résoudre une situation problème est une source potentielle de difficultés et de quiproquos didactiques.

Dans le cadre de cette recherche, nous tentons de dégager l'influence de l'enseignement de la modélisation à l'aide de nuages de points sur le concept image de la fonction. Il va de soi que les éléments théoriques présentés par Vinner (1983) éclaireront nos analyses.

La modélisation à l'aide de nuages de points ajoute un autre système de représentations à celui déjà étudié de la fonction. Ce dernier peut enrichir ou créer obstacle à l'appréhension du concept de fonction. Il importe, donc, de faire une étude en termes d'exercices permettant la coordination des différents registres et en termes de variété des représentations sémiotiques utilisées par les exercices ou problèmes du manuel *Intersection* s'imposent. Pour ce faire nous ferons appel à Duval.

2.1 Le concept définition et le concept image de Vinner

Vinner (1983) propose un modèle de compréhension des processus cognitifs en regard du concept image et du concept définition. L'apprentissage de la notion de fonction est utilisé comme contexte d'analyse de ces deux concepts. La distinction entre les deux est primordiale pour l'enseignement des mathématiques. Les deux concepts ne sont pas en opposition mais bien en interaction. Le concept image est l'ensemble des images mentales et des propriétés associées au concept (Vinner, 1983). Le concept image est le résultat de l'expérience avec ce concept. Le concept définition fait, quant à lui, référence à un système de connaissances institutionnelles avec lequel l'apprenant n'est pas nécessairement familier. Dans les apprentissages informels, le concept définition est obsolète alors que dans l'apprentissage formel, le concept définition fait parti du « jeu ». Parfois, le concept définition est trop compliqué et n'aide pas toujours au concept image. Nous croyons que c'est le cas avec la définition de fonction qui, coupée de ses origines épistémologiques, est dénuée de sens pour les élèves. La définition donnée est, souvent, celle liée aux mathématiques modernes. Elle n'aide nullement à comprendre ou accomplir les tâches proposées aux élèves de troisième secondaire. Le concept définition n'aide pas nécessairement à l'appréhension du concept contrairement au concept image. Par exemple, il n'est pas nécessaire de savoir que pour tout x élément de l'ensemble de départ, il existe au plus un seul élément de l'ensemble d'arrivée pour modéliser un phénomène observable. Pourtant, on place souvent l'élève, abruptement, devant le concept définition sans qu'il ait eu l'occasion d'en élaborer lui-même un début d'appropriation. Dans ce cas, le concept définition risque d'être oublié ou déformé et remplacé par un concept image. L'élève est toujours, lui-même, le meilleur agent d'appropriation d'un concept. Peu à peu, de problème en problème et d'exemple en exemple, il complètera cette définition, à prime abord dénuée de sens pour lui, en se construisant sa propre définition : son concept image. Plus les exercices et les problèmes rencontrés seront riches et diversifiés, plus le concept image sera juste. En début d'apprentissage, la définition formelle n'est pas nécessaire à cette construction.

2.1.1 Le concept image et le concept définition : deux cellules distinctes en interaction de la structure cognitive

À chaque concept, sont associées deux cellules dans la structure cognitive : une pour le concept définition et l'autre pour le concept image. Ces deux cellules sont en interaction. D'aucune façon, il est possible d'obliger une structure cognitive à utiliser une cellule plutôt qu'une autre. Un élève qui ne rencontre, lors de son apprentissage de la géométrie, que des hauteurs de triangles situées à l'intérieur du triangle aura un concept image tronqué. Son concept image n'est pas faux, il est incomplet. Selon ce concept image, la hauteur ne peut être qu'une projection orthogonale d'un côté du triangle sur la base de celui-ci et non sur le prolongement de la base. Lorsqu'une définition formelle sera présentée à cet élève d'un exemple de triangle ayant une hauteur située à l'extérieur, trois scénarios seront possibles :

1. Le concept image sera changé afin d'inclure les hauteurs de triangles situées à l'extérieur du triangle.
2. Le concept image ne changera pas. La cellule « concept image » contiendra la définition formelle pour quelque temps pour, finalement, être oubliée ou déformée.
3. Les deux cellules demeurent telles quelles. Lorsque la définition formelle sera demandée, l'élève fera appel à la cellule « concept définition » et, dans d'autres situations, c'est la cellule « concept image» qui sera interpelée.

D'où l'importance de présenter une variété importante d'exercices riches d'exemples pertinents pour l'élève. Un élève peut très bien évoluer et réussir avec un concept image pauvre voir erroné. Il est alors facile d'en faire abstraction. C'est à l'enseignant de définir ses objectifs d'enseignement : faire en sorte que l'élève soit habile à résoudre des problèmes par automatisme, sans comprendre ou enrichir le concept image de l'élève afin qu'il en ait la conception la plus fidèle possible, mais ceci est un autre débat.

2.1.2 Conclusion : Le concept image, un concept en constante évolution

En somme, le concept image est l'ensemble des propriétés et des images mentales associées à un concept. Pour une tâche donnée, seulement une partie du concept image ou définition est sollicitée : il n'est pas nécessaire de faire appel à toutes les propriétés ou images mentales connues pour résoudre un problème. Il est donc impossible de cerner le concept image d'un individu par l'observation d'un seul comportement. En fait, c'est le concept image temporaire qui est observé dans une situation.

Le concept image de l'élève se modifiera tout au long de son apprentissage tout comme le concept définition a évolué au cours de l'histoire. Il est fort à parier que le concept image de la fonction de Lagrange n'avait rien à voir avec celui de ses homologues des temps modernes : Bourkabi-Dirichlet. D'ailleurs, selon Vinner (1983), la définition moderne est à éviter lors de l'introduction de la fonction et inutile avant le CEGEP. Toutefois certains éléments, autres que la définition, sont nécessaires à la compréhension du concept de fonction : la covariation, la relation de dépendance entre deux variables, les représentations etc. Ces aspects devraient être présents tout au long de l'enseignement puisque les éléments qui ne seront pas constamment renforcés seront nécessairement absents du concept image de l'élève ou déformés. Chose dite n'est pas chose sue.

2.2 La covariation et l'appréhension du concept de fonction

Selon Carlson et al. (2002) le raisonnement covariationnel est un des éléments centraux à l'appréhension du concept de fonction. Le raisonnement covariationnel réfère à l'activité cognitive impliquée dans la coordination de deux quantités variables lorsque nous observons la façon dont elles changent l'une par rapport à l'autre. Ce dernier se développe essentiellement lors d'un traitement dynamique de la fonction qu'un contexte de modélisation ne peut que favoriser si la modélisation implique le passage d'une description verbale à un mode de représentation sémiotique. Or, ce n'est pas ce que propose le programme de formation de l'école québécoise. Il propose la modélisation à l'aide de nuages de points. Puisque le raisonnement covariationnel est un incontournable, nous devons en définir sa nature et les moyens de l'observer. Ainsi, nous pourrons, peut-être, vérifier si la modélisation à l'aide de nuages de points est un contexte pertinent et suffisant au développement de ce raisonnement.

Carlson et al. (2002) proposent un cadre théorique décrivant cinq actions mentales observées chez des étudiants qui employaient des raisonnements de covariation lors de tâches reliées à l'interprétation de graphiques et de leur construction dans un contexte de fonction dynamique. L'ordre des actions mentales n'est pas nécessairement séquentiel de MA1 à MA5. et le raisonnement *covariationnel* n'implique pas nécessairement l'ensemble des cinq actions mentales. Cependant, un élève qui démontre une action mentale de niveau 5 fait preuve d'un raisonnement *covariationnel* fécond et capable implicitement de fonctionner au niveau des comportements d'action mentale de niveau trois et quatre.

Tableau 2.1 Tableau de Marilyn Carlson et al. des différentes actions mentales impliquées dans un raisonnement covariationnel.

Action mentale	**Description de l'action mentale**	**Comportements**
MA1	Coordonner les valeurs d'une variable avec les changements de l'autre.	Identification des axes avec des indications verbales des coordonnées des deux variables *indiquant qu'il reconnaît qu'une des variables est dépendante de l'autre.*
MA2	Coordonner la direction de changement d'une variable avec le changement de l'autre.	- Construire une droite graduée. - Verbaliser une prise de conscience du changement de direction de l'output tout en considérant les changements de l'input.
MA3	Coordonner la valeur de changement d'une variable avec le changement de l'autre.	- Construire des lignes sécantes. - Verbaliser une prise de conscience de la valeur de changement de l'output tout en considérant les changements de l'input.
MA4	Coordonner le taux de variation moyen d'une fonction avec l'accroissement uniforme d'un changement dans la variable indépendante. (input)	- Construire des lignes sécantes pour un domaine donné. - Verbaliser une prise de conscience du taux de variation de l'output tout en considérant l'accroissement de l'input.
MA5	Coordonner le taux de variation instantané avec les changements continus de la variable indépendante pour l'ensemble du domaine de la fonction.	- Construire une courbe avec des indications claires de variations covariationnelles. - Verbaliser une prise de conscience du taux de variation instantané pour l'ensemble du domaine de la fonction.

Traduction Stéphane Cyr

2.2.1 Description des cinq actions mentales à partir d'un exemple

Sachant qu'un robinet à débit constant remplit la bouteille ci-dessous, trace la courbe du niveau de l'eau dans celle-ci « selon le temps. »

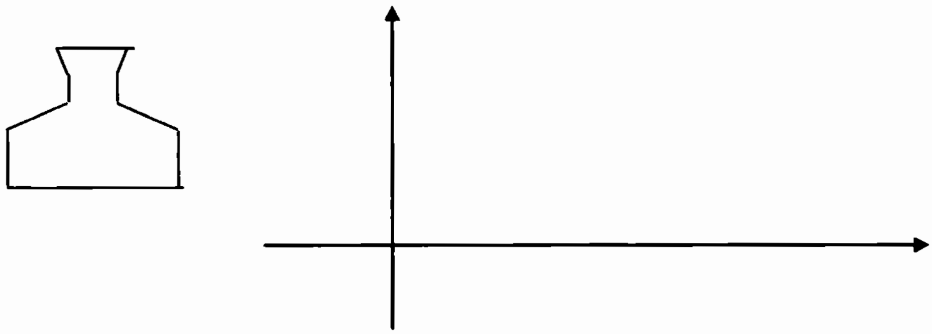


Figure 2.1 Problème type permettant un raisonnement covariationnel

MA1 : L'élève verbalise que le niveau de l'eau change lorsque le temps varie. Sa verbalisation démontre qu'il comprend les variables en jeu.

MA2 : Plus le temps augmente, plus le niveau de l'eau est élevé. La courbe qu'il trace indique qu'il comprend le sens du changement.

MA3 : Pour une marche (un intervalle de temps) donnée correspond une contremarche (niveau d'eau.) Si on change la marche (l'intervalle de temps), la contremarche varie.

MA4 : Il verbalise qu'il y a un changement d'inclinaison de la droite lorsque la bouteille se rétrécit.

MA5 : Ne s'applique pas à ce problème. La variation instantanée concerne les problèmes de niveau collégial.

Il reste maintenant à savoir si ces actions mentales peuvent se retrouver dans la modélisation à l'aide de nuages de points. Est-ce que l'élève peut réfléchir sur les variables, la variation de l'une par rapport à l'autre dans un contexte de modélisation par nuages de points? En somme, le raisonnement covariationnel peut-il émerger de la modélisation à l'aide de nuages de points?

2.3 Les registres de représentations sémiotiques de Duval (1993)

L'enseignement de la fonction passe nécessairement par ses représentations : tables de valeurs, équations, graphiques, description verbale... La modélisation à l'aide de nuages de points ajoute deux représentations : le nuage de points et la table de valeurs. La tâche de l'enseignant sera de guider l'élève afin que ces différents ostensifs aident l'émergence du concept de fonction. Ces derniers peuvent enrichir ou créer obstacle à l'appréhension du concept de fonction. En fait une question s'impose : Dans quelle mesure les élèves comprennent que toutes ces représentations définissent un même et unique objet ? Le cadre théorique proposé par Duval pourra, sans aucun doute, éclairer notre recherche sur ce point.

2.3.1 Les représentations sémiotiques

Les objets mathématiques ne sont pas des objets réels ou physiques. Pour manipuler des concepts mathématiques, il est nécessaire de passer par leurs représentations mentales ou sémiotiques. Selon Duval (1993), les représentations mentales d'un objet abstrait sont des constructions nées dans un contexte précis et à des fins particulières. Elles peuvent s'avérer erronées et source d'obstacles à de nouvelles acquisitions. Hors de leur contexte d'apprentissage, elles peuvent s'avérer obsolètes. Les représentations sémiotiques, quant à elles, sont définies comme des productions constituées de signes à savoir, entre autres, des mots, des images, des symboles, des chiffres et des équations. Un objet mathématique a plusieurs représentations sémiotiques. Les fonctions, par exemple, sont souvent représentées par des graphiques, des équations, des diagrammes sagittaux et des tables de valeurs. L'objet mathématique « in se » est souvent confondu avec la représentation sémiotique qui en est faite. Le graphique d'une racine carrée n'est pas le concept de racine carrée « in se », il est le reflet de certains aspects de cette fonction.

2.3.2 Il n'y a pas de *noésis* sans *sémiosis*

La distinction entre un objet et sa représentation sémiotique devrait être le point d'appui de l'étude didactique d'un concept mathématique. L'accessibilité aux objets mathématiques par leur représentation sémiotique seulement est une source de confusion. Selon Duval (1993), le paradoxe de la pensée mathématique, c'est l'impossibilité de séparer l'objet de sa représentation. En effet, l'appréhension d'un objet abstrait ne peut se faire que par ses représentations puisqu'il n'existe pas physiquement. La production de signes appartenant à un système de représentations possédant ses propres contraintes signifiantes ne peut se faire sans une appréhension conceptuelle de l'objet en question. L'apprentissage de la notion de fonction ne peut se faire sans les équations, les graphiques et les autres représentations propres aux fonctions et l'utilisation de ses représentations ne peut se faire sans l'appréhension conceptuelle de cette notion. Duval affirme qu'il n'y a pas de *noésis* sans *sémiosis* puisque l'appréhension conceptuelle est *noésis* et la production de représentations sémiotiques, *sémiosis*.

2.3.3 La coordination des différents registres essentielle à l'appréhension de l'objet conceptuel.

Pour ne pas confondre l'objet mathématique avec ses représentations sémiotiques, il importe de varier les registres de représentations et la tâche de conversion entre différents registres est nécessaires à l'appréhension de l'objet conceptuel. Comprendre un objet mathématique c'est la capacité de le reconnaître dans différents registres. Un registre de représentations sémiotiques est un système qui permet trois activités cognitives importantes : la communication, le traitement et la conversion. La communication est la formation d'une représentation identifiable construite selon les règles de conformité de son propre registre. Ces règles assurent le traitement possible des représentations. Le traitement est la transformation de cette représentation dans son registre d'origine; c'est une transformation interne au registre d'appartenance. La conversion, quant à elle, est une transformation de cette représentation en une représentation d'un autre registre : c'est une transformation externe au registre d'origine. Par exemple, l'écriture fractionnaire, décimale et scientifique des nombres sont trois registres différents de représentations des nombres. Il est possible de passer, par la conversion, de ⅛ à 0,125 et, par le traitement, de $\frac{1}{8}$ *à* $\frac{3}{24}$: deux activités cognitives non seulement indépendantes l'une de l'autre mais différentes.

La conversion, quoique nécessaire à l'appréhension conceptuelle de la *noésis*, est souvent réduite à une activité reliée à la *sémiosis*. La conversion met en exergue les unités signifiantes propres à chaque registre. Contrairement au traitement, il n'y a pas de règle de conversion. Comme la conversion requiert une connaissance et une compréhension de ses unités signifiantes, elle suscite des obstacles et des difficultés proportionnelles à son degré de congruence selon que la conversion est possible terme à terme et dans le même ordre entre deux registres. Dans certains cas, la conversion est quasi directe étant donné la congruence entre les deux registres. Ces conversions sont pauvres en apprentissage. L'intérêt des changements de registres réside dans la découverte des « règles » de traitement de chaque registre et des unités signifiantes propres à chacun, et surtout des correspondances possibles entre celles-ci. La coordination des différents registres de représentation n'est pas une tâche simple. Les élèves ont souvent une vision cloisonnée des registres de représentations due, entre autres, à une variété hétérogène de ces derniers. Certains registres, ayant un degré de congruence élevé, leur conversion relève davantage du codage. Par contre, à l'autre bout du spectre, des registres sans aucune congruence déroutent l'élève face à une conversion apparemment impossible. Il lui est difficile de distinguer un même concept dans différents registres et une didactique jouant sur ce « modus operandi » ajoute au problème plutôt qu'en être une piste de solution. En somme, la coordination des différents registres est nécessaire à une appréhension conceptuelle. La coordination des registres est complexe et délicate. Le phénomène de cloisonnement entre les différents registres et la notion de congruence et non-congruence déterminent les conditions de réussite dans la conversion entre deux registres sémiotiques différents. Duval (1993) ajoute : « …l'absence de coordination n'empêche pas toute compréhension. Mais cette compréhension, limitée au contexte sémiotique d'un seul registre, ne favorise guère les transferts et les apprentissages ultérieurs : elle rend les connaissances acquises peu ou pas mobilisables dans toutes les situations où elles devraient réellement être utilisées. »

Le recours à plusieurs systèmes de représentations est propre à l'être humain. Deux hypothèses sont généralement proposées pour tenter d'expliquer cette spécification propre au fonctionnement de la pensée humaine. La première, l'économie de traitement s'illustre, par exemple, lors de l'apparition de l'algèbre comme moyen de représentation pour des calculs plus complexes. En effet, le langage naturel a vite montré ses limites quant à son efficacité à résoudre ce type de problèmes. L'existence de plusieurs registres permet de changer de registre, et ce changement de registre a pour but de permettre d'effectuer des traitements d'une façon plus économique et plus puissante (Duval, 1993) La deuxième, la complémentarité des registres, est une hypothèse qui met en évidence les limites et les possibilités de chaque système et, par le fait même, leur complémentarité : « Toute représentation est cognitivement partielle par rapport à ce qu'elle représente et d'un registre à un autre ce ne sont pas les mêmes aspects du contenu d'une situation qui sont représentés » (Duval, 1993). À ces deux hypothèses, Duval en propose une troisième qui est au centre de ses recherches soit la conceptualisation impliquant une coordination des registres de représentations.

Malheureusement, les curriculums ignorent, la plupart du temps, ces considérations didactiques sur les divers systèmes de représentation. L'enseignement des mathématiques est souvent planifié sans se préoccuper des difficultés inhérentes à la coordination des différents registres de représentation comme la complexité de leur conversion et l'impact de leur non congruence (Duval, 1993). On présente parfois des cas de congruence pour la conversion frôlant le codage. Duval propose de privilégier des tâches mettant l'accent sur les affinités entre *noésis* et *sémiosis*. On doit préconiser des activités favorisant la discrimination des unités signifiantes d'une représentation et de leur correspondance dans différents registres tel que l'étude de la pente de la droite et du taux de variation dans la règle associée. Un élève doit connaître les différentes inclinaisons possibles de la droite et la signification du taux de variation dans l'écriture de la règle. Il doit aussi connaître la correspondance entre le taux de variation donné par la règle et la pente de la droite du graphique à savoir qu'à un taux de variation négatif correspond une droite décroissante.

En guise de conclusion, Duval démontre la place centrale que devrait avoir le changement de registre dans l'enseignement des mathématiques. Selon lui, la pierre d'achoppement de l'apprentissage est le manque de tâches exigeant une coordination de différents registres de représentations et le fait que l'appréhension conceptuelle soit souvent prise pour acquise comme si elle allait implicitement de soi par la production de représentations sémiotiques.

CHAPITRE III

MÉTHODOLOGIE

Certaines orientations données par le MELS dans les programmes de la réforme de septembre 2006 à l'enseignement des fonctions au secondaire trois, ne reflètent pas les dernières recherches sur le sujet. En effet, la modélisation à l'aide de nuages de points comme contexte d'introduction à la notion de fonction ou comme outil de consolidation est quasi-absente de la littérature. Si cette dernière est plutôt discrète sur la possibilité des retombées didactiques de l'apport des nuages de points dans l'appréhension du concept de fonction, elle est, par contre, très explicite sur l'aspect qualitatif de la modélisation de la covariation de deux grandeurs. En somme, nous savons peu sur le sujet. C'est pourquoi nous avons choisi d'aborder cette recherche sur les effets possibles d'un tel contexte dans l'apprentissage des fonctions, par une étude exploratoire.

Ayant comme objectif de générer des hypothèses basées sur des similitudes, des structures et des liens issus de nombreuses observations sur un sujet d'étude, la recherche exploratoire nécessite une large et diversifiée collecte de données.

« Ces études sont orientées vers l'observation de la réalité en vue de définir les principaux éléments d'un problème, d'une situation ou d'un comportement. L'objectif est de récolter un très grand nombre de données d'observation sur un phénomène peu ou mal connu. » (Tremblay, 1968)

Pour ce faire, nous avons mené une entrevue avec un enseignant dont un de ses groupes de 30 étudiants a complété un questionnaire. Nous avons établi une grille d'évaluation des réponses qui nous a permis de cibler 3 élèves que nous avons interviewés. Finalement, nous avons analysé le programme et le manuel utilisé par les élèves.

Nous avons donc fait face à une masse importante de données organisées, pour des raisons évidentes, de façon temporelle plutôt que par thème d'étude. Or, l'analyse qualitative d'une étude exploratoire se fait tout au long de la cueillette de données. À chaque étape de notre recherche, nous avons tenté de faire une certaine organisation de ces dernières: les points qui semblent intéressants, ceux qui se répètent, ceux qui interpellent ou non notre cadre théorique... En somme, tout au long de la collecte, il y a eu un va et vient entre les hypothèses dégagées de nos analyses préliminaires et les nouvelles données que nous avons jaugées attentivement pour en évaluer la pertinence. Nous avons dû nous astreindre à ce long et fastidieux processus de va et vient pour nous assurer de ne conserver que les hypothèses les plus cohérentes en fonction des objectifs poursuivis. Pour des raisons de clarté, nous présentons un compte-rendu linéaire des analyses qui ne témoignent pas nécessairement de l'ampleur de ce travail préliminaire. L'ensemble de nos analyses forme un tout cohérent, homogène et logique, mais sans ordre chronologique.

Évidemment, l'analyse de ces premières données s'est faite à l'enseigne d'un premier cadre théorique pour nous donner les balises nécessaires à leur interprétation. Puisqu'il s'agit d'une étude exploratoire, ce cadre théorique a, par la suite, évolué au fur et à mesure de l'émergence de nouvelles caractéristiques qui nous ont permis de raffiner et d'ajuster notre cadre théorique. Comme une première analyse nous avait démontré l'absence de certaines données, nous avons dû élaborer d'autres outils de collectes comme, par exemple, des entrevues d'élèves. Nous avons utilisé, pour l'ensemble des chapitres, le même processus du va et vient que pour la cueillette des données : chacun s'influençant l'un et l'autre réciproquement au fur et à mesure que la recherche se déploie.

3.1 Rappel des éléments théoriques

Les analyses dans une perspective de recherche exploratoire doivent se faire dans un cadre conceptuel vaste et flexible (Tremblay, 1968). C'est pourquoi nous faisons appel à plusieurs auteurs pour analyser nos données. De plus, la littérature en didactique ne couvrant pas la modélisation à l'aide de nuages de points comme contexte à l'apprentissage de la fonction, nous avons fait appel à plusieurs auteurs dont les recherches touchaient certains aspects de la modélisation à l'aide de nuages de points : les tables de valeurs, les fonctions et la modélisation.

3.1.1 Le concept définition et le concept image de Vinner

Le concept image de la fonction développé dans un contexte de modélisation à l'aide de nuages de points est le principal objectif de recherche de ce mémoire. Le concept image est le résultat de l'expérience avec le concept de fonction. Les propriétés associées au concept de fonction retenues par l'élève sont les éléments observables que nous tentons de déceler dans l'analyse de nos données et qui nous donnerons des indices sur leurs images mentales. De plus, Vinner (1983) précise plus les exercices et les problèmes rencontrés sont variés, plus le concept image sera juste. Cet aspect est principalement retenu pour l'analyse du manuel scolaire qui sera faite en termes de diversification des exercices proposés. Notons qu'il est impossible de cerner le concept image par une seule observation puisque pour une tâche donnée l'élève ne fait pas nécessairement appel à toutes les propriétés ou images mentales retenues pour la résoudre. C'est pourquoi nous avons diversifié nos sources d'analyse : entrevues, enseignant, manuel scolaire et questionnaire. Le concept définition fait référence à un système de connaissances institutionnelles. S'il fait parfois partie du « jeu », il n'est pas nécessaire, souvent trop compliqué et déconnecté de ses origines épistémologiques. Nous tenterons plutôt de décrire la place accordée au concept image dans l'analyse du manuel et de cerner son influence possible sur le concept image de l'élève. Vinner souligne que le concept définition, dans le cas de la fonction, est trop compliqué et n'aide pas toujours au concept image.

3.1.2 Carlson et al. :une vision dynamique de la fonction

Selon Carlson et al. (2002), le raisonnement covariationnel est la réflexion sur deux variables variant en tandem; sur le « comment » varie une grandeur par rapport à l'autre dans un contexte de modélisation. Il est central à l'appréhension du concept de fonction et, toujours selon Carlson et al. (2002), celui-ci se développe dans un contexte de modélisation mettant en jeu le passage d'une description verbale à un mode de représentation graphique. Essentiellement, tout au long des analyses, nous tentons de relever les occasions permettant un tel raisonnement. De plus, il s'agit de vérifier si la modélisation à l'aide de nuages de points permet le développement du raisonnement covariatonnel essentiel à une acquisition juste et efficace du concept de fonction.

3.1.3 Les registres de représentations sémiotiques de Duval

L'enseignement de la fonction passe nécessairement par ses représentations : tables de valeurs, équations, graphiques et énoncés. L'objet mathématique « in se » est souvent confondu avec la représentation qui en est faite. Pour ne pas confondre le concept de fonctions avec ses représentations sémiotiques, il importe, selon Duval(1993), de varier les registres de représentations et la coordination des différents registres est nécessaire à l'appréhension du concept de fonction. Ainsi, un dénombrement d'exercices permettant la coordination des différents registres et un dénombrement en termes de variété des représentations sémiotiques utilisées par ces exercices ou problèmes s'imposent.

La modélisation à l'aide de nuages de points ajoute un autre système de représentations à celui déjà étudié de la fonction. Ces derniers peuvent enrichir ou créer obstacle à l'appréhension du concept de fonction.

Certes, c'est en passant d'une représentation à l'autre que les unités significatives se dégagent et renforcent le concept de fonction. Par contre, pour ce faire, il faut éviter que la conversion soit « algorithmisée » et ne devienne du codage au sens de Duval. Ce qui pourrait être le cas dans la modélisation à l'aide de nuages de points. D'autant plus que le passage du registre spécifique à la modélisation au registre spécifique au modèle se fait uniquement à l'aide de la courbe de régression et ce, sans retour possible (voir figure 1.1). Ces considérations éclaireront nos analyses des entrevues, du manuel scolaire et du questionnaire. En effet, il importe de vérifier si la modélisation à l'aide de nuages de points permet la conversion au sens de Duval et si l'ajout du registre de représentations spécifiques à la modélisation à l'aide de nuages de points est davantage source de confusion ou un enrichissement.

3.2 Rappel des objectifs de recherche

L'objectif principal de cette recherche est de tracer le portrait du concept image de la fonction potentiellement développé chez les élèves dans un contexte de modélisation à l'aide de nuages de points. La nature exploratoire de notre étude ne nous permettra probablement pas de formuler des certitudes, mais à tout le moins des hypothèses plausibles.

Dans une première démarche, nous avons décortiqué la littérature didactique traitant des influences de la modélisation basée sur les nuages de points. De cette lecture, nous avons tiré quelques prémisses sur lesquelles nous avons construit notre problématique. Nous nous permettons de vous rappeler schématiquement les effets possibles de la modélisation par les nuages de points :

- restreindre l'éventail des fonctions possibles pour modéliser une situation réelle à la droite;
- discrétiser la fonction
- encourager une conception statique de la fonction;
- préconiser une vision locale du concept de fonction;
- favoriser la droite et la table de valeurs comme représentation sémiotique de la fonction au détriment des autres
- accentuer les difficultés, déjà existantes, liées aux différents passages entre les représentations

Nous devions d'abord vérifier et analyser ces hypothèses pour pouvoir mieux esquisser un portrait du concept image de la fonction dans l'enseignement de la modélisation à l'aide de nuages de points.

3.3 Présentation des différents outils de collecte

Pour répondre à ces questions, il est nécessaire d'évaluer la contribution de chacune des composantes influençant le processus d'apprentissage dans le contexte scolaire.

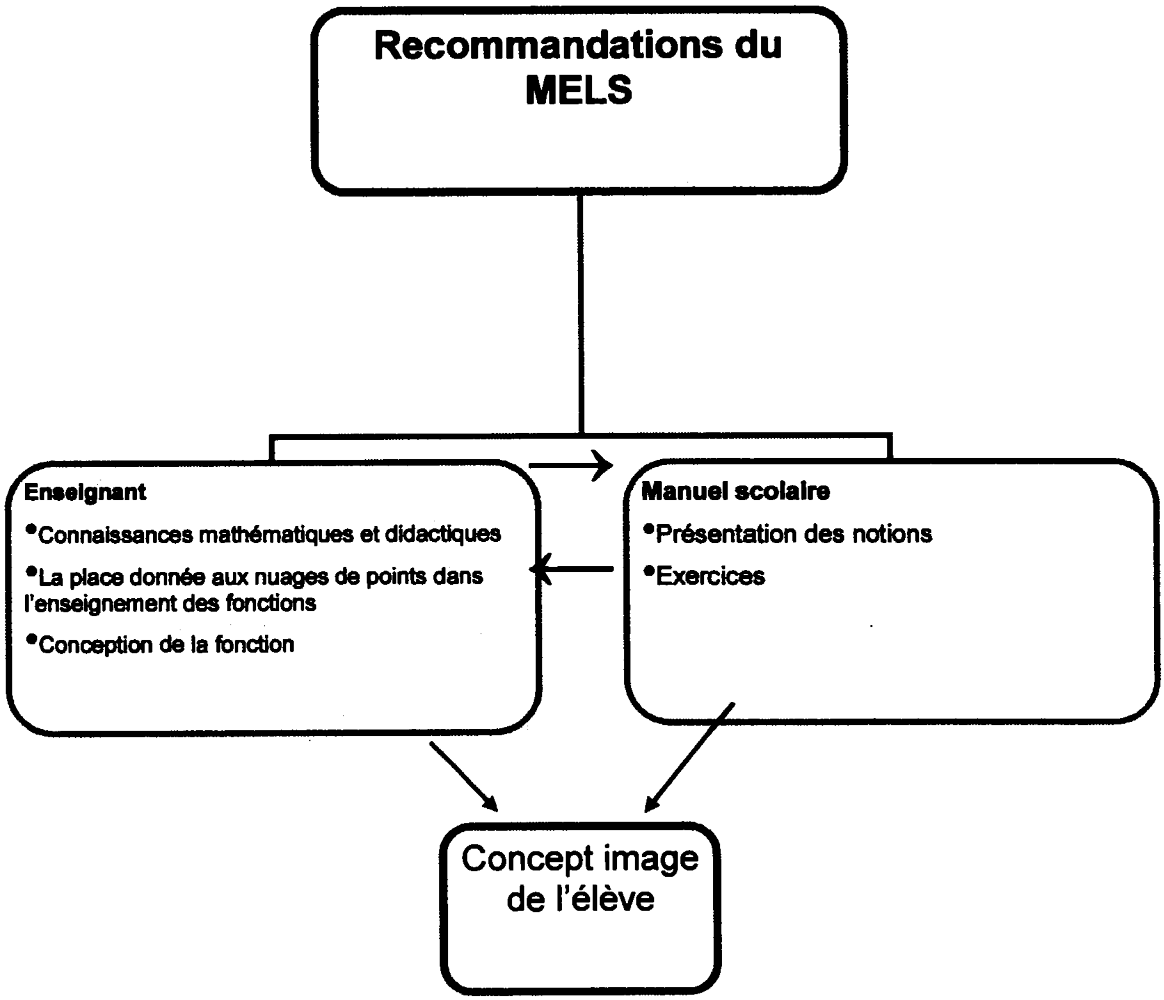


Figure 3.1 Composantes qui peuvent influencer le processus d'apprentissage.

3.3.1 L'entrevue avec l'enseignant

Nous nous intéressons à l'impact de la modélisation à l'aide de nuages de points sur la conception de la fonction des élèves et les apprentissages résultant de cette nouvelle approche. Bien que l'acte de l'enseignant ne soit pas au premier plan de cette recherche, il nous est impossible de l'ignorer. Nous avons élaboré un questionnaire dont la formulation se veut la plus objective possible tout en laissant assez de latitude pour une maïeutique visant à amener l'interviewé à préciser sa pensée. L'entrevue semi-standartisée, quoique d'une certaine rigidité, permet, tout de même une souplesse d'adaptation et d'utilisation. L'entrevue de l'enseignant a été enregistrée et se déroule en deux temps. On s'intéresse d'abord à sa propre conception de la fonction, ensuite, à sa démarche pédagogique dans l'enseignement des nuages de points. Il aurait été préférable d'observer, aussi, la pratique de l'enseignant, mais ce fut impossible. L'enseignant a refusé, au dernier moment, l'observation du déroulement d'un ou de plusieurs cours par pudeur. Étant un jeune enseignant, il était un peu intimidé. Nous avons donc étoffé le questionnaire sur les moyens qu'il préconise pour l'enseignement de la fonction et la place qu'il accorde aux nuages de points.

3.3.1.1 Questionnaire de l'entrevue de l'enseignant

3.3.1.1.1 Questions sur la notion de fonction

1) Donnez par écrit une définition formelle de la fonction.

Si le sujet donne une définition où l'unicité de l'image est mentionnée, poser les questions suivantes : - - Pourquoi, dans la définition, exige-t-on une seule image pour chaque élément du domaine?

Selon vous, laquelle des deux définitions suivantes correspond davantage à votre conception de la fonction?

À savoir :

qu'une fonction f est une loi d'association entre deux ensembles telle qu'à tout élément x du premier ensemble, correspond un et un seul élément f (x) du second.

que la variable y est une fonction de x lorsque nous connaissons un procédé quelconque (loi, relation, correspondance) par lequel, à toute valeur de x, correspond une valeur bien définie de la variable y.

2) Pouvez-vous donner une situation fonctionnelle et différentes représentations de cette situation?
3) Qu'est-ce qu'une fonction linéaire?
4) Qu'est-ce qu'une fonction affine?
5) Quelle est l'importance de la notion de fonction dans la formation des élèves?
6) Pouvez-vous donner des exemples de situations et/ou de domaines d'étude où cette notion de fonction est pertinente?

3.3.1.1.2 Questions sur la pratique pédagogique de l'enseignant

7) Quelle définition de la fonction donnez-vous aux élèves?
8) Est-il important de parler de l'unicité de l'image?
9) Qu'est-ce qui est le plus important à enseigner lors de l'introduction de la fonction?
11) Quelles difficultés pensez-vous rencontrer lors de l'enseignement de la notion de fonction?
12) Quelles conceptions erronées, les élèves, développent-ils généralement?
13) Quel type d'exercices privilégieriez-vous?
14) Quels aspects de la fonction polynômiale du premier degré considérez-vous importants à développer en classe avec les élèves?
15) Quels autres types de fonction comptez-vous enseigner? Pourquoi?

3.3.1.1.3 Questions sur la critique de l'enseignant du manuel *Intersection*, chapitre 2 : la notion de fonction

16) Que pensez-vous de la planification proposée par le manuel *Intersection* pour l'enseignement de la fonction?
   L'introduction
   Les exercices
   Les activités proposées
17) Selon vous, quelle est l'utilité de la modélisation à l'aide de nuages de points?
18) Quel est l'intérêt d'une telle approche?
19) Quels sont les apprentissages favorisés par cette approche?
Défavorisés?
20) Peuvent-ils aider à la compréhension du concept de fonction?
   Si oui, comment?
   Si non, pourquoi?

3.3.2 L'analyse du manuel scolaire *Intersection*

L'analyse du manuel permet d'accéder au savoir institutionnel, du moins celui auquel l'élève sera exposé. Dans cette perspective, l'analyse de ce savoir s'impose. Effectivement, la fréquentation du manuel *Intersection* par l'élève influence nécessairement son concept image de la fonction. Nous proposons de faire l'analyse du manuel en deux temps puisqu'il est subdivisé en deux sections distinctes : une partie dont l'objectif est la transmission des connaissances et une deuxième qui est la mise en pratique de ces connaissances.

Nous aborderons l'étude du manuel avec une analyse qualitative des différentes parties « cours » proposées par le manuel *Intersection* portant sur le concept de fonction et la modélisation à l'aide de nuages de points. Ce faisant, nous tenterons de mesurer la diversité des courbes présentées, les opportunités d'engendrer des changements de registre, la capacité de développer une vision locale et globale et un raisonnement covariationel d'une relation pour chaque partie « cours » du manuel portant sur la fonction et la modélisation à l'aide de nuages de points. En dégageant ainsi les intentions didactiques des enseignements préconisés par ce manuel, utilisé par les élèves participant à cette recherche, nous croyons pouvoir dégager certains éléments du concept image de la fonction chez les élèves issu d'un tel enseignement c'est-à-dire l'utilisation des nuages de points comme contexte à l'appréhension du concept de fonction.

Pour l'analyse de la deuxième partie, nous nous sommes inspirés des travaux de Martine Jacques (2004) qui s'est intéressée au concept image de la fonction que pourraient développer les élèves à l'utilisation d'une collection de manuels scolaires. À l'instar de Jacques (2004), nous avons, à la lumière de notre cadre théorique, crée des catégories d'exercices et procéder à leur dénombrement. Trois aspects sont retenus : la nature des questions, les différents types de fonctions représentées et les différentes solutions exigées par les exercices proposés. L'analyse de la nature didactique des exercices du manuel portant sur cet objectif permettra aussi de déterminer les aspects admissibles du concept image découlant de cet enseignement. Rappelons que le manuel préconise la nouvelle approche proposée par le MELS, soit l'enseignement des nuages de points comme contexte à l'enseignement de la fonction. Cette analyse quantitative ne peut donc que nous éclairer sur notre problématique.

3.3.2.1 Le type des fonctions représentées

Nous avons émis l'hypothèse que la droite est trop présente dans un enseignement de la modélisation à l'aide de nuages de points tel que prévu par le MELS. Nous avons aussi souligné l'importance de la variété des fonctions proposées afin de diminuer, le plus possible, l'écart inévitable entre le concept image et celui du concept définition. En effet, selon Vinner (1983), la variété présentée, dans les exercices, des exemples et des non-exemples du concept de fonction est importante. Nous pourrons, ainsi, déterminer le contexte dans lequel l'élève développera son concept image de la fonction. Nous avons retenu quatre catégories : linéaire, quelconque, inverse, appartenant à une famille de fonctions sujette au secondaire 4 et 5 (parabole, exponentielle, absolue…). C'est pourquoi s'impose le dénombrement des types de fonctions présentées.

3.3.2.2 La nature des questions

Nous avons analysé les exercices proposés dans le manuel et les avons classés selon l'angle d'approche des divers aspects de la fonction à savoir discret/continu, dynamique/statique et local/global tel que suggéré par une revue de la littérature didactique. Notons que ces catégories ne sont pas étanches et qu'un exercice peut être, par exemple, dynamique et global à la fois.

a) Les exercices de nature dynamique et/ou statique
Un exercice de nature **dynamique** permet un raisonnement covariationnel.

Un exercice **statique** considère la courbe comme un tout ou un objet et ne s'intéresse pas à la variation d'une grandeur par rapport à l'autre.

b) Les exercices de nature locale ou globale
Un exercice de nature **locale** questionne une partie ou un couple de valeurs de la fonction.

Un exercice de nature **globale** porte un regard sur l'ensemble de la courbe.

c) Exercice encourageant un regard **discret** ou **continu** sur la fonction

3.3.2.3 Les différentes conversions encouragées par les exercices proposés

L'acquisition d'un concept doit passer par la coordination des différents registres. (Duval, 1993) Selon cet auteur, aucun mode de représentation du concept de fonction ne doit être privilégié au détriment d'un autre. Chaque représentation est un reflet partiel du concept. Ce n'est qu'en travaillant sur les différents passages et en travaillant sur leur coordination que le concept peut se construire. Nous croyons que le dénombrement des différentes conversions nous informera sur la diversité des exercices proposés. En évaluant la diversité, nous pourrons émettre des hypothèses sur la construction du concept image de l'élève. Chaque exercice ou problème est catégorisé et ensuite dénombré. Ainsi, la côte 1 identifie un exercice qui implique un passage de la représentation sémiotique graphique à celle de l'équation voir tableau 3.1). Certaines questions n'impliquent pas de changement de registre. Elles questionnent simplement une représentation sémiotique. Dans ce cas, les côtes V pour situation verbale, G pour graphique, TV pour table de valeurs et E pour équation sont utilisées pour désigner quelle représentation est questionnée dans la l'exercice analysé.

Tableau 3.1 Codes utilisés pour le dénombrement des différentes conversions présentes dans les exercices.

	Description verbale	Table de valeurs	Courbe	Équation
Description verbale	x	12	11	10
Table de valeurs	8	X	9	7
Courbe	2	3	x	1
Équation	5	4	6	X

3.4 Le questionnaire

L'enseignement des nuages de points se fait, dorénavant, en première année du deuxième cycle dans un contexte de modélisation. Les seules fonctions connues par ces étudiants sont les fonctions linéaires, affines et inverses comme le ministère de l'Éducation le prescrit. Ils amorcent donc la modélisation à l'aide de nuages de points sans une conception approfondie de la notion de fonction. La modélisation doit être un prétexte à l'ouverture sur un très large éventail de fonctions. Ce questionnaire est construit pour déceler les indices des effets possibles d'un tel enseignement. Nous avons distribué un questionnaire de dix questions à un groupe enrichi de 23 étudiants du secondaire 3. Nous avons élaboré ce questionnaire à la lumière de la notion de fonction et de notre propre analyse conceptuelle des nuages de points. Dans un deuxième temps, nous avons créé des catégories de réponses pour chaque question et quantifié chacune d'elle.

3.4.1 Question 1

L'enseignement de la fonction au secondaire se limite à celui de la droite et à une brève parenthèse sur la fonction inverse. Lors de l'enseignement des nuages de points, seules, ces fonctions sont réinvesties comme outil de modélisation. Nous proposons donc, dans cette question, quatre modèles valables pour un même nuage de points. Afin de vérifier si, pour l'élève, d'autres modèles sont susceptibles de représenter un nuage de points.

3.4.1.1 Choix de réponses

A) graphique 1 B) graphique 2 C) graphique 3 D) graphique 4
Justifie ta réponse

3.4.1.2 Graphiques 1 et 2

Le traçage de droites point par point, les diagrammes à lignes brisées, le vocabulaire utilisé lors de l'enseignement des nuages de points (« la courbe la mieux ajustée », « la courbe qui représente le mieux »...) sont autant de facteurs qui peuvent induire l'élève à relier les points afin de modéliser un nuage de points. Pour ces raisons, entre autres, un élève peut choisir de relier les points.

3.4.1.3 Graphique 3

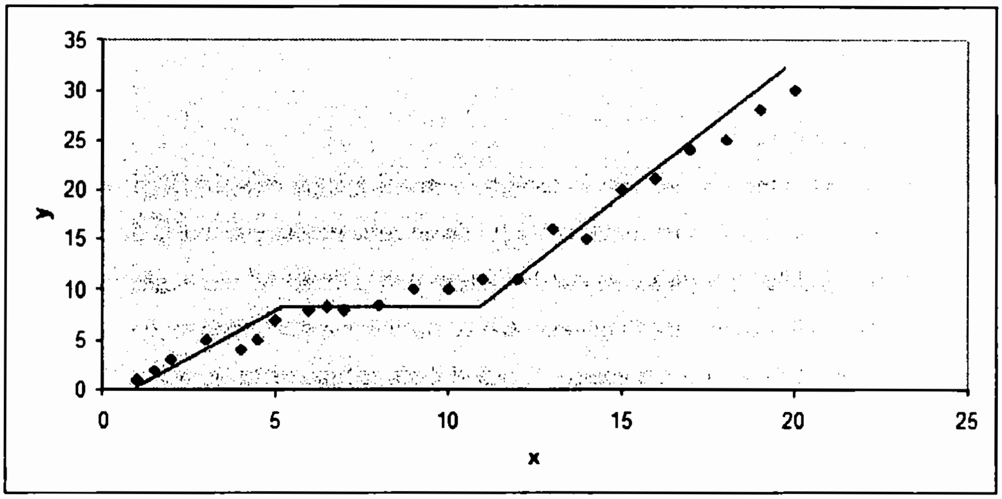
La droite est omniprésente dans l'enseignement des nuages de point. Dans le manuel, 19 des 21 exercices proposés sont modélisés à l'aide de cette dernière le nuage de points proposé peut être modélisé par plusieurs courbes autres que la droite tel que suggéré dans les autres graphiques. Ce faisant, nous voulons vérifier si l'élève a développé un sens critique quant au choix du modèle ou si son domaine de possibilités se limite à celui de la droite..

3.4.1.4 Graphiques 4

Deux segments de droite qui se superposent peuvent-ils représenter un nuage de points? Deux éléments d'analyse sont à distinguer à l'entrevue : d'une part, le modèle choisi n'est pas une fonction et, d'autre part, il n'est pas continu

1. Quelle courbe est la plus ajustée au nuage de points? Pourquoi?

Graphique 1



Graphique 2

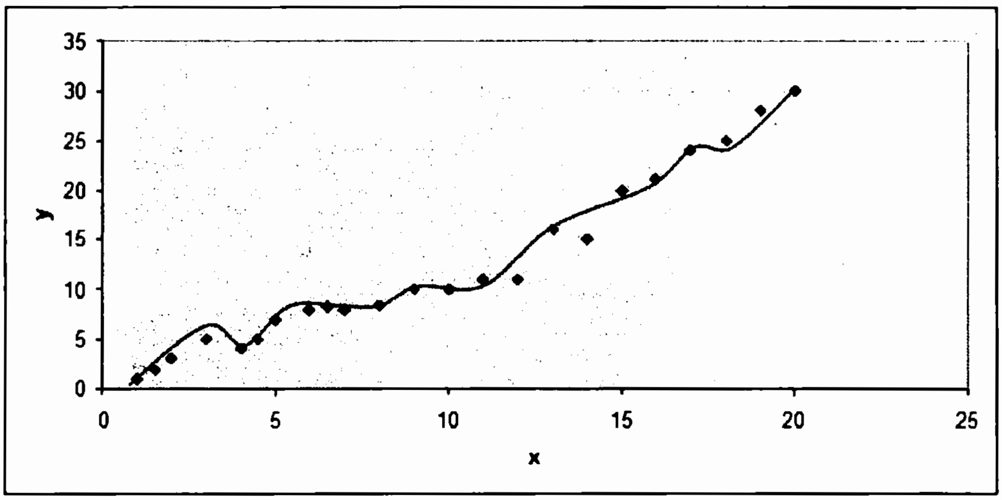
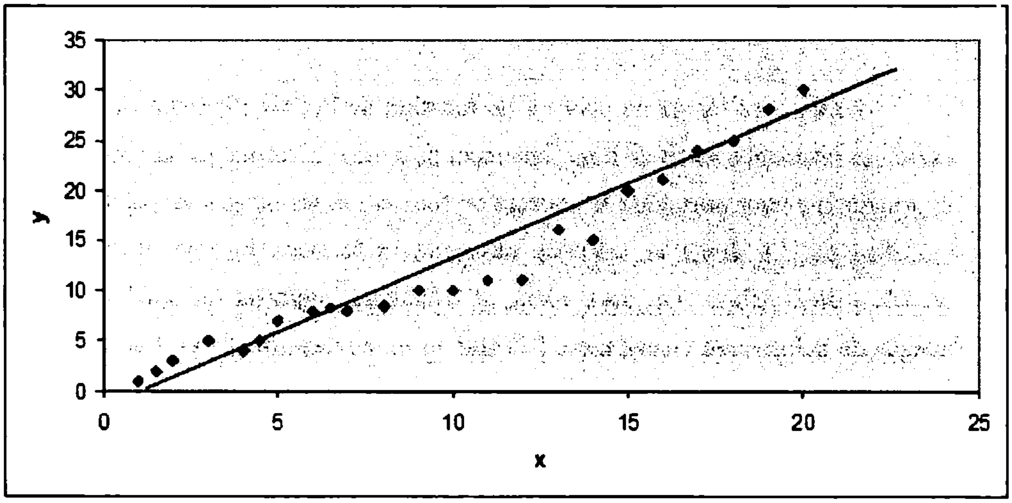
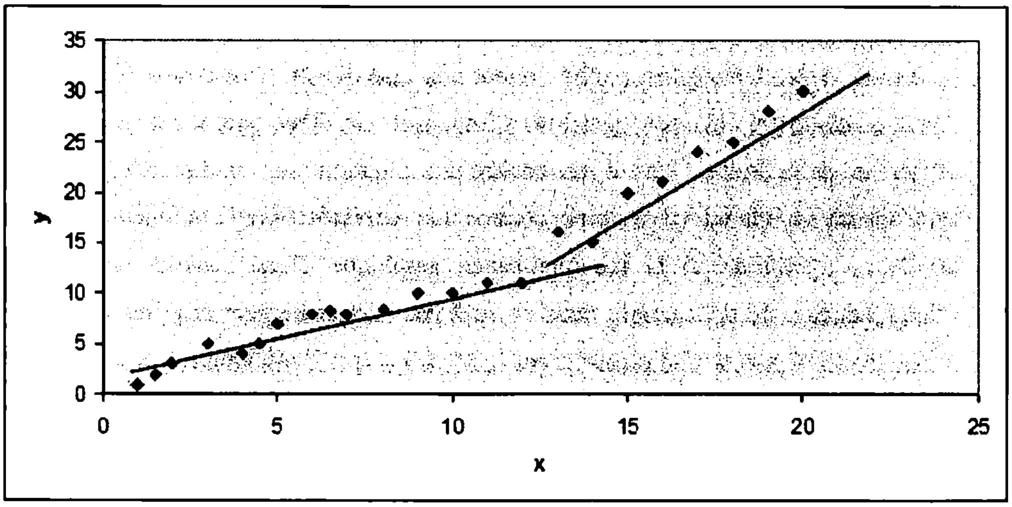


Figure 3.2 Question 1



Graphique 3



Graphique 4

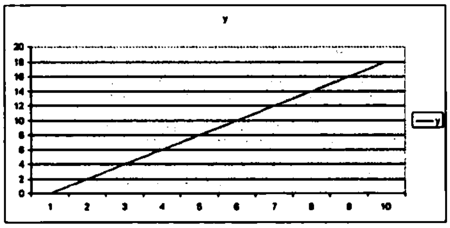
Figure 3.3 Question 1 (Suite)

3.4.2 Question 2

Le concept image du concept de fonction de l'élève s'enrichit des exemples et des exercices rencontrés au fil de l'enseignement déjà reçu. La droite est la notion préconisée par le programme pour introduire le concept de fonction et les nuages de points comme outil de modélisation. La droite et, quoique rarement, la fonction inverse, sont utilisées comme modèle mathématique. On peut, alors, se demander comment la modélisation à l'aide de nuages de points peut contribuer à l'évolution du concept image de l'élève. Les nuages de points favorisent la mise en exergue d'exemples de situations non fonctionnelles significatives, de représentations de fonctions autres que la droite et de discussions sur les fonctions discrètes versus continues. Étant donné que le travail fait avec les nuages de points se résume à transposer des données dans un graphique et à coller la droite la plus conforme au nuage de points obtenu, il se peut que, ce faisant, on esquive l'essentiel. D'autant plus que, la droite tracée, le nuage est oublié : retour à la case départ, c'est-à-dire à l'étude de la droite. Dans ce contexte, plusieurs questions s'imposent. Un élève peut-il reconnaître une fonction différente de la droite ? Peut-il reconnaître une situation non fonctionnelle? (Graphiques 1 et 4) Considère-t-il le nuage de points comme une représentation de la fonction ? (Graphiques 1 et 2) La définition et la reconnaissance graphique d'une fonction sont essentielles à l'appréhension de la fonction, mais ne sont pas nécessairement requises dès l'introduction. Comme ces éléments sont prescrits par le MELS et que l'enseignant leur a accordé une niche importante dans son enseignement, nous croyons nécessaire de les évaluer.

2. Quels graphiques peuvent être associés à une fonction ? Justifie ta réponse.

Graphique 1

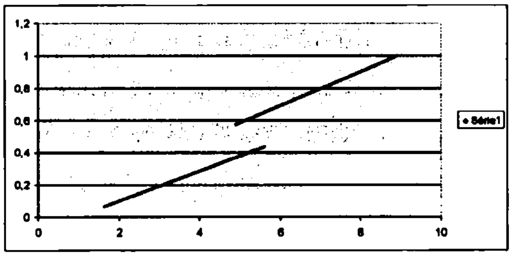


Ce graphique représente t-il une fonction ?

□OUI □NON

Justification :

Graphique 2

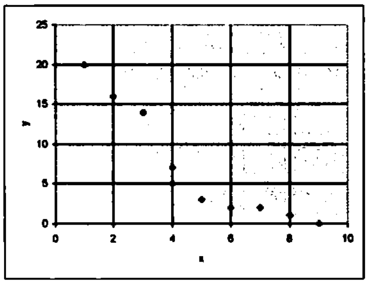


Ce graphique représente t-il une fonction ?

□OUI □NON

Justification :

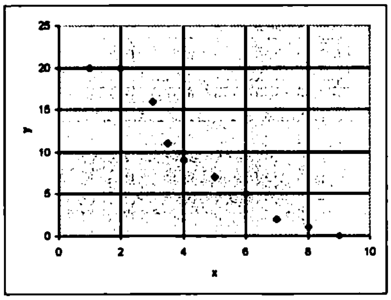
Graphique 3



Ce graphique représente- t-il une fonction ? □OUI □NON

Justification :

Graphique 4



Ce graphique représente- t-il une fonction ?

□OUI □NON

Justification :

Figure 3.4 Question 2

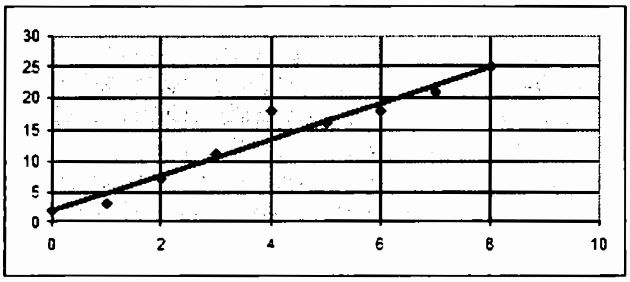
3.4.3 Question 3

Dans le manuel, nous avons constaté que le nuage de points ne sert pas d'appui pour enclencher le processus d'abstraction puisque le chapitre portant sur les nuages de points conclut l'étude des fonctions. Le modèle demeure, donc, le seul objet d'étude et ce, au préjudice des valeurs réelles d'un phénomène observable. À la question 3, nous présentons un nuage de points et sa droite. Nous avons, dans un même graphique, deux représentations d'une même situation : l'une représente la situation réelle et l'autre, le modèle mathématique. La confusion entre les données réelles et le modèle est prévisible dans ce contexte. Une telle situation nous incite à vérifier si l'élève peut faire la différence entre le modèle et les valeurs observées du nuage de points.

3. Voici le nuage de points correspondant à la table de valeurs 1.

Table de valeurs 1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	2	3	7	11	18	16	18	21	25	29	32



a) Complète la table de valeurs de la droite obtenue.

Table de valeurs de la droite.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y											

b) Pour x = 4, comment expliquez-vous la différence entre les images des deux tables de valeurs?

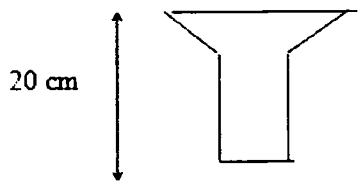
Figure 3.5 Question 3

Un autre aspect intéressant est celui du passage du registre de représentations sémiotiques spécifique au nuage de points, au registre de représentations sémiotiques spécifique à la notion de fonction. Une fois la droite tracée, l'élève devrait être en mesure de réinvestir les apprentissages développés lors de l'enseignement de la droite. Les nuages de points et la fonction étant enseignés, chacun, en vase clos, le transfert des apprentissages peut s'avérer laborieux et confus. Par cette question, nous cherchons à comprendre comment l'élève peut réinvestir les connaissances acquises sur la fonction dans le chapitre des nuages de points.

3.4.4 Question 4

La droite est omniprésente dans le chapitre portant sur les nuages de points. L'élève, n'ayant jamais eu la possibilité de modéliser un nuage de points par une autre courbe que la droite, « colle », probablement par automatisme, une droite à un nuage de points, peu importe le contexte de celui-ci. Nous voulons, avec cette question, vérifier si l'élève trace une droite pour modéliser le nuage de points malgré l'illustration du vase indiquant qu'il y a deux temps au graphique.

4. Des élèves ont fait l'expérience suivante en classe. Ils ont rempli un vase, illustré ci-dessous, à partir d'un robinet dont l'eau coulait à débit constant. Ils ont noté le niveau de l'eau du vase à certains moments de l'expérience dans une table valeurs.
Trace la courbe correspondante au niveau de l'eau selon le temps.



Temps en secondes	Niveau de l'eau en cm
0	0
5	1
7	3
10	6
12	8
15	10
17	11
21	13
23	14
25	15
27	15

Figure 3.6 Question 4

3.4.5 Question 5

Le seul type de modélisation prévu au programme est celui à l'aide des nuages de points. Par cette question, nous voulons vérifier si l'élève peut modéliser une situation dans laquelle il n'y pas de valeurs explicites données.

5. Sachant que la bouteille illustrée ci-dessous est remplie à partir d'un robinet dont l'eau s'écoule à débit constant, trace la courbe du niveau de l'eau dans la bouteille ci-dessous, selon le temps.

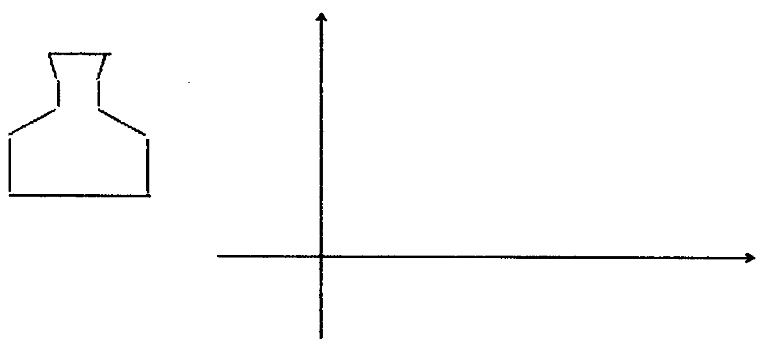


Figure 3.7 Question 5

3.4.6 Question 6

La modélisation à l'aide de nuages de points amène l'élève à travailler davantage avec la table de valeurs. Lors d'une expérimentation, les données sont recueillies dans une table de valeurs et, ensuite, étudiées. Ces données ne représentant qu'un échantillon des couples possibles, la représentation partielle et la discrétisation d'une fonction continue sont possibles. La conception de la droite, seule fonction étudiée en première année du deuxième cycle, s'en trouve modifiée. De plus, le point par point comme méthode pour tracer une droite pourrait refaire surface. Cette méthode, largement critiquée et bannie de nos manuels scolaires, encourage une conception statique de la droite, ce qui n'est pas souhaitable au début de l'apprentissage du concept de fonction. Conséquemment, nous tentons d'évaluer si la méthode pour tracer une droite a changé suite à l'enseignement des nuages de points et de cerner les effets possibles sur la conception de la fonction.

6. Trace la courbe de la fonction $y = 2x + 1$ dont la table de valeurs est donnée ci-dessous.

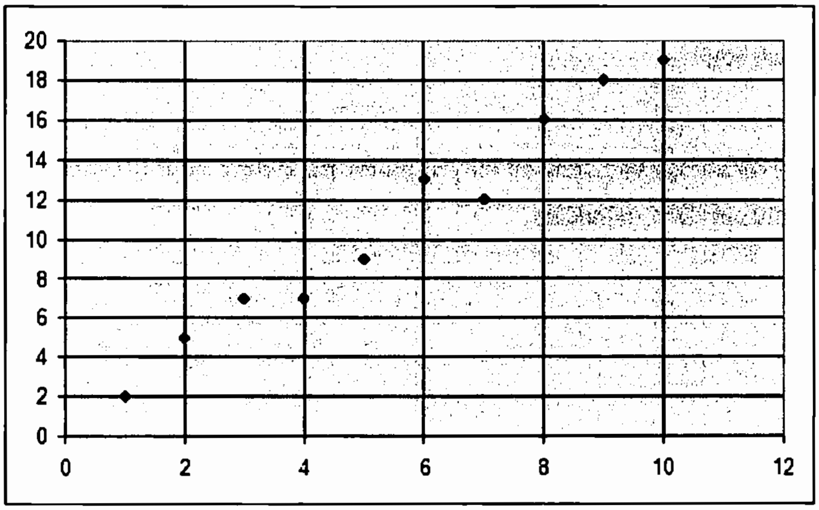
x	y
1	3
2	5
4	9
5	11

Figure 3.8 Question 6

3.4.7 Question 7

La modélisation à l'aide de nuages de points met l'accent sur certaines valeurs au détriment du phénomène dans son ensemble. Selon nous, elle favorise le local au détriment du global et une conception discrète à celui d'une conception continue de la fonction. En donnant un contexte correspondant à un nuage de points, l'élève exprime sa perception de ce dernier et nous permet de voir quelles caractéristiques ce type de modélisation met en exergue. Il reste à déterminer si ce dernier peut être profitable à un enrichissement du concept image de la fonction ou y faire obstacle.

7. Donne un contexte possible correspondant au nuage de points donné ci-dessous. Identifie bien les grandeurs en jeu.



Grandeur 1 : ______________________________

Grandeur 2 : ______________________________

Contexte

Figure 3.9 Question 7

3.4.8 Question 8

Dans l'article Statis and Change, Smith (2003) affirme qu'un élève possédant une conception dynamique de la fonction pourra verbaliser la relation entre deux ensembles de nombres tandis qu'un élève ayant une conception statique de la fonction utilisera surtout une équation

8. Y a-t-il une relation entre les deux colonnes de nombres de cette table de valeurs ? Si oui, explique la relation. Sinon, explique pourquoi il n'y en a pas.

2	3
3	5
4	7
5	9

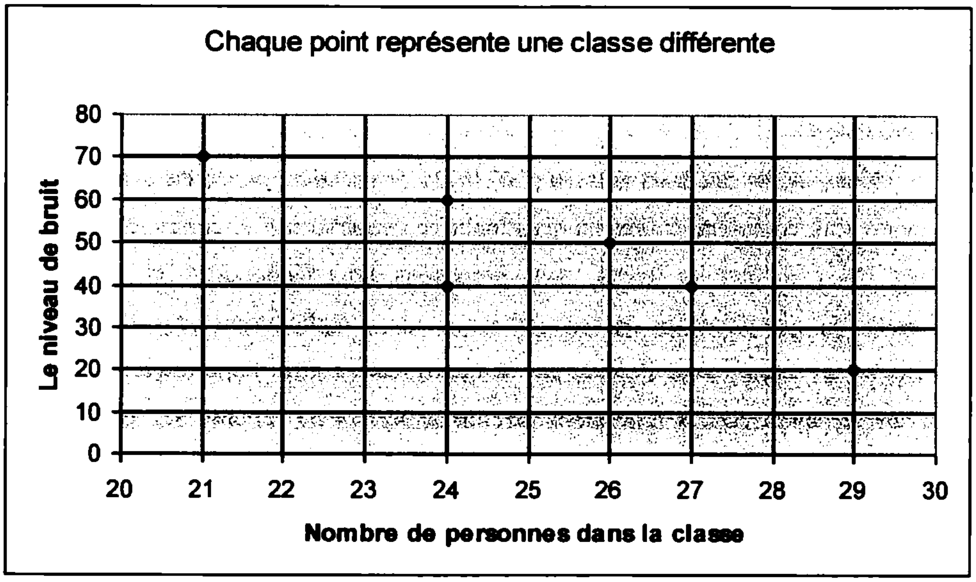
Figure 3.10 Question 8

Nous nous intéressons donc au moyen utilisé par l'élève pour illustrer la relation ou non relation entre ces deux grandeurs.

3.4.9 Question 9

Le sens commun nous dit que le bruit de classe varie selon bien des facteurs : la discipline de l'enseignant, le type d'élèves, la matière et parfois le nombre… Comment partager ce que le sens commun nous dit et ce que le graphique illustre réellement. Avec cette question nous voulons vérifier comment ils vont justifier leur réponse : avec ce que nous dit notre sens commun ou ce qu'indique le graphique ? De plus, la modélisation à l'aide de nuage de point, tel que vue par le manuel, a comme principal objectif d'extrapoler ou d'interpoler. Dans cette perspective, la corrélation entre deux grandeurs est prise pour acquise. Cette question devrait évaluer la capacité de discuter du lien entre les deux variables.

9. Des étudiants font un projet portant sur le niveau du bruit dans une classe. Ils ont visité six classes différentes afin de mesurer le niveau de bruit et ils ont noté le nombre d'élèves par groupe. Ils ont utilisé les données récoltées pour tracer le graphique suivant :



Écris un court texte destiné à un étudiant qui ne peut pas voir le graphique afin de lui décrire ce qu'il montre.

Le graphique montre... ____

____

____

____

____

____

Si on avait mesuré le niveau du bruit dans une classe de 23 étudiants, quel en aurait été le niveau

Complète la phrase

Si le nombre d'élèves augmente, le niveau de bruit __________.

Si le niveau du bruit est élevé, le nombre d'élèves est __________.

Crois-tu qu'il y a une relation entre le niveau du bruit dans une classe et le nombre d'élèves? Justifie ta réponse.

Figure 3.11 Question 9

3.5 Les entrevues d'élèves

Comme dans le cadre d'une étude exploratoire, un grand nombre de données est nécessaire, nous complétons le questionnaire par des entrevues pour mieux cerner les résultats obtenus et les nouvelles réflexions qu'elles ont suscitées. Nous procéderons, alors, à une analyse qualitative des données obtenues toujours en regard de nos éléments théoriques rappelés ci-haut.

Nous avons fait trois entrevues d'élèves de première année du deuxième cycle. Les entrevues sont complémentaires au questionnaire de recherche. L'entrevue se divise en deux parties. Dans un premier temps, nous proposons deux tâches afin de pallier à certaines faiblesses du questionnaire de recherche que nous expliciterons plus bas. Ensuite, nous effectuons un retour, avec l'élève, sur le questionnaire afin d'approfondir quelques points dont les réponses écrites ignoraient certains aspects. Une réponse sur papier c'est plutôt statique et souvent coupé du raisonnement originel. L'entrevue permet, donc, de poser des questions plus ouvertes et d'enrichir les réponses déjà données.

3.5.1 Première Partie de l'entrevue : tâche 1

La première tâche est un problème similaire à la question trois, mais avec un contexte facilitant l'élaboration et la justification des réponses. Nous avons aussi demandé de trouver l'équation de la droite afin de vérifier si le passage des registres spécifiques au nuage de points à ceux de la fonction est une voie possible.

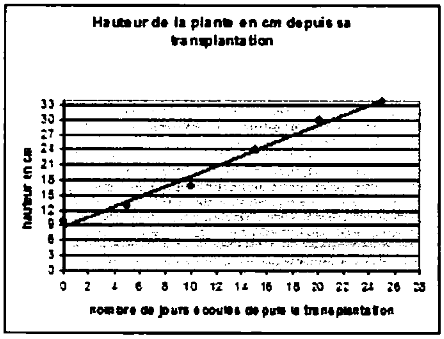
Registres spécifiques aux nuages de points	*Registres spécifiques à la fonction*

Nuage de points → Droite de régression → Droite → Équation, table de valeurs

3.5.1.1 Tâche 1

Voici les informations concernant la hauteur d'une plante en fonction du nombre de jours écoulés depuis sa transplantation dans le jardin.

Nombre de jours écoulés depuis sa transplantation	0	5	10	15	20	25
Hauteur de la plante en cm	10	13	17	24	30	34



1. Détermine l'équation de la droite qui représente cette situation.
2. Donne une table de valeurs de la droite.
3. Après cinq jours quelle est la hauteur de la plante?

Figure 3.12 Première partie de l'entrevue : Tâche 1

3.5.2 Première partie de l'entrevue : tâche 2

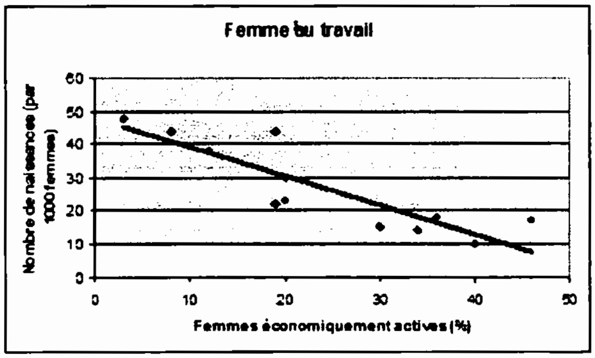
La deuxième tâche nous aidera à compléter les analyses de l'élément 9 du questionnaire de recherche afin de connaître le rôle de la droite dans le concept image de l'élève. On sait qu'elle représente, pour la majorité des élèves, une moyenne, mais aussi un outil de prédiction, une indication de la corrélation entre les variables et finalement, elle indique dans quel sens les grandeurs varient. Le modèle, comme nous l'avons maintes fois souligné, est mis de l'avant et les valeurs obtenues, par observation, oubliées, et ce, souvent, peu importe la validité du modèle (Voir l'analyse de la question 9.) Du même souffle, un élève peut dire que la bonne réponse est celle du modèle et critiquer la fiabilité de ce dernier.

Tâche 2

Voici les résultats d'une étude faite sur la femme au travail. L'étude s'intéresse au lien possible entre le nombre de femmes sur le marché du travail et le taux de naissances pour une région donnée. Voici les résultats obtenus dans différentes régions :

Voici les résultats d'une étude faite sur la femme au travail. L'étude s'intéresse au lien possible entre le nombre de femmes sur le marché du travail et le taux de naissances pour une région donnée. Voici les résultats obtenus dans différentes régions :
Voici les résultats d'une étude faite sur la femme au travail.

Femmes :onomiquement actives (%)	Nombre de naissances (par 1000 femmes)
3	48
8	44
12	38
19	44
19	22
20	30
20	23
30	15
34	14
36	18
40	10
46	17



a) Quelle information te donne cette étude? Qu'est-ce que tu en penses?
b) Dans une région qui n'a pas été recensée, on sait que 28 % des femmes sont économiquement actives. Est-ce que tu peux aider le responsable de cette région à trouver le nombre de naissances par 1000 femmes pour cette région?
c) Que veut dire ta réponse et quelle est en est la fiabilité?

Figure 3.13 Première partie de l'entrevue : Tâche 2

3.6 Deuxième partie de l'entrevue : retour sur le questionnaire de recherche

Rappelons-le, dans le cadre d'une recherche exploratoire, les différents chapitres ne peuvent pas se construire séparément. Ainsi, nous avons fait la deuxième partie de l'entrevue *Retour sur le questionnaire de recherche* après avoir analysé les lacunes dans les réponses d'un premier questionnaire écrit. Les questions diffèrent pour les trois entrevues puisqu'elles ont comme but d'éclaircir certains points de leur questionnaire. Le but étant d'inciter les élèves à articuler leurs raisonnements, l'entrevue est de nature semi-structurée. La question principale demande à l'élève d'expliquer sa démarche. Les réponses aux questions 1 et 4 sont revues ensemble puisque, dans la majorité des cas, il y avait un conflit potentiel. À la première question, une forte majorité (14 sur 23) a choisi la droite comme modèle, en soulignant que seule une droite peut modéliser un nuage de points. Or, à la quatrième question, seulement deux élèves ont choisi la droite pour modéliser le nuage de points. Est-ce le contexte qui a influencé ce choix? Le problème, différent de ceux proposés par le manuel, est–il reconnu comme un problème de modélisation à l'aide d'un nuage de points? C'est ce que nous tenterons de cerner, entre autres, avec la deuxième partie de l'entrevue.

Finalement, à la question 7, nous avons proposé cinq contextes écrits par des élèves du groupe aux élèves interviewés et nous leur avons demandé d'évaluer la justesse de ces derniers. Le but étant de vérifier sur quelles caractéristiques du graphique et de la situation ces élèves porteront leur regard. Voici les cinq situations proposées :

<u>Situation A</u>

Francis veut savoir à quelle heure de la journée il fait le plus chaud. Il place un thermomètre dehors et vérifie à chaque heure.

<u>Situation B</u>

Une voiture tout terrain gravit une pente dans une course. Afin de bien suivre le déroulement de celle-ci, les juges mesurent le temps écoulé et la hauteur où se trouve le véhicule.

<u>Situation C</u>

Une entreprise d'ordinateurs est fondée durant les trois premières années les profits ne cessent de croître, jusqu'à ce qu'une nouvelle compagnie soit fondée, mais après un an de faillite, c'est alors que notre entreprise lance une nouvelle gamme d'ordinateurs qui feront beaucoup de profits jusqu'à l'année 6, un nouveau système d'exploitation est introduit, dû à un manque de fiabilité les acheteurs sont moins nombreux, mais à l'année 7 l'entreprise déménage ses usines dans un autre pays, le coût de production est alors réduit jusqu'à l'année 8, une loi sur le salaire des employés est mise en place, cela fera donc légèrement baisser les prix.

<u>Situation D</u>

Un enfant a sa première dent à l'âge de deux ans et de plus en plus que son âge augmente, ses dents sont plus nombreuses. À l'âge de trois ans, son nombre de dents reste stable jusqu'à cinq ans. À 7 ans, l'enfant perd une dent d'enfant

<u>Situation E</u>

Jeremy marche (?) jours pour aller au travail. Un jour, il constate que chaque deux secondes il fait environ quatre mètres.

Figure 3.14 Question 7 de l'entrevue

CHAPITRE IV

ANALYSE DES DONNÉES

4.1 Analyse du manuel Intersection

Ce travail est une étude exploratoire pour tenter de dégager l'influence de l'enseignement de la modélisation à l'aide de nuages de points sur le concept image de fonction chez les élèves de la 1[ière] année du deuxième cycle. Pour en faire une étude le moindrement exhaustive, il faudra donc analyser plusieurs variables à savoir les recommandations du MELS, la pratique usuelle de l'enseignant, le manuel utilisé en classe et, évidemment, la valeur didactique de l'apprentissage offert aux élèves. Nous aborderons l'étude du manuel avec une analyse qualitative des rubriques qui sont davantage de nature théorique, sous l'angle de l'analyse conceptuelle de la modélisation à l'aide de nuages de points et de la fonction présentée dans la problématique. Nous tenterons de mettre en relief les différents éléments théoriques retenus dans le cadre théorique et la problématique de cette recherche : les changements de registres, l'éventail des fonctions présentées et les occasions de réflexion sur la covariation.

Évidemment, le manuel *Intersection* propose une méthodologie et les exercices ad hoc. Puis, on poursuivra avec une analyse quantitative des exercices suggérés, soit à la manière de Jacques (2004), soit par critères prédéterminés à la lumière des éléments théoriques préconisés par cette recherche pour trouver des éléments de réponse aux questions soulevées dans la problématique. Afin de comprendre quel pourrait être l'apport de la modélisation à l'aide de nuages de points dans l'appréhension du concept de fonction, il faut analyser la nature didactique des exercices du manuel portant sur cet objectif. Selon le guide pédagogique, cette partie a, comme objectif, le développement des compétences des élèves en réinvestissant les concepts et les processus étudiés dans les sections 1 à 4. Tout en respectant les préceptes mis de l'avant dans les chapitres « cours » (activités exploratoires d'un concept et notes de cours), il est nécessaire d'effectuer, dans la section *Mise en pratique,* une analyse quantitative des exercices proposés pour y mesurer la diversité des courbes présentées, les opportunités d'engendrer des changements de registre et la capacité de développer une vision locale et globale d'une relation.

4.1.1 Analyse quantitative par critères

Dénombrer :

a) les changements de registres (ex: équation vers graphique)
b) les exercices de nature dynamique et/ou statique
c) les exercices de nature locale ou globale
d) le nombre d'exercices faisant appel à la droite, à la fonction inverse, à une fonction appartenant à une famille de fonctions au programme du secondaire ou à une fonction quelconque (n'appartenant pas une famille de fonctions étudiées).

4.1.2 Analyse de la structure générale du manuel *Intersection*

Le chapitre portant sur les fonctions se divise en cinq sections :

a) les relations et leurs modes de représentation,
b) les relations, les fonctions et leurs réciproques,
c) les fonctions linéaires et les fonctions de variations inverses,
d) les fonctions affines,
e) la modélisation à l'aide d'un nuage de points.

Les quatre premières sections seront analysées à l'enseigne du concept de fonction et la dernière, à celle de la modélisation. La structure du manuel respecte les recommandations du MELS privilégiant l'enseignement de la modélisation comme finalité à l'enseignement des fonctions. Le manuel suggère la séquence suivante d'enseignement de la fonction :

Notion de variable → Les relations linéaires → Les fonctions linéaires et inverses → Les fonctions affines → Modélisation

Cette séquence, issue du raisonnement proportionnel, se termine par un chapitre sur la modélisation à l'aide de nuages de points. Cette subdivision diverge des conclusions de plusieurs chercheurs cités dans la problématique (Carlson et al., 2002, Hitt et Morasse, 2009 ; Passaro, 2006) pour qui la modélisation est le contexte favorable à l'apprentissage de la fonction et à l'appréhension de son concept. Contrairement au MELS dont la méthodologie séquentielle débouche sur la modélisation, la revue de la littérature « affirme et confirme » que l'apprentissage se déroule rarement de cette façon. L'apprentissage naît plutôt dans le processus de modélisation. En expérimentant la covariation, la coordination des registres, les unités significatives de certaines fonctions etc., l'élève édifie par lui-même un concept image de la fonction qu'il peut intérioriser.

Modélisation
Covariation
↕
Variables
↕
Expérimentation d'un large éventail de modèles de fonctions
↕
Dégagement des unités significatives
↕
Coordination de différents registres de représentation sémiotiques
↕
Famille de fonctions

↓
Concept image de la fonction

A contrario, la méthodologie *d'Intersection* débouche sur ce que Piaget appelle une « connaissance verrue » c'est-à-dire sur un automatisme non intégré à l'ensemble des connaissances de l'élève. Malgré la présentation séquentielle du concept de fonction aboutissant à la modélisation, l'élève développe une certaine conception de la notion de fonction. Dans cette analyse, nous tenterons d'en dégager les caractéristiques.

4.1.2.1 Les différentes rubriques du manuel *Intersection*

Deux sous-parties précèdent les sections : L'*Entrée en matière* et la *Réactivation*. L'*Entrée en matière* a pour but de préparer les élèves aux apprentissages visés par ce chapitre. Elle permet une réactivation des connaissances antérieures et une introduction au domaine général de formation, à l'aide de situations d'apprentissage et d'exercices. Comme contexte d'étude du concept de fonction, on a opté pour le domaine général de formation *Environnement et Consommation*. La *Réactivation* se résume à quelques exercices récapitulatifs sur les préalables nécessaires pour aborder le chapitre. Ils portent, ici, surtout sur le raisonnement proportionnel. Chaque section est subdivisée en 4 sous-parties. L'introduction du concept passe par une situation- problème qui se situe dans un contexte lié au domaine général de formation choisi par les auteurs et peut être considérée comme étant la première compétence. S'ensuit une a*ctivité d'exploration*. L'activité proposée est toujours une tâche divisée en sous - questions accolées de petits encadrés dans lesquels on insère les notions et les définitions requises pour effectuer les apprentissages. En première année du deuxième cycle, ces activités offrent, également, aux élèves l'occasion de s'interroger sur leur choix de séquences en secondaire IV. Les activités sont donc souvent conçues dans l'esprit d'une des séquences offertes en 2^ième^ année du 2^ième^ cycle : sciences naturelles, technico-sciences et culture, société et technique. Chaque nouvelle notion présentée dans ce chapitre se termine par des activités d'exploration et des exercices sans contexte à l'enseigne de « *Ai-je bien compris?* » À la fin, on présente sous la rubrique « *Faire le point* » un résumé de ces notions et une série de problèmes, exercices et situations d'apprentissage pour les différentes compétences du programme dans la partie *Mise en pratique*.

L'enseignement des fonctions débute à ce niveau avec la notion de relation linéaire et se poursuit en secondaire IV enrichi avec les fonctions réciproques, affines, linéaires et quadratiques, le recours aux nuages de points étant retenu pour le chapitre de la statistique en secondaire V. Nous analyserons d'abord les sections portant sur les fonctions. Nous en dégagerons les objectifs pédagogiques tout en soulignant les éléments propres à une bonne compréhension du concept de fonction tel que souligné dans le cadre théorique. Pour ce faire, nous porterons un regard critique sur la pertinence de la méthodologie privilégiée, les connaissances ainsi présentées et leur impact possible sur le concept image de l'élève.

Ensuite, à la manière de Jacques (2004), il faudra dénombrer les exercices à l'aide de critères basés sur l'analyse théorique du concept de fonction pour pouvoir mettre en exergue les aspects influençant le concept image de fonction. Finalement, il restera à évaluer si la modélisation à l'aide de nuages de points, telle que présentée par le manuel, permet une évolution du travail entamé dans la première partie ou introduit uniquement un changement de paradigme pour l'élève.

4.1.2 Analyse des sections portant sur les fonctions dans le manuel *Intersection*

Dans le chapitre traitant de cette problématique, on souligne divers aspects du concept de fonction et on préconise plusieurs moyens pédagogiques favorisant une compréhension optimale du concept de fonction. Ainsi, selon Duval (1993), l'enseignement des fonctions doit nécessairement passer par ses représentations sémiotiques et leur coordination. Pour Carlson et al. (2002), le raisonnement covariationnel est un incontournable à l'appréhension de la fonction. Selon Vinner (1983), plus l'éventail des exemples, des exercices et des problèmes est diversifié, plus le concept image de l'élève sera intégré et adéquat. Dans cette optique, on se doit de vérifier si les exercices et les tâches du manuel *Intersection* répondent aux préceptes préconisés par ces chercheurs pour l'acquisition du concept image de fonction par l'élève ou, du moins, son appréhension.

4.1.3 Analyse qualitative de la section 1 : les intentions didactiques des activités d'exploration.

Selon le guide pédagogique du manuel *Intersection,* la section 1 a comme but d' «Amener les élèves à identifier une variable indépendante et une variable dépendante dans une situation donnée », de « permettre à l'élève de décrire verbalement, graphiquement et par une table de valeurs une situation de proportionnalité » et d' « amener l'élève à distinguer différents types de variables et à leur associer des représentations graphiques appropriées ». La première activité d'exploration à l'aide de six courtes questions tente d'habiliter l'élève à attribuer un caractère de dépendance ou d'indépendance à une variable. L'activité étant brève et se résolvant par l'énoncé d'une définition formelle, elle ne permet pas une réflexion sur la variation d'une variable par rapport à l'autre. Elle enferme la notion de dépendance entre deux variables dans une espèce de connaissance « verrue » sans lien avec les ramifications didactiques antérieures et postérieures qu'une acquisition progressive développerait nécessairement. On décèle une volonté de lier l'enseignement de la fonction à l'étude de la variation, mais maladroitement. L'appréhension de la dépendance entre deux variables devrait, selon le guide pédagogique et le programme du ministère de l'Éducation, être approfondie par la notion de réciproque, sujet d'étude de la section deux, nous poursuivrons d'ailleurs l'analyse de cet objectif dans cette section.

4.1.3.1 Activités d'exploration 1 et 2

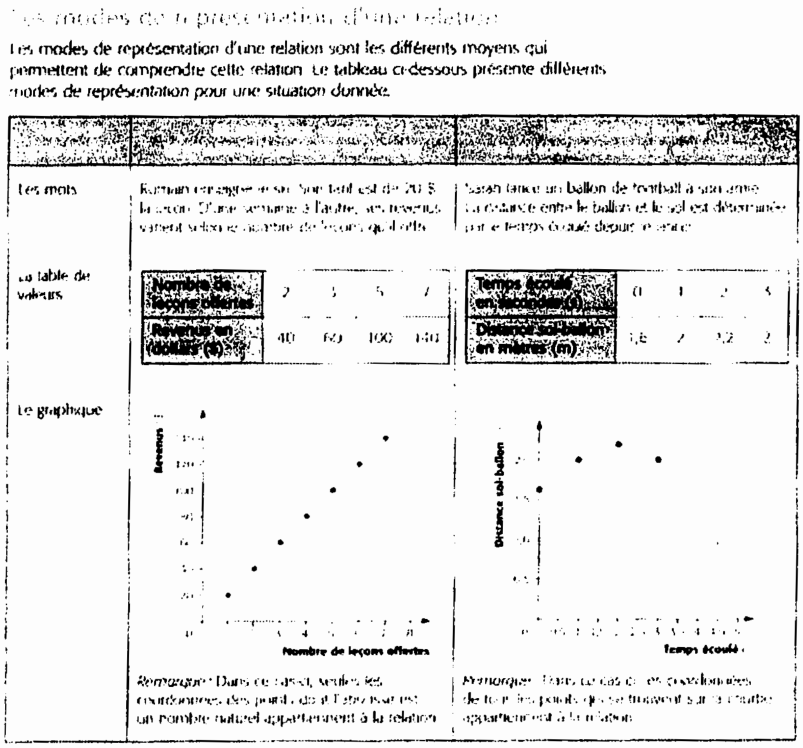
Les auteurs ont fait le choix d'introduire le graphique et la table de valeurs comme premières représentations sémiotiques d'une relation. Déjà, le premier passage entre représentations se fera de la table des valeurs au graphique. La méthode du point par point sera donc retenue pour résoudre cette « activité » encourageant surtout une vision locale du graphique puisqu'elle questionne surtout la valeur d'une variable pour une valeur donnée. On prépare déjà les élèves à l'enseignement des nuages de points. L'ensemble de ces activités est en lien avec le raisonnement proportionnel. Ainsi, la courbe obtenue est une droite : débuter par les connaissances déjà acquises pour jeter les bases d'une autre connaissance est un principe pédagogique indiscutable. Par contre, en limitant, dès le premier contact avec le concept de fonction, au raisonnement proportionnel, on limite également, du coup, le concept fonction à celui de la droite passant par l'origine. Dans ce contexte, il est difficile de réfléchir sur les changements de variations nécessaires à l'appréhension du concept de fonction. De plus, selon Duval (1993), l'appréhension du concept de fonction passe par la coordination des différents modes de représentation. Or, la méthode préconisée par cet exercice s'apparente davantage à la traduction au sens de Duval qu'à la conversion. Cette méthode, également, ne permet pas de mettre en évidence les unités significatives nécessaires à une compréhension globale de la droite. Les apprentissages issus d'une telle activité sont questionnables. Une analyse plus en profondeur des exercices dans la section « *Mise en pratique* » nous permettra de justifier ce jugement. Soulignons aussi que le guide pédagogique mentionne qu'on introduit les modes de représentations dans le but d'amener l'élève à choisir le meilleur mode de représentation pour une question donnée. Par exemple, souligne-t-il, pour trouver une règle, il est préférable d'utiliser la table de valeurs et le graphique si on compare des situations.

4.1.3.2 Activité d'exploration 3

La troisième activité a comme but d'amener l'élève à distinguer différents types de variables et à leur associer des représentations graphiques appropriées. À l'aide de cette activité l'élève devrait pouvoir distinguer une variable discrète d'une variable continue. La conséquence sur la représentation graphique de cette distinction est importante dans le cas de variables discrètes dont on ne peut relier les points. L'introduction de cette distinction est, selon nous, un peu hâtive surtout de façon aussi formelle. Ce faisant, on insiste encore sur une perception locale plutôt que globale. Cette distinction doit être faite, mais les situations dont les variables sont discrètes sont rarement (jamais?) des situations de fonction dynamique. Elle encourage plutôt une perception locale et une conception statique de la fonction comme le démontre la première question de l'activité : *« À quel ensemble de nombres les valeurs que x et y peuvent prendre appartiennent-elles?* » Or, tel que souligné auparavant, on doit préconiser un passage d'une conception dynamique à une conception statique de la fonction.

4.1.3.3 Analyse de la rubrique « Faire le point »

Voici ce que présente le manuel *Intersection* comme résumé de cette section :



Les modes de représentation d'une relation sont les différents moyens qui permettent de comprendre cette relation. Le tableau ci-dessous présente différents modes de représentation pour une situation donnée.

Les mots	[illegible]	[illegible]
La table de valeurs	Nombre de leçons offertes: 2, 3, 5, 7 / Revenus en dollars ($): 40, 60, 100, 140	Temps écoulé en secondes (s): 0, 1, 2, 3 / Distance sol-ballon en mètres (m): 1,6, 2, 2,2, 2
Le graphique		

Dans un plan cartésien, par convention, on place les valeurs de la variable indépendante sur l'axe des abscisses (axe horizontal) et les valeurs de la variable dépendante sur l'axe des ordonnées (axe vertical).

En général, dans une table de valeurs, on place les valeurs de la variable indépendante dans la première colonne ou dans la première rangée.

Figure 4.1 Le résumé présenté par Intersection de la première section

On note que les modes de représentation privilégiés sont la table de valeurs et le graphique. Quelques valeurs sont représentées par des points dans le plan cartésien. Ce faisant, par ces exemples « imposés », le manuel oriente, chez l'élève, l'élaboration du concept image. Ce tableau encourage la méthode du point par point déjà rigoureusement contestée par plusieurs chercheurs. (Voir problématique). Elle enferme l'élève dans le duo registre numérique – registre graphique. Le travail de conversion vers d'autres modes de représentation est nécessaire afin de « voir » le concept de fonction. De plus, on constate que dans cette section la table de valeurs joue un rôle d'auxiliaire: un passage obligé pour déterminer le graphique de la relation. Son étude en termes d'unités significatives et de propriétés n'est pas établie. La traduction, selon la définition de Duval (1993), devient impossible: l'élève est « enfermé » dans le point par point pour tracer la courbe

4.1.4 Analyse quantitative la section 1 :la nature didactique des exercices proposés dans les sections *Mise en pratique.*

La section *Mise en pratique* se distingue nettement de l'entrée en matière en proposant des problèmes plus ouverts. Contrairement aux activités d'exploration, les situations de cette section du manuel *Intersection* permettent une certaine réflexion sur l'influence d'une variable sur une autre. Plusieurs problèmes de modélisation sont de même nature que ceux proposés par Hitt et Morasse (2009), Carlson et al. (2002) et Passaro (2006) dans leurs travaux, c'est-à-dire des problèmes demandant une approche qualitative, dynamique et globale de la fonction. Par contre, le mode de représentation est imposé dans tous les problèmes. En voici un exemple:

Page 63, no.14

Dessine une esquisse graphique qui représente la hauteur, par rapport au sol, d'une personne assise dans les manèges suivants durant un tour complet.
A) le bateau pirate b) La montagne russe c) La grande roue

L'ensemble des problèmes fait appel à un grand éventail de fonctions, mais, majoritairement, à des fonctions irrégulières permettant ainsi à l'élève d'élargir, tel que le souligne Vinner (1983), son concept image de la fonction. Un bémol, un seul problème présente une fonction discontinue. Le tableau ci-dessous donne un portrait de la nature des problèmes proposés par cette section qui a comme objectif d'introduire la notion de variable. Les cotes utilisées pour la colonne «changement de registres sont à la page 46 de la méthodologie». Certaines questions n'impliquent pas de changement de registre. Elles questionnent simplement une représentation sémiotique. Dans ce cas, les côtes V pour situation verbale, G pour graphique, TV pour table de valeurs et E pour équation sont utilisées pour désigner quelle représentation est questionnée dans la l'exercice analysé. Aussi, il est possible que certains exercices ne trouvent pas d'entrée dans ce tableau

Tableau 4.1 Analyse quantitative de la section 1

Type de fonctions					Nature de la fonction				Changement de registres
Problème Analysé	Quelconque	Appartenant À une famille	Inverse	Linéaire	Locale	Globale	Statique	Dynamique	
1	1					1			V
7		1			1		1		8
9a				1		1		1	2
9b				1		1		1	2
9c		1				1		1	2
10a				1		1		1	11
10b	1					1		1	11
10c		1				1		1	11
10d	1					1		1	11
11	1					1		1	G
12		1			1		1		12 et 9
13	1					1		1	11
14a	1					1		1	11
14b	1					1		1	11
14c		1				1		1	11
15		1			1		1		11
16	1				1		1		9
17ab	1				1		1		G
17cd	1					1		1	11
Total	10	6	0	3	5	14	5	13	

On note que les types de fonctions représentés dans les problèmes sont variés et que les questions exigent une réflexion sur la globalité de la fonction mettant en exergue l'aspect dynamique de la fonction. Très peu de questions sont de nature locale ou statique. Celles qui sont ainsi identifiées le sont parce que le mode de représentation sémiotique choisi est la table de valeurs : représentation taxée de statique par plusieurs (voir cadre théorique).

Soulignons que le passage entre deux modes de représentation le plus exploité est celui de la situation verbale vers le graphique. Selon Duval (1993), il faut présenter aux élèves des contextes de travail favorisant le passage entre différents modes de représentation afin de développer adéquatement sa capacité de conceptualisation. C'est en passant d'une représentation à l'autre que les unités significatives se dégagent et renforcent le concept de fonction. Nous évaluerons à la fin du chapitre la représentation des différents passages dans les exercices proposés. Par contre, nous pouvons déjà souligner que le passage 2 du graphique au verbal n'est présent que 3 fois et uniquement dans cette section.

4.1.5 Conclusion de la section 1 : Les relations et leurs modes de représentation

En somme, les activités d'exploration proposées par le manuel sont plutôt des tâches spécifiques à une notion balkanisée, atomisée en « sous- mini problèmes » dont la réponse est souvent évidente ou, pire encore, donnée dans l'encadré qui suit. Dans l'analyse des trois activités d'exploration proposées, nous avons souligné une tendance à amener l'élève à se concentrer sur certains points de la variation plutôt que sur la courbe globalement, soit en posant des questions principalement sur un couple donné dont une des valeurs est manquante plutôt que sur la variation de la fonction, soit en insistant précocement sur les variables discrètes et finalement en favorisant un passage de la table de valeurs à un graphique comme premier contact avec le concept de fonction. Cette conception restreinte de la fonction privilégie une vision statique de la fonction au détriment d'une vision dynamique. De plus, le choix du raisonnement proportionnel comme prétexte initiatique à la fonction est sujet à caution puisqu'il permet de générer des courbes appartenant seulement aux fonctions linéaires ce qui réduit considérablement l'éventail d'exemples possibles du concept de fonction nécessaire, selon Vinner (1983), à un concept image élaboré. Finalement, la coordination des différents registres sémiotiques de la fonction est un passage nécessaire afin de « visualiser » le concept de fonction. Or, celui proposé, d'entrée de jeu, soit la transposition de points dans un plan cartésien, s'apparente davantage à la traduction au sens de Duval (1993). Il ne permet pas la mise en évidence des unités significatives et, par le fait même, d'un faible apport didactique dans l'acquisition du concept de fonction. Contrairement aux *Activités d'exploration*, la *Mise en pratique* propose des exercices de nature dynamique et globale ignorant les valeurs numériques et la table des valeurs pour laisser place à des situations misant sur le qualitatif. Cette dichotomie entre les *Activités d'exploration* et la *Mise en pratique* déstabilise nécessairement l'élève dans son cheminement de construction du concept image de la fonction. Le travail entamé dans la section *Mise en pratique* est intéressant et en accord avec les principes didactiques énoncés dans notre cadre théorique. Par contre, nous doutons que l'élève puisse, suite à quelques exercices de modélisation relativement simples, acquérir une conception dynamique « valide et valable » de la fonction.

4.1.6 Analyse qualitative de la section 2 : les intentions didactiques des activités d'exploration

Le ministère de l'Éducation introduit la notion de réciproque au 1ière année du 2ième cycle afin de permettre à l'élève de faire la distinction entre une relation et une fonction. Le guide pédagogique abonde dans ce sens et souligne que les activités d'exploration proposées dans cette section guideront pas à pas les élèves vers le concept de fonction. Essentiellement, les intentions pédagogiques sont d'amener l'élève à faire la distinction entre une fonction et une relation. Le deuxième aspect de la fonction traité dans cette section, est l'ensemble des propriétés de la fonction : variations, signes, extremums, domaines et images. Selon les recommandations du MELS, l'élève doit être uniquement initié à la description des propriétés d'une fonction. Il doit les dégager de façon informelle et ce, toujours en contexte. Voilà une occasion intéressante de proposer des situations permettant un raisonnement covariationnel. C'est à l'enseigne de toutes ces considérations que nous analyserons cette section.

4.1.6.1 Activité d'exploration 1

La section comprend trois activités d'exploration. La première activité vise l'introduction du concept de relation réciproque et la découverte de ses propriétés. Encore une fois, le passage table de valeurs - graphiques est encouragé. On propose une situation mettant en relation les degrés Celsius et les degrés Fahrenheit puis on demande « À l'aide de la formule, dresse une table de valeurs de cinq couples » et à la question suivante « Représente la relation entre les deux unités dans le plan cartésien. » Pour introduire la réciproque, on exige d'intervertir les valeurs de la table et de construire le graphique associé. Il est à parier que cette « activité d'exploration » égare l'élève sur le chemin du raisonnement covariationnel. Puisqu'encore une fois, la fonction est réduite à quelques points plutôt qu'à l'analyse de sa variation dans sa globalité. S'ensuivent, sous la rubrique *J'ai bien compris,* des exercices sans contexte dont la solution n'exige qu'un raisonnement superficiel sur la variation d'une variable par rapport à l'autre. Contrairement aux recommandations du MELS, la réciproque n'est introduite que pour faire le passage vers l'unicité de l'image d'une fonction comme le démontre l'activité exploratoire l'accompagnant dont le but est l'introduction de la définition formelle de fonction.

4.1.6.2 Activité d'exploration 2

Le guide pédagogique souligne que le but de cette deuxième activité est d'introduire le concept de fonction en le distinguant du concept de relation à l'aide du concept de réciproque. La finalité de l'activité est de constater que pour une relation donnée, on peut obtenir une réciproque dont une valeur de la variable indépendante correspond à deux valeurs de la variable dépendante. On termine par un encadré qui donne la définition suivante «Fonction : relation qui fait correspondre à toute valeur que prend la variable indépendante une et une seule valeur de la variable dépendante. » L'activité se termine par des exercices pour dépister les relations qui sont des fonctions parmi celles présentées.

Le concept définition est obsolète à ce stade de l'apprentissage. Il sera vite oublié puisqu'inutile et superflu! Comment cette définition formelle, qui met l'accent sur l'unicité de l'image, peut-elle contribuer au développement du concept image? Vinner (1983) souligne que le concept définition est souvent introduit avant que l'élève n'ait eu le temps de s'approprier lui-même le concept. *Intersection* en est un exemple typique de cette pédagogie largement critiquée. D'autant plus que la définition donnée étant à saveur moderne, elle est non seulement à éviter, mais inutile avant le CEGEP, selon Sfard (1992), Vinner (1983) et Comin (2005).

Dans la même veine que les exercices proposés sous la rubrique « *Ai-je bien compris* ? », le test de « la droite verticale » est présenté comme un outil sous la rubrique *Faire le Point.* Ce test coupe l'élève de tout raisonnement autonome sur le lien de dépendance entre les variables. On propose aussi, comme exemple de relation, un ensemble de points. Comment sera interprété un tel nuage de points dans la section 5 ? Peut-on modéliser une relation par une fonction ?

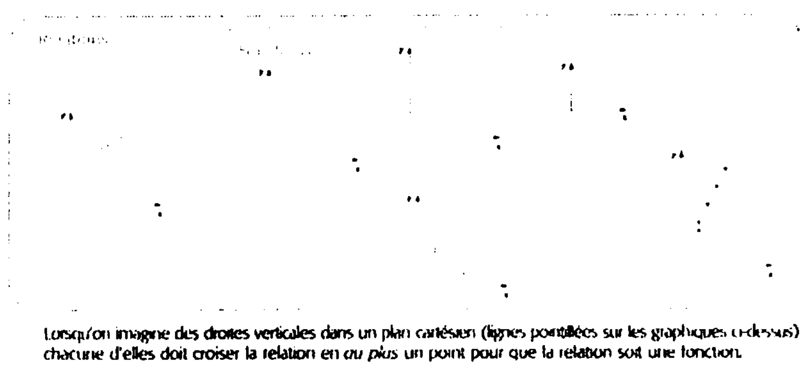


Figure 4.2 Test de la droite verticale présentée dans le manuel *Intersection* présenté par le manuel Intersection (p.72)

De plus, il est à noter que l'activité se déroule toujours dans le contexte du passage de la table de valeur-graphique dont nous avons déjà souligné dans le cadre théorique Coppé, Dorier et Yavuz (2007) l'inefficacité didactique dans l'apprentissage du concept de fonction.

Sans raison évidente, la règle n'est toujours pas présentée comme mode de représentation de la fonction.

4.1.6.3 Activité exploratoire 3

La dernière activité de cette section a comme objectif la familiarisation des élèves avec les différentes propriétés d'une fonction. Encore une fois, l'activité d'exploration proposée saute vite aux conclusions sans décoder le vocabulaire, souvent hermétique pour l'élève, associé au concept de fonction tel que: « Cette fonction est-elle croissante ou décroissante? Quels sont le domaine et l'image de cette fonction ? » Ces questions n'exploitent pas le contexte de la situation pour amener l'élève à comprendre ces propriétés. Pour répondre à ces questions, l'élève doit lire les encadrés contenant les définitions des propriétés concernées. Il aurait été préférable de demander, par exemple, pour quelle période de temps la mesure du petit angle augmente (croissance)? Diminue (décroissance) ? De quelle heure à quelle heure, Léa a-t-elle fait l'expérience (domaine) ? Quelles sont les mesures possibles du petit angle (image) ? L'étude de la variation de la fonction n'offrirait-elle pas une heureuse occasion d'approfondir une réflexion sur la variation d'une variable par rapport à l'autre et de favoriser le déploiement des actions mentales 2 et 3 du cadre théorique proposé par Carlson et al. (2002) sur le raisonnement covariationel ?

MA2	**Coordonner la direction de changement d'une variable avec le changement de l'autre.**	Par exemple, lorsque le temps augmente la mesure du petit angle augmente.
MA3	**Coordonner la valeur de changement d'une variable avec le changement de l'autre.**	Pour une marche (un intervalle de temps) donnée correspond une contremarche (mesure d'angle). Si on change la marche (l'intervalle de temps), la contremarche varie.

Exceptionnellement, dans la section *Ai-je bien compris?*, les questions sont davantage mises en contexte. Le tableau résumé de la rubrique *Faire le point* utilise un graphique mettant en relation la température extérieure et l'heure de la journée pour définir les propriétés. Soulignons que cette partie permet à l'élève d'étudier des fonctions différentes de la droite puisqu'elle n'est pas en lien avec le raisonnement proportionnel. Lors de l'analyse quantitative des exercices, les problèmes faisant appel à la droite versus ceux utilisant un autre type de fonction, sont dénombrés afin de faire un portrait de la diversité des exemples de fonctions rencontrée par l'élève. Comme souligné auparavant, la variété des exemples est primordiale pour l'acquisition d'un concept- image étoffé.

4.1.7 Analyse quantitative de la section 2 : la nature didactique des exercices proposés dans les sections Mise en pratique.

Les exercices de cette section sont encombrés d'un vocabulaire complexe et spécifique à la fonction. La réciproque est trop souvent utilisée pour vérifier si l'élève peut distinguer une fonction d'une relation et, parfois, comme dans l'exercice 1, elle offre une occasion à l'élève de déployer un raisonnement covariationnel L'exercice en question demande de tracer la courbe de la réciproque d'une fonction représentée par un graphique. Aussi, il est possible que certains exercices ne trouvent pas d'entrée dans ce tableau Dans l'ensemble, le registre favorisé est le graphique et les exercices sont de nature globale et dynamique.

Tableau 4.2 Analyse quantitative de la section 2

	Type de fonctions				**Nature de la fonction**				**Changement de registres**
Problème Analysé	**Quelconque**	**Appartenant À une famille**	**Inverse**	**Linéaire**	**Locale**	**Globale**	**Statique**	**Dynamique**	
1b1	1					1		1	G
1b2	1					1		1	G
1b3	1					1		1	G
1b4	1					1		1	G
1b5	1					1		1	G
1b6	1					1		1	TV
3a	1				1		1		9
4a	1					1		1	11
4b				1		1	1		11
4c				1		1	1		11
5ab1			1			1		1	G
5ab2	1					1		1	G
5ab3				1		1		1	G
6	1				1		1		TV
8	1					1		1	11
9a	1				1		1		TV
10				1		1		1	V
11				1	1				10
12	1				1		1		G
13	1					1		1	G
14				1		1	1		12
15				1	1		1		12
Total	14	0	1	5	5	15	6	13	

4.1.8 Conclusion de la section 2 : les relations, les fonctions et leurs réciproques

Dans la première partie, le passage entre la situation-problème et le graphique passe nécessairement par la table de valeurs. Elle est explicitement exigée. Il est probable que cette démarche sera réinvestie dans les exercices. Les exercices placés à l'enseigne du passage situation-graphique seront probablement davantage de nature situation-tables de valeurs-graphique provoquant un glissement de ces exercices qualifiés de « global-dynamique » à « statique-local ». Dans ce cas, les occasions d'exploiter le raisonnement covariationnel seront plus rares.

Contrairement aux activités d'exploration, certains exercices permettent d'utiliser la réciproque afin de développer le raisonnement covariationnel, en exigeant, par exemple, de tracer une réciproque à partir d'un graphique donné. Les exercices demandant de vérifier si la relation présentée est une fonction ne trouvant pas d'entrée dans ce tableau faussent un peu le portrait que l'on peut en tirer.

Le manuel semble avoir omis l'essentiel. Le concept de fonction, ne réside pas, comme le prétend le guide pédagogique, dans la connaissance d'une définition, mais bien dans la covariation, la relation de dépendance entre les variables et la coordination des registres de représentation. Ces aspects, pour l'instant, presque ignorés, sont nécessaires à une bonne compréhension du concept de fonction et devraient accompagner l'élève tout le long de son cheminement, sinon ils pourraient être absents du concept image de l'élève. C'est l'idée de dépendance qui fonde les concepts de fonctions et de variables et non celle de l'unicité de l'image.

4.1.9 Analyse qualitative de la section 3 : les intentions didactiques des activités d'exploration.

La troisième section propose trois activités afin d'approfondir la notion de fonction linéaire et celle de fonction inverse. Ces activités, selon le guide pédagogique, permettent à l'élève de représenter algébriquement une fonction et de faire la distinction entre le coefficient de proportionnalité et le taux de variation. Ainsi, le registre algébrique vient se greffer à ceux déjà présentés. Afin que le registre algébrique prenne tout son sens, il devrait, selon Duval (1993), être présenté en relation avec le registre graphique, numéral et verbal. À lui seul, il ne peut être une « image » complète du concept de fonction. Quant à l'introduction de la variation inverse, c'est une première occasion pour l'élève de faire l'étude d'une variation non linéaire. L'observation de la variation d'une variable par rapport à une autre peut être intéressante pour développer le raisonnement covariationel. D'autant plus que cette fonction présente des asymptotes. Voyons ce qu'il en est :

4.1.9.1 Activité d'exploration 1

L'activité *Sur la bonne voie* a comme but de permettre de modéliser une situation à l'aide des fonctions linéaires. En suivant les étapes données par cette activité l'élève établit les passages suivants entre les différents registres de représentations sémiotiques.

Il est à noter que le passage tables de valeurs à graphique est encore favorisé. Une fois le graphique tracé, le taux de variation est représenté dans ce dernier comme le rapport entre la variation de la variable dépendante et celle de la variable indépendante. À la dernière question de cette activité, on demande « Comment peux-tu représenter graphiquement une fonction linéaire en te basant uniquement sur son taux de variation. », obligeant ainsi le passage d'équation à graphique. Sera-t-il retenu et utilisé par les élèves? On peut se permettre d'en douter. Le passage de la table de valeurs à celui de graphique apparaît plus simple et efficace d'autant plus qu'il est encouragé depuis le début de la section et dans les deux exercices « Ai-je bien compris? » suivant cette activité. En effet, dans les deux cas on donne au moins les valeurs de deux coordonnées. Si la table de valeurs est donnée, l'élève favorisera probablement ce passage et avec raison. Or, le passage entre différents registres ne doit pas être à sens unique. Pour chaque changement de registre effectué, une caractéristique de la fonction est mise en valeur. Plus, ils seront variés, plus le concept - image de fonction de l'élève s'enrichira. Une analyse quantitative des exercices proposés nous éclairera davantage sur la question.

4.1.9.2 Activité d'exploration 2

Le but de l'activité est de permettre à l'élève de modéliser une situation à l'aide d'une fonction de variation inverse. En suivant les étapes de cette activité, on refait la même séquence de passages entre les différents registres de représentation sémiotique que par la dernière activité. Le passage numérique à graphique et numérique à algébrique est favorisé à nouveau. Favoriser des passages entre registres prenants source dans le registre numérique risque d'encourager une vision locale et discrète de la fonction.

Situation verbale → Table de valeurs → **Graphique**
→ **Équation**

Figure 4.3 Passage entre les différents registres favorisés par le manuel *Intersection*

Les questions, comme dans les autres activités d'exploration, sont très balisées et laissent peu de place à l'erreur et, par le fait même, à la réflexion. Par exemple, on demande à brûle-pourpoint « *Que peux-tu dire du produit XY ?* », la réponse étant dans l'encadré qui suit. Le principal but de l'activité est de déterminer un truc pour trouver la règle de la variation inverse. Interroger l'élève sur la possibilité pour une courbe de croiser l'axe des abscisses ou des ordonnées ne devrait être que l'aboutissement d'un processus pédagogique, mais à la toute fin d'un processus didactique. En privilégiant, encore une fois, le passage du numérique au graphique, on passe à côté de l'essentiel : la variation d'une variable par rapport à une autre qui, rappelons-le, est le fondement du concept de fonction.

4.1.9.3 Activité d'exploration 3

L'objectif de cette troisième activité est d'amener l'élève à modéliser une situation à trois variables à l'aide de fonctions linéaires et de variations inverses. Elle devrait, selon le guide, permettre à l'élève de faire des liens entre ces deux fonctions et leurs réciproques respectives. La première question demande la table de valeurs de la situation géométrique présentée, la deuxième, le graphique et la troisième, la règle. La séquence de la figure 4.3 est réitérée. Encore une fois, la source pour déterminer l'équation et le graphique, c'est la table de valeurs. On peut présumer que l'omniprésence de cette séquence permanente de passages entre différents registres obnubilera, chez l'élève, « la vision » du concept de fonction. En accordant un rôle si important au registre numérique par rapport aux autres registres, on risque de renforcer l'idée que seule une table de valeurs suffit pour tracer une courbe. Une table de valeurs, comme nous l'avons précédemment souligné, n'est qu'un échantillon pris au hasard de couples possibles de la fonction, c'est une représentation partielle et arbitraire.

4.1.10 Analyse quantitative de la section 3 : la nature didactique des exercices proposés dans les sections *Mise en pratique*.

Tableau 4.3 Analyse quantitative de la section 3

	Type de fonctions				Nature de la fonction				Changement de registres
Problème Analysé	uelconqu	ppartenai une famil	Inverse	Linéaire	Locale	Globale	Statique	Dynamique	
1ab1				1	1		1		7
1ab2				1	1		1		7
1ab3				1	1		1		7
1ab4				1	1		1		7
1ab5			1		1		1		7
1ab6				1	1		1		7
2a				1	1		1		S
2b				1	1		1		G
3				1	1				E
4				1	1		1		1
5				1	1		1		G
6				1	1		1		TV
7			1		1		1		1
9			1		1		1		10
10a			1		1		1		G
10b			1			1		1	G
11				1	1		1		12 et 9
12			1			1		1	12
13			1				1		V
14a				1	1		1		10
15				1					10
16			1			1	1		10
17				1	1	1	1		10
Total	0	0	8	15	18	4	19	2	

La table de valeurs occupe une grande place dans les exercices proposés. On la questionne et on l'utilise pour trouver des équations et tracer des graphiques conférant un statut plutôt statique et local à la nature des problèmes proposés. L'aspect statique et numérique de ces problèmes ne favorise ni la conceptualisation globale du graphique ni la représentation d'un phénomène de covariation. On cherche la plupart du temps le phénomène représenté dans la situation localement c'est-à-dire pour une valeur de la variable « x »ou « y », la valeur correspondante. Or, selon Carlson et al. (2002) ce ne sont pas les questions de nature ponctuelle qui créent des difficultés aux élèves ce sont les problèmes de nature globale. *Intersection* prend pour acquis que ces deux premiers chapitres ont réussi à faire assimiler par l'élève le concept très abstrait de la notion de fonction « in se ». Dans ce troisième chapitre, *Intersection* ose donc mettre l'accent sur les fonctions linéaires, une des facettes du concept fonction. L'objectif de ce chapitre est sinon prématuré du moins d'une méthodologie absconse.

Finalement, la notion de réciproque est réinvestie. On aborde la règle de la réciproque en demandant à l'élève si celle-ci est une fonction ou pas. Confirmant ainsi notre hypothèse que cette notion de réciproque est introduite pour illustrer l'unicité de l'image et pour étudier la variation d'une variable par rapport à une autre. La rubrique *« Ai-je bien compris »* propose seulement un exercice sur la fonction linéaire et un deuxième sur la fonction inverse. À partir d'un point, on exige d'abord de trouver la règle et l'image pour un x donné puis de représenter la fonction et sa réciproque dans un même plan... L'élève doit donc retenir, dans le cas de la fonction linéaire, que le taux de variation est le rapport entre l'y et le x d'un couple appartenant à la fonction et que, dans le cas de la fonction inverse, le produit d'y par x, pour un couple donné, est constant. La suprématie du registre numérique dans ce chapitre est explicitement confirmée : la table de valeurs fournissant toujours les réponses ou des pistes importantes de solution, aux questions. La revue de la littérature portant sur la modélisation proposait de se détacher des valeurs numériques afin de se concentrer davantage sur les variations de la variable dépendante par rapport de la variable indépendante. L'absence de valeurs numériques force l'élève au raisonnement covariationnel et, par le fait même, à acquérir une conception dynamique et globale de la fonction. Cette conception est non seulement souhaitable, mais préalable à celle favorisée par le registre numérique, statique et local.

4.1.11 Analyse qualitative de la section 4 : les intentions didactiques des activités d'exploration.

La section 4, sur les fonctions affines, est la dernière avant celle portant sur la modélisation à l'aide de nuages de points. Elle propose trois activités d'exploration à savoir l'introduction de la notion de paramètre, la règle d'une fonction affine et le cas particulier de la fonction constante.

4.1.11.1 Activité d'exploration 1

La première activité a comme objectif la distinction des fonctions affines, des fonctions linéaires en cherchant à inciter les élèves à s'interroger sur les effets du paramètre *a*. Pour deux situations, une décroissante et une croissante, on demande de calculer deux taux de variations à partir de deux points. Puis l'élève doit conclure sur la représentation du taux de variation dans le contexte et énoncer une conjecture relative aux critères de croissance et de décroissance d'une fonction affine. Le hic c'est que dans un petit encadré adjacent au problème, on explique tous les effets des paramètres « a » et « b » de façon formelle, ce qui jette un doute sur la validité de cette activité. La fonction dans sa globalité est encore ignorée au détriment de la valeur de certains points appartenant à la fonction. Le taux de variation n'est pas introduit dans un esprit de raisonnement covariationnel à l'aide de marches et contre marches, mais dans le but de coller l'image d'une droite décroissante à un paramètre $a < 0$ et d'une droite croissante a un paramètre $a > 0$. Pas un mot sur les effets du paramètre «a » et de l'inclinaison plus ou moins grande de la droite. En somme, l'étude du paramètre à partir de deux points seulement et la conclusion rapide qui associe une courbe au signe du paramètre « a » confère un statut statique et local à cette activité.

4.1.11.2 Activité d'exploration 2

L'activité *De la cueillette à la cuisine* a pour fin de trouver la règle d'une fonction affine à partir d'une table de valeurs ou d'un graphique. Dans un premier temps, on tente de vérifier la nature de la fonction représentée par une table de valeurs (3 points !). Ensuite, on place les points dans le plan cartésien et on trace la droite pour vérifier la nature de la fonction. Le point par point, comme méthode pour tracer un graphique, revient régulièrement dans les activités d'exploration. Le passage du graphique à l'équation est fallacieux puisque deux points sont clairement indiqués dans le graphique, ce qui revient donc à une table de valeurs avec deux points. D'ailleurs, on enchaîne tout de suite dans la section *Ai-je bien compris* avec une série d'exercices dans lesquels on demande de trouver l'équation d'une fonction affine à partir de deux points. La démarche pédagogique de cette section, sommairement explicite et orientée uniquement vers la solution d'équations à partir de deux points, crée chez l'élève un automatisme, mais non une connaissance « intégrée ». Un automatisme contrairement à une connaissance intégrée ne peut servir de levier à l'acquisition d'autres connaissances. Un automatisme est difficilement transférable.

4.1.11.3 Activité d'exploration 3

L'objectif de cette activité est la modélisation de situations dont le taux de variation est nul. Cette fonction, à prime abord, facilement accessible à l'élève, lui est pourtant une grande source de difficultés. La méthodologie est toujours la même. On pose quelques questions menant inévitablement l'élève à la réponse voulue. Avec cette troisième activité, au mieux, l'élève saura associer un graphique d'une droite horizontale à une équation de type $y = b$.

4.1.12 Analyse quantitative de la section 4 : la nature didactique des exercices proposés dans les sections *Mise en pratique*.

Tableau 4.4 Analyse quantitative de la section 4

	Type de fonctions				Nature de la fonction				Changement de registres
Problème Analysé	Quelconque	Appartenant À une famille	Inverse	Linéaire	Locale	Globale	Statique	Dynamique	
1				4	4				E
2				4	4				E
4				1	1		1		TV, V, E
5				7	7		7		7
6a				1					10
6b				1	1		1		7
6c				1	1		1		1
7				1		1		1	6
9				1	1				E
10				1		1		1	10
11				1	1		1		10
13				1		1		1	10
14ab				1	1		1		10
14cde				1	1		1		9
15				1	1		1		9
16			1			1		1	12,7 et10
17a			1			1			11
17b			1			1		1	11
18				1	1				TV
19				1		1		1	6 et 1
20				1	1		1		6 et 1
10-07-02				1	1		1		10
Total:	0	0	3	31	26	7	16	6	

Les fonctions représentées majoritairement sont de nature affine puisque tel est l'objet de cette section. La nature locale et statique des questions donne un portrait très hétérogène de la fonction. Effectivement, ce chapitre clôt l'enseignement de la fonction avec une série de questions de même nature sur le même sujet, soit trouver l'équation d'une fonction affine ou déterminer la valeur d'une variable connaissant l'autre. Comme si la fonction affine était l'ultime aboutissement de l'apprentissage de la fonction ! L'éventail des fonctions présentées en début de chapitre est vite réduit à celui de la droite. Encore une fois, le taux de variation est rarement exploité comme élément dynamique de la fonction affine. Il est souvent donné directement dans le problème et vite associé au paramètre « b ». Il est rarement utilisé pour tracer la droite. On favorise plutôt la table de valeurs pour tracer la droite. On peut d'ailleurs lire dans le guide qu'il suffit de connaître deux points pour tracer une droite. C'est vrai, mais cette assertion rend caduque la méthode de marche et contremarche beaucoup plus dynamique pour tracer la droite. De plus, cette dernière met de l'avant les unités signifiantes et présente un phénomène comme une covariation de deux grandeurs. Carlson et al. (2002), Hitt et Morasse (2009) ne soulignaient-ils pas qu'une conception dynamique de la fonction est une conception souhaitable dès le début de l'apprentissage ?

4.1.13 Analyse quantitative de la section consolidation : la nature didactique des exercices proposés

Tableau 4.5 Analyse quantitative de la section consolidation

Type de fonctions					Nature de la fonction				Changement de registres
Problème Analysé	Quelconque	Appartenant À une famille	Inverse	Linéaire	Locale	Globale	Statique	Dynamique	
1		2				2		2	11
2ab				2	2		2		7
2c			1		1		1		7
2d				1		1			6
2e				1	1		1		9
2f				1	1		1		11
4ab				2		2	2		G
4cdef				4	4		4		TV,E
6				2		2			11
8a			1				1		V
8b				1			1		V
8c				1		1			V
11					1		1		12
14a				1	1		1		12
14b				1	1		1		7
15ab			1			1		1	10,11 et 12
15cd			1		1		1		
17				1	1		1		7
19	1					1		1	11
20abc				1	1		1		9
20d				1		1		1	
23				1	1		1		10,11 et 12
24				1	1		1		10
25				1	1		1		10
26				1	1		1		10
27				1	1		1		9 et 11
28ab				1	1		1		9
28c			1		1		1		11 et 12
Total:	1	2	5	26	22	11	26	5	

La section consolidation a comme objectif de résumer l'ensemble des apprentissages déjà effectués. Nous y constatons la prédominance des exercices portant sur la droite. À toute fin pratique, on a complètement délaissé dans les problèmes de révision la diversité des fonctions ainsi qu'une étude de nature qualitative. Pourtant le manuel y a consacré deux sections entières. En guise de consolidation, on ne met l'accent que sur l'aspect linéaire et statique de la fonction oubliant les prémisses sur lesquelles il a commencé à édifier son concept image.

4.2 Conclusion : Ce que nous indique l'analyse du manuel *Intersection*

Activité d'exploration et *Mise en pratique* diffèrent grandement dans leur démarche pédagogique. *Activités d'exploration* a comme principal objectif la transmission de la matière par l'appropriation des formules et du vocabulaire. *Mise en pratique*, dans les sections 1 et 2, propose des problèmes pertinents et variés. Cependant, comme il arrive souvent à *Intersection*, dans *Mise en pratique,* les questions deviennent, trop tôt, de nature locale et statique pour s'attaquer à son réel objectif, les fonctions affines et linéaires. *Intersection*, par son approche ponctuelle, isole, les uns des autres, les éléments étudiés comme s'ils n'appartenaient pas au même phénomène de covariation. La plupart des problèmes des sections 3 et 4 confèrent au graphique un aspect statique en ne se préoccupant que de ses valeurs précises, annulant, du coup, le dynamisme des 2 premières sections. Selon Carlson et al. (2002), l'appréhension du concept de fonction passe, entre autres, par le raisonnement covariationnel.

Tableau 4.6 Tableau cumulatif de la nature des problèmes portant sur les fonctions dans de l'ensemble des sections

Problème Analysé	Quelconque	Appartenant À une famille	inverse	Linéaire	Locale	Globale	Statique	Dynamique
128	25	8	16	79	74	51	67	39
%	20%	6%	12%	62%	58%	40%	52%	30%

Le tableau final démontre que seulement 30% des problèmes du manuel nécessite un traitement dynamique de la fonction. Cette dernière statistique valide cette autre statistique, à savoir que 74% des problèmes portent uniquement sur les fonctions reliées à la droite. Le raisonnement covariationnel, impliquant le passage d'une description verbale à un mode de représentation sémiotique, semble le contexte idéal pour favoriser une appréhension dynamique du concept de fonction. On retrouve dans le manuel *Intersection* deux types de problèmes. Il y a ceux qui passent de la table des valeurs à l'équation incitant l'élève à un traitement statique et local de la fonction. Puis, il y a les problèmes dont la solution exige la transition d'une situation verbale à l'équation ou à la courbe. Ce processus favorise ordinairement un traitement dynamique de la fonction. Comme il arrive souvent dans le manuel *Intersection,* la facture des problèmes (qui sont en fait de faux problèmes) dénature la meilleure des intentions pédagogiques. La congruence des problèmes renforce chez l'élève un automatisme plutôt qu'une vision dynamique de la fonction telle que conçoit, par exemple, Carlson et al.(2002).

Si le traitement dynamique de la fonction est un aspect important dans l'appréhension de la fonction son enseignement, sa didactique se doit d'embrasser toutes ses représentations sémiotiques. : tables des valeurs, équations, graphiques, énoncés. De plus, pour ne pas confondre l'objet mathématique et ses représentations sémiotiques, il faut diversifier les registres de représentation et leur coordination. Il est important, souligne Vinner (1983), de présenter à l'élève des exemples diversifiés et en grand nombre. L'absence d'une telle rigueur didactique dans le manuel *Intersection* développe chez l'élève des automatismes, mais non des habilités pouvant lui servir de base sur lesquelles il pourra ultérieurement édifier d'autres connaissances mathématiques.

La non-exploitation de la réciproque comme élément de réflexion sur la covariation est une erreur méthodologique. En effet, tracer la réciproque d'une fonction donnée graphiquement exige, a priori, la connaissance du « comment » de la variation d'une variable à l'autre. Pourtant, *Intersection* a recours à ce modus operandi pour distinguer une fonction d'une relation. Ce chapitre se termine sur une définition statique à saveur ensembliste de la fonction et un test sur la droite verticale. On peut se questionner sur l'opportunité de faire intervenir le concept de la définition à ce stade-ci de la méthodologie. Il arrive que l'incompréhension de la terminologie fait qu'il ne puisse en désamorcer la complexité et sa signification intrinsèque. Faute d'avoir suffisamment exploré les divers éléments de la fonction, il ne les a pas intégrés. Coupée de ses origines épistémologiques et de leurs interactions, la définition de fonction n'a aucun sens pour l'élève. Pour ce dernier, sur le plan didactique, la définition ne lui est d'aucun secours pour l'aider à résoudre les problèmes du secondaire III. De plus, dommage collatéral, ce processus didactique pourrait altérer chez lui la genèse du concept image de la fonction.

Intersection est un manuel c'est-à-dire un ouvrage didactique qui doit à la fois posséder une rigueur scientifique et une rigueur pédagogique. La pierre d'achoppement de tout manuel réside rarement dans le contenu, mais plutôt dans la rigueur pédagogique de la présentation. Or, *Intersection*, comme nous l'avons vu, exerce une certaine discrimination entre les fonctions en général et celles générées par la droite. Le manuel concentre sur cette dernière la construction du concept-image chez l'élève. La modélisation aurait pu être le chapitre propice à une synthèse des acquis ou la pierre angulaire de l'accès à la notion du concept-image de la fonction. En la réduisant à la droite et à la droite exclusivement, il en fait la pierre d'achoppement sur le chemin de l'acquisition de la connaissance…

4.3 Analyse de la section portant sur les nuages de points dans le manuel *Intersection*

La méthodologie choisie pour cette section varie de celle utilisée pour analyser les chapitres précédents. En regard de notre problématique et des analyses des chapitres précédents, nous tentons de dégager les influences de la modélisation à l'aide de nuages de points sur le concept image de la fonction. Nous procéderons, donc, davantage à une analyse de nature qualitative en soulignant les éléments qui sont en continuité ou en rupture avec ceux mis de l'avant dans les sections précédentes. De plus, nous proposons un tableau de la nature des questions posées par quelques problèmes de ce chapitre : statique, dynamique, continue, discret, globale ou statique. Si les grandeurs en jeu dans les problèmes sont toutes de nature continue, les questions, elles, demandent à l'élève, souvent, de porter un regard local et discret sur la fonction. Finalement, afin d'évaluer la variété des fonctions utilisées, une colonne sur le type de fonction utilisée pour modéliser les nuages de points est nécessaire. Sachant que l'analyse des chapitres portant sur la fonction nous révèle que la droite est omniprésente et que les exercices proposés sont majoritairement de nature locale et statique, nous nous questionnons sur l'apport de ce chapitre. Est-ce qu'il permettra une ouverture du concept ? Un élargissement des natures possibles d'une fonction? Est-ce que la modélisation à l'aide de nuages de points est un contexte favorable au développement du raisonnement covariationnel. Est-ce que l'enseignement du concept de fonction est mis au service de la modélisation ou inversement? L'analyse de ce chapitre est essentielle et préalable à la construction et à l'analyse du questionnaire. Les conclusions de cette section seront nos points de départ pour l'analyse du questionnaire. Elles nous indiquent quels seront nos critères d'analyse de construction du questionnaire.

4.3.1 Section 5 : Les nuages de points

En guise d'introduction, on présente une situation problème, quatre expériences à titre « d'exercices » et une section « *Ai-je bien compris?* » de trois exercices sans contexte. Les quatre expériences proposées demandent de la part de l'apprenant des habiletés identiques : placer des points dans un plan cartésien, tracer la droite la plus appropriée et identifier la fonction. Notons que dans ce chapitre c'est la première mention du terme fonction pour traiter de la distinction d'une fonction affine et linéaire. Nulle part ailleurs dans cette section, on ne fait mention du concept de fonction.

Tableau 4.7 La nature des problèmes du chapitre 5 : La modélisation à l'aide de nuages de points.

	Globale	Locale	Discrète	Continue	Statique	Dynamique	Type de fonction
Activités d'exploration 1							
1		x	x		x		linéaire
2		x	x		x		linéaire
3		x	x		X		linéaire
4		x	x		x		linéaire
Ai-je bien compris?							
1		x	x		x		Linéaire
2		x	x		x		inverse
3		x	x		x		linéaire
Activité d'exploration 2							
A)B)C) D)		x	x		x		linéaire
E) F) G) H)	x			x			linéaire
Ai-je bien compris							
1		x	x		x		inverse
Mise en pratique							
1 a)		x	x		x		linéaire
b)		x	x		x		linéaire
2 1)		x	x		x		linéaire
2)		x	x		x		linéaire
3)		x	x		x		inverse
3					x		1 linéaire
4		x	x		x		Linéaire inverse
5		x	x		x		linéaire
6		x	x		x		Linéaire
7		x	x		x		linéaire

« *Faire le point* » se termine abruptement par un exemple. Il ne mentionne en aucun temps qu'il est possible de tracer une autre courbe que la droite en ne suggérant aucune méthode pour tracer la droite « la mieux ajustée ». Il y est précisé que le but principal de cette modélisation est d'estimer par interpolation ou extrapolation. La modélisation devrait être, pour l'élève, un contexte pour enrichir le concept image de la fonction en favorisant le raisonnement covariationnel et pourtant on la réduit à l'association entre une droite et un nuage de points. Le contexte est vite oublié et on s'intéresse presque exclusivement à la droite. Pire encore, à un point en particulier. Que propose la *Mise en pratique comme exercices ?* On demande de tracer le nuage de points à partir d'une table de valeurs, de tirer une droite en soulignant certains points en particulier. Encore une fois, les questions sont de nature locale et confèrent au graphique un aspect statique. Un seul problème est modélisé par un inverse, mais, même dans ce cas, l'élève devra conclure que ce n'est pas la meilleure courbe pour représenter le nuage de points. Tout comme les chapitres portant sur les fonctions se concluaient par la droite, ce chapitre du manuel *Intersection* fait référence uniquement à la droite comme outil de modélisation. La modélisation à l'aide de nuages de points est présentée comme finalité à l'apprentissage du concept de fonction, plus précisément la droite. En somme, le nuage de points est présenté comme un ensemble de points d'un plan cartésien qui correspond aux couples de valeurs observés dans une relation entre deux variables. L'interpolation et l'extrapolation sont les principaux objectifs de ce chapitre. Ces deux opérations sont définies comme l'estimation d'une variable à partir des tendances que l'on peut dégager d'un nuage de points. La modélisation à l'aide de nuages de points, tel que présenté par le manuel *Intersection*, implique un passage entre deux systèmes de registres de représentations sémiotiques, c'est-à-dire du système spécifique aux nuages de points, au système spécifique de la notion de fonction. Chaque système de représentations s'est construit en vase clos, le premier dans les chapitres portant sur la fonction et le deuxième dans le chapitre sur la modélisation. (figure 1.1)

Les visées pédagogiques pour le manuel *Intersection* quant à la modélisation à l'aide de nuages de points sont réduites à la droite comme pour les chapitres portant sur la fonction. À partir de la droite qui modélise un phénomène, on effectue un retour à la case de départ : le nuage de points est alors oublié et seule, l'étude de la droite importe. C'est elle qui est la source des solutions: elle permet d'extrapoler ou d'interpoler. Encore une fois le passage du registre numérique à graphique est préconisé. Le processus de modélisation est alors perçu comme un passage obligé mais sans intérêt. Ce faisant, il se peut que l'essentiel soit oublié, à savoir le passage entre le phénomène observable et le modèle, la possibilité avec les nuages de points d'utiliser des situations concrètes et signifiantes, la facilité de donner des exemples de situations non fonctionnelles, la capacité de discuter de la relation d'indépendance entre les deux variables comme celle d'intégrer l'enseignement des statistiques à celui des fonctions.

4.4 Résumé et analyse de l'entrevue de l'enseignant

Parce que dans le cadre scolaire, le processus d'apprentissage est largement influencé par l'enseignant, il importe de connaître sa propre conception de la fonction et les moyens qu'il préconise pour l'enseigner. Les choix pédagogiques de l'enseignant seront certainement marqués au coin de son propre cheminement dans l'appréhension du concept de fonction, d'où la pertinence de l'interroger sur ce propos, sa pratique et la didactique privilégiée dans son enseignement. On s'intéresse d'abord à sa conception de la fonction, ensuite, à sa démarche pédagogique quant l'enseignement des nuages de points.

L'enseignant accorde une grande importance à la définition de la fonction. Il préconise la définition moderne de la fonction. D'ailleurs, c'est cette dernière qu'il a proposée aux élèves, dès le début de son enseignement. Le test de la droite verticale et les fonctions comme sous- ensemble des relations sont aussi des éléments de son enseignement. Lorsqu'on lui présente deux définitions, une de nature statique et l'autre de nature procédurale, il choisit la première comme définition à soumettre à ses élèves. Toutefois, il souligne que la deuxième est probablement plus proche du raisonnement actuel de l'élève c'est-à-dire «qu'elle donne l'idée de calculer et d'avoir une formule... elle s'approche plus du procédé. » Il justifie son choix en disant que la première « a l'air d'une définition plus large. » Elle permettrait, selon lui, d'introduire des fonctions différentes, qui n'ont pas nécessairement des équations. Il donne, comme exemple de fonctions, des règles d'associations entre deux ensembles d'éléments pouvant être des noms, des numéros ... « J'aime l'association d'éléments de deux ensembles quoique ce soit et qu'on puisse utiliser ou non la représentation graphique ou équation... : C'est une fonction pareille ! » Ainsi, nous pouvons affirmer, sans aucun doute, qu'il possède une conception moderne de la fonction et que celle-ci influence largement son enseignement. Lorsque nous questionnons l'enseignant sur le concept de fonction, il fait régulièrement référence à la définition. Selon lui, l'enseignement de la fonction passe par sa définition et l'écriture fonctionnelle. Pour cette raison, il croit que l'enseignement de la fonction ne devrait pas se faire en troisième secondaire.

Chercheur : Trop tôt? ... Mais, en général, dans la formation au secondaire, cela doit prendre une place centrale dans le programme de mathématique ? Ou pas ? :

Enseignant : Avec toute la tendance à appliquer les mathématiques et en faire des outils utiles du quotidien, je ne sais pas... Je trouve que c'est une branche fondamentale des mathématiques, mais est-ce que cela doit prendre autant de place dans le programme au secondaire étant donné le renouveau pédagogique et le programme? Et, si on est cohérent avec tout ça, est-ce que cela doit vraiment prendre autant de place? C'est une bonne question. Je ne suis pas convaincu qu'un élève peut très bien voir la droite, les règles et même la parabole sans parler, à proprement dit, de la fonction. Par contre, si on s'en va vers les 436 ou les maths plus fortes où est-ce qu'ils vont s'en aller en sciences et qui vont faire du calcul différentiel? Là, c'est évident qu'il va falloir mettre plus d'emphase sur la fonction comme c'est le cas dans le programme.

Chercheur : Pour toi, qu'est-ce que cela veut dire : enseigner la notion de fonction ? Cela touche à quoi ? Comme tu disais, avant on enseignait les variations sans dire le mot fonction. Est-ce que c'était un enseignement qui touchait tout de même le concept de fonction?

Enseignant : Avant, même sans dire le mot, on associait...parce que là, l'idée c'est qu'on fait la même chose sauf que... c'est juste qu'on dit c'est quoi une fonction et on met plus d'emphase sur le fait que chaque variable indépendante va rejoindre au moins un élément de ma variable dépendante.

L'unicité de l'image occupe une place importante dans le concept de fonction pour cet enseignant. Or, comme nous l'avons soulignée dans la problématique, l'unicité de l'image n'est pas une nécessité. Les mathématiciens et physiciens ont opéré et modélisé sans se soucier de celle-ci pendant longtemps ! En accentuant l'enseignement de la fonction sur l'unicité, on demande aux élèves de faire un grand saut dans la genèse de la fonction. La définition ensembliste modélisée, la plupart du temps par des diagrammes sagittaux, s'en retrouve souvent abstraite et dénuée de sens pour les élèves du secondaire L'analyse épistémologique nous a conduits à poser que c'est l'idée de dépendance qui fonde les concepts de fonction et de variable plutôt que celle de l'unicité de l'image.

Lorsqu'on demande les difficultés ou fausses conceptions rencontrées par les élèves Il répond encore en termes de définition et d'écriture fonctionnelle.

Chercheur : Est-ce qu'il y a d'autres raisonnements ou conceptions ?

Enseignant : En termes de définition, il n'y a pas vraiment de conception erronée, cela a bien passé. Encore, aujourd'hui, si je fais deux graphiques : lequel est une fonction? Et lequel n'est pas une fonction? C'est vraiment clair dans leur tête. Conceptions erronées? ...Toutes les propriétés en contexte, restent un peu vagues. En théorie, cela doit être fait en contexte et avoir du sens. En pratique, il y a quand même beaucoup de vocabulaires à apprendre.. Une autre affaire, si on embarque dans la fonction et qu'on veut y aller à fond, même en secondaire 3, c'est quand même, en mathématiques, un sujet assez central et on a besoin, si on veut explorer le sujet de fond en comble, et on veut parler avec les bons mots. Ce n'est pas tout à fait maîtrisé. Par exemple, la notation par crochets, ça c'est très difficile. Si on veut écrire un ensemble de nombres : un crochet ouvert ou fermé? ...Ah! Je veux dire un intervalle. Cela ne veut pas dire qu'il ne peut pas le dire : il a seulement de la misère avec l'écriture un peu comme les f(x) »

Chercheur : Est-ce qu'il y aurait d'autres raisonnements qui sont reliés à la fonction, autres que l'idée que pour un x donné un seul...?

Enseignant : Mais la fonction en tant que telle ou comparée à avant ?

Il fait une distinction claire entre le concept de fonction moderne de nature ensembliste et celui, plus ancien, lié au concept de variation et de dépendance. En posant cette question, l'enseignant démontre que l'enseignement de la fonction et celui des variations tels que présentés dans l'ancien programme, sont, pour lui, deux choses distinctes plutôt que deux passages obligés consécutifs à l'appréhension de la fonction. Selon Sfard (1992), les connaissances procédurales doivent précéder les connaissances objets. C'est-à-dire que le concept de fonction vu comme une variation devrait précéder la conception ensembliste. Le passage de la conception processus à la conception objet de la fonction exige, de la part de l'apprenant, un saut cognitif important. Le changement de paradigme est un processus complexe.

Chercheur : Non, en général. Avant d'enseigner la définition de la fonction quels sont les raisonnements que tu dois aller toucher qui sont liés au concept de fonction?

Enseignant : Ha! O.K. Et bien! Le premier, si on veut bien comprendre la définition, c'est le premier que j'ai dit. Aussi, souvent, avec la règle, y est isolé, le graphique aussi

> ... Ensuite, parler de la variation, cela serait important pour différencier les différents types de fonctions. En secondaires trois et quatre, on fait l'étude des variations des fonctions. Aussi, la notation qui est nouvelle. Qui, avec des élèves de secondaire 3, peut arriver à leur montrer ... comment la notation fonctionnelle peut être utile mais je ne suis pas convaincu qu'ils sont convaincus de l'utilisation. Bien souvent le f(x) va devenir y parce que dans le fond on dit que f(x) est égal à y...Une fonction, ce n'est pas une règle, ce n'est pas une équation, c'est une loi ou un... c'est une association entre deux...ça c'est des concepts qu'il faut travailler. La fonction, c'est.... les graphiques, les équations, le diagramme sagittal ... ce sont des modes de représentation mais la fonction en tant que telle c'est l'association entre les éléments de deux ensembles. Mais ça je ne suis pas certain que les élèves en secondaire trois font vraiment la distinction. »

L'enseignant démontre une compréhension de la définition du concept de fonction. Par contre, il ne semble pas avoir ajusté son enseignement à ces difficultés et confond définition et concept de fonction. Nous ne croyons pas que la définition, surtout la moderne, devrait être introduite au début de l'enseignement. Il faut plutôt multiplier les exemples et varier les contextes afin que l'élève construise son propre concept image de la fonction.

La modélisation, nous l'avons souligné à maintes reprises, devrait servir de point d'appui à l'enseignement de la fonction. Nous cherchons à déceler dans cette partie de l'entrevue si l'enseignant a saisi l'occasion d'enrichir le concept de fonction en créant des ponts entre l'enseignement des nuages de points et de la fonction.

> Chercheur : Les nuages de points t'ont permis d'enrichir leur conception de la fonction ou d'ouvrir des portes que tu n'aurais pas pu ouvrir dans un autre contexte ?
>
> Enseignant : Liés à la fonction ? Par définition? Non

On revient encore à la définition, comme si le concept de fonction résidait dans sa définition.

> Chercheur : Pas nécessairement lié à une définition...Par exemple, d'autres raisonnements nécessaires à la compréhension de la fonction.
>
> Enseignant : Oui, la notion de dépendance. Cela ouvre une porte aux statistiques... Ah! Oui, j'ai peut-être parlé trop vite. Dans un NP, tu peux avoir plusieurs y pour un même x. Par exemple, je peux avoir (9,12) (9,13) (9,20)... donc, à prime abord, mon NP n'est pas une fonction mais on peut tracer une droite de régression qui, elle, en est

> une. C'est sûr qu'on peut discuter. Mais je ne suis pas convaincu que ... Moi, je trouve que c'est une bonne affaire de faire ça si (trop de bruit ambiant?)... parce que la cueillette de données ... On doit faire des expériences. On peut en faire ou ne pas en faire, mais ils aiment ça en faire. Mais, est-ce que je pense que c'est essentiel pour la fonction ? Non.

Encore une fois, on revient sur l'unicité de l'image... Pour lui, la modélisation à l'aide de nuages de points est plus un outil d'application qu'un prétexte à introduire la fonction.

> Chercheur : Est-ce que c'est le bon moment, au début de l'enseignement de la fonction, de faire les NP ?
>
> Enseignant : Là, ils l'ont vue. Ils ont commencé à voir la différence entre une fonction linéaire, affine et inverse. C'est bon, parce que, en statistique, la droite de régression, c'est des droites. Ils ont vu leur outil, c'est assez frais dans leur mémoire, ils l'appliquent. Oui, on utilise notre outil fonction en statistique ou pour modéliser. C'est vrai que, dans le livre, il introduit le NP et la notion de fonction avec ça.... Mais je ne suis pas vraiment d'accord parce qu'il y a des élèves qui s'en vont au CEGEP et ça leur prend une définition plus formelle. Historiquement, on n'a pas inventé les fonctions pour faire des nuages de points.

Nous croyons que l'enseignant fait un saut cognitif important. En troisième secondaire, nous en sommes à l'introduction du concept de fonction. La définition plus formelle n'est pas nécessaire à ce moment. De plus, les nuages de points sont à l'origine du concept de fonction. L'enseignant fait sûrement référence au concept moderne de fonction. En fait, il est passé de Descartes au groupe de Bourbaki avec ses élèves en quelques jours.

> Enseignant : Essentiellement, ce que j'ai fait avec eux, c'est une réactivation de l'an passé : recherche d'une règle de proportionnalité et un travail sur les variables dépendantes et indépendantes. Sans voir « affines et linéaires » en profondeur. On a juste regardé les tables de valeurs. J'ai beaucoup insisté sur les bonds de la variable indépendante et dépendante. Tout au long de mon enseignement, j'ai beaucoup insisté là-dessus. Par exemple, pour trouver le taux de variation, jamais j'ai montré y_2-y_1 sur x_2-x_1. Cela a toujours été. On fait des bonds et, ensuite, on regarde les bonds des y sur les bonds des x. Ensuite, j'ai vu la définition de fonction. On a « faite » des graphiques, des tables de valeurs et des équations et, ensuite, on fait des droites. Cela ressemble à *Intersection* finalement.

4.4.1 Conclusion de l'entrevue de l'enseignant

L'enseignant accorde une grande place dans son enseignement à la définition moderne de la fonction. L'unicité de l'image, traduite par le test de la droite verticale, est centrale dans son enseignement. Selon lui, cet aspect de la fonction est un incontournable à l'appréhension de la fonction et les difficultés associées à la fonction résident, surtout, dans le fait de commencer l'enseignement de la fonction, dorénavant, en secondaire trois. Conscient de l'importance de l'étude des fonctions en tant que variations, il débute ainsi son enseignement. Par contre, il fait le saut rapidement à une conception plus moderne de la fonction. Il impose ainsi un changement de paradigme important aux élèves en un court laps de temps. Processus qui peut s'avérer difficile et source de conflits cognitifs. L'enseignant démontre une bonne compréhension du concept de fonction, mais, à notre avis, il vise un niveau de compréhension inaccessible pour des novices sur un sujet aussi complexe que la fonction.

4.5 Présentation du questionnaire et compilation quantitative des résultats

L'enseignement des nuages de points se fait, dorénavant, en troisième secondaire dans un contexte de modélisation. Les seules fonctions connues par ces étudiants sont les fonctions linéaires, affines et inverses comme le ministère de l'Éducation le prescrit. Ils amorcent donc la modélisation à l'aide de nuages de points sans une conception approfondie de la notion de fonction. La modélisation doit être un prétexte à l'ouverture sur un éventail très large de fonctions. La droite étant le seul outil de modélisation cette ouverture est impossible. Introduit trop tôt, l'enseignement des nuages de points comme outil de modélisation pourrait-il avoir des conséquences néfastes sur le développement du concept de fonction et sur le processus de modélisation en soi? Nous tenterons de déceler, par ce questionnaire, des indices des effets possibles d'un tel enseignement.

4.5.1 Question 1

L'enseignement de la fonction au secondaire se limite à celui de la droite et à une brève parenthèse sur la fonction inverse. Lors de l'enseignement des nuages de points, seules, ces fonctions sont réinvesties comme outil de modélisation. Nous proposons donc, dans cette question, quatre modèles valables pour un même nuage de points. Afin de vérifier si, pour l'élève, d'autres modèles sont envisageables pour représenter un nuage de points.

Voir figure 3.3 et 3.4

La question 1 est à choix de réponses avec justification. Dans un premier temps nous avons fait un dénombrement des graphiques choisis.

Tableau 4.8 Résultats des choix de réponses obtenues à la question

Graphiques	nombre
1	3
2	6
3	14
4	0
Total	23

Aucun n'a choisi le premier graphique et une majorité a choisi le troisième soit la droite. Deux types de justifications sont mis de l'avant. Certains font référence à la régularité de la droite : « Le graphique 3 est une droite tandis que les autres sont en lignes courbées ou brisées. » Un étudiant donne la même réponse et ajoute « De plus, dans les graphiques où il y a des nuages de points la ligne doit être toujours une ligne droite. » Un autre fait davantage référence à la nécessité de la régularité : « car elle continue graduellement de la même façon. » En somme, seule, une courbe continue et régulière peut représenter un nuage de points soit la droite!

Certains se justifient à l'aide de la méthode apprise en classe soit la modélisation à l'aide de la droite qui représente la moyenne des points : « Car elle est mieux alignée pour représenter la moyenne des points. » , « Le nuage de points est fait pour déterminer la *moyenne* si on peut dire des coordonnées. Pour faire cette moyenne, c'est plus efficace avec une seule ligne droite. » Pour ces derniers, un nuage de points doit être représenté par une droite parce qu'elle représente la moyenne des points.

Tableau 4.9 Justifications données pour le graphique 3 de la question 1

Justifications	**Nombre**
1. Courbe régulière et continue.	**7**
2. Seule, une droite représente la moyenne des points du nuage de points.	**6**
3. Elle passe par la plupart des points	**1**
TOTAL	**14**

Six étudiants ont choisi le graphique 2. Tous justifient ce choix par le fait que cette courbe est celle qui touche le plus de points ou qui est le plus près de la majorité des points, à savoir « C'est le graphique 2 parce que c'est celui qui a le plus de petits carrés qui touchent à la courbe. » Un étudiant ajoutera : « Car il relie le plus de points ensemble comparé aux autres graphiques et les courbes donnent une idée plus réaliste du nuage de points. »

Tableau 4.10 Justifications données pour le graphique 2 de la question 1

Justification	**Nombre**
1. Touche le plus de points	**6**
TOTAL	**6**

Seulement trois étudiants ont choisi le premier graphique qui se présentait comme un compromis entre le deuxième et le quatrième. La courbe est composée de segments de droites et passe par le plus de points possibles. Ils justifient leur choix en ces termes : « Car la ligne passe en moyenne entre les points. », « La ligne prend la moyenne des valeurs des points. », « Car c'est une ligne droite et il y a plusieurs points qui la touchent. »

À la question un, une grande majorité (14/23), a choisi la droite comme modèle du nuage de points. Nous ne remettons pas en cause la justesse de cette réponse, mais bien le manque de diversité dans les réponses données. On sent qu'une fausse conception est en train de s'installer. Nous l'avons maintes fois souligné, dans la modélisation, il y a un suremploi de la droite à l'aide de nuages de points. Cela contribue largement à la réduction du concept image de la fonction. Or, la modélisation devrait permettre un éclatement de la conception de la fonction trop souvent réduite aux caractéristiques de la droite en troisième secondaire. La modélisation par les nuages de points étant historiquement à l'origine du concept de fonction, il faudrait, en classe, rester fidèle à cette histoire comme en toute saine pédagogie et enseigner ce concept dans toute son amplitude et ne pas se limiter à la droite. Si certains élèves ont un souci de représenter le mieux possible le nuage de points en choisissant une courbe qui « passe par le plus de points possibles », d'autres se réfèrent à la droite parce qu'elle représente mieux « la moyenne des points. » L'enseignement de la modélisation de nuages de points à l'aide de la droite représentant la moyenne des points a influencé largement leur conception de la modélisation. Les élèves, tout au long du questionnaire et de l'entrevue, y font régulièrement référence. Tout comme dans la moyenne arithmétique, la moyenne des points peut être dénuée d'intérêt selon la dispersion des données et, dans ce cas, peut-être qu'une autre courbe représenterait une meilleure alternative… Aucun étudiant, dans le questionnaire, ne discute de la pertinence de cette moyenne symboliquement représentée par la droite. En somme, les élèves utilisent des arguments véhiculés par l'enseignant mais qui ne sont pas ad hoc à la situation et ce, sans se questionner sur la pertinence de ces derniers. C'est ce que que Knuth (1984), nomme schème de conviction externe.

4.5.2 Question 2

Étant donné que le travail fait avec les nuages de points se résume à transposer des données dans un graphique et à coller la droite la plus conforme au nuage de points obtenu, il se peut que, ce faisant, on esquive l'essentiel. D'autant plus que, la droite tracée, le nuage est oublié : retour à la case départ c'est-à-dire à l'étude de la droite. Dans ce contexte, plusieurs questions s'imposent. Un élève peut-il reconnaître une fonction différente de la droite ? Peut-il reconnaître une situation non fonctionnelle ? (Graphiques 2 et 3) Considère-t-il le nuage de points comme une représentation de la fonction ? (Graphiques 3 et 4)

Voir figure 3.5

Tableau 4.11 Réponses obtenues à la question 2

Graphiques	**Oui, c'est une fonction**	**Non, ce n'est pas une fonction**	**Pas de réponses**	**Taux de réussite sur 23**
1	**23**	**0**	**0**	**23**
2	**1**	**22**	**0**	**22**
3	**5**	**18**	**0**	**18**
4	**16**	**6**	**1**	**16**

De prime abord, la question semble bien réussie et les nuages de points sont reconnus comme des représentations valables de fonctions. Par contre, une lecture attentive des justifications de ces mêmes réponses dévoile certaines contradictions. La définition de fonction, pour ce groupe, comme le démontre l'entrevue avec l'enseignant, a été centrale lors de l'introduction à la fonction. La moitié des justifications, d'ailleurs, utilise la définition formelle ou plutôt une dérivée de celle-ci pour justifier leurs réponses. D'autres justifications font surtout appel aux caractéristiques de la droite telles que « Une fonction doit être régulière », « C'est une droite » et encore plus précisément : « Elle est linéaire », « C'est une fonction affine y=x+0,5 » : autant de facettes de leur concept image de fonction. N'oublions pas que la droite est le principal modèle étudié par ces derniers. Il est donc normal qu'ils y fassent largement référence. Comme le souligne Vinner (1983), lorsque l'enseignement d'un concept débute avec le concept définition, peu à peu, celui-ci sera déformé avec le temps, afin de porter les couleurs du concept image de l'apprenant. Il en résulte un concept image déformé du concept définition ou un concept image dans lequel aucune trace du concept définition ne subsiste. Ce concept image, issu d'un contexte limité à la droite, ne peut pas contenir de fonctions avec lignes brisées ou irrégulières sans équations mathématiques équivalentes. Alors comment expliquer le haut taux de réussite aux questions 3 et 4 ? Tel que confirmé dans l'entrevue avec l'enseignant, la définition formelle de la fonction a occupé une niche importante dans l'enseignement de ce concept. De plus, on sait que la définition a été traduite graphiquement par le célèbre test de la droite verticale. L'élève répond donc adéquatement par oui ou par non à la question, pour l'unique raison qu'il manipule bien le test en question. Le problème c'est la logique sur laquelle il appuie ses réponses. Ignorant la définition originale de la fonction et la fonction même représentée par les nuages de points, il se réfère à son propre concept image « déformé avec le temps » (Vinner, 1983)

Tableau 4.12 Justifications présentées à la question 2

Graphiques	**Justification Adéquate**	**Justification Inadéquate**	**Pas de réponses**
1	**23**	**0**	**0**
2	**10**	**10**	**3**
3	**13**	**5**	**5**
4	**3**	**11**	**9**

Voici un échantillon de ces justifications. :

Élève 1 : Graphique 1 « Oui, taux de variation constant »,
Graphique 2 « Non, pour un x il y a plusieurs y »
Graphique 3 « Non, pour le 4 des x il y a plusieurs y »
Graphique 4 « Non, son taux de variation n'est pas constant »

Pour infirmer, cet élève utilise la définition et pour confirmer, il utilise une caractéristique de la droite. Au graphique 4, il ne reconnaît pas une fonction, mais il ne peut utiliser la définition pour appuyer son affirmation....

Élève 2 : Graphique 1 : « Oui, c'est une droite linéaire »
Graphique 2 « Non, pour un x il y a deux y »
Graphique 3 «Non, ça monte et ça descend »
Graphique 4 « Oui, ça fait juste descendre »

Pour plusieurs, comme pour cet élève, les justifications varient selon le graphique présenté. Quoiqu'il n'y ait pas de corrélation entre le type de justification et le graphique présenté, on note un malaise quant aux éléments à utiliser pour justifier la réponse si le graphique ne représente pas une fonction connue. Ainsi, le taux de réussite au graphique 1 est de 100% : 13 ont justifié leurs réponses en nommant la fonction reconnue ou une de ses caractéristiques et 10 ont donné la définition de fonction. Cette question est un exemple rencontré à multiples occasions dans le manuel, dans les notes de cours et les exercices.

Le graphique 4 est celui qui cause plus de soucis aux élèves. Seuls ceux qui connaissent la définition y répondent correctement. Beaucoup ne reconnaissent pas une fonction mais ne peuvent pas utiliser la définition comme pour le graphique 3 pour l'infirmer : il n'y a pas deux images pour un même élément du domaine.... Ce qui peut expliquer les espaces vides! Voici quelques exemples de justification donnés pour ce graphique.

Élève 1 : « Pas une fonction. Je ne connais pas alors selon moi non. »
Élève 2 : « Les points peuvent se relier faisant une fonction »
Élève 3 : « Oui, ça fait juste descendre » (Cet élève a relié les points du nuage de points)
Élève 4 : « Non, son taux de variation n'est pas constant »
Élève 5 : « Elle a beau ressembler à une fonction inverse ce n'en est pas une car il n'y pas de logique. Points n'importe où » (Cet élève a tracé une droite entre les points)

De toute évidence, face à un graphique d'une fonction différente de celles vues en classe, les élèves sont démunis et se réfèrent à leur concept image largement imprégné de la droite ou d'une courbe continue. Comme nous l'avons souligné auparavant, l'enseignement des nuages de points comme outil de modélisation est un choix discutable. L'enseignement de celui-ci, comme la modélisation, devrait servir de prétexte pour enrichir le concept de fonction plutôt que de le restreindre à la droite. Or, nous constatons, à cette question, que ce n'est pas le cas. La connaissance de la définition de la fonction n'est pas garante de son appréhension. Savoir ce n'est pas comprendre. Lorsque la courbe est « régulière », le test de la droite verticale suffit à l'élève pour discriminer une fonction d'une relation. Par contre, ne reconnaissant pas d'emblée une courbe régulière dans le graphique 4 et n'y retrouvant pas de points superposés, l'élève se rabat sur son concept image pour justifier sa réponse. Le concept définition est mis de côté. Il n'a plus de sens pour l'élève. L'entrevue avec l'enseignant nous montre que le concept définition a été introduit avant que l'élève n'ait le temps de s'approprier lui-même le concept et qu'il ne possède pas un concept définition. Vinner (1983) souligne que la définition formelle n'est pas nécessaire à cette construction. Le concept définition introduit trop tôt peut être oublié ou déformé et remplacé par un concept image

4.5.3 Question 3

À cette question, nous avons, dans un même graphique, deux représentations d'une même situation : l'une représente la situation réelle et l'autre, le modèle mathématique. La confusion entre les données réelles et le modèle est prévisible dans ce contexte. Une telle situation nous incite à vérifier si l'élève peut faire la différence entre le modèle et les valeurs observées du nuage de points. De plus, par cette question, nous cherchons à comprendre comment l'élève peut réinvestir les connaissances acquises sur la fonction dans le chapitre des nuages de points. Voir figure 3.6.

4.5.3.1 Question a)

À l'entrevue et dans certaines justifications des autres questions, les élèves font régulièrement référence à la droite comme objet mathématique pratique de par sa régularité et la possibilité de trouver son équation. Or, aucun élève n'a recouru à la règle afin de remplir la table des valeurs correspondant à la droite. Tous ont trouvé des valeurs approximatives dans le graphique même pour les valeurs absentes du graphique, ayant, pour la plupart, prolongé la droite. Pourtant, la méthode à favoriser serait d'abord de trouver l'équation de la droite et, ensuite, de calculer celle-ci pour trouver une donnée par extrapolation. Comme les fonctions et les nuages de points sont étudiés en deux temps, les transferts d'un chapitre à l'autre ne sont pas automatiques. D'autres ont complété la table en faisant des bonds de trois soit le bond apparaissant le plus fréquemment. Aucun élève n'a obtenu une table de valeurs avec des bonds réguliers.

Tableau 4.13 Réponses obtenues à la question 3

Type de réponses	**Nombre**
Table de valeurs complétée approximativement à l'aide du graphique..	**14**
Table de valeurs incomplète. Les valeurs données sont des valeurs approximatives obtenues dans le graphique.	**9**

4.5.3.2 Question b)

Trois catégories de réponses ont été retenues pour cette question. Quelques-uns décrivent physiquement la position du point à x=4 du nuage de points par rapport à celui de la droite à la même abscisse : « x=4 pour la table de valeurs de la droite est plus bas que x=4 de la table de valeurs 1. » Il y a ceux qui font référence au rôle de la droite : «… car la droite est la moyenne de la table de valeurs. » Parfois, la justification est fausse mais elle appartient, tout de même, à cette catégorie, par exemple : « La droite ne peut pas représenter tous les points du nuage de points seulement ceux qu'elle rencontre. » Finalement, étant donné l'écart notoire entre les deux images, dans la troisième catégorie, certains le justifient en faisant référence aux données superflues ou aberrantes : « C'est une donnée qui est aberrante, ce qui explique les différences entre les deux tables de valeurs » et, plus subtilement,: « C'est probablement du temps, donc, quelqu'un a commencé plus tôt pour une quelconque raison..»

Tableau 4.14 Réponse obtenue à la question 3

Catégories	**Nombre**
Comparaison de l'emplacement des deux images dans le graphique	5
Référence au rôle de la droite de régression	7
Données aberrantes ou superflues	5
Aucune réponse	6

Lors de l'analyse du questionnaire, nous avons réalisé que la valeur choisie dans le nuage de points, pour faire la comparaison, était une valeur trop éloignée de celle de la droite. Les élèves justifiaient cet écart par le fait que c'était tout simplement, une donnée superflue. Le but de cette question étant de comparer le modèle et le nuage de points, nous avons proposé une tâche équivalente à l'entrevue mais avec un contexte. L'ajout de ce dernier permet des justifications plus élaborées et plus variées et par le fait même d'approfondir cette problématique en questionnant davantage la signification de la droite obtenue par rapport au nuage de points et à la validité des prédictions faites à partir de cette droite. Cette question est, donc, davantage élaborée à l'entrevue. Toutefois, nous pouvons affirmer que la distinction entre le modèle et les valeurs observées du nuage de points demeure nébuleuse pour l'élève. À l'entrevue, nous avons effectivement constaté que l'élève pouvait davantage élaborer sur cette différence. Par contre, les arguments étaient davantage de nature instinctive que mathématique. Le contexte influençait leur réponse.

Voici quelques justifications données dans le questionnaire.

> Élève 1 : « Car on fait une droite dans un graphique de points, c'est une moyenne des réponses pour nous donner une idée »
> Élève 2 : « La valeur quatre est montée rapidement puis retombée à la normale .
> Élève3 : C'est que dans le nuage de points le quatre est une unité relativement aberrante. »
> Élève 4 : « La droite doit se situer le plus près de tous les points, mais le point quatre est plus éloigné des autres points. »

Élève 5 : « La première table est le nuage de points et le deuxième est la ligne qui représente le mieux le nuage de points »

En somme, ceux qui parlent de donnée aberrante ou superflue comparent cette valeur aux autres valeurs du nuage de points et ne répondent pas à la question : comment expliquer la différence d'images à x=4 entre la table de valeurs donnée et celle construite à partir de la droite. D'autres utilisent l'idée de moyenne sans trop élaborer sur le sujet : comme s'ils récitaient leurs notes de cours. Plusieurs demeurent silencieux sur la question. Nous étudierons davantage la capacité de l'élève à faire la distinction entre le modèle et les valeurs réelles à l'entrevue.

4.5.4 Question 4

Nous voulons, avec cette question, vérifier si l'élève trace une droite pour modéliser le nuage de points malgré l'illustration du vase indiquant qu'il y a deux temps au graphique. La majorité (20 étudiants) a placé les points dans le plan cartésien et relié les points. Quelques-uns ont inversé les variables indépendantes et dépendantes. Un seul étudiant a seulement placé les points dans le plan cartésien, sans les relier et deux étudiants ont tracé une droite passant entre les points. Voir figure 3.7.

Tableau 4. 15 Réponses obtenues à la question 4

Catégories de réponses	**Nombre**
Une courbe qui relie les points du nuage de points.	**20**
Une droite passant entre les points du nuage de points.	**2**
Un nuage de points	**1**
Total	**23**

À l'entrevue, nous avons constaté que le graphique obtenu n'était pas perçu comme un nuage de points. Les élèves n'ont pas reconnu un problème de modélisation à l'aide de nuages de points, ce qui explique, peut-être, le petit nombre d'élèves qui ont eu recours à la droite. Si nous avions donné le nuage de points correspondant à la table de valeurs donnée, il se peut que le nombre de droites tracées pour le modéliser ait été plus grand. Comme nous l'avons vu à l'analyse des autres questions, l'idée qu'un nuage de points ne se modélise que par une droite est une croyance bien ancrée.

4.5.5 Question 5

Le seul type de modélisation prévu au programme est celui à l'aide des nuages de points. Par cette question, nous voulons vérifier si l'élève peut modéliser une situation dans laquelle il n'y pas .de valeurs explicites données. Toutes catégories de réponses confondues, il y a 14 étudiants qui ont eu recours à des valeurs fictives afin de tracer leur courbe. Le tiers a tracé une droite et presque la moitié a reconnu qu'il devait y avoir quatre temps au graphique. Voir figure 3.8

Tableau 4.16 Réponses obtenues à la question 5

Catégorie de réponses Représente la situation avec	**Nombre**
Quatre segments de droite	**4**
Une courbe en quatre temps	**6**
Une courbe quelconque	**5**
Une droite	**8**
Total	**23**

On ne peut affirmer avec certitude que l'usage excessif de la droite dans la modélisation à l'aide de nuages de points est à l'origine de l'utilisation de la droite pour modéliser cette situation. Par contre, nous pouvons émettre comme hypothèse que l'utilisation de différentes courbes à des fins de modélisation de nuages de points permettrait une certaine ouverture d'esprit dans la laquelle un vaste éventail de possibilités serait envisageable comme représentation graphique d'une situation. L'automatisme de la représentation d'une situation par une droite serait, peut-être, alors remis en question. Ajoutons que l'enseignement mettant plus en valeur le raisonnement covariationnel, raisonnement central à l'appréhension de la fonction, aurait probablement permis une plus grande réussite de ce problème (Carlson et al. 2001). La modélisation étant une application courante du concept de fonction, c'est avec cette approche qu'on doit favoriser l'enseignement de la fonction. La modélisation doit permettre l'étude du « comment » les variables changent afin d'enrichir le concept image de fonction (Carlson et al. 2002). Carlson et al. (2002), Hitt et Morasse (2009), Passaro (2006), proposent des tâches de cette nature dans leurs études. Ils démontrent que la construction de graphique dans un contexte de fonction dynamique est un incontournable. En préconisant la modélisation à l'aide de nuages de points, il se peut que l'essentiel soit esquivé… .

4.5.6 Question 6

La modélisation à l'aide de nuages de points amène l'élève à travailler davantage avec la table de valeurs. Lors d'une expérimentation, les données sont recueillies dans une table de valeurs et, ensuite, étudiées. Ces données ne représentant qu'un échantillon des couples possibles, la représentation partielle et la discrétisation d'une fonction continue sont possibles. La conception de la droite, seule fonction étudiée au secondaire, s'en trouve modifiée. De plus, le point par point comme méthode pour tracer une droite pourrait refaire surface. Cette méthode, largement critiquée et bannie de nos manuels scolaires, encourage une conception statique de la droite ce qui n'est pas souhaitable au début de l'apprentissage du concept de fonction. Conséquemment, nous tentons d'évaluer si la méthode pour tracer une droite a changé, suite à l'enseignement des nuages de points, et de cerner les effets possibles sur la conception de la fonction. L'élève a le choix entre tracer la droite à l'aide de l'équation tel qu'enseigné au chapitre précédent : placer la valeur initiale et, ensuite, trouver un deuxième point à l'aide du taux de variation (marche-contremarche) ou utiliser la table de valeurs. Il est difficile d'évaluer sur papier les raisons de ce choix. Il est peut-être plus rapide de prendre les points fournis par la table pour tracer une droite. L'efficacité n'est pas un vice en mathématique bien au contraire. Par contre, il est indéniable que le recours au point par point atrophie une vision dynamique de la fonction, peu importe les motifs de ce choix. Voir figure 3.9.

Tableau 4.17 Réponses obtenues à la question 6

Catégorie de réponses	Nombre
Trace uniquement les points de la table de valeurs	2
Trace les points et les relie. Le domaine est limité à celui donné par la table de valeurs.	12
Trace les points et les relie. Le domaine est de 0 à l'infini	8
Utilise l'équation. (marche contre-marche)	1
Total	23

4.5.7 Question 7

La modélisation à l'aide de nuages de points met l'accent sur certaines valeurs au détriment du phénomène dans son ensemble. Selon nous, elle favorise le local au détriment du global et une conception discrète à celle d'une conception continue de la fonction. En donnant un contexte correspondant à un nuage de points, l'élève exprime sa perception de ce dernier et nous permet de voir quelles caractéristiques ce type de modélisation met en exergue. Il reste à déterminer si ce dernier peut être profitable à un enrichissement du concept image de la fonction ou y faire obstacle. Voir figure 3.10

Tableau 4.18 Locale - globale

Catégories de réponses	**Nombre**
Description locale : Point par point	9
Description globale	11
Aucune réponse	3
Total	23

Tableau 4.19 Discrète -continue

Catégories de réponses	**Nombre**
Situations discrètes	8
Situations continues	12
Aucune réponse	3
Total	23

Ils font tous référence à un phénomène observable et non à un modèle. Les contextes sont souvent empruntés au domaine de l'économie : le profit en fonction du temps. Ce comportement aurait la même explication que celui des élèves modélisant les nuages de points avec des segments de droites : ils réinvestissent, à tort ou à raison, ce qu'ils ont appris lors de l'enseignement des diagrammes à lignes brisées.

Certains élèves donnent un contexte s'apparentant à une fonction par parties. Cela soulève une autre problématique, à savoir si la modélisation à l'aide de nuages de points est un contexte pertinent pour introduire les fonctions par parties. Du moins, il aurait été intéressant de différencier les diagrammes à lignes brisées et les fonctions par parties. Voici un exemple de contexte donné.

« Une entreprise d'ordinateurs est fondée durant les trois premières années les profits ne cessent de croître, jusqu'à ce qu'une nouvelle compagnie soit fondée mais après un an de faillite, c'est alors que notre entreprise lance une nouvelle gamme d'ordinateurs qui fera beaucoup de profits jusqu'à l'année 6, un nouveau système d'exploitation est introduit, dû à un manque de fiabilité les acheteurs sont moins nombreux, mais à l'année 7 l'entreprise déménage ses usines dans un autre pays, le coût de production est alors réduit jusqu'à l'année 8, une loi sur le salaire des employés est mise en place, cela fera donc légèrement baisser les prix. » (Une seule phrase!!! Pas de points...comme s'il suivait le graphique et qu'il ne pouvait pas s'arrêter avant la fin de celui-ci...)

Il est à noter que cet élève a relié les points du nuage de points donné afin, peut-être, qu'il s'apparente à un diagramme à lignes brisées. Voici d'autres exemples, mais cette fois-ci, il est de nature plus globale`

> « Une entreprise calcule et produit un graphique des profits réalisés au cours des dix dernières années. Ce graphique servira lors d'une convention. »
> et
> « Francis veut savoir à quelle heure de la journée il fait le plus chaud. Il place un thermomètre dehors et vérifie à chaque heure »

L'élève donne un contexte global ayant un début et une fin. Il ne peut fournir plus d'informations que ce que le graphique donne. Dans les deux cas, les variables indépendantes et dépendantes sont inversées. Huit élèves ont donné des contextes discrets. De plus, comme nous le verrons à l'analyse des entrevues, afin de s'assurer de la pertinence d'un contexte, les élèves vérifient si la valeur des coordonnées de chacun des points est en accord avec ce contexte. Les élèves donnent plus d'importance aux points du nuage de points qu'au sens dans lequel évoluent les variables. Or, nous avons souligné que le raisonnement covariationnel est un élément clé à l'appréhension de la fonction. Selon Carlson et al. (2002), le raisonnement *covariationnel* réfère à l'activité cognitive impliquée dans la coordination de deux quantités variables lorsque nous observons la façon dont elles changent l'une par rapport à l'autre. Un élève possède ce type de raisonnement lorsqu'il peut verbaliser sa compréhension des variables en jeu, le sens de leur variation et noter le changement d'inclinaison, si nécessaire, de la droite. Certes, ce problème ne nous permet pas d'affirmer qu'un élève donnant un contexte discret n'a pas ce type de raisonnement. Par contre, nous pouvons dire que cet élève ne considère pas les caractéristiques du graphique qui favorise le raisonnement covariationnel et par le fait même bloque sa propre appréhension de la fonction. Voici un exemple de contexte discret.

> « Plusieurs personnes jouent à un jeu. Au début personne ne veut jouer. À une minute, 2 personnes décident de commencer. À chaque minute, une manche finie, et d'autres personnes peuvent s'ajouter. À 2 minutes, 3 autres personnes s'ajoutent. À 3 deux autres s'ajoutent. À 4 il reste le même nombre de personnes. À 5, 2 personnes de plus. À 6, 4 personnes. À 7, 1 personne se retire. À 8, ils sont rendus 16. À 9 minutes, 18. À 10, 19 personnes. Ainsi de suite. »

Cet élève donne une phrase pour chaque point du nuage de points. Il ne perçoit pas une covariation entre deux variables : Plus le temps avance plus le nombre de joueurs augmente. Mais bien un ensemble de valeurs d'une situation discrète.

Un deuxième exemple plutôt original qui est à la fois discret et global. L'élève donne un contexte global, mais souligne les motifs engendrant des points qui ne suivent pas le sens des autres données du nuage de points : deux points juxtaposés et un point qui est en dessous de la moyenne.

> « Un enfant a sa première dent à l'âge de deux ans. Plus il avance en âge, plus nombreuses sont ses dents. À l'âge de trois ans, son nombre de dents reste stable jusqu'à 5 ans. À 7 ans, l'enfant perd une dent. »

Finalement, un élève donne un contexte qui s'apparente aux contextes souvent rencontrés pour les fonctions linéaires. Comme quoi un pont entre ces deux domaines d'études est possible et souhaitable !

« Jérémy marche (chaque) jour pour aller au travail, un jour il constate qu'à chaque 2 secondes, il fait environ 4 mètres. »

Le mot « environ » est important. Ce mot explique pourquoi les points ne sont pas parfaitement alignés. Cet élève comprend la différence entre un phénomène observé et le modèle. Il a d'ailleurs tracé la droite dans le nuage de points donné. Nous croyons que la modélisation à l'aide de nuages de points est un contexte favorable pour faire ce type d'apprentissage. Le nuage de points et la droite étant dans le même graphique, il est plus aisé pour l'enseignant de discuter de la différence entre le modèle et le phénomène observé en accompagnant l'élève dans une perception du concept de fonction tout en respectant son historicité. Nous reviendrons sur ce point à l'entrevue.

En somme, le point par point étant mis de l'avant par la modélisation à l'aide de nuages de points, ce contexte choisi par le MELS pour l'enseignement de la fonction peut s'avérer un catalyseur au développement d'une conception statique, discrète et ponctuelle de la fonction. Ce qui, comme nous l'avons souligné, n'est pas souhaitable puisque le raisonnement covariationnel, qui est davantage de nature dynamique et globale, devrait être au centre de l'enseignement de la fonction en troisième secondaire.

4.5.8 Question 8

Dans l'article Statis and Change, Smith (2003) affirme qu'un élève possédant une conception dynamique de la fonction pourra verbaliser la relation entre deux ensembles de nombres tandis qu'un élève ayant une conception statique de la fonction utilisera surtout une équation. Nous n'avons pas retenu cette question parce que, isolée, elle ne nous permettait pas de conclure. De plus, les réponses sont trop disparates.

4.5.9 Question 9

À cette question l'élève doit verbaliser ce qu'il perçoit du graphique d'un nuage de points. L'étude des nuages de points peut amener l'élève à se concentrer davantage sur certaines valeurs plutôt que sur l'ensemble du phénomène et par le fait même contribuer à une conception plus discrète et locale de la fonction. La modélisation à l'aide de nuages de points, telle que vue par le manuel, a comme principal objectif d'extrapoler ou d'interpoler. Dans cette perspective, la corrélation entre les deux grandeurs est prise pour acquise. À quoi bon extrapoler s'il n'y pas de relation entre les deux grandeurs ? Or, comme nous le soulignons à l'analyse des entrevues, les élèves extrapolent et interpolent, même s'ils ont un doute quant à la fiabilité de la courbe tracée. Nous croyons que l'approche préconisée par le manuel et les recommandations du ministère, favorise une méthode algorithmique. L'intérêt principal de la modélisation à l'aide de nuages de points est la possibilité de discuter d'un lien entre les deux variables et de représenter cette relation graphiquement par le modèle le plus adéquat. Nous croyons que cela est impossible dans un contexte où le seul modèle présenté est la droite dont la validité n'est jamais remise en question. Nous essaierons de vérifier ces hypothèses à la question suivante.

4.5.9.1 Question 9a)

Tout comme pour la question 7, les élèves décrivent soit des contextes explicites du « comment » varient les deux variables soit chacun des points ou soit les différentes variations sur des intervalles donnés. 10 étudiants sur 23 ont souligné, toutes catégories de réponses confondues, qu'il y a deux groupes de 24 étudiants dont le niveau de bruit correspondant diffère. Probablement que le « test de la droite verticale » utilisé régulièrement dans le chapitre précédent, influence leur perception du nuage de points. : Deux points alignés verticalement pourraient indiquer qu'il y a, selon eux, quelque chose qui

« cloche »...D'ailleurs, parmi ces élèves, certains soulignent « que le graphique montre que ce n'est pas une fonction car il y deux classes de 24 personnes. »

Tableau 4.20 Réponses obtenues à la question 9a)

Catégories de réponses	**Nombre**
Identifie le sens des variables	13
Donne une description point par point	6
Donne différentes variations sur des intervalles donnés	1
Autres réponses	3

La plupart des réponses de la 1ère catégorie verbalisent leur perception du graphique ainsi : « moins il y a d'élèves, plus le niveau de bruit est grand. » Réponse aussi valable pour la droite modélisant le nuage de points qui, soulignons-le, est absente du graphique présenté. En ajoutant des précisions telles que: « Le graphique montre que plus il y a de gens, moins il y a de bruit. À 24 personnes, le niveau de bruit diminue pour ensuite augmenter à 26 personnes », on se rapproche davantage de données issues d'un phénomène observé que d'un modèle. La variation n'est pas parfaite. À l'autre extrême, les élèves dans leurs descriptions font complètement abstraction de la coordination de la variation des deux variables en tandem et décrivent la valeur de chacun des points. En voici un exemple : « Le graphique montre que la classe de 21 élèves (la plus petite) fait le plus de bruit et que la classe de 29 élèves (la plus grosse) fait le moins de bruit. Les classes 24, 24, 26 et 27 font un niveau de bruit entre 60 et 40, soit 60, 40, 50 et 40 respectivement » ou plus subtilement « Le graphique montre le niveau de bruit dans différentes classes selon le nombre d'élèves. »

Encore une fois, il n'est pas faux d'affirmer que le graphique nous informe sur le niveau de bruit pour différents groupes. Le lien de causalité entre ces deux grandeurs est effectivement discutable, comme le soulignent cet élève et plusieurs autres à la question d (13 sur 23):

« Le graphique montre que les classes moins nombreuses sont relativement plus bruyantes que les classes plus nombreuses, cela est seulement bon pour les classes qu'ils ont étudiées. On ne pourrait pas utiliser cela comme une statistique. »

Tout comme à la tâche deux, les élèves interpolent et extrapolent sans se soucier de l'existence ou non d'une relation entre les deux grandeurs. Il y a contradiction entre les différentes réponses. D'une part, les élèves affirment qu'il n'y a pas de relation entre les grandeurs et, d'autre part, ils verbalisent une relation décroissante entre celles-ci. Ce quiproquo démontre bien que la modélisation à l'aide de nuage de points ne puisse se faire sans l'apport des statistiques. C'est-à-dire qu'avant de tracer et d'utiliser la courbe modélisant le nuage de points, il serait préférable de questionner le lien entre les deux variables. Raisonner sur les nuages de points demande habituellement un passage entre une table de valeurs et une représentation graphique. Il faudrait y ajouter une interprétation statistique avant de passer aux registres spécifiques de la fonction. En fait cette « évaluation » devrait être une condition sine qua non du passage entre les deux systèmes.

Par exemple, il pourrait évaluer approximativement le coefficient de corrélation, déterminer, si possible, la règle de la courbe qui représente le mieux le lien représenté. Au passage, il se sensibiliserait au fait qu'une corrélation forte n'implique pas nécessairement un lien de causalité. En effet, une relation entre deux variables peut être tout simplement fortuite. Il se peut aussi qu'un autre facteur soit en jeu. En somme, le lien de cause à effet n'est pas garanti par la présence d'une courbe ajustée au nuage de points. Une réflexion sur le sujet s'impose.

4.5.9.2 Question 9 b), c) et d)

Ce quiproquo est probablement la source de la confusion aux questions suivantes. Le sens commun nous dit que, en général, dans une classe plus il y a d'élèves plus il y aura de bruits. Or, le graphique illustre le contraire. De plus, le sens commun nous dit aussi que le bruit d'une classe varie selon bien d'autres facteurs : la discipline de l'enseignant, le type d'élèves, la matière… Alors comment partager ce que le sens commun nous dit ce que le graphique illustre ? Les élèves ne sont pas préparés à de telles situations. Pour ces raisons, certains démontrent quelques contradictions dans leurs réponses. Ainsi, un élève peut ne pas répondre à la question b (Quel est le niveau de bruit pour une classe de 23 étudiants ?) parce que ponctuellement la réponse dépend du contexte et du même coup répondre en a) : si le nombre d'élèves augmente, le niveau du bruit baisse ou augmente selon qu'il se fie au sens commun ou au graphique… Donc, dans un premier temps, il ne peut pas répondre pour un cas particulier, mais dans un deuxième temps il affirme que globalement il y a une relation.

À la question b) et d), on constate aussi une contradiction. Certains trouvent un niveau de bruit à associer à une classe de 23 étudiants, valeurs absentes du graphique et affirment à la question d) qu'il n'y a pas de relation entre les deux grandeurs. À la question b), l'élève répond au contrat didactique établi en classe : à tout nuage de points, on peut associer une droite et à partir de celle-ci extrapoler et interpoler. Tandis qu'à la question d), il se sert de son jugement : « Je ne crois pas que cela à rapport avec les personnes en classe : Si ce sont de bons élèves ou si ce sont des pies… »

Nous avons soulevé le point que la modélisation à l'aide de nuages de points encourageait la fausse conception qu'à une fonction est toujours associée une équation. Un élève affirme à la question d) qu'il ne peut pas répondre à cette question parce que nous ne pouvons pas déduire de règle car il y a deux classes de 24 étudiants (donc ce n'est pas une fonction). Certes, un seul élève ne permet pas de confirmer l'hypothèse que la modélisation à l'aide de nuages de points encourage cette fausse conception, mais témoigne d'un raisonnement possible et s'ajoute à ceux qui ont exprimé une conception similaire dans d'autres questions.

4.6 Résumés et analyses des entrevues avec les élèves

Nous avons fait trois entrevues d'élèves de première année du deuxième cycle. Les entrevues sont complémentaires au questionnaire de recherche. L'entrevue se divise en deux parties. Dans un premier temps, nous proposons deux tâches afin de palier à certaines faiblesses du questionnaire de recherche que nous expliciterons plus bas. Ensuite, nous effectuons un retour avec l'élève sur le questionnaire afin d'approfondir certains points dont les réponses écrites ignoraient certains aspects. Une réponse sur papier c'est plutôt statique et souvent coupé du raisonnement originel. L'entrevue permet, donc, de poser des questions plus ouvertes et d'enrichir les réponses déjà données.

Pour faciliter la lecture des analyses, nous présentons le résumé et l'analyse, question par question plutôt qu'un élève à la fois. Une brève discussion suivra chacune des parties de l'entrevue dans laquelle nous soulignons les grands traits généraux. Puis, à la toute fin, nous résumerons globalement l'entrevue de chacun des élèves en soulignant les points à retenir.

4.6.1 Première Partie de l'entrevue : tâche 1

La première tâche est un problème similaire à la question trois, mais avec un contexte facilitant l'élaboration et la justification des réponses. Nous avons aussi demandé de trouver l'équation de la droite afin de vérifier si le passage des registres spécifiques au nuage de points à ceux de la fonction est une voie possible.

Registres spécifiques au nuage de points	*Registres spécifiques à la fonction*

Nuage de points → Droite de régression → Droite → Équation table de valeurs

Suite à l'analyse à priori du manuel et de l'entrevue de l'enseignant, nous avons constaté que les deux systèmes évoluent en vase clos. L'analyse du questionnaire démontre aussi une confusion possible quant à la signification et au rôle de la droite. La modélisation de la droite est un outil permettant surtout de trouver la moyenne des points. Le lien entre cette droite/outil et la droite représentant une fonction linéaire est nébuleux ou absent. Comme historiquement, la modélisation est à l'origine du concept de fonction, nous croyons que l'enseignement des nuages de points devrait servir de point d'appui à l'enseignement des fonctions ou, du moins, de prétexte à l'enrichissement du concept image de fonction chez les élèves. Tel que souligné dans la problématique, les deux systèmes de registres ne devraient pas être vus séparément. Un aller et retour entre les deux est souhaitable, voire nécessaire. (Voir figure 3.14 : Première partie de l'entrevue : Tâche 1)

4.6.1.1.1 Corinne: tâche 1

Corinne ne se souvient plus de la méthode pour trouver l'équation. Elle sait qu'il faut une valeur initiale et cherche des points qui « arrivent justes », mais elle ne sait qu'en faire. Elle complète sans problème la table de valeurs en les prenant sur le graphique. Lorsque la coordonnée n'est pas entière, elle inscrit la réponse « à peu près » sans aucune hésitation. Habituellement, lorsqu'il s'agit du modèle, nous devrions être à la recherche de valeurs précises et utiliser au besoin l'équation…À la deuxième question : La hauteur de la plante après cinq jours ? L'élève démontre, d'abord, une fragilité dans sa conception du modèle :

> Chercheur : Après 5 jours, quelle est la hauteur de la plante ?
> Élève : Non. Ce n'est pas 15… À peu près 13.
> Chercheur : Pourquoi as-tu choisi 13 cm ?
> Élève : Ah! Non, je me suis trompée.
> Chercheur : C'est correct. Les deux réponses peuvent être bonnes. Je veux seulement savoir pourquoi tu as choisi celle-ci.
> Élève : J'avais choisi le premier point mais avec la droite que vous avez tracée, c'est 15 la réponse.
> Chercheur : Tu n'as pas l'air certaine : 13 ou 15 ?
> Élève : Hé! Bien moi, je pense que c'est 13 parce que c'est déjà le point initial. Après, c'est une moyenne. »

Spontanément, elle rejette 15 cm. Lorsque l'on questionne son choix, elle change sa réponse. Habituellement la réponse se trouve sur la droite, alors elle hésite. Une fois rassurée que les deux réponses peuvent être justes, elle revient à sa première idée. Intuitivement, si on permet ce type de raisonnement, l'élève peut faire une différence entre la valeur observée et la valeur modélisée.

4.6.1.1.2 Christopher: tâche 1

Après s'être assuré que la table de valeurs donnée correspondait au nuage de points et non à la droite, il construit sa propre table de valeurs avec des valeurs données par la droite. À l'aide de « bonds » et de la valeur initiale, il détermine l'équation de la droite. La méthode utilisée correspond à celle enseignée. Il remplit la table de valeurs en faisant des bonds réguliers. À la deuxième question, il répond 15, sans hésiter, en justifiant sa réponse ainsi « C'est la réponse donnée par la droite. » Dans le manuel, les exercices portant sur les nuages de points demandent d'extrapoler ou d'interpoler les réponses se trouvant toujours sur la droite. On ne questionne jamais le nuage de points. Une fois la droite tracée, le nuage de points est oublié et, seul, le modèle est étudié. Or, après 5 jours, la plante mesurait bien 13 cm. C'est la valeur observée! Pour une autre plante de même nature et plantée dans les mêmes conditions ou pour des valeurs absentes de la table issue de l'expérimentation, on utiliserait le modèle comme source de réponses. Il y a confusion entre la nature des deux tables de valeurs.

4.6.1.1.3 Étienne : tâche 1

Après beaucoup d'hésitations, l'élève se souvient de la méthode pour trouver l'équation de la droite et la détermine par la méthode apprise en classe. Étienne complète la table de valeur à l'aide de l'équation. Il détermine la hauteur de la plante après 5 jours à 15 cm parce que « C'est plus mathématique. Ça va mieux si on peut dire. » Alors que 15 cm est la valeur modélisée et 13 la valeur réelle, il préfère celle du modèle. Le modèle est retenu au détriment des valeurs observées… Comme nous l'avons souligné dans la problématique, ce type de modélisation peut encourager une méthode algorithmique dénuée de sens si elle se limite à coller une droite au nuage de points. Ce type de modélisation a été vu comme un outil d'application et non comme catalyseur à l'enrichissement du concept de fonction. Par conséquent, seul le modèle est retenu sans souci pour sa signification et son rôle dans le contexte donné.

4.6.2 Première partie de l'entrevue : tâche 2

La deuxième tâche nous aidera à compléter les analyses de l'élément 9 du questionnaire de recherche, afin de connaître le rôle de la droite dans le concept image de l'élève. On sait qu'elle représente, pour la majorité des élèves, une moyenne, mais aussi un outil de prédiction, une indication de la corrélation entre les variables et finalement, elle indique dans quel sens les grandeurs varient. Le modèle, comme nous l'avons maintes fois souligné, est mis de l'avant et les valeurs obtenues par observation oubliées et ce, souvent, peu importe la validité du modèle. (Voir l'analyse de la question 9.) Du même souffle, un élève peut dire que la bonne réponse est celle du modèle et critiquer la fiabilité de ce dernier... (Voir figure 3.15 Première partie de l'entrevue : tâche 2)

4.6.1.2.1 Corinne: tâche 2

L'information lue par Corinne concerne uniquement le sens de la covariation des grandeurs : « Je peux dire que plus les femmes travaillent moins il y a d'enfants. » Elle est capable d'interpoler à partir de la droite. Elle ne cherche pas à trouver l'équation de la droite. Si on questionne la réponse obtenue, elle la met en doute pour deux raisons : la valeur est obtenue par approximation sur la droite et elle n'est pas certaine de l'existence d'un lien réel entre les deux grandeurs. Selon elle : « C'est deux choses différentes (le % de femmes actives et le nombre de naissances.) On les a mis ensemble et ça donne cela. Dans la vraie vie, il n'y a pas de liens. » Elle utilise des données aberrantes afin de justifier cette dernière affirmation. La droite de régression est perçue comme un objet géométrique qui représente la moyenne des points. Elle sert à interpoler et extrapoler, mais elle est coupée du phénomène dont elle est issue. C'est pourquoi un élève peut prédire une valeur avec la droite tout en affirmant qu'il n'y a pas de liens entre les deux grandeurs et, par conséquent, que la réponse trouvée ne vaut pas grand-chose... Le modèle et le phénomène sont traités séparément...en vase clos.

4.6.1.2.2 Christopher : tâche 2

Christopher veut trouver le pourcentage de femmes au travail correspondant à 28 naissances pour mille femmes. Il n'est pas certain s'il doit trouver la réponse dans le nuage de points ou la droite. Son discours démontre une confusion dans leur perception: il parle de nuage de points en indiquant la droite et vice-versa.

> Chercheur : Bon! Les valeurs données représentent la situation de différentes régions. Un représentant d'une certaine région qui ne fait pas parti de cette étude, aimerait connaître le pourcentage de femmes au travail dans sa région sachant qu'il y a 28 naissances pour mille femmes. Est-ce que tu peux l'aider?
> Élève : On peut trouver ce qu'il y a dans la table mais... pour 30... On veut avoir le pourcentage?
> Chercheur : Oui:
> Élève : Par rapport à cette table...oui, je peux. On choisit 28 (*Il déplace son crayon sur le graphique.*) et on cherche la variable dépendante dont y. Je suis mêlé avec le nombre de naissances et le %.
> Chercheur : Sur l'axe des x, c'est le nombre de naissances pour mille femmes et sur l'axe des y le % de femmes au travail.
> Élève : O.K. donc, on regarde ici sur le nuage de points quelle valeur correspond. (*Pointant la droite.*)
> Chercheur : La droite ou le nuage de points?
> Élève :Le nuage de points. (*Indiquant une coordonnée sur la droite.*)
> Chercheur : La droite t'indique quoi ?
> Élève : En moyenne ce que serait le %.

4.6.1.2.3 Étienne: tâche 2

Etienne déclare spontanément que le graphique nous donne peu d'informations : « On ne peut pas dire grand-chose. Il y a quand même des familles qui travaillent et qui ont beaucoup d'enfants. » Il ajoute que la seule information que l'on peut en tirer c'est qu'une des variables est dépendante de l'autre et ce, pour n'importe quel nuage de points. En résumé, pour cet élève, il n'y a pas de lien entre les deux grandeurs selon sa connaissance du sujet, même si le graphique indique qu'il y a une relation de dépendance entre elles. Il y a, ici, confusion entre ces deux concepts. Quant à la prédiction du pourcentage de femmes actives, il hésite. Il donne une réponse tout en l'alléguant imprécise...Tout ce dont il est assuré c'est que la réponse obtenue est une moyenne. Il ne s'interroge pas sur la validité du modèle et des relations implicites et/ou possibles entre les grandeurs. Encore une fois, on donne une réponse même si on ignore le lien entre les deux grandeurs

4.6.3 Conclusion de la première partie de l'entrevue

Dans les trois cas, on met en doute la fiabilité du modèle mais on trouve tout de même une réponse. Nous ne croyons pas être dans une situation similaire à celle de « l'âge du capitaine » dans laquelle l'élève répond à la question peu importe la pertinence de la question puisque la question permet de ne pas y répondre: « Est-il possible de trouver... » L'élève obéit aux règles implicites d'un contrat didactique : On trace un nuage de points, on établit une droite représentant la moyenne des points, puis on interpole ou extrapole selon la question demandée. La validité du modèle est peu questionnée dans les exercices du manuel. De plus, les élèves n'ont pas de moyens « mathématiques » soit une formule soit un raisonnement pour valider leur modèle. Ils se réfèrent plutôt à leur expérience ou connaissance sur le sujet. Il aurait été intéressant de jumeler l'enseignement de la statistique à celui du nuage de points et de la fonction pour qu'ils puissent, par eux-mêmes, juger de la valeur du modèle et en interpréter correctement les valeurs.

4.6.4 Deuxième partie de l'entrevue : retour sur le questionnaire de recherche

Nous avons construit la deuxième partie de l'entrevue *Retour sur le questionnaire de recherche* après avoir analysé les lacunes dans les réponses d'un premier questionnaire écrit. Le but étant d'inciter les élèves à articuler leurs raisonnements, l'entrevue est de nature semi-structurée. Par exemple, les réponses aux questions 1 et 4 sont revues ensemble puisque, dans la majorité des cas, il y avait un conflit potentiel. À la première question, une forte majorité (14 sur 23) a choisi la droite comme modèle en soulignant que seule une droite peut modéliser un nuage de points. Or, à la quatrième question, seulement deux élèves ont choisi la droite pour modéliser le nuage de points. Est-ce le contexte qui a influencé ce choix ? Le problème, différent de ceux proposés par le manuel, est –il reconnu comme un problème de modélisation à l'aide d'un nuage de points ? C'est ce que nous tenterons de cerner, entre autres, avec la deuxième partie de l'entrevue.

4.6.4.1 Corinne : questions 1 et 4

Corinne est convaincue que, seule, une droite peut modéliser un nuage de points parce que « Oui, moi ce que j'ai appris c'est qu'il n'y pas de ligne brisée ou de courbes. Il faut une droite » et «je n'ai jamais vu ça avec des courbes comme ça... » Lorsque nous lui demandons de justifier sa réponse à la question 4 (trois segments de droites reliant les points), elle revient à la question un et dit que le graphique 3 est « peut-être bon..., mais certainement pas celui-là (elle pointe le $4^{ième}$). » Elle justifie sa réponse à la question 4 parce que, ayant vu la bouteille et « comment ça coule, dit-elle, elle diffère d'une droite. » On note deux éléments importants, le contexte et la variété des problèmes de modélisation sont importants et nécessaires. Le but de notre recherche n'étant pas de créer des conflits cognitifs afin de corriger la fausseté de certaines conceptions nous n'avons pas insisté davantage sur le sujet.

4.6.4.2 Christopher : questions 1 et 4

Christopher est sans compromis « C'est une seule ligne droite qui doit représenter tout. Pas deux. (Pointant le graphique 1) Je sais que la ligne doit être droite pour un nuage de points et, encore moins, la graphie 4 ! » À la question 4, Christopher est confus. Il ne sait plus si la table de valeurs est un nuage de points. Il calcule quelques « bonds » et constate que la table de valeurs ne représente ni une droite ni une fonction inverse. Il ne peut pas trouver une règle correspondante. Il en conclut que c'est un nuage de points ! La conception, fausse d'ailleurs, que pour toute fonction il y a une règle associée, est connue. Or, la modélisation à l'aide de nuages de points, telle qu'observée dans le cadre de cette recherche, loin de contrer cette conception fallacieuse et erronée, contribue à la renforcer.

4.6.4.3 Étienne: questions 1 et 4

Au retour sur la question un, Etienne est sans compromis : Seule, une droite et pas autre chose, peut représenter un nuage de points parce qu'elle représente une moyenne. Il est tellement convaincu qu'à la question 4, il met en doute que la table des valeurs données soit une représentation d'un nuage de points.

> Chercheur : Tantôt tu me disais que c'est la droite qui représentait le mieux le nuage de points. Ici, ce n'est pas un nuage de points ?
> Élève : Non, c'est juste...certaines...Je ... :
> Chercheur : Prends ton temps. Je te laisse réfléchir.
> Élève : Ouais! j e crois seulement que c'est des valeurs qui....
> Chercheur : C'est quoi un nuage de points ?
> Élève : Un nuage de points c'est des valeurs comme celles-ci...(*Rires*)
> Chercheur : Ah !
> Élève : Ouais...!
> Chercheur : Alors est-ce que c'est un nuage de points?
> Élève : Cela pourrait en être un mais, comme ça, ça décrit un peu mieux la situation. Ça montre plus la manière que ça se remplit.
> Chercheur : Est-ce que d'autres choses que des droites peuvent représenter un nuage de points ?
> Élève : heu... ! (*Long silence.*) Je ne crois pas que ce soit un nuage de points. Dans le fond, non. C'est plus des nuages de points et un graphique. Comme ça, ça ne veut pas vraiment dire la même chose. Un nuage de points, c'est une moyenne et ça, c'est pour bien décrire comment le vase s'est rempli.

L'idée que seule une droite peut modéliser est fortement ancrée. Nous avons souligné dans la problématique qu'il serait préférable d'utiliser ce type de modélisation lorsque l'élève aura intériorisé un concept image de la fonction plus riche et complexe. À ce moment, il sera en mesure d'envisager d'autres fonctions : exponentielle, escalier, par partie... pour modéliser un nuage de points. Il sera aussi plus facile d'enrayer cette fausse conception.

4.6.5 Deuxième partie de l'entrevue: question 2

4.6.5.1 Corinne : question 2

Pour cette élève, le concept de fonction se résume aux exemples étudiés en classe. La modélisation à l'aide de nuage de points n'a pas permis d'étoffer sa conception personnelle de la fonction. Pour Corinne, les nuages de points et les fonctions sont deux univers distincts. La présence de ces deux représentations dans un même graphique crée une confusion.

> Chercheur : À cette question tu devais m'indiquer si c'était une fonction ou pas. À celle-ci, tu dis que ce n'est pas une fonction (graphique 2). Pourquoi?
> Élève : Je ne sais pas parce que je n'ai jamais vu ça.
> Chercheur : Si je la trace ainsi (deux segments qui ne superposent pas), est-ce que c'est une fonction ?
> Élève : Non... C'est une ligne brisée. Je n'ai jamais vu ça
> Chercheur : Ici (nuage de points), tu me dis que oui.
> Élève : Oui, parce que tu peux forcément tracer quelque chose
> Chercheur : Si je trace une ligne?
> Élève : Cela pourrait devenir une fonction.
> Chercheur : La ligne ou le nuage de points ?
> Élève : Ouf! Je ne sais pas ! J'ai écrit oui parce qu'on m'a dit de « toute » remplir...
> Chercheur : Pour toi c'est quoi une fonction ?
> Élève : Une fonction ? Tu as une règle et tu peux retrouver un point.
> Chercheur : Alors ce nuage de points est une fonction ?
> Élève : Mais, je ne pense pas. Là tu as deux points pareils et tu ne peux pas faire les bonds...Habituellement, tu fais les bonds.

4.6.5.2 Christopher: question 2

Christopher utilise adéquatement le test de la droite verticale afin de discriminer les représentations qui sont des fonctions de celles qui ne le sont pas. Il justifie correctement ses réponses à l'aide de la définition de la fonction en précisant que ce n'est pas sa propre définition, mais celle apprise en classe. Lui, « il n'en a pas… » Ainsi, outillée de sa définition et du test de la droite, il est convaincu qu'un nuage de points peut être une fonction : « L'important, c'est qu'ils ne soient pas vis-à-vis. » Démonstration sur papier à l'appui : il trace un nuage de points et trace une droite verticale. Peut-on affirmer que Christopher possède un concept image de la fonction riche et complet ? Nous pouvons affirmer qu'il a un concept image « fonctionnel. » Cet automatisme lui permet de trouver la solution de certains problèmes, mais non de tous les problèmes. Sa connaissance deviendra vite obsolète parce que non assimilée, non intégrée. Il y a toute une différence entre la mécanique du geste et la souplesse intellectuelle d'une authentique compréhension. En somme, il démontre une compréhension procédurale. Il peut relier des procédures explicites à un concept et les appliquer de façon adéquate.

4.6.5.3 Étienne: question 2

Selon Étienne, une fonction « C'est des valeurs qui ont une suite logique. Ils ont une formule logique qu'on suit. » Encore une fois, la fausse conception « à toute fonction est associée une équation » resurgit. Il utilise le test de la droite verticale pour vérifier la fonctionnalité d'un graphique. Or, les nuages de points n'ayant pas de valeurs avec « une suite logique » ne peuvent être une fonction et ce, même si le nuage de points passe le test de la droite verticale. Il y a un conflit entre le concept image et le concept définition.

> Chercheur : Ici, tu as répondu que ce n'est pas une fonction car il n'y a pas de logique.
> Élève : Oui, une fonction, ça doit être logique.
> Chercheur : Donc, ici, ce n'est pas une fonction même s'il n'y pas de points superposés ?
> Élève : Oui.
> Chercheur : Et si je trace la droite… (*Traçant une droite de régression dans le nuage de points.*)
> Élève : Euh! Oui! Le nuage de points. On peut dire que c'est une fonction…
> Chercheur : Parce que je peux tracer une droite ou n'importe quel nuage de points ?
> Élève : Un nuage de points, c'est une fonction et c'est…

Chercheur : Tantôt tu disais que, sur un même x, on ne peut pas avoir deux valeurs possibles.
Élève : Oui.
Chercheur : Ici, à x = 4, il y deux points.
Élève : Oui, mais, la ligne et le nuage de points, c'est séparé. C'est juste pour montrer elle est « où » la moyenne.
Chercheur : Donc, le nuage de points ou la droite est une fonction ? Ou les deux?
Élève : Les deux sont des fonctions? C'est vrai…Je pense…Je ne sais pas …Vous avez mis le doute dans mon esprit.
Chercheur : Ah! Non. C'est demain l'examen?
Élève : (*Rires*) Je crois que le nuage de points peut être une fonction …Je ne sais plus…

4.6.5.4 Corinne : question 3

La question trois a été remplacée par la tâche 2 à l'entrevue l'absence de contexte ajoutait une difficulté à la verbalisation des raisonnements des élèves. C'est bien connu, il est plus facile de parler de nombres en contextes que de nombres réels. Nous avons tout de même questionné les élèves sur leurs réponses à la question 3.

Chercheur : Ici, on a nuage de points et tu m'as donné une table de valeurs correspondant à la droite, ici, illustrée. Est-ce que tu peux me dire, d'abord, pourquoi on a tracé une droite ?
Élève : Je ne sais pas…pour faire un genre de moyenne.
Chercheur : Une moyenne? Tu parles souvent de moyenne. Est-ce que tu peux me dire ce que tu veux dire par çà ?
Élève : Par exemple, pour donner une idée de qu'est-ce qui se passe entre…(elle indique des points)
Chercheur : À quoi elle te sert cette droite ?
Élève : Ah! ¨Ça je ne sais pas, non… Il nous a montré comment faire avec les points.
Chercheur : À x=4, il y deux valeurs avec un grand écart. Est-ce que tu peux m'expliquer cet écart entre ces deux valeurs pour x=4 ?
Élève : Habituellement, quand tu fais un nuage de points, tu ne prends pas tout en considération. Des fois, il y a des points que tu ne considères pas. Des fois, il y en a des plus hauts et des plus bas.
Chercheur : Est-ce que tu sais pourquoi ?
Élève : Non, j'ai appris comme ça.

Nous constatons que sans contexte, cette élève ne peut se fier à son intuition comme elle l'a fait pour la hauteur de la plante à la tâche 1. Il est dans ce cas plus difficile, évidemment plus abstrait, de faire la différence entre les valeurs du nuage de points et celles de la droite. L'absence de contexte ne permet pas de faire référence à ses connaissances connexes pour juger de la validité et de la signification de la droite par rapport aux valeurs du nuage de points. Elle se rabat donc sur la « Méthode », la routine vue en classe.

4.6.5.5 Christopher : question 3

Problème de batterie pas de verbatim pour cette partie…

4.6.5.6 Étienne : question 3

Contrairement à Corinne, Étienne démontre une bonne compréhension de la modélisation à l'aide de nuages de points, malgré l'absence de contexte pour appuyer son raisonnement.

> Chercheur : À la question suivante, on te présente une table de valeurs, un nuage de points et une droite. J'aimerais que tu me dises qu'est-ce que représente cette droite ? À quoi sert-elle? .
> Élève : Elle représente la moyenne du nuage de points. C'est pour dire un peu...que mettons qu'on veut trouver la valeur d'un point et bien à la place d'utiliser des valeurs qui n'ont aucun lien entre elles Eh bien! On va utiliser la droite et on va avoir une règle. Ça va faire qu'on peut trouver la moyenne de plus tard ou avant.
> Chercheur : Le point ici à x=4, est-ce que tu peux m'expliquer pourquoi il est si loin de la droite ?
> Élève : Il faudrait faire le calcul. Je ne me souviens pas très bien comment faire. Mais pour savoir si c'est une donnée superflue...
> Chercheur : Qu'est-ce que c'est une donnée superflue?
> Élève : Une personne s'est peut-être trompée dans la situation

4.6.5.7 Corinne : question 5

Corinne a bien réussi cette question et n'a pas eu recours à des valeurs fictives pour tracer le graphique. Elle démontre une bonne compréhension de la situation.

> Chercheur : À la question suivante comment as-tu fait pour tracer cette courbe?
> Élève : J'ai fait un peu à l'œil nu. J'ai regardé la forme de la bouteille. Quand c'est plus large c'est plus long à remplir et quand c'est plus petit ça se remplit plus vite.

4.6.5.8 Étienne : question 5

Étienne n'a pas commenté cette question

4.6.5.9 Christopher : question 5

Christopher a tracé une droite décroissante et a donné des valeurs fictives à la situation. Il admet s'être trompé pour la décroissance puisque la bouteille se remplit et ne se vide pas. Par contre, la forme de la bouteille n'influence pas son choix de courbe pour modéliser la situation.

> Chercheur : À la question 5, tu as mis des chiffres. À quoi correspondent ces chiffres?
> Élève : Hum! Je vais relire. Ça commence, disons, à 35 mm et ça descend de la même façon… Oups! On remplit. L'eau monte de façon constante.
> Chercheur : Et les chiffres ?
> Élève : Je me suis mis des valeurs pour représenter le graphique.

À cette question, l'élève a reproduit la procédure associée à la modélisation à l'aide de nuages de points, quitte à inventer des valeurs! Il a placé des points dans un plan et tracé une droite.

4.6.5.10 Corinne : question 6

Corinne utilise la table de valeurs pour tracer la droite.

> Marie : Comment as-tu fait pour tracer cette droite ici ?
> Élève : J'ai mis mes x et y. J'ai fait un, deux, trois, quatre (indiquant l'axe des x) en fait, j'ai utilisé la table de valeurs.

Comme nous l'avons souligné, l'utilisation de la table de valeurs et une méthode valable et efficace pour tracer une droite. Par contre, cette méthode, abandonnée avec les programmes 068, pour des raisons didactiques explicitées dans la problématique n'est pas à encourager. Encore une fois nous soulignons que la modélisation à l'aide de nuages de points favorise cette méthode au détriment de celle qui utilise les paramètres de la règle est de nature plus dynamique.

4.6.5.11 Étienne : question 6

Étienne utilise la table de pour tracer la droite. Il trace une droite dont le domaine de définition correspond à celui donné par la table de valeurs. Il avoue que le domaine de la fonction est plus vaste, mais il n'a pas cru bon de le représenter dans le graphique. Nous constatons qu'une fréquente utilisation de la table de valeurs peut affecter la concept image de l'élève.

> Marie : Ici, tu as utilisé la table de valeurs pour faire le graphique. Tu as arrêté à cette valeur.
> Élève : Ouais! J'étais juste un peu paresseux. J'aurais pu continuer.
> Marie : À x =1,5, il y a une valeur de y ?
> Élève : Oui, avec l'équation, tu peux la trouver.

La table de valeurs laisse un flou sur les valeurs absentes et constitue en soi une représentation partielle de la fonction. Comme nous l'avons souligné, toute représentation sémiotique en est une partielle du concept qu'elle représente. La coordination de plusieurs registres de représentation est nécessaire à l'appréhension du concept. Or, la « sur-représentation » de la table de valeurs comme représentation sémiotique de la fonction ne peut que déformer le concept image de la fonction de l'élève. D'autant plus que l'objet mathématique « in se » est souvent confondu avec la représentation sémiotique qui en est faite. La table de valeurs d'une droite n'est pas le concept de fonction linéaire en soi, elle est le reflet de certains aspects, limitée à quelques points, de cette fonction.

4.6.5.12 Christopher : question 6

Christopher utilise la table de valeurs pour tracer la droite et compléter son raisonnement avec l'information donnée par la règle.

> Chercheur : À cette question, comment as-tu tracé la droite ?
> Élève : Je savais que la table de valeurs correspondait à cette règle. J'ai placé les points et j'ai continué la droite.

Chercheur : Pourquoi as-tu effacé cette partie de la droite ?
Élève : Parce qu'il y a une valeur initiale et on ne peut pas commencer par-là. (*Montrant l'origine.*)

Dans notre problématique nous avons souligné plusieurs conséquences possibles de l'utilisation à outrance de la table de valeurs découlant de la modélisation à l'aide de nuages de points. Entre autres, la table de valeurs n'étant pas exhaustive, elle peut être associée à plusieurs fonctions et peut laisser un flou sur ces valeurs absentes. Christopher a su chercher l'information manquante dans l'équation. Est-ce que tous les élèves sauront ainsi faire ? Nous en doutons. Cet exemple nous montre l'importance d'utiliser plusieurs modes de représentations sémiotiques. L'appréhension du concept de fonction passe nécessairement par la coordination des différents registres.

4.6.5.13 Question 7

La question 7 n'a pas été analysée car l'enregistrement de cette partie de l'entrevue ne le permettait pas. Il ya avait trop de bruits ambiants. Nous avons conservé tout de même cette question dans notre méthodologie car elle était prévue et pertinente.

CHAPITRE V

DISCUSSION

5.1 Résumé de la démarche

En 2005 le Ministère de l'éducation des loisirs et des sports du Québec, à travers sa réforme éducative, effectue quelques changements quant à l'enseignement de la fonction. Ainsi, le MELS propose d'amorcer l'étude du concept de fonction dès la 1^{ière} année du 2^{ième} cycle du secondaire et prescrit la modélisation à l'aide de nuages comme finalité à cet enseignement. Si ces changements semblent, de prime abord, mineurs, ils ont suscité notre intérêt de par leur non conformité avec la recherche en didactique des mathématiques. Cette dernière porte davantage sur la modélisation mettant en jeu l'étude des variations en tandem de grandeurs. Les recherches de Hitt, Passaro, Janvier, Carlson, pour ne nommer que ceux-ci, nous ont largement démontré son importance dans le développement du concept de fonction passant par la modélisation. Par contre, celle portant sur la modélisation à l'aide de nuages de points est absente, peu d'études discutent de ce choix didactique : enseigner le concept de fonction dans un contexte de modélisation à l'aide de nuages de points. On assiste à un « vide didactique » sur le sujet.

Ce vide didactique ne justifie pas à lui seul cette étude. La notion de fonction est centrale et complexe et intiment liée à la modélisation. En effet, l'étude du concept de fonction dépasse largement l'apprentissage d'une définition. Le concept de fonction, de par sa nature abstraite, est difficilement accessible et de la réduire à sa définition, comme notre revue de la littérature le démontre, est réducteur de sa problématique intrinsèque. L'appréhension de la fonction n'est pas une tâche simple.

Certes, la modélisation est un contexte favorable à l'appréhension du concept de fonction, mais nous questionnons le type de modélisation proposé par le Ministère et le fait qu'elle soit considérée comme une finalité à l'enseignement du concept que davantage à un contexte d'apprentissage. De plus, la modélisation à l'aide de nuages de points implique l'ajout d'un système de représentations spécifiques à la modélisation : nuages de points, droite de régression, table de valeurs expérimentales à celui du concept de fonction : graphique, table de valeurs, équation...Le passage du registre spécifique à la modélisation à l'aide de nuages de points au registre spécifique du modèle se fait uniquement à l'aide de la courbe de régression et ce passage est à sens unique. Dans ce contexte, l'ajout d'un registre de représentation, n'est pas nécessairement un enrichissement pour la construction du concept image. De plus, la cohabitation, dans un même plan, de deux représentations, le nuage de points et la courbe, peut porter à confusion et générer certaines difficultés.

Si on juxtapose à ce flou didactique quant aux propriétés bénéfiques de l'utilisation des nuages de points comme contexte à l'appréhension du concept de fonction, à la complexité du concept, et à l'absence d'études spécifiques à la modélisation à l'aide nuages de points; nous avons là une problématique importante qui s'exprime en la question suivante : **Comment la modélisation à l'aide de nuages de points comme contexte à l'apprentissage de la fonction influence-t-elle le concept image de la fonction chez les élèves?**

Le concept image de la fonction développé dans un contexte de modélisation à l'aide de nuages de points est le principal objectif de recherche de ce mémoire. Le concept image est le résultat de l'expérience avec le concept de fonction. Les propriétés associées au concept de fonction retenues par l'élève sont les éléments observables que nous tentons de déceler dans l'analyse de nos données. Il est impossible de cerner le concept image par une seule observation puisque pour une tâche donnée, l'élève ne fait pas nécessairement appel à toutes les propriétés ou images mentales retenues pour la résoudre. La richesse et la variété des problèmes importent donc. De plus, pour éviter que l'objet mathématique « in se » soit confondu avec la représentation qui en est faite, il importe, selon Duval, de varier les registres de représentations et la coordination des différents registres est nécessaire à l'appréhension du concept de fonction. Autant de raison qui nous ont amenées analyser les problèmes proposés en termes de variétés.

La modélisation à l'aide de nuages de points ajoute un autre système de représentations spécifique aux nuages de points à celui déjà étudié de la fonction. Chaque système de représentations étant construit en vase clos peut soit enrichir soit faire obstacle à l'appréhension du concept de fonction. Le modèle devient souvent le seul objet d'étude au détriment du phénomène physique.

Le blanc didactique sur la modélisation à l'aide de nuages de points nous impose quelques détours. Nous avons donc recueilli le plus d'informations possibles sur les éléments qui composent la modélisation à l'aide de nuages de points : la table de valeurs, la droite, la fonction, les graphiques etc. Les conclusions du mémoire de Cabana, entre autres, nous permettent d'émettre comme hypothèse que la méthode retenue par le manuel Intersection pour la modélisation à l'aide de nuages de points peut encourager une vision statique du concept de fonction puisqu'elle s'apparente au traçage de droite point par point. Puis, par exemple, les recherches menées par Hitt et Passaro, portant sur l'importance de réfléchir sur la covariation dans l'appréhension de la fonction, viennent compléter les éléments théoriques du cadre proposé par Carlson sur la covariation. Le raisonnement covariationnel est la réflexion sur deux variables variant en tandem; sur le « comment » varie une grandeur par rapport à l'autre dans un contexte de modélisation. Il se développe essentiellement, toujours selon Carlson, dans un contexte de modélisation mettant en jeu le passage d'une description verbale à un mode de représentation graphique. Il est plausible que le raisonnement covariationnel puisse se développer dans un autre type de contexte de modélisation, cependant aucune recherche ne témoigne de ceci.

L'histoire des mathématiques nous indique que c'est l'idée de dépendance qui fonde les concepts de fonction et de variable plutôt que celle de l'unicité de l'image et de la correspondance entre les valeurs. L'apprentissage du concept de fonction pourrait suivre le cours de l'histoire et trouver ses fondements dans la modélisation permettant une réflexion sur les grandeurs variant en tandem : la covariation. En effet, la modélisation doit permettre l'étude du « comment » les variables changent puisque le raisonnement covariationnel est central dans le concept de fonction (Carlson 2002). Celle-ci démontre, que la modélisation doit amener à réfléchir sur le « comment » du changement des variables. Finalement, une perspective dynamique de la fonction est essentielle à l'appréhension du concept. Ce qui nous amène à la question suivante :

La modélisation à l'aide de nuages de points favorise-t-elle une conception statique ou dynamique de la fonction ?

Ni le programme ni le manuel scolaire *Intersection* ne proposent de méthode ou de procédure pour tracer la droite de régression. Une fois cette droite tracée, seul le modèle est étudié par le biais de la droite. Ce type de modélisation, du moins en apparence, exige peu de raisonnement de l'élève. Ce modus operandi s'apparente à celui utilisé pour tracer une droite point par point Cette méthode critiquée par plusieurs (Duval 1993, Janvier 1983, Cabana 1996) est qualifiée de statique.

> « Le point par point encourage un type d'interprétation local et discret du graphique et vient court-circuiter l'idée même de variation. Pour les élèves, le graphique n'est nullement perçu de manière globale et dynamique. Cette technique va être la source de mauvaises interprétations, en regard d'une situation qu'elle cherche à modéliser.» (Cabana 1996)

De plus, la modélisation à l'aide de nuages de points met l'accent sur le passage de la table de valeurs au graphique. Or, ce passage favorise, d'une part, l'aspect statique de la fonction (Coppé, Dorier et Yavuz 2007) et, d'autre part, l'aspect ponctuel au détriment de celui global. Alors une deuxième question s'impose :**La modélisation à l'aide de nuage de points favorise-t-elle une conception locale ou globale de la fonction ?**

La porte d'entrée pour ce type de modélisation étant unique, tout problème débute par la table de valeurs, cela risque d'influencer fortement le concept image de la fonction de l'élève. En favorisant ainsi le registre numérique, le regard porté sur le phénomène à modéliser risque d'être principalement, discret, local et statique. On ne s'intéresse pas à comment varie globalement une grandeur par rapport à une autre, mais à des valeurs bien précises de la fonction.

Nous posons donc la question suivante : **La modélisation à l'aide de nuages de points favorise-t-elle une conception discrète ou continue de la fonction ?**

Les nuages de points sont tracés à partir de tables de valeurs construites lors des expérimentations. Les données recueillies dans une table de valeurs, lors d'une expérimentation, représentent un échantillon des couples possibles de deux variables ce qui peut entraîner une conception discrète de la fonction. Là est le danger de discrétiser une fonction qui ne l'est pas. D'autant plus que la méthode préconisée ne permet pas une rélexion sur ces valeurs absentes, puisque peu importe la nature de la fonction, on « colle » une droite au nuage de point.

Le passage numérique-graphique est important, mais il ne faut pas s'enfermer dans ce duo au risque de favoriser certains aspects au détriment d'autres. À lui seul, il ne suffit pas à la compréhension du concept de fonction. Pour « voir » le concept de fonction, il est nécessaire que toutes les représentations soient impliquées ainsi que les différents passages entre elles. Or, la modélisation à l'aide de nuages de points met l'accent sur le passage numérique- graphique. L'omniprésence de la table de valeurs dans ce type de modélisation accorde beaucoup d'importance aux valeurs qu'elles représentent. De plus, la transposition des couples de grandeurs dans le plan point par point leur confère davantage d'importance.

C'est un risque concret que l'analyse des données nous permettra de confirmer ou infirmer, en partie, du moins. Deux représentations sémiotiques sont donc privilégiées par la modélisation à l'aide de nuages de points : la table de valeurs et le graphique. Plus précisément, le graphique de la droite. La surreprésentation de la droite et de la table de valeurs entrainée par la modélisation à l'aide de nuages points nous amène à poser les questions suivantes :

La modélisation à l'aide de nuages points réduit-elle l'éventail des fonctions possibles à la droite ?

La modélisation à l'aide de nuages de points favorise-t-elle l'utilisation de la table de valeurs comme représentation sémiotique de la fonction au détriment des autres représentations possibles ?

Voilà autant d'aspects qui risquent d'influencer le concept image de la fonction. Reste à savoir si notre analyse des données recueillies mettra en lumière certains de ces faits.

La littérature didactique ne nous éclairant point sur les effets possibles de la modélisation à l'aide de nuages de points comme contexte à l'enseignement des fonctions, notre recherche est de nature exploratoire. La recherche exploratoire nécessite une large et diversifiée collecte de données afin de générer des hypothèses basées sur des similitudes, des structures et des liens issus de nombreuses observations sur un sujet d'étude. La démarche consiste à repérer des similitudes, soit structures ou des scénarios (patterns) semblables, ou identifier les différences qui permettent de discriminer des classes, dans des situations proches mais non identiques.

Pour ce faire, nous avons eu une entrevue avec un enseignant dont un de ses groupes de 23 étudiants a complété un questionnaire. Nous avons, suite à l'évaluation des réponses, ciblé 3 élèves à interviewer. Finalement, nous avons analysé le manuel utilisé par les élèves. À chaque étape de notre recherche, nous avons tenté de faire une certaine organisation de nos données: les points qui semblent intéressants, ceux qui se répètent, ceux qui interpellent ou non notre cadre théorique... En somme, tout au long de la collecte, il y a eu un va vient entre les hypothèses dégagées de nos analyses préliminaires et les nouvelles données que nous avons jaugées attentivement pour en évaluer la pertinence. Nous avons dû nous astreindre à ce long et fastidieux processus de va et vient, pour nous assurer de ne conserver que les hypothèses les plus cohérentes en fonction des objectifs poursuivis. Pour des raisons de clarté, nous avons présenté un compte-rendu linéaire des analyses qui ne témoignent pas nécessairement de l'ampleur de ce travail préliminaire. L'ensemble de nos analyses forme un tout cohérent, homogène et logique, mais sans ordre chronologique. Ainsi, nous espérons tracer le portrait de concept image issu de cet enseignement. Si la nature exploratoire ne nous permettra pas de formuler des certitudes, elle nous permettra, à tout le moins, de formuler des hypothèses plausibles.

Tel que l'exige une étude exploratoire, nous avons collecté une masse importante de données et ce, par des outils diversifiés : entrevues, analyse d'un manuels scolaire et un questionnaire. Selon la nature de l'outil et les besoins de la recherche, nous avons procédé, surtout, à une analyse qualitative des données recueillies. L'analyse du manuel permet d'accéder au savoir institutionnel, du moins celui auquel l'élève sera exposé. La fréquentation du manuel *Intersection* par l'élève influence nécessairement son concept image de la fonction. Nous avons abordé l'étude du manuel avec une analyse qualitative des différentes parties « cours » proposées par le manuel *Intersection* portant sur le concept de fonction et la modélisation à l'aide de nuages de points. Nous avons souligné, surtout, les intentions didactiques et les conceptions encouragées par les explications données et les méthodes de résolution proposée. Nous avons mis en relief dans nos analyses différents éléments théoriques retenus dans le cadre théorique et la problématique de cette recherche : les changements de registres, l'éventail des fonctions présentées et les occasions de réflexion sur la covariation. Autant d'éléments qui peuvent teinter le concept image de l'élève fréquentant le manuel scolaire *Intersection*. Pour l'analyse des parties « exercices et problèmes », nous nous sommes inspirés des travaux de Martine Jacques qui s'est intéressée au concept image de la fonction que pourraient développer les élèves à l'utilisation d'une collection de manuels scolaires. La méthodologie retenue consiste essentiellement à créer des catégories d'exercices et procéder à leur dénombrement. Trois aspects sont retenus : la nature des questions, les différents types de fonctions représentées et les différentes solutions exigées par les exercices proposés. Cela nous a permis de tirer un portrait sur la nature des exercices et problèmes présentés à l'élève et de tenter de mesurer leur diversité. Nous avons élaboré ce questionnaire à la lumière de notre revue de la littérature et des hypothèses retenues afin de valider ou infirmer, du moins en parti, nos hypothèses issues de notre revu littéraire et nos analyses préliminaires. Nous avons distribué un questionnaire de neuf questions à un groupe enrichi de 23 étudiants du secondaire 3. La nature exploratoire de notre recherche implique un va vient entre nos analyses et la cueillette de données. Nous avons donc, fait trois entrevues d'élèves de première année du deuxième cycle, choisis en fonction des réponses données au questionnaire. La raison d'être de l'entrevue est de mieux cerner les résultats obtenus au questionnaire et les nouvelles réflexions qu'elles ont suscitées. Nous avons procédé à une analyse qualitative des données obtenues toujours en regard de nos éléments théoriques rappelés ci-haut. L'entrevue s'est déroulée en deux temps. Dans un premier lieu, nous avons proposé trois tâches complémentaire au questionnaire afin d'éclairer certains points et de palier à quelques lacunes du questionnaire. Dans ce cas, l'entrevue était ouverte puisque nous ne savions pas ce que l'élève allait proposer comme résolution. Notre questionnement était guidé par les intentions de la tâche. Puis nous avons fait un retour sur leur questionnaire afin de vérifier la pertinence des hypothèses émises lors d'une première analyse. L'entrevue, cette fois-ci, était de nature semi-standadisée puisque nos intentions étaient prédéterminées par notre première analyse.

Bien que l'acte d'enseigner ne soit pas au premier plan de cette recherche, il nous est impossible de l'ignorer. Ne serait-ce que pour identifier les réponses d'élève qui sont le résultat d'un potentiel effet miroir avec l'enseignant. Nous avons, donc, élaboré un questionnaire semi-standardisé dont la formulation se veut la plus objective possible afin de tracer un portrait le plus fidèle possible de sa conception de la fonction et de sa démarche pédagogique dans l'enseignement des nuages de points. Nous aurions souhaité observer, aussi, la pratique de l'enseignant, mais ce fut impossible. L'enseignant a refusé, au dernier moment. Nous avons donc étoffé le questionnaire sur les moyens qu'il préconise pour l'enseignement de la fonction et sur la place qu'il accorde aux nuages de points. Voir le questionnaire en annexe.

5.2 Réponses aux questions de recherche

Cette recherche tente de déduire par généralisation des observations des éléments de réponse à la problématique originelle. Ainsi, nous avons recueilli et analysé un grand nombre de données et cela sur une base d'un cadre théorique vaste et souple. Nous avons de façon systématique mis en relief les similarités, les irrégularités, les points récurrents de chacune de nos analyses. L'objectif est de tracer le portrait, le plus plausible possible, du concept image de la fonction construit chez l'élève dans un contexte de modélisation à l'aide de nuages de points. Pour ce faire, nous présentons nos analyses sous différentes rubriques. Celles-ci portent, évidemment, sur notre questionnement issu de notre revue de la littérature et de nos analyses préliminaires.

5.2.1 La modélisation à l'aide de nuages de points réduit-elle l'éventail des fonctions possibles de l'élève ?

L'analyse du manuel dans la partie exploration nous révèle, ne serait-ce que par sa structure, la place centrale réservée à l'enseignement de la droite. En effet, le manuel adopte la séquence proposée par le MELS : l'enseignement des fonctions linéaires suivi de la modélisation à l'aide de nuages de points. Nous rappelons que l'analyse du chapitre portant sur les fonctions dans le manuel *Intersection* est un incontournable parce que précédant celui portant sur les nuages points il prépare l'élève à la modélisation et par le fait même influence les fondements du concept image. Ainsi le chapitre portant sur la droite est préparatoire à l'enseignement des nuages de points. Non seulement l'enseignement de la fonction débute avec un éventail de possibilités réduit à la droite, mais l'enseignement des fonctions affines est au service de la modélisation. On prépare les élèves à l'enseignement des nuages de points. Puisque les nuages de points, selon les recommandations du MELS, ne peuvent se modéliser qu'à partir d'une droite, l'enseignement du concept de fonction tourne autour de celui de la droite. L'enseignement du concept de fonction est essentiellement réduit à celui de la droite et ne sera pas élargi au chapitre des nuages de points. Les auteurs rectifient le tir dans la section *mise en pratique du manuel. L'*ensemble des exercices proposés présentent davantage d'ouverture permettant ainsi d'élargir leur concept image de fonction. Puis, l'éventail des fonctions timidement présenté en début de chapitre, est vite réduit à celle de la droite alors que 74% des exercices portent sur celle-ci. Cette ouverture tardive de l'éventail des possibilités tombe, donc, à l'eau. Elle n'est même pas récupérée dans le chapitre portant sur la modélisation : seule la droite (28 exercices sur 36), et rarement la fonction inverse, seront utilisées comme modèle. La droite est enseignée comme préalable à la modélisation à l'aide de nuages de points. Il est fort probable que l'ouverture, faite tardivement, sur d'autres fonctions soit alors oubliée. L'enseignement des nuages de points, tel que vu par le manuel Intersection ne contribue pas à aborder différentes fonctions, mais bien à réduire le concept de fonction à celui de la droite.

La niche importante réservée à la droite nous amène à un autre problème : le traitement fait par le manuel *Intersection* de la droite s'apparente davantage à la traduction au sens de Duval. La modélisation à l'aide de nuages de points est réduite à la transposition de points dans un plan cartésien et à y coller une droite. Il ne permet pas la mise en évidence des unités significatives et, par le fait même, d'un faible apport didactique dans l'acquisition du concept de fonction. Apport qui aurait pu être récupéré dans la modélisation à l'aide de s de points. Un autre indice que la droite est le réel sujet d'étude.

Nous pouvons donc penser que l'accent mis sur la droite par la modélisation à l'aide de nuages de points influence le concept image de l'élève de la fonction. D'une part, en le réduisant à celui de la droite et d'autre part, en simplifiant le concept de fonction radicalement. La modélisation à l'aide de nuage points aurait pu être le chapitre propice à une synthèse des acquis si celui portant sur les fonctions étaient plus éclaté. Encore mieux, il aurait pu constituer la pierre angulaire de l'accès à la notion du concept image de la fonction si placé avant le chapitre portant sur les fonctions. Mais en réduisant la modélisation à celle de la droite, il jette les bases sur le concept image de la fonction.

L'analyse du manuel démontre que l'étude des fonctions, plus précisément la droite, est au service de celui des nuages de points, pire ce sont deux éléments consécutifs et non intrinsèquement liés. Lors de l'entrevue, l'enseignant abonde dans le même sens. Il n'est pas surprenant qu'un élève ne différencie pas un problème de modélisation à l'aide d'un nuage de points et celui d'un exercice classique soit le passage de la table de valeurs à graphique. Il ne fait pas la différence entre le modèle et le réel. Par automatisme, lorsque l'on présente une table de valeurs à un élève, il transfert les points dans un plan et là deux comportements sont possibles : relier les points ou tracer une droite qui passe par la « moyenne des points». Lorsqu'on demande aux élèves de choisir parmi différents graphiques (question1) un modèle pour représenter le nuage de points, 14 sur 23 choisissent la droite et justifient leur réponse en affirmant que seule une droite ou une courbe régulière et continue peut modéliser un nuage de points. À une situation de modélisation de type qualitatif qui devrait se modéliser par une courbe en quatre temps, huit sur 23 ont tout de même utilisé la droite pour la modéliser. Ce qui confirme en partie l'importance excessive accordée par ces derniers à la droite comme outil de modélisation. Comment cela se transpose dans leur conception de la fonction? Peuvent-ils identifier une fonction autre que la droite? Comment définissent-ils le concept de fonction ? À première vue, ils réussissent très bien à différencier une fonction d'une relation. Par contre, leurs justifications dévoilent une large influence de la droite : « c'est une fonction car elle est régulière, car c'est une droite, car son taux de variation est constant ou non ce n'est pas une fonction car il n'y a pas de logique, car je ne la connais pas etc. » En somme, ils font référence directement ou indirectement à un aspect de la fonction linéaire pour reconnaître une situation fonctionnelle. Pire encore, ils y font directement référence en affirmant : oui, c'est une fonction linéaire ou non, ce n'est pas une fonction car je ne reconnais pas une fonction linéaire. D'autre utilisent le test de la droite verticale tel que montré par l'enseignant. Ainsi face à un graphique d'une fonction différente de celles vues en classe, les élèves sont démunis et se réfèrent à leur concept image largement imprégné de la droite et cherche des points de repères ou de dissension. En entrevue, la droite est un élément important de référence pour répondre aux questions. Pour Christopher, face à une table de valeurs dont il essaie de déterminer la nature, deux choix s'imposent : une droite ou un nuage de points. En effet, après quelques calculs de taux de variations, il conclut que c'est un nuage de points puisqu'il n'existe pas de règle correspondante. Derrière ces calculs, deux fausses conceptions se cachent. Premièrement que pour toute table de valeurs une règle est associée et deuxièmement que la fonction est nécessairement une droite. Étienne, quant à, lui est tellement convaincu qu'une table de valeurs doit présenter une droite qu'il met en doute la validité de la table de valeurs.

On peut confirmer que l'omniprésence de la droite influence, à différent degrés, le concept image de la fonction. Pour certains, le concept de fonction est partiellement teinté de la droite, pour d'autres, il y a presque congruence entre le concept de fonction et celui de fonction linéaire. Comme nous l'avons vu, le chapitre portant sur les fonctions accorde une grande importance à la droite. Il est donc difficile de quantifier la part d'influence qu'a la modélisation à l'aide de nuages de points sur le concept image de l'élève. Est-ce la grande importance accordée aux fonctions affines lors de l'enseignement des fonctions ou la sur utilisation de la droite comme modèle qui est responsable de cette influence du concept image? Difficile à dire. Une chose est certaine, la modélisation ne sert pas de prétexte à l'ouverture sur un éventail très large de fonctions. C'est plutôt l'inverse, elle a enfermé l'élève dans un duo numérique-graphique ne débouchant que sur la droite. Elle n'est peut-être pas la principale et unique source de cette influence sur le concept image, mais elle a certainement servi de « fixatif ».

5.2.2 La modélisation à l'aide de nuage de points favorise-t-elle une conception discrète ou continue de la fonction ?

Dès le début du chapitre portant sur les fonctions, on insiste sur la distinction entre une variable discrète et continue. Cette distinction est nécessaire, mais les situations discrètes sont rarement des situations de fonction dynamique et ont pour effet d'accentuer l'importance de certains points, à savoir ceux qui sont visibles sur le graphique ou donnés dans la table de valeurs. De plus, les graphiques donnés par le manuel *Intersection* mettent en valeur quelques points et ce, même dans le cas d'une fonction continue. Les problèmes présentés à titre d'exemple utilisent la table de valeurs pour déterminer le graphique d'une relation donnée. On constate que l'élève est « enfermé » dans le duo registre numérique- registre graphique. L'omniprésence de la table de valeurs impose la méthode du point par point pour tracer la courbe. Lorsque le passage graphique – équation est demandé, deux points sont clairement indiqués, ce qui revient à une table de valeurs de deux points. En somme, le manuel *Intersection* en visant régulièrement que certains points de la courbe dans une situation continue ou en utilisant largement la table de valeurs risque d'influencer la conception de fonction.

L'élève qui fréquente le manuel Intersection risque de débuter le chapitre portant sur la modélisation avec une conception discrète de la fonction. La modélisation à l'aide de nuage de points passant nécessairement par la table de valeurs risque d'accentuer cette conception.

L'analyse du questionnaire abonde dans le même sens. Les élèves reconnaissent facilement une situation fonctionnelle surtout parce qu'ils manipulent bien le test de la droite verticale. Par contre le graphique d'une situation discrète sème la confusion : est-ce un nuage de points ? Une fonction discrète ? Dans un graphique à la question 1, des points sont superposés : 5 étudiants sur 23 l'identifient tout de même comme une fonction et ce, même s'ils ont bien répondu correctement pour les autres graphiques. Le graphique d'une fonction discrète et/ou d'un nuage de points imprègnent leur concept image et sont confondus. Une autre trace de cette influence est notable lorsqu'on leur demande de créer un contexte pour un nuage de points donné : huit choisissent un contexte discret. Puis, lorsqu'on demande en entrevue de valider les contextes donnés par leur camarade de classe, les élèves vérifient si la valeur des coordonnées de chacun des points est accord avec le contexte. Surtout, en entrevue, leur discours est en termes de points et ne donne pas d'importance au sens dans lequel évoluent les variables.

5.2.3La modélisation à l'aide de nuages de points favorise-t-elle une conception locale ou globale de la fonction ? La modélisation à l'aide de nuages de points favorise-t-elle une conception statique ou dynamique de la fonction ?

Le manuel *Intersection* pourrait de par certains exercices, situations et problèmes amener l'élève sur le chemin d'une conception globale-dynamique de la fonction en demandant de faire un changement de registre situation –problème à graphique. On y propose des exercices de nature dynamique et globale en laissant place à des situations qui misent davantage sur le qualificatif que le numérique. Par contre, ces exercices de nature globale-dynamique risquent d'être traités autrement. En effet, les exemples et les démarches proposés par le manuel font intervenir systématiquement un troisième joueur : la table de valeurs, obligeant ainsi un transfert du qualitatif au numérique. Il y a donc un glissement des exercices qualifiés dynamique-globale à statique –locale, limitant ainsi les occasions d'exploiter le raisonnement covaritionnel. Dans l'analyse des trois activités d'exploration , nous avons souligné une tendance à amener l'élève à se concentrer sur certains points de la variation, plutôt que sur la courbe globalement, soit en posant des questions principalement sur un couple donné dont une des valeurs est manquante plutôt que sur la variation de la fonction, soit en insistant précocement sur les variables discrètes et finalement en favorisant un passage de la table de valeurs à un graphique comme premier contact avec le concept de fonction. L'introduction de la fonction réciproque abonde dans le même sens. Le passage table de valeurs – graphique est encore encouragé. Pour introduire la réciproque, on exige d'intervertir les valeurs de la table et de construire le graphique qui lui est associé. Le but premier de l'introduction de la réciproque est de faire le passage vers la définition moderne de la fonction; l'unicité de l'image. Le même processus est mis en place pour le passage graphique-équation ou équation graphique. On impose la table de valeurs comme intermédiaire. En somme, la table de valeurs occupe une grande place dans les exercices proposés : on la questionne, on l'utilise pour tracer le graphique et trouver l'équation. Elle est un passage obligé, conférant par le fait même un statut plutôt local et statique à la nature des problèmes proposés. Nous pouvons donc penser que le concept image développé dans ce contexte serait davantage local et statique que global et dynamique.

Dans ce contexte, comment la modélisation à l'aide de nuages de points peut-elle modifier le concept image de la fonction?. Comme nous l'avons souligné la modélisation à l'aide de nuages de points confère une place de choix à la table de valeurs. Rappelons que le registre numérique favorise une conception statique et locale. Il est, donc, fort à parier que la modélisation à l'aide de nuages de points renforcera cette conception déjà bien entamée dans le chapitre portant sur les fonctions. Le but principal de la modélisation à l'aide de nuages de points, tel que vu par le manuel *Intersection,* est d'amener l'élève à interpoler et extrapoler.

Ainsi on questionne principalement l'élève sur une coordonnée en particulier de la droite : connaissant x détermine y et vice-versa. De plus, la table de valeurs est l'unique porte d'entrée sur tous les problèmes. Dans ce contexte, on peut dire que le registre numérique est encore roi et que s'en suit une conception locale et statique de la droite. En somme, l'objectif étant d'interpoler ou d'extrapoler, on s'intéresse à un couple en particulier de la droite. On demande aux élèves de porter un regard local sur la droite. Un deuxième effet pervers de la sur-utilisation de la table de valeurs est la discrétisation de la fonction selon Coppé, Dorier et Yavuz (2007).

La droite qui est le principal modèle du concept de fonction pour les élèves fréquentant le manuel *Intersection*. Cette droite qui modélise le nuage de points est tracée sans aucun souci de la variation qu'elle représente. On s'assure simplement qu'elle représente la moyenne des points. La méthodologie proposée pour la modélisation confère, elle aussi, un statut plutôt statique à la droite. La tâche de modélisation à l'aide de nuages de point se limite à placer des points dans un plan cartésien et à y « coller » une droite. Il n'y aucune référence à la variation de la courbe. Difficile de développer, dans ce contexte, une conception dynamique de la fonction. De plus, ce modus operandi s'apparente à celui utilisé pour tracer une droite point par point; méthode critiquée par plusieurs (Duval 1993, Janvier 1983, Cabana 1996) est qualifiée de statique.

Les élèves résolvent rarement les problèmes de fonction à l'aide de la règle. Par exemple à la question 3, les élèves complètent la table de valeurs en trouvant les coordonnées dans le graphique et ce, même pour les valeurs qui ne sont pas présentées (valeurs approximatives). Ils ont un regard local sur le problème. À une autre question, l'élève a le choix entre tracer la droite à l'aide de l'équation tel qu'enseigné au chapitre précédent à savoir placer la valeur initiale et, ensuite, trouver un deuxième point à l'aide du taux de variation (marche-contremarche) ou utiliser la table de valeurs. Or, 20 élèves utilisent la méthode du point par point. Il y en a même un qui ne relie pas les points… Il est indéniable que la modélisation à l'aide de nuages de points encourage cette méthode. Les deux chapitres étant enseignés séparément, la méthode employant la variation pour tracer la droite est vite oubliée et la vision dynamique qui s'y rattache estompée. De plus, parmi ces élèves, 12 ont tracé la droite avec un domaine limité à celui de la table de valeurs. Les autres ont tracé une droite dont le domaine est les réels positifs. Ce qui démontre une vision locale de la fonction. L'entrevue nous révèle un autre indice celui que la vision locale et statique de la fonction est encouragée par la modélisation à l'aide de nuages de points. En effet, pour valider ou invalider les contextes donnés par leurs compères à un nuage de points, les élèves interrogés vérifient si la valeur des coordonnées de chacun des points est en accord avec ce contexte. Ils accordent plus d'importance aux points du nuage de points qu'au sens dans lequel évoluent les variables.

5.3 D'autres effets possibles de la modélisation à l'aide de nuages de points sur le concept image de la fonction

Selon Duval (1993), la compréhension d'un concept passe par la coordination de différents registres de représentation. Il faut donc développer des contextes de travail favorisant le passage entre différents modes de représentation afin d'acquérir une conceptualisation solide du concept. Duval nomme ce passage : conversion. C'est en passant d'une représentation à l'autre que les unités significatives se dégagent et renforcent le concept de fonction. Par contre, pour ce faire, il faut éviter que la conversion soit « algorithmisée » et ne devienne du codage au sens de Duval et la sur-représentation d'un registre. Or, c'est, à notre avis le cas, dans la modélisation à l'aide de nuages de points, elle est étroitement liée à la séquence table de valeurs, graphique. Dans ce contexte, le registre algébrique est peu interpellé. Les réponses aux questions posées se trouvant généralement sur la droite tracée, le registre algébrique s'avère qua duc. Nous remarquons, d'ailleurs, dans les réponses au questionnaire ou lors de l'entrevue que lorsque les élèves ont le choix, ils n'ont pas recours à l'équation et s'ils y sont forcés, ils ont de la difficulté voire incapable de trouver la règle d'une droite. À la question 3, portant sur un nuage de points, aucun élève n'a recouru à la règle pour répondre à la question. Ils ont, tous, trouvé les valeurs approximatives dans le graphique et ce, même pour les valeurs absentes du graphique, ayant, pour la plupart d'entre eux, prolongé la droite. En entrevue, Corinne tente de se rappeler comment trouver la règle de la droite, après plusieurs essais elle se rabat sur le graphique quitte à trouver, en toute conscience, des résultats approximatifs. Un autre effet pervers de l'omniprésence du registre numérique est de court-circuiter le raisonnement covariationnel nécessaire à une conception juste de la fonction. En entrevue un élève a dû donner des valeurs fictives à un problème de modélisation de nature qualitative, afin de se retrouver en terrain connu soit un nuage de points modélisé par une droite. À cette même question, seulement 4 sur 23 élèves interrogés ont répondu correctement, 8 par une droite et ce, même si la bouteille n'avait pas un forme constante.

Pour comprendre le concept de fonction dans son ensemble, il est nécessaire de faire le passage entre les différents registres. Or, deux de ces registres sont légués aux oubliettes par la modélisation à l'aide de nuages de points : contextuel et algébrique. Dans ce contexte, on peut dire que leur concept image de la fonction est déficient, puisque c'est par la coordination de différents registres de représentation que passe la compréhension du concept de fonction. En effet, le concept de fonction étant complexe et abstrait, une seule représentation ne peut contenir toutes les propriétés s'y rattachant. Il faut donc plusieurs contextes de travail qui favorisent le passage entre différents modes de représentation, afin d'acquérir une conceptualisation solide du concept et ce n'est pas le cas de la modélisation à l'aide de nuages de points.

La modélisation à l'aide de nuages de points implique un passage entre deux systèmes de registres de représentations. Ces deux systèmes sont traités en vase clos. Donc, il ne s'agit pas d'un simple ajout de représentations sémiotiques, mais bien de l'ajout d'un système complet possédant ses propres règles qui symbolisent une autre facette de la situation qui est modélisée. Dans ce contexte, nous avons émis l'hypothèse qu'il peut y avoir confusion entre le registre de représentations spécifique aux nuages de points et celui du modèle. Lorsqu'on demande, à la question 4, aux élèves d'explique la différence d'image à x=4 pour le nuage de points et la droite de régression qui sont représentés dans un même graphique, aucun fait référence à la notion de modèle. Certains, 7 sur 23, identifient la droite comme étant une représentation de « la moyenne des points », sans plus. À l'entrevue, à la tâche 1, les élèves interrogés sont confus quant à la hauteur de la plante après 5 jours. Ils hésitent entre la valeur réelle identifiée par un point du nuage et la valeur fournie par la droite. Si Corinne après hésitation choisie la valeur réelle, Étienne et Christopher choisissent avec conviction l'image située sur la droite parce que « c'est plus mathématique », « La réponse est sur la droite »... Évidement dans le cas où on a la valeur réelle à quoi peut bien servir un modèle ? Ils démontrent certainement une fragilité de leur conception du modèle. La modélisation à l'aide de nuage de points encourage une méthode algorithmique et par le fait même court-circuite le développement d'une réflexion sur le concept de modélisation. Seule la droite est retenue sans souci pour sa signification et son rôle. Le modèle étant coupé du phénomène un élève peut prédire une valeur en extrapolant tout en affirmant qu'il n'y a pas de liens entre les deux grandeurs en jeux. Ce que nous avons souligné à la question 9 du questionnaire et à la tâche 2 de l'entrevue. Deux choses peuvent expliquer cette ferveur à donner une réponse malgré les doutes sur la fiabilité du modèle. Il est possible que l'élève réponde à la question peu importe la pertinence de la question comme dans la situation de « l'âge du capitaine », mais cette explication à elle seule est insuffisante. Nous croyons que l'élève répond davantage aux règles du contrat didactique fortement instaurées par l'enseignement d'une méthode algorithmique de la modélisation. Dans cette méthode, il y a en effet toujours une réponse, peu importe le contexte, et celle-ci se trouve immanquablement sur la droite.

Nous retenons que les nuages de points comme contexte à l'enseignement de la fonction est pauvre en terme de registre de représentations et ne permet pas d'étoffer le concept image de la fonction. Il enferme l'élève dans le duo table de valeurs-graphique. La table de valeurs et la droite occupent toute la place et influencent certainement le concept image de la fonction. Le passage de l'un à l'autre s'apparente dangereusement à la méthode du point par point, et par le fait même confère un statut discret et statique au concept de fonction. Laissant toute la place à la droite comme outil de modélisation. La modélisation à l'aide de nuages de points telle que prescrite par le ministère de l'Éducation peut encourager aussi la conception fausse que, pour toute fonction, il existe une règle.

Des contextes différents de modélisation, comme le remplissage d'une bouteille, les pistes de course ou ceux présentés dans le mémoire de Valériane Passaro, ouvrent un vaste monde de possibilités. Des fonctions de toutes natures peuvent être présentées et permettent, par le fait même, un enrichissement du concept image du concept de fonction. Surtout, ils encouragent une conception dynamique de la fonction. Ce qui n'est pas le cas de la modélisation à l'aide de nuage de points. Limiter l'enseignement de la modélisation à une méthode pour trouver des valeurs moyennes de points inconnus, c'est se priver d'un levier important pour l'enseignement de la fonction. Elle est un contexte privilégié pour aborder la covariation, la relation de dépendance, l'utilité de la fonction qui sont des aspects centraux dans le développement du concept de fonction.

5.4 Recommandations et retombées pédagogiques

La modélisation à l'aide de nuages de points ne devrait pas être réduite à outil d'extrapolation et interpolation. La modélisation doit servir de levier à l'enseignement du concept de fonction. Il se doit de fournir des situations riches et variées. Or, si on réduit le processus à l'étude de la droite ou pire encore à un couple en particulier de la droite, il est fort probable que le concept de fonction développé dans ce contexte soit incomplet. À la lumière de nos résultats, nous croyons que la modélisation à l'aide de nuages de points, à elle seule, ne soit suffisant au développement d'un concept image de la fonction. Comme nous l'avons souligné dans nos analyses, il risque de développer un concept image plutôt statique et local. Ces éléments font et doivent faire partie d'un concept image de la fonction, mais pas nécessairement en début d'apprentissage. Pour ces raisons, nous croyons que la modélisation à l'aide de nuages de points devrait davantage servir de finalité à l'enseignement des fonctions au secondaire. En effet, afin de ne pas réduire le concept de fonction à la droite, à son aspect statique, local ou continu, il serait préférable d'utiliser ce type de modélisation lorsque l'élève aura intériorisé un concept image de la fonction plus riche, dynamique et complexe. À ce moment, il sera en mesure d'envisager d'autres fonctions : exponentielle, escalier, par partie... pour modéliser un nuage de points. Il sera aussi plus facile d'enrayer les fausses conceptions, dues à un enseignement trop précoce de la modélisation à l'aide de nuages de points, relevées dans notre étude. Par exemple, que le concept de fonction et droite sont synonymes et l'idée que seule une droite peut modéliser un phénomène.

En limitant la modélisation du nuage de points à un processus d'association entre une table de valeurs et une droite et en accordant toute l'importance à cette droite comme outil d'extrapolation on risque d'oublier l'essentiel : le phénomène étudié. Le processus de modélisation risque d'être perçu comme un passage obligé mais sans intérêt puisque la finalité est l'étude d'une fonction, plus précisément la droite. Or, la modélisation à l'aide de nuages de points offre la possibilité d'utiliser des situations concrètes et signifiantes. Nous avons constaté que la validité du modèle et le lien entre le modèle et le phénomène sont peu questionnés. Les élèves n'ont pas de moyens « mathématiques » soit une formule soit un raisonnement pour valider leur modèle. Ils se réfèrent plutôt à leur expérience ou connaissance sur le sujet. Il serait intéressant de jumeler l'enseignement de la statistique à celui du nuage de points et de la fonction pour qu'ils puissent avec des outils mathématiques ad hoc juger de la valeur du modèle et en interpréter correctement les valeurs. Ainsi, il y aurait une circulation entre les deux systèmes de représentations sémiotiques : celui du modèle et celui du phénomène. La modélisation doit être un processus cyclique. Pour ce faire, l'enseignement des statiques pourrait être intégré à celui des fonctions. Par exemple, il pourrait évaluer le coefficient de corrélation. Au passage, il se sensibiliserait au fait qu'une corrélation forte n'implique pas nécessairement un lien de causalité. En effet, une relation entre deux variables peut être tout simplement fortuite. Il se peut aussi qu'un autre facteur soit en jeu. En somme, le lien de cause à effet n'est pas garanti par la présence d'une courbe ajustée au nuage de points. Une réflexion sur le sujet s'impose. Cette intégration faciliterait la discussion sur le lien de dépendance entre les deux grandeurs, de la pertinence du modèle choisi et une circulation entre le modèle et la situation réelle. Chose qui ne peut être faite si seule la droite peut modéliser un phénomène….

5.5 Limite

Rappelons qu'il ne s'agit pas d'une étude exhaustive sur le sujet, mais bien d'une étude exploratoire à partir d'un cas particulier : deux groupes de secondaire trois ayant le même enseignant et le même manuel. Le rôle de la recherche exploratoire étant de générer des hypothèses, le questionnement, les doutes et les hypothèses émis dans notre problématique demeurent en partie. D'autant plus, le nombre de données analysées dans le cadre de cette recherche est relativement faible. Un plus grand nombre d'entrevues et d'élèves ayant répondu au questionnaire auraientt certainement pu enrichir nos conclusions. La recherche exploratoire demande l'analyse d'une masse importante de donnée et ce, de sources différentes. L'observation directe de la pratique de l'enseignant aurait été, dans ce sens, un ajout intéressant. Il serait, donc, intéressant de poursuivre cette étude dans ce sens. La pratique de l'enseignant est un incontournable. Comment cet ajout a été intégré à sa pratique? Quelles interprétations fait-il de ce chapitre ? Quelles sont ses visées pédagogiques lors de la planification de ce chapitre ? Autant d'aspects qui aideront certainement à cerner plus précisément les influences de la modélisation à l'aide de nuages de points sur le concept image de la fonction. En attendant, nous espérons que les retombées de cette recherche serviront de points d'appui solides pour des études plus larges sur le sujet.

RÉFÉRENCES

Bohan, J. 2006. Using Regression to Connect Algebra to the Real World (Chapter 14) Thinking and Reasoning with Data and Chance 68th Yearbook

Cabana, M. 1996. «La notion de fonction vue sous l'angle de l'étude de la variation». Mémoire de maîtrise, Montréal, Université du Québec à Montréal, 378 f.

Carlson, M.; S. Jacobs, S. Larsen, E. Coe et E. Hsu. 2002. «Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A framework and a study». *The Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 33, no 5, p. 352-378.

Comin, E. 2005 «Variables et fonctions, du collège au lycée : Méprise didactique ou quiproquo inter institutionnel». *Petit x,* no 67, p. 33-61.

Confrey, J. et E. Smith. 1991. «A framework for functions: Prototypes, multiple representations, and transformations». *Proceedings of the thirteenth annual meeting of the North America of the international group for the Psychology of Mathematics Education,* vol. 1, p 57-63.

Coppé, D. et J.-L. Yavuz. 2007. «De l'usage des tableaux de valeurs et des tableaux de variations dans l'enseignement de la notion de fonction en France en seconde». *Recherches en didactique des mathématiques,* vol. 27, no 2, p. 151-186.

Duval, R. 1993. «Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée». *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, p.37-65.

Duval, R. 1988. «Graphiques et équations : L'articulation de deux registres». *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* p.235-253.

Eisenberg, T. 1991. «Function and associated learning difficulties». In *Advanced Mathematical Thinking*, D. Tall. Pays-Bas: Springer.

Even, R. 1993. «Subject-Matter Knowledge and Pedagogical Content Knowledge: Prospective Secondary Teachers and the Function Concept». *The Journal forRresearch in MathematicS Education,* vol. 24, no 2, p.94-116.

Fikrat, L. 1994. «La notion de fonction et ses représentations». Mémoire de maîtrise, Montréal, Université du Québec à Montréal, 221 f.

Hitt, F. et C. Morasse. 2009. «Advanced numerical-algebraic thinking: Construction the concept of covariation as a prelude to the concept of function». *Electronic Journal of Research in Educational Psychology,* vol. 7, no 1, p. 243-260.

Jacques, M. 2004. «Le “concept image” de fonction qui émerge de la fréquentation d'une collection de manuels scolaires du secondaire». Mémoire de maîtrise, Montréal, Université du Québec à Montréal, 162 f.

Janvier, C. 1983. «Représentation et compréhension un exemple : le concept de fonction» *Bulletin l'Association Mathématique du Québec*, no 3, p. 22-28. octobre.

Kaput, J. J. 1992. «Patterns in students' formalization of quantitative patterns». In *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, sous la dir. de G. Harel et E. Dubinsky, p. 290-318. Washington (DC): Mathematical Association of America.

Knuth, E. J. 1984. «The nature of secondary school mathematics teachers' conception of proof». *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 33, no 5, p. 379-405.

Maschietto, M. 2005. «Exploration de fonctions, linéarité locale et calculatrices graphiques». *Math-école*, no 216, p. 37-44.

Monk, S. 1992. «Students' Understanding of a Function Given by a Physical Model». In *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, sous la dir. de G. Harel et E. Dubinsky, p. 175-193. Washington (DC): Mathematical Association of America.

Moritz, J. 2005. «Reasoning about Covariation». In *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*, sous la dir. de D. Ben-Zvi et J. B. Garfield, p. 227-257. Dordrecht (Pays-Bas) : Kluwer.

O'Callaghan, B. R. 1998. «Computer-Intensive Algebra and Students' Conceptual Knowledge of Function». *Journal of Research in Mathematics Education*, vol. 29, no 1, p. 21-40.

Passaro, V. 2006. «Étude expérimentale sur le développement du concept de covariation entre deux grandeurs révélé par une analyse des représentations spontanées d'élèves du premier cycle du secondaire». Mémoire de maîtrise, Montréal, Université du Québec à Montréal, 311 f.

Québec. Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport. 2003. *Programme de formation de l'école québécoise enseignement secondaire* : *deuxième cycle*. Québec : Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.

Selden, A. et J. Selden. 1992. «Research Perspectives on Conceptions of Functions: Summary and Overview». In *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, sous la dir. de G. Harel et E. Dubinsky, p. 1-16. Washington (DC): Mathematical Association of America.

Sfard, A. 1991. «On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects on Different Sides of the Same Coin». *Educational Studies in Mathematics,* vol. 22, p.1-36.

Sfard, A. 1992. «Operational Origins of Mathematical Objects and the Quandary of Reflection: The Case of Functions». *The Concept of Function: Aspect of Epistemology and Pedagogy* , sous la dir. de G. Harel et E. Dubinsky, p. 59-84. Washington (DC): Mathematical Association of America.

Smith, E. 2003. «Stasis and Change: Integrating Patterns, Functions, and Algebra Throughout» In *A research Companion to Principles and Standards for School Mathematics,* sous la dir. de J. Kilpatrick, W. G. Martin, and D. Schifter p136-150. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Thompson, P. W. 1994. «Students, Functions, and the Undergraduate Curriculum». In *Issues in Mathematics Education*, vol. 4, p. 21-44. Washington DC: College Board on Mathematical Sciences.

Tremblay, M-A. 1968. «Initiation à la recherche dans les sciences humaines». Montréal :Mc-Graw Hill,Éditeurs, 425pp.

Vinner S. 1983. «Concept definition, concept image and the notion of function». *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 14, p. 293-305.

Van Der Man J-M. 1996. « Méthodes de recherche pour l'éducation» VAN DER MAREN (Jean-Marie). — *Méthodes de recherche pour l'éducation.* — Bruxelles : De Boeck, 1995. — 505 p. —