Проблемы физики, математики и техники, № 1 (26), 2016

УДК 517.95

ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ПЕРВОГО РОДА

Я.Т. Мегралиев, Г.Н. Искендерова

Бакинский государственный университет

INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SECOND-ORDER HYPERBOLIC EQUATION WITH INTEGRAL CONDITION OF THE FIRST KIND

Y.T. Mehraliyev, Q.N. Isgenderova

Baku State University

Исследована одна обратная краевая задача для гиперболического уравнения второго порядка с интегральным условием первого рода. Для рассматриваемой обратной краевой задачи вводится определение классического решения. С помощью метода Фурье задача сводится к решению системы интегральных уравнений. С помощью метода сжатых отображений доказывается существование и единственность решения системы интегральных уравнений. Далее доказывается существование и единственность классического решения исходной задачи.

Ключевые слова: *обратная краевая задача*, *гиперболическое уравнение*, *метод Фурье*, *классическое решение*.

An inverse boundary value problem for a second-order hyperbolic equation with integral condition of the first kind is investigated. A definition of classical solution is introduced for this problem. The Fourier method is used to reduce the problem to a system of integral equations. The method of contraction mappings is applied to prove the existence and uniqueness of a solution of the system of integral equations. Then, the existence and uniqueness of a classical solution of the initial problem is proved.

Keywords: *inverse boundary problem*, *hyperbolic equation*, *Fourier method*, *classic solution*.

Введение

Под обратной задачей для уравнений с частными производными в настоящей работе подразумевается такая задача, в которой вместе с решением требуется определить правую часть или (и) тот или иной коэффициент (коэффициенты) самого уравнения. Обратные задачи возникают в самых различных областях человеческой деятельности, таких как сейсмология, разведка полезных ископаемых, биология, медицина, контроль качества промышленных изделий и т. д., что ставит их в ряд актуальных проблем современной математики. В случае, если в обратной задаче неизвестными являются решение и правая часть, то такая обратная задача будет линейной; если же неизвестными являются решение и хотя бы один из коэффициентов, то обратная задача будет нелинейной. Именно нелинейные обратные задачи для гиперболических уравнений и будут изучаться в настоящей работе.

Нелинейные обратные краевые задачи для гиперболичесго уравнения второго порядка исследовались в работах [1]–[5]

В настоящее время теория нелокальных задач интенсивно развивается и представляет собой важный раздел теории дифференциальных уравнений с частными производными. Большой интерес в этой области представляют задачи с нелокальными интегральными условиями. Появление интегральных условий связано с тем, что при изучении некоторых физических процессов границы областей их протекания могут оказаться недоступными для непосредственных измерений, хотя известно среднее значение искомых величин. Условия такого вида могут появиться при математическом моделировании явлений, связанных с физикой плазмы [6] , распространением тепла [7], [8], процессом влагопереноса в капиллярно-пористых средах [9], вопросами демографии и математической биологии.

В [4], [5] нами рассмотрена обратная краевая задача для гиперболического уравнения второго порядка при наличии интегрального условия, которая сводится к самосопряженной задаче. В отличие от работ [4], [5] в данной работе исследуется обратная краевая задача при наличии интегрального условия, которая сводится к несамосопряженной задаче.

1 Постановка задачи и ее сведение к эквивалентной задаче

Рассмотрим для уравнения

$$u_{tt}(x,t)-u_{xx}(x,t)=a(t)u(x,t)+f(x,t) \quad (1.1)$$

в области $D_T=\{(x,t):0\le x\le 1,\ 0\le t\le T\}$ обратную краевую задачу с начальными условиями

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x)\ (0\le x\le 1), \quad (1.2)$$

граничным условием Дирихле

$$u(1,t)=0\ (0\le t\le T), \quad (1.3)$$

нелокальным интегральным условием

$$\int_0^1 u(x,t)dx=0\ (0\le t\le T) \quad (1.4)$$

и дополнительным условием

$$u(0,t)=h(t) \quad (0\le t\le T), \qquad (1.5)$$

где $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $h(t)$ – заданные функции, а $u(x,t)$ и $a(t)$ – искомые функции.

***Определение* 1.1.** *Классическим решением обратной краевой задачи* (1.1)–(1.5) *назовем пару* $\{u(x,t),a(t)\}$ *функций* $u(x,t)\in C^2(D_T)$ *и* $a(t)\in C[0,T]$, *удовлетворяющих уравнению* (1.1) *в* D_T, *условиям* (1.2) *в* $[0,1]$ *и условиям* (1.3)–(1.5) *в* $[0,T]$ *в обычном смысле.*

Аналогично [5] можно доказать следующую лемму.

***Лемма* 1.1.** *Пусть функция* $\varphi(x),\psi(x)\in C[0,1]$, $h(t)\in C^2[0,T]$, $h(t)\ne 0\ (0\le t\le T)$, $f(x,t)\in C(D_T)$, $\int_0^1 f(x,t)dx=0\ (0\le t\le T)$ *и выполняются условия согласования*

$$\int_0^1\varphi(x)dx=0,\ \int_0^1\psi(x)dx=0,$$

$$\varphi(0)=h(0),\ \psi(0)=h'(0).$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1.1)–(1.5) *эквивалентна задаче определения функций* $u(x,t)\in C^2(D_T)$, $a(t)\in C[0,T]$ *из* (1.1)–(1.3) *и*

$$u_x(0,t)=u_x(1,t)\ (0\le t\le T), \qquad (1.6)$$

$$h''(t)-u_{xx}(0,t)=a(t)h(t)+f(0,t)\ (0\le t\le T). \quad (1.7)$$

2 Доказательство существования и единственности классического решения обратной краевой задачи

Известно [10], что последовательности функций

$$X_0(x)=2(1-x),\dots,X_{2k-1}(x)=4(1-x)\cos\lambda_k x,\quad X_{2k}(x)=4\sin\lambda_k x,\dots \qquad (2.1)$$

$$Y_0(x)=1,\dots,Y_{2k-1}(x)=\cos\lambda_k x,\quad Y_{2k}(x)=x\sin\lambda_k x,\dots \qquad (2.2)$$

образуют биортогональную систему и система (2.1) образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, где $\lambda_k=2k\pi$ $(k=1,2,\dots)$. Тогда произвольная функция $g(x)\in L_2(0,1)$ разлагается в биортогональный ряд:

$$g(x)=g_0X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}g_{2k-1}X_{2k-1}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}g_{2k}X_{2k}(x),$$

где коэффициенты g_0, g_{2k-1}, g_{2k} вычисляются по формулам

$$g_0=\int_0^1 g(x)Y_0(x)dx,$$

$$g_{2k-1}=\int_0^1 g(x)Y_{2k-1}(x)dx,$$

$$g_{2k}=\int_0^1 g(x)Y_{2k}(x)dx.$$

Предположим, что

$$g(x)\in C^{2i-1}[0,1],\ g^{(2i)}(x)\in L_2(0,1),$$

$$g^{(2s)}(1)=0,\ g^{(2s+1)}(0)=g^{(2s+1)}(1)\ \left(i\ge1, s=\overline{0,i-1}\right).$$

Тогда имеют место следующие оценки [11]:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^{2i}g_{2k-1})^2\le\frac12\left\|g^{(2i)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}, \qquad (2.3)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^{2i}g_{2k})^2\le\frac12\left\|g^{(2i)}(x)x+2ig^{(2i-1)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}. \qquad (2.4)$$

Далее, пусть

$$g(x)\in C^{2i}[0,1],\ \ g^{(2i+1)}(x)\in L_2(0,1),$$

$$g^{(2s)}(1)=0,\ \ g^{(2s-1)}(0)=g^{(2s-1)}(1)\ (i\ge1, s=\overline{0,i}).$$

Тогда [11]:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^{2i+1}g_{2k-1})^2\le\frac12\left\|g^{(2i+1)}(x)\right\|^2_{L_2(0,1)}, \qquad (2.5)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^{2i+1}g_{2k})^2\le$$

$$\le\frac12\left\|g^{(2i+1)}(x)x+(2i+1)g^{(2i)}(x)\right\|^2_{L_2(0,1)} (i\ge1). \qquad (2.6)$$

Теперь рассмотрим следующие пространства.

1. Обозначим через $B^3_{2,T}$ [11] совокупность всех функций $u(x,t)$ вида

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)X_k(x),$$

рассматриваемых в D_T, где каждая из функций $u_k(t)$ непрерывна на $[0,T]$ и

$$J_T(u)\equiv\left\|u_0(t)\right\|_{C[0,T]}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\left\|u_{2k-1}(t)\right\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2}+$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\left\|u_{2k}(t)\right\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2}<\infty.$$

Норму на этом множестве определим так:

$$\left\|u(x,t)\right\|_{B^3_{2,T}}=J_T(u).$$

Функция $u(x,t)$, как элемент пространства $B^3_{2,T}$, в частности, обладает следующими свойствами:

$$u(x,t),u_x(x,t),u_{xx}(x,t)\in C(D_T),$$

$$u_{xxx}(x,t)\in C([0,T];L_2(0,1));$$

$$u(1,t)=0,\ \ u_x(0,t)=u_x(1,t),$$

$$u_{xx}(1,t)=0\ \ (0\le t\le T).$$

2. Через E^3_T обозначим пространство

$$B^3_{2,T}\times C[0,T]$$

вектор-функций $z(x,t)=\{u(x.t),a(t)\}$ с нормой

$$\left\|z\right\|_{E^3_T}=\left\|u(x,t)\right\|_{B^3_{2,T}}+\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}.$$

Очевидно, что E^3_T является банаховым пространством.

Так как система (2.1) образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, то каждое решение задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) будем искать в виде

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)X_k(x), \tag{2.7}$$

где

$$u_k(t)=\int_0^1 u(x,t)Y_k(x)dx \quad (k=0,1,...), \tag{2.8}$$

причем $X_k(x)$ и $Y_k(x)$ определены соотношениями (2.1) и (2.2) соответственно.

Применяя метод разделения переменных для определения искомых функций $u_k(t)$ $(k=0,1,...)$, из (1.1) и (1.2) имеем:

$$u''_0(t)=a_0(t)u_0(t)+f_0(t), \tag{2.9}$$

$$u''_{2k-1}(t)+\lambda_k^2u_{2k-1}(t)=a_0(t)u_{2k-1}(t)+ \\ +f_{2k-1}(t) \quad (k=1,2,...), \tag{2.10}$$

$$u''_{2k}(t)+\lambda_k^2u_{2k}(t)=a_0(t)u_{2k}(t)+ \\ +f_{2k}(t)+2\lambda_k u_{2k-1}(t) \quad (k=1,2,...), \tag{2.11}$$

$$u_k(0)=\varphi_k,\ u'_k(T)=\psi_k \quad (k=0,1,...), \tag{2.12}$$

где

$$F_k(t;u,a)=f_k(t)+a(t)u_k(t),$$

$$f_k(t)=\int_0^1 f(x,t)Y_k(x)dx,$$

$$\varphi_k=\int_0^1\varphi(x)Y_k(x)dx,$$

$$\psi_k=\int_0^1\psi(x)Y_k(x)dx \quad (k=0,1,...).$$

Решая задачу (2.9)–(2.12) находим:

$$u_0(t)=\varphi_0+t\psi_0+ \\ +\int_0^t(t-\tau)F_0(\tau;u,a)d\tau \quad (0\le t\le T), \tag{2.13}$$

$$u_{2k-1}(t)=\varphi_{2k-1}\cos\lambda_k t+\psi_{2k-1}\frac{1}{\lambda_k}\sin\lambda_k t+ \\ +\frac{1}{\lambda_k}\int_0^t F_{2k-1}(\tau;u,a)\sin\lambda_k(t-\tau)d\tau \\ (k=1,2,...;0\le t\le T), \tag{2.14}$$

$$u_{2k}(t)=\varphi_{2k}\cos\lambda_k t+\psi_{2k}\frac{1}{\lambda_k}\sin\lambda_k t+ \\ +\frac{1}{\lambda_k}\int_0^t F_{2k}(\tau;u,a)\sin\lambda_k(t-\tau)d\tau- \\ -t\varphi_{2k-1}\sin\lambda_k t-\frac{1}{\lambda_k}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sin\lambda_k t-t\cos\lambda_k t\right)\psi_{2k-1}- \\ -\frac{2}{\lambda_k}\int_0^t\left(\int_0^\tau F_{2k-1}(\xi;u,a)\sin\lambda_k(\tau-\xi)d\xi\right)\times \\ \times\sin\lambda_k(t-\tau)d\tau \quad (k=1,2,...), \tag{2.15}$$

где

$$F_k(t;u,a)=f_k(t)+a(t)u_k(t) \quad (k=0,1,...;0\le t\le T).$$

После подстановки выражений $u_k(t)$ $(k=0,1,...)$ в (2.7), для определения компоненты $u(x,t)$ классического решения $\{u(x,t),a(t)\}$ задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) получаем:

$$u(x,t)=\left(\varphi_0+t\psi_0+\int_0^t(t-\tau)F_0(\tau;u,a)d\tau\right)X_0(x)+ \\ +\sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_{2k-1}\cos\lambda_k t+\psi_{2k-1}\frac{1}{\lambda_k}\sin\lambda_k t+\right. \\ \left.+\frac{1}{\lambda_k}\int_0^t F_{2k-1}(\tau;u,a)\sin\lambda_k(t-\tau)d\tau\right)X_{2k-1}(x)+ \\ +\sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_{2k}\cos\lambda_k t+\psi_{2k}\frac{1}{\lambda_k}\sin\lambda_k t+\right. \\ +\frac{1}{\lambda_k}\int_0^t F_{2k}(\tau;u,a)\sin\lambda_k(t-\tau)d\tau+ \\ -t\varphi_{2k-1}\sin\lambda_k t-\frac{1}{\lambda_k}\left(\frac{1}{\lambda_k}\sin\lambda_k t-t\cos\lambda_k t\right)\psi_{2k-1}- \\ -\frac{2}{\lambda_k}\int_0^t\left(\int_0^\tau F_{2k-1}(\xi;u,a)\sin\lambda_k(\tau-\xi)d\xi\right)\times \\ \left.\times\sin\lambda_k(t-\tau)d\tau\Big)X_{2k}(x)\right). \tag{2.16}$$

Теперь из (1.7), с учетом (2.7), имеем:

$$a(t)=h^{-1}(t)\left\{h''(t)-f(0,t)+4\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2u_{2k-1}(t)\right\}. \tag{2.17}$$

Для того, чтобы получить уравнение для второй компоненты $a(t)$ решения $\{u(x,t),a(t)\}$ задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) подставим выражение (2.14) в (2.17):

$$a(t)=h^{-1}(t)\left\{h''(t)-f(0,t)+\right. \\ +4\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left[\varphi_{2k-1}\cos\lambda_k t+\frac{1}{\lambda_k}\psi_{2k-1}\sin\lambda_k t+\right. \\ \left.\left.+\frac{1}{\lambda_k}\int_0^t F_{2k-1}(\tau;u,a)\sin\lambda_k(t-\tau)d\tau\right]\right\}. \tag{2.18}$$

Таким образом, решение задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) сведено к решению системы (2.16), (2.18) относительно неизвестных функций $u(x,t)$ и $a(t)$.

Для изучения вопроса единственности решения задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) важную роль играет следующая лемма.

Лемма 2.1. *Если* $\{u(x,t),a(t)\}$ *– любое решение задачи* (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7), *то функции* $u_k(t)$ $(k=0,1,...)$, *определенные соотношением* (2.8), *удовлетворяют на* $[0,T]$ *счетной системе* (2.13)–(2.15).

Замечание. Из леммы 2.1 следует, что для доказательства единственности решения задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) достаточно доказать единственность решения системы (2.16), (2.18).

Рассмотрим в пространстве E_T^3 оператор

$$\Phi(u,a)=\left\{\Phi_1(u,a),\Phi_2(u,a)\right\},$$

где $\qquad \Phi_1(u,a)=\tilde{u}(x,t)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{u}_k(t)X_k(x),$

$$\Phi_2(u,a)=\tilde{a}(t),$$

а $\tilde{u}_0(t),\tilde{u}_{2k-1}(t),\tilde{u}_{2k}(t)\ (k=1,2,...)$ и $\tilde{a}_0(t)$ равны соответственно правым частям (2.13)–(2.15) и (2.18).

Теперь, с помощью нетрудных преобразований, находим:

$$\left\|\tilde{u}_0(t)\right\|_{C[0,T]}\le\left|\varphi_0\right|+T\left|\psi_0\right|+ \tag{2.19}$$

$$+T\sqrt{T}\left(\int_0^t\left|f_0(\tau)\right|^2d\tau\right)^{1/2}+T^2\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}\left\|u_0(t)\right\|_{C[0,T]},$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\left\|\tilde{u}_{2k-1}(t)\right\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2}\le$$

$$\le2\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\left|\varphi_{2k-1}\right|)^2\right)^{1/2}++2\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2\left|\psi_{2k-1}\right|)^2\right)^{1/2}+$$

$$+2\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^2\left|f_{2k-1}(\tau)\right|\right)^2d\tau\right)^{1/2}+$$

$$+2T\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\left\|u_{2k-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2}, \tag{2.20}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\left\|\tilde{u}_{2k}(t)\right\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2}\le$$

$$\le2\sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\left|\varphi_{2k}\right|\right)^2\right)^{1/2}+2\sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^2\left|\psi_{2_{2k}}\right|\right)^2\right)^{1/2}+$$

$$+2\sqrt{2T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^2\left|f_{2k}(\tau)\right|\right)^2d\tau\right)^{1/2}+$$

$$+2\sqrt{2}T\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\left\|u_{2k}(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2}+$$

$$+4\sqrt{2}T\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\left|\varphi_{2k-1}\right|\right)^2\right)^{1/2}+$$

$$+2\sqrt{2}\left(1+2T\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^2\left|\psi_{2k-1}\right|\right)^2\right)^{1/2}+$$

$$+4\sqrt{2T}T\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^2\left|f_{2k-1}(\tau)\right|\right)^2d\tau\right)^{1/2}+$$

$$+4\sqrt{2}T^2\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\left\|u_{2k-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2}, \tag{2.21}$$

$$\left\|\tilde{a}(t)\right\|_{C[0,T]}\le\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\left\{\left\|h''(t)-f(0,t)\right\|_{C[0,T]}+\right.$$

$$+4\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{1/2}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\left|\varphi_{2k-1}\right|\right)^2\right)^{1/2}+\right.$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^2\left|\psi_{2k-1}\right|\right)^2\right)^{1/2}+$$

$$+\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^2\left|f_{2k-1}(\tau)\right|\right)^2d\tau\right)^{1/2}+ \tag{2.22}$$

$$\left.\left.+\frac{2}{\sqrt{6}}T\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\left\|u_{2k-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2}\right]\right\}.$$

Предположим, что данные задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi(x)\in C^2[0,1],\ \varphi'''(x)\in L_2(0,1),$
   $\varphi(1)=\varphi''(1)=0,\ \varphi'(0)=\varphi'(1).$
2. $\psi(x)\in C^1[0,1],\ \psi''(x)\in L_2(0,1),$
   $\psi(1)=0,\ \psi'(0)=\psi'(1).$
3. $f_{xx}(x,t)\in L_2(D_T),\ f(1,t)=0,$
   $f_x(0,t)=f_x(1,t)\ \ (0\le t\le T).$
4. $h(t)\in C^2[0,T],\ h(t)\ne0\ \ (0\le t\le T).$

Тогда, из (2.19)–(2.22), с учетом (2.3)–(2.6), получим:

$$\left\|\tilde{u}(x,t)\right\|_{B_{2,T}^3}\le A_1(T)+ \\ +B_1(T)\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}\left\|u(x,t)\right\|_{B_{2,T}^3}, \tag{2.23}$$

$$\left\|\tilde{a}(t)\right\|_{C[0,T]}\le A_2(T)+ \\ +B_2(T)\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}\left\|u(x,t)\right\|_{B_{2,T}^3}, \tag{2.24}$$

где

$$A_1(T)=\left\|\varphi(x)\right\|_{L_2(0,1)}+T\left\|\psi(x)\right\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+T\sqrt{T}\left\|f(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}+$$

$$+\left(\sqrt{2}+4T\right)\left\|\varphi'''(x)\right\|_{L_2(0,1)}+4\left(1+T\right)\left\|\psi''(x)\right\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+2\sqrt{2T}\left(1+2\sqrt{2T}\right)\left\|f_{xx}(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}+$$

$$+2\left\|\varphi'''(x)x+3\varphi''(x)\right\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+2\left\|\psi''(x)x+2\psi'(x)\right\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+2\sqrt{T}\left\|f_{xx}(x,t)x+2f_x(x,t)\right\|_{L_2(D_T)},$$

$$B_1(T)=\left(1+4\sqrt{2}\right)T^2+\left(1+\sqrt{2}\right)T,$$

$$A_2(T)=\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\left\{\left\|h''(t)-f(0,t)\right\|_{C[0,T]}+\right.$$

$$+2\sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{1/2}\left[\left\|\varphi'''(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\right.$$

$$\left.\left.+\left\|\psi''(x)\right\|_{L_2(D_T)}+\sqrt{T}\left\|f_{xx}(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}\right]\right\},$$

$$B_2(T)=4\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{1/2}T.$$

Из неравенств (2.23)–(2.24) заключаем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B^3_{2,T}} + \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \le \le A(T) + B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B^3_{2,T}}, \quad (2.25)$$

где

$$A(T) = A_1(T) + A_2(T),$$

$$B(T) = B_1(T) + B_2(T).$$

Итак, можно доказать следующую теорему:

***Теорема* 2.1.** *Пусть выполнены условия* 1–4 *и*

$$B(T)(A(T)+2)^2 \le 1. \quad (2.26)$$

Тогда задача (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) *имеет в шаре* $K = K_R \left(\|z\|_{E^3_T} \le R = A(T)+2\right)$ *из* E^3_T *единственное классическое решение*.

Доказательство. В пространстве E^3_T рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z, \quad (2.27)$$

где $z = \{u, a\}$, а компоненты $\Phi_i (i = 1,2)$ оператора $\Phi(u,a)$ определены правыми частями (2.16), (2.18) соответственно.

Рассмотрим оператор $\Phi(u,a)$ в шаре $K = K_R$ из E^3_T. Аналогично (2.25) получаем, что для любых $z, z_1, z_2 \in K_R$ справедливы оценки:

$$\|\Phi z\|_{E^3_T} \le A(T) + B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B^3_{2,T}}, \quad (2.28)$$

$$\|\Phi z_1 - \Phi z_2\|_{E^3_T} \le \quad (2.29)$$

$$\le B(T)R\left(\|a_1(t)-a_2(t)\|_{C[0,T]} + \|u_1(x,t)-u_2(x,t)\|_{B^3_{2,T}}\right).$$

Из (2.28) и (2.29), с учетом (2.26), следует, что оператор Φ действует в шаре $K = K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре $K = K_R$ оператор Φ имеет единственную неподвижную точку $\{u, a\}$, которая является единственным в шаре $K = K_R$ решением (2.27), т. е. является единственным в шаре $K = K_R$ решением системы (2.16), (2.18).

Функция $u(x,t)$, как элемент пространства $B^3_{2,T}$, непрерывна и имеет непрерывные производные $u_x(x,t)$ и $u_{xx}(x,t)$ в D_T.

Теперь из (2.9)–(2.11), соответственно, имеем:

$$\|u''_0(t)\|_{C[0,T]} \le \|a(t)\|_{C[0,T]}\|u_0(t)\|_{C[0,T]} + +\left\|\|f(x,t)\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)},$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\|u''_{2k-1}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2} \le$$

$$\le \sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2} + +\left\|\|a(t)u_x(x,t)+f_x(x,t)\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)},$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\|u''_{2k}(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2} \le$$

$$\le \sqrt{3}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2} + +\sqrt{6}\left\|\|u_{xx}(x,t))\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)} + +\frac{\sqrt{6}}{2}\left\|\|a(t)(u_x(x,t)x+u(x,t)) + +f_x(x,t)x+f(x,t)\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)}.$$

Отсюда следует, что $u_{tt}(x,t)$ непрерывна в D_T.

Легко проверить, что уравнение (1.1) и условия (1.2), (1.3), (1.6) и (1.7) удовлетворяются в обычном смысле. Значит, $\{u(x,t), a(t)\}$ является решением задачи (1.1)–(1.3), (1.6) и (1.7) и в силу леммы 2.1 это решение единственно. Теорема доказана.

С помощью леммы 1.1, из последней теоремы вытекает однозначная разрешимость исходной задачи (1.1)–(1.5).

***Теорема* 2.2.** *Пусть выполнены все условия теоремы* 2.1 *и*

$$\int_0^1 f(x,t)dx = 0 \quad (0 \le t \le T),$$

$$\int_0^1 \varphi(x)dx = 0, \quad \int_0^1 \psi(x)dx = 0,$$

$$\varphi(0) = h(0), \quad \psi(0) = h'(0).$$

Тогда задача (1.1)–(1.5) *имеет в шаре*

$$K = K_R\left(\|z\|_{E^3_T} \le R = A(T)+2\right)$$

из E^3_T *единственное классическое решение*.

Заключение

В работе доказано существование и единственность решения одной обратной краевой задачи для гиперболического уравнения второго порядка с несамосопряженными краевыми условиями. Пользуясь этими фактами доказано существование и единственность классического решения одной обратной краевой задачи для гиперболического уравнения второго порядка с интегральным условием первого рода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Валитов*, *И.Р.* Обратные задачи для гиперболических уравнений: случай неизвестных коэффициентов, зависящих от времени / И.Р. Валитов, А.И. Кожанов // Вестник НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. – 2006. – Т. 6, вып. 1. – С. 3–18.

2. *Валитов*, *И.Р.* О разрешимости некоторых гиперболических обратных задач с двумя неизвестными коэффициентами / И.Р. Валитов, А.И. Кожанов // Мат. заметки ЯГУ. – 2007. – № 14. – С. 3–16.

3. *Сафиуллова*, *Р.Р.* Обратная задача для гиперболического уравнения второго порядка с неизвестным коэффициентом, зависящим от

времени / Р.Р. Сафиуллова // Вестник ЮУрГУ. Сер. Математическое моделирование и программирование. – 2013. – Т. 6, № 4. – С. 73–86.

4. *Мегралиев*, *Я.Т.* Об одной обратной краевой задаче для гиперболического уравнения второго порядка с интегральным условием первого рода / Я.Т. Мегралиев // Вестник Брянского государственного университета. – 2011. – № 4. – С. 22–28.

5. *Мегралиев*, *Я.Т.* О разрешимости одной обратной краевой задачи для гиперболического уравнения второго порядка / Я.Т. Мегралиев // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 4 (17). – С. 63–67.

6. *Самарский*, *А.А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений / А.А. Самарский // Дифференциальные уравнения. – 1980. – Т. 16, № 11. – С. 1925–1935.

7. *Cannon*, *J.R.* The solution of the heat equation subject to the specification of energy / J.R. Cannon // Quart. Appl. Math. – 1963. – Vol. 5, № 21. – P. 155–160.

8. *Ионкин*, *Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием / Н.И. Ионкин // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. 13, № 2. – С. 294–304.

9. *Нахушев*, *А.М.* Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приближения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод / А.М. Нахушев // Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т. 18, № 1. – С. 72–81.

10. *Калиев*, *И.А.* Задачи определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам / И.А. Калиев, М.М. Сабитова // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2009. – Т. 12, № 1 (37). – С. 89–97.

11. *Мегралиев*, *Я.Т.* Об одной обратной краевой задаче для эллиптического уравнения второго порядка с интегральным условием первого рода / Я.Т. Мегралиев // Труды ИММ УрО РАН. – 2013. – Т. 19, № 1. – С. 226–235.

Поступила в редакцию 17.02.15.