

# POLITICA DE DIVIDENDOS Y PROBABILIDAD DE RUINA

Alegre, A. , Claramunt, M.M. , Mármol, M.

## Abstract

In this paper we introduce different kinds of dividend barriers in the classical model ruin theory. We study the influence of barrier strategy on ruin probability. A method based on renewal equations [Grandell (1991)], alternative to differential argument [Gerber (1975)], is used to get the partial differential equations to solve survival probabilities.

Finally we calculate and compare the survival probabilities using the linear and the parabolic dividend barrier, with help of simulation.

**Keywords:** Ruin Theory, Survival Probability, Dividend Barriers.

## 1. INTRODUCCION

En el modelo clásico de la teoría de la ruina se calcula la probabilidad de ruina de una compañía de seguros modelizando el coste total de los siniestros a través de un proceso de Poisson compuesto, es decir considerando que el número de siniestros sigue una distribución discreta de Poisson de parametro  $\lambda$ , y la cuantía individual del siniestro una distribución continua  $F(z)$ . Como consecuencia de utilizar una distribución de Poisson en el número de siniestros, el tiempo que transcurre entre la ocurrencia de dos siniestros puede ser modelizado mediante una distribución exponencial de media  $\frac{1}{\lambda}$ .

El cálculo de la probabilidad de ruina bajo estas hipótesis es un tema ampliamente tratado en la literatura actuarial. El cálculo de esa probabilidad,  $\psi(u)$ , se realiza en tiempo infinito (probabilidad de ruina última) y tiempo continuo, según la clasificación realizada por Bühlmann(1970, p.133). La probabilidad de supervivencia,  $\phi(u) = 1 - \psi(u)$ , depende del nivel inicial de las reservas  $R(0) = u$ , siendo  $R(t) = u + ct - S_t$  donde  $S_t$  es el proceso de siniestralidad agregada hasta el momento  $t$ , y  $c$  la intensidad de prima, cumpliéndose  $c > \lambda \cdot E[z]$ . Consideraremos  $\rho$  como el recargo de seguridad  $\rho = \frac{c}{\lambda \cdot E[z]} - 1$ .

Una primera aproximación para la determinación de la ecuación que permite obtener la probabilidad de supervivencia es el argumento diferencial usado por Cramer (1930,p.75):

$$\phi(u) = (1 - \lambda dt) \phi(u + cdt) + \lambda dt \int_0^{u+cdt} \phi(u + cdt - z) dF(z)$$

Un planteamiento alternativo, propuesto por Feller (1971,p 183), Grandell (1991, p 5) y Gerber (1975, p. 114), es el basado en las ecuaciones de renovación. Como el proceso de Poisson es un proceso de renovación, y la ruina no puede producirse antes del momento de ocurrencia del primer siniestro, tenemos:

$$\phi(u) = E[\phi(u + ct - z)] = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} \phi(u + ct - z) dF(z) dt$$

Lo enunciado hasta el momento permite calcular la probabilidad de ruina sin tener en cuenta las políticas de reparto de dividendos, es decir dejando que todos los beneficios técnicos se acumulen en forma de reservas. Una política de reparto de dividendos implica una regla de decisión sobre la parte de beneficios que se integrarán en las reservas, repartiéndose el resto en forma de dividendos. La forma de introducir en el modelo matemático esas estrategias de reparto es mediante las barreras de dividendos,  $b(t)$ , que producirán cambios en el proceso de acumulación de reservas. Así, cuando las reservas alcanzan el nivel de la barrera se mantienen en ella hasta la ocurrencia del siguiente siniestro, mientras todos los excesos se van repartiendo. La dinámica de las reservas en el tiempo vendrá dada por:

$$\begin{aligned} dR(t) &= cdt - dS_t && \text{si } R(t) < b(t) \\ dR(t) &= db(t) - dS_t && \text{si } R(t) = b(t) \end{aligned}$$

Esta ampliación del modelo dará lugar a cambios en la probabilidad de ruina. Para conseguir la ecuación que nos determine la probabilidad de supervivencia se utilizan los dos enfoques comentados en el modelo sin barrera: enfoque diferencial y enfoque basado en las ecuaciones de renovación.

En la literatura actuarial se ha estudiado el efecto en la probabilidad de ruina y su complementaria de supervivencia con la introducción de diversos tipos de barreras. En caso de la barrera constante  $b(t) = b$ , evidentemente la probabilidad de ruina es uno, como se comenta en Bühlman (1970, p. 165). También se ha estudiado en Gerber (1981) el efecto de la barrera lineal  $b(t) = b + at$ , estudiándola para el caso concreto de función de distribución de la cuantía de los siniestros exponencial. En Siegl (1996) se plantea esa misma barrera y se soluciona para los casos de exponencial mixta y gamma.

En este trabajo se usará el planteamiento alternativo, basado en ecuaciones de renovación, para plantear las ecuaciones que nos determinan la probabilidad de supervivencia en caso de barrera lineal. A continuación se plantearán nuevos tipos de barreras, sobre

las que se aplicarán las ecuaciones de renovación: barrera asintótica y barrera parabólica. En el caso de la barrera asintótica, como existe un tope en la acumulación de reservas nos encontramos con el mismo caso que en la barrera constante, es decir que la probabilidad de ruina es uno.

El interés de introducir la barrera constante y la asintótica es que nos podemos plantear el valor actual de los dividendos repartidos. En Bullhman (1970, p.171) encontramos la solución para el caso de la barrera constante, y en Gerber (1981) para barrera lineal. Como trabajo posterior aplicaremos el enfoque de las ecuaciones de renovación para el cálculo del valor actual de los dividendos. Finalmente se realizará un estudio comparativo entre las probabilidades de ruina obtenidas en el caso de que la cuantía de los siniestros siga una distribución exponencial cuando modificamos el proceso con barrera lineal y parabólica.

## 2. BARRERA DE DIVIDENDOS LINEAL

Consideramos una barrera lineal  $b(t) = b + at$ , donde  $b \geq 0$  y  $0 < a < c$ . La probabilidad de supervivencia  $\phi(u, b)$  será función de dos variables: el valor inicial de las reservas  $u$ , y el nivel inicial de la barrera  $b$ , cumpliéndose  $0 \leq u \leq b$ .

En Gerber(1981), se utiliza el planteamiento diferencial:

$$\phi(u, b) = (1 - \lambda dt)\phi(u + cdt, b + adt) + \lambda dt \int_0^{\infty} \phi(u - z, b) dF(z) \quad (2.1)$$

siendo  $(1 - \lambda dt)$  la probabilidad de que no ocurra siniestro en un intervalo  $dt$ .

Operando sobre (2.1) y teniendo en cuenta que:

$$\phi(u + cdt, b + adt) = \phi(u, b) + cdt \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} + adt \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial b}$$

llegamos a la expresión:

$$\boxed{c \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} + a \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial b} - \lambda \phi(u, b) + \lambda \int_0^u \phi(u - z, b) dF(z) = 0} \quad (2.2)$$

## 2.1. PLANTEAMIENTO ALTERNATIVO

Como ya se ha dicho en la introducción, la probabilidad de supervivencia sin barrera puede obtenerse con el planteamiento basado en las ecuaciones de renovación:

$$\phi(u) = E[\phi(u + ct - z)] = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} \phi(u + ct - z) dF(z) dt$$

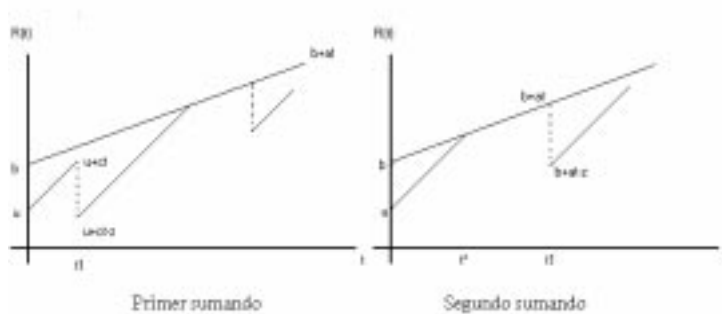
En este trabajo se utiliza este enfoque para la obtención de la probabilidad de supervivencia con barrera lineal:

$$\begin{aligned} \phi(u, b) = & \int_0^{t^*} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} \phi(u + ct - z, b + at) dF(z) dt + \\ & + \int_{t^*}^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{b+at} \phi(b + at - z, b + at) dF(z) dt \end{aligned} \quad (2.3)$$

siendo  $t^*$  el punto de corte entre  $u + ct$  y  $b + at$ :

$$t^* = \frac{b - u}{c - a}$$

La primera de las integrales dobles de (2.3) corresponde al caso en que el primer siniestro ocurra antes del punto de corte, en ese caso no se ha alcanzado la barrera y por tanto el nivel de reservas es  $u + ct - z$ . El segundo sumando de (2.3) indica el caso en que ese primer siniestro se produzca una vez que las reservas hayan alcanzado la barrera, el nuevo nivel de reservas será  $b + at - z$ .



Haciendo el cambio de variable  $u + ct = x$  sobre la expresión (2.3) :

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda u}{c}} \int_u^{x^*} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \int_0^x \phi\left(x - z, b + a \frac{x-u}{c}\right) dF(z) dx + \\ & + \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda u}{c}} \int_{x^*}^{\infty} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \int_0^{b+a\frac{x-u}{c}} \phi\left(b + a \frac{x-u}{c} - z, b + a \frac{x-u}{c}\right) dF(z) dx \end{aligned} \quad (2.4)$$

siendo  $x^* = u + ct^* = \frac{cb - au}{c - a}$ .

Derivando (2.4) respecto a  $u$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} &= \frac{\lambda}{c} \phi(u, b) + \frac{\lambda}{c} e^{-\lambda t^*} \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, x^*) dF(z) + \\ & + \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda u}{c}} \int_u^{x^*} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \frac{\partial}{\partial u} \int_0^x \phi\left(x - z, b + a \frac{x-u}{c}\right) dF(z) dx - \\ & - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi(u - z, b) dF(z) + \frac{\lambda}{c} (-\lambda) \int_{t^*}^{\infty} e^{-\lambda t} \int_0^{b+at} \phi(b + at - z, b + at) dF(z) dt \end{aligned} \quad (2.5)$$

Sobre (2.3) hacemos  $b + at = x$  :

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{a} e^{\frac{\lambda b}{a}} \int_b^{x^*} e^{-\frac{\lambda x}{a}} \int_0^{u+c\frac{x-b}{a}} \phi\left(u + c \frac{x-b}{a} - z, x\right) dF(z) dx + \\ & + \frac{\lambda}{a} e^{\frac{\lambda b}{a}} \int_{x^*}^{\infty} e^{-\frac{\lambda x}{a}} \int_0^x \phi(u - z, x) dF(z) dx \end{aligned} \quad (2.6)$$

Derivando (2.6) respecto a  $b$ :

$$\frac{\partial \phi(u, b)}{\partial b} = \frac{\lambda}{a} \phi(u, b) - \frac{\lambda}{a} e^{-\lambda t^*} \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, x^*) dF(z) +$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda \int_0^{t^*} e^{-\lambda t} \frac{\partial}{\partial b} \int_0^{u+ct} \phi(u+ct-z, b+at) dF(z) dt + \\
& + \frac{\lambda}{a} a \left(-\frac{\lambda}{a}\right) \int_0^{t^*} e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} \phi(u+ct-z, b+at) dF(z) dt
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Agrupando las dos derivadas (2.5) y (2.7), llegamos a:

$$\frac{a}{\lambda} \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial b} + \frac{c}{\lambda} \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} = \phi(u, b) - \int_0^u \phi(u-z, b) dF(z)$$

Expresión esta última coincidente con (2.2). En el caso concreto de que  $F(z)$  siga una distribución exponencial normalizada (con esperanza unitaria), obtenemos una ecuación en diferencias parciales (EDP) de segundo grado:

$$c \frac{\partial^2 \phi(u, b)}{\partial u^2} + a \frac{\partial^2 \phi(u, b)}{\partial b \partial u} + (c - \lambda) \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} + a \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial b} = 0 \tag{2.8}$$

con las siguientes condiciones de contorno que podemos encontrar en Gerber(1981):

- $\left. \frac{\partial \phi}{\partial u} \right|_{u=b} = 0$ , la variación en la probabilidad de supervivencia ante cambios del nivel de las reservas cuando este coincide con el nivel de la barrera es nula .
- $\lim_{u \rightarrow \infty} \phi(u, b) = 1$  ( $b \rightarrow \infty$ ) , a medida que  $u$  tiende a  $\infty$  (uniformemente con  $b$  , ya que  $b \geq u$ ), la probabilidad de supervivencia tiende a 1.
- $\lim_{b \rightarrow \infty} \phi(u, b) = \phi(u) = 1 - \frac{\lambda}{c} e^{-\frac{c-\lambda}{c}u}$ , hacer tender el punto inicial de la barrera a infinito, es equivalente a hacer desaparecer la barrera. Por tanto la probabilidad de supervivencia con barrera tenderá a la probabilidad de supervivencia sin barrera, que en el caso de cuantía de los siniestros exponencial toma esa expresión (Panjer, 1992, p.374).

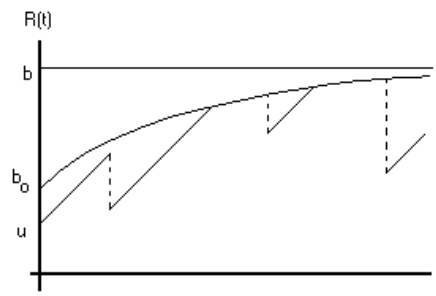
### 3. BARRERA DE DIVIDENDOS ASINTOTICA

Uno de los problemas de la barrera lineal es que permite la acumulación infinita de reservas. Nos podría interesar una barrera que limitase esa acumulación, de ahí nace la idea de una barrera asintótica.

La barrera asintótica es de la forma:

$$b(t) = b + (b_0 - b)e^{-\alpha t}$$

Gráficamente:



El tope que impone esta barrera en  $b(t) = b$ , de igual forma que ocurría con la barrera constante, provoca que la probabilidad de ruina sea 1, pero será interesante calcular el valor actual de los dividendos en una barrera de este tipo. El calculo de valores actuales para diferentes tipos de barreras sera tema de estudio en otro trabajo.



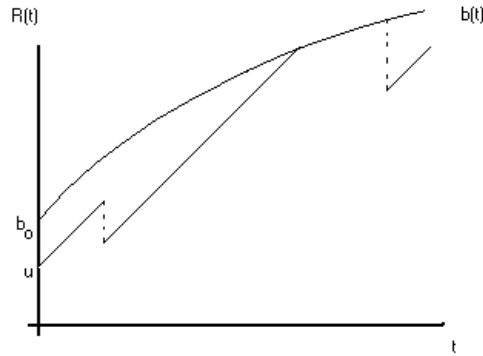
## 4. BARRERA DE DIVIDENDOS PARABOLICA

Con la barrera parabólica nos encontramos con que al desaparecer el valor máximo de acumulación de las reservas, nos podremos plantear el cálculo de la probabilidad de supervivencia.

La función que representa a la barrera parabólica será:

$$b(t) = \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}$$

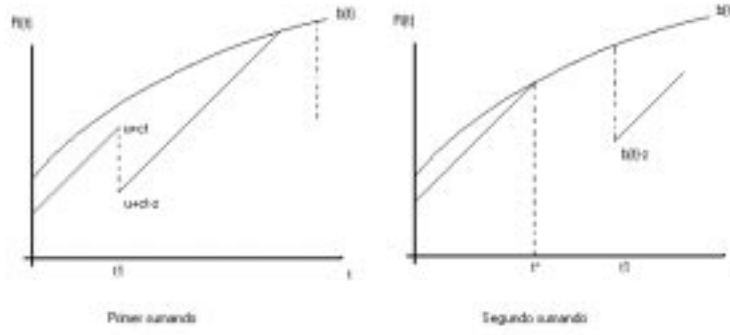
siendo  $b_0$  el punto de corte de la barrera con ordenadas.



Para la determinación de la probabilidad de supervivencia con esta nueva barrera utilizamos el planteamiento alternativo ya comentado en la barrera lineal:

$$\begin{aligned} \phi(u, b_0) = & \int_0^{t^*} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} \phi\left(u + ct - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}\right) dF(z) dt + \\ & + \int_{t^*}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{\sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}} \phi\left(\sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}} - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}\right) dF(z) dt \end{aligned} \quad (4.1)$$

Gráficamente:



A partir de (4.1), siguiendo un proceso similar al aplicado en el caso de la barrera lineal, obtendremos la correspondiente EDP.

Haciendo  $u + ct = x$  :

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda u}{c}} \int_u^{x^*} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \int_0^x \phi \left( x - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha c}} \right) dF(z) dx + \\ & + \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda u}{c}} \int_{x^*}^{\infty} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \int_0^{\sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha c}}} \phi \left( \sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha c}} - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha c}} \right) dF(z) dx \end{aligned} \quad (4.2)$$

siendo  $x^* = u + ct^*$  , donde  $t^*$  es el punto de corte entre la barrera y  $u + ct$ .

Derivando (4.2) respecto a  $u$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} &= \frac{\lambda}{c} \phi(u, b) + \frac{\lambda}{c} e^{-\lambda t^*} \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, x^*) dF(z) + \\ & + \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda u}{c}} \int_u^{x^*} e^{-\frac{\lambda x}{c}} \frac{\partial}{\partial u} \int_0^x \phi \left( x - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{x-u}{\alpha c}} \right) dF(z) dx - \\ & - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \phi(u - z, b_0) dF(z) + \\ & + \frac{\lambda}{c} (-\lambda) \int_{t^*}^{\infty} e^{-\lambda t} \int_0^{\sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}} \phi \left( \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}} - z, \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}} \right) dF(z) dt \end{aligned} \quad (4.3)$$

Haciendo el cambio de variable  $x = \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}$  en (4.1) :

$$\begin{aligned} & \lambda 2\alpha e^{\lambda\alpha b_0^2} \int_{b_0}^{x^*} e^{-\lambda\alpha x^2} x \int_0^{u+c\alpha(x^2-b_0^2)} \phi(u+c\alpha(x^2-b_0^2)-z, x) dF(z) dx + \\ & + \lambda 2\alpha e^{\lambda\alpha b_0^2} \int_{x^*}^{\infty} e^{-\lambda\alpha x^2} x \int_0^x \phi(x-z, x) dF(z) dx \end{aligned} \quad (4.4)$$

Derivando (4.4) respecto a  $b_0$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi(u, b)}{\partial b_0} &= 2\alpha\lambda b_0\phi(u, b) - 2\alpha\lambda b_0 e^{-\lambda t^*} \int_0^{x^*} \phi(x^* - z, x^*) dF(z) - \\ & - \lambda 2\alpha\lambda b_0 \int_0^{t^*} e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} \phi\left(u+ct-z, \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}\right) dF(z) dt + \\ & + \lambda \int_0^{t^*} e^{-\lambda t} \frac{\partial}{\partial b_0} \int_0^{u+ct} \phi\left(u+ct-z, \sqrt{b_0^2 + \frac{t}{\alpha}}\right) dF(z) dt \end{aligned} \quad (4.5)$$

Agrupando las dos derivadas (4.3) y (4.5):

$$\boxed{\frac{1}{2\alpha b_0} \frac{\partial\phi(u, b_0)}{\partial b_0} + c \frac{\partial\phi(u, b_0)}{\partial u} - \lambda \partial\phi(u, b_0) + \lambda \int_0^u \phi(u-z, b_0) dF(z) = 0}$$

En el caso concreto de la exponencial, haciendo  $F(z) = 1 - e^{-z}$ ,  $z > 0$ , llegamos a la correspondiente EDP:

$$\boxed{c \frac{\partial^2\phi(u, b_0)}{\partial u^2} + \frac{1}{2\alpha b_0} \frac{\partial^2\phi(u, b_0)}{\partial b_0 \partial u} + (c - \lambda) \frac{\partial\phi(u, b_0)}{\partial u} + \frac{1}{2\alpha b_0} \frac{\partial\phi(u, b_0)}{\partial b_0} = 0}$$

con las siguientes condiciones de contorno:

- $\frac{\partial\phi}{\partial u} \Big|_{u=b_0} = 0$
- $\lim_{u \rightarrow \infty} \phi(u, b_0) = 1$  ( $b_0 \rightarrow \infty$ )
- $\lim_{b_0 \rightarrow \infty} \phi(u, b_0) = \phi(u) = 1 - \frac{\lambda}{c} e^{-\frac{c-\lambda}{c}u}$

Si comparamos la estructura de esta ecuación diferencial con la obtenida en el caso de barrera lineal, observaremos la similitud existente entre ambas. En el caso de barrera lineal la expresión obtenida era:

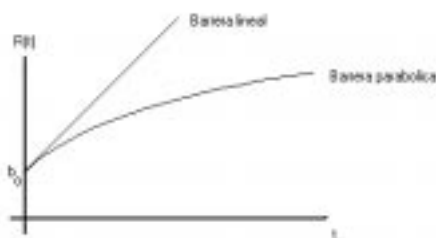
$$c \frac{\partial^2 \phi(u, b)}{\partial u^2} + a \frac{\partial^2 \phi(u, b)}{\partial b \partial u} + (c - \lambda) \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial u} + a \frac{\partial \phi(u, b)}{\partial b} = 0$$

La obtenida con barrera parabólica es la misma sustituyendo  $a$  (pendiente de la barrera lineal) por la pendiente de la barrera parabólica en cero, es decir:

$$b'(0) = \frac{1}{2\alpha b_0}$$

La solución de las EDP correspondientes a la barrera lineal y la barrera parabólica, a pesar de la similitud en la estructura de las ecuaciones, será muy diferente debido a que la correspondiente a la barrera lineal es una EDP de coeficientes constantes, mientras que para barrera parabólica la EDP resultante es de coeficientes variables.

Evidentemente la probabilidad de supervivencia será muy diferente cuando el proceso esté modificado con una barrera lineal con pendiente  $a$  y con una parabólica cuya pendiente en  $t = 0$  también tenga valor  $a$  (es decir cuando  $a = \frac{1}{2\alpha b_0}$ ).



En el gráfico se puede observar como intuitivamente la probabilidad de supervivencia en el caso de barrera lineal será mayor ya que se permite una mayor acumulación en el nivel de reservas.

## 5. APLICACIÓN NUMÉRICA

En este apartado calcularemos la probabilidad de supervivencia cuando modificamos el modelo con las barreras comentadas en los apartados anteriores.

En el caso de la barrera lineal resolveremos la ecuación diferencial parcial hallada en el apartado 2, y compararemos los resultados con los hallados mediante simulación. Para la barrera parabólica hallaremos la probabilidad de supervivencia mediante simulación. Finalmente haremos un estudio comparativo para ver como afectan estos dos tipos de barrera a la solvencia de la entidad aseguradora.

Los datos utilizados en todas las simulaciones son los siguientes:  $c = 1$ ,  $\lambda = 1$  y  $E[z] = 1$ .

Para las simulaciones se han utilizado programas en Fortran 77 así como diversas librerías de la NAG. El número de trayectorias simuladas es de 100.000, y los resultados son la media de 5 ejecuciones, suponiendo que las trayectorias que se mantienen "vivas" en el momento  $t = 100$  ya se consideran trayectorias no arruinadas.

### 5.1. BARRERA LINEAL

El resultado de la EDP de la expresión (2.8) es un proceso recursivo [Gerber (1981)] que para  $a = 1.1$  y diferentes valores de  $u$  y  $b$  nos daría:

| $b \setminus u$ | 0        | 0.3      | 0.5      | 1        |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|
| 0               | 0.256596 |          |          |          |
| 0.3             | 0.302810 | 0.324918 |          |          |
| 0.5             | 0.316858 | 0.357953 | 0.367854 |          |
| 1               | 0.329807 | 0.388465 | 0.421155 | 0.464492 |

Podemos comprobar que para el mismo valor de  $u$ , a medida que incrementa el valor inicial de la barrera, la probabilidad de supervivencia incrementa debido a que el momento en que se alcanza la barrera se retrasa, permitiéndose más acumulación de reservas, y

retrasando la ruina. Lo mismo ocurre cuando para el mismo valor de  $b$ , incrementamos  $u$ . Si nos fijamos en la diagonal del cuadro, nos encontramos con situaciones en que  $b - u$  es constante, pero a medida que nos desplazamos a la derecha, partimos de niveles más elevados, de ahí que la probabilidad de ruina sea menor.

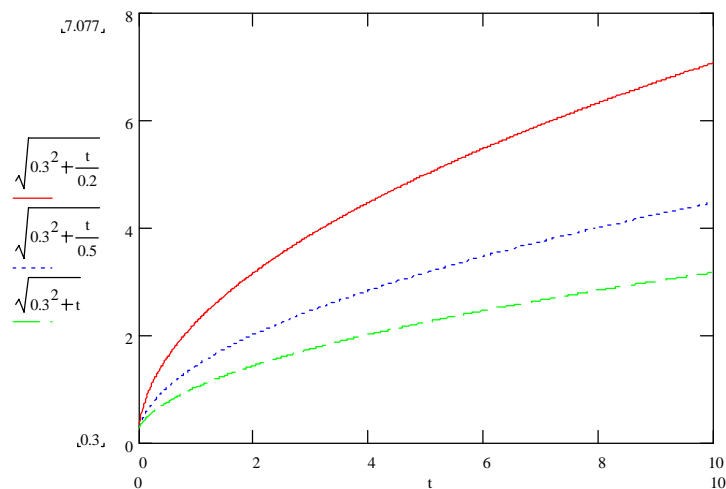
El resultado de las simulaciones en el caso de la barrera lineal para  $a = 1.1$  :

| $b \backslash u$ | 0        | 0.3      | 0.5      | 1        |
|------------------|----------|----------|----------|----------|
| 0                | 0.256202 |          |          |          |
| 0.3              | 0.302632 | 0.324746 |          |          |
| 0.5              | 0.316768 | 0.357508 | 0.367498 |          |
| 1                | 0.329914 | 0.389174 | 0.421402 | 0.465062 |

Las diferencias existentes entre los resultados de la EDP y los de la simulación pueden ser debidos a que en la simulación paramos el proceso en el momento  $t = 100$  .

## 5.2. BARRERA PARABOLICA

Hallaremos el valor de la probabilidad de supervivencia con barrera de dividendos parabólica mediante la simulación del proceso, recordando primero la forma de la barrera para diferentes valores de  $\alpha$  . Para la representación gráfica haremos que  $b_0 = 0.3$  :



Podemos observar que a mayor sea el valor de  $\alpha$ , menor es el valor de la pendiente.

Los valores de la probabilidad de supervivencia para diferentes  $\alpha$  :

|                |       |          |          |          |          |
|----------------|-------|----------|----------|----------|----------|
| $\alpha = 0.2$ | b \ u | 0        | 0.3      | 0.5      | 1        |
|                | 0     | 0.271133 |          |          |          |
|                | 0.3   | 0.271522 | 0.319003 |          |          |
|                | 0.5   | 0.272130 | 0.319765 | 0.346733 |          |
|                | 1     | 0.274655 | 0.323516 | 0.351447 | 0.406361 |
| $\alpha = 0.5$ | b \ u | 0        | 0.3      | 0.5      | 1        |
|                | 0     | 0.102504 |          |          |          |
|                | 0.3   | 0.103856 | 0.115944 |          |          |
|                | 0.5   | 0.106014 | 0.119080 | 0.124178 |          |
|                | 1     | 0.115080 | 0.131237 | 0.139540 | 0.149554 |
| $\alpha = 1$   | b \ u | 0        | 0.3      | 0.5      | 1        |
|                | 0     | 0.018439 |          |          |          |
|                | 0.3   | 0.019294 | 0.020622 |          |          |
|                | 0.5   | 0.020692 | 0.022582 | 0.022976 |          |
|                | 1     | 0.026458 | 0.029745 | 0.031242 | 0.032758 |

Se puede observar que a medida que el valor de  $\alpha$  incrementa, las probabilidades de supervivencia disminuyen, lo que al ver los gráficos ya se veía de forma intuitiva: a mayor  $\alpha$  el crecimiento de la barrera parabólica es menor, por tanto el tope que representa la barrera está más cerca del proceso de las reservas, limitando el crecimiento de  $R(t)$ .

### 5.3. COMPARACION BARRERA LINEAL-BARRERA PARABOLICA

En este apartado podemos realizar una doble comparación:

1. Recordando lo comentado al final del apartado 4, podemos hallar el valor de la probabilidad de supervivencia en el caso de la barrera lineal y parabólica cuando la pendiente

en el punto inicial coincide. Gráficamente se podía observar que en el caso de barrera de dividendos lineal el valor de la probabilidad de supervivencia sería mayor .

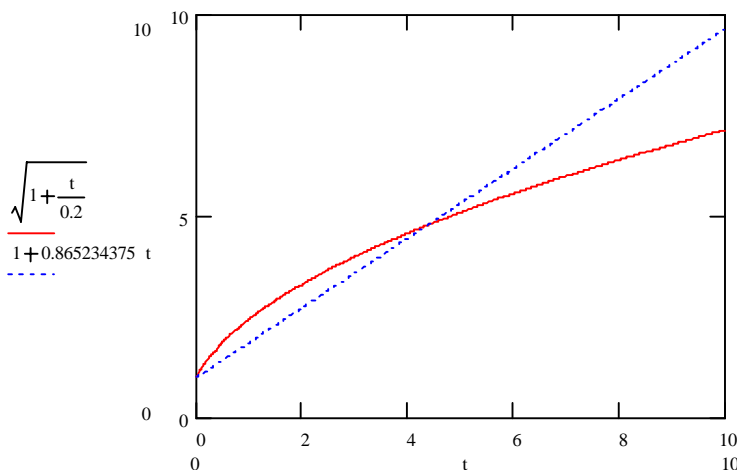
Para  $u = 1$  y  $b_0 = 1$ , tenemos:

| BARRERA    | PARAMETROS      | PENDIENTE EN $t = 0$   | $\phi(u, b_0)$ |
|------------|-----------------|--|----------------|
| LINEAL     | $a = 1.1$       | $b'(0) = a = 1.1$  | 0.464492       |
| PARABOLICA | $\alpha = 0.45$ | $b'(0) = \frac{1}{2\alpha b_0} = \frac{1}{2 \cdot 0.45 \cdot 1} = 1.1$ | 0.173732       |

2. Mediante un programa de Fortran podemos hallar las barrera parabólica y lineal, que partiendo del mismo punto y para el mismo valor inicial de las reservas  $R(0) = u$ , dan la misma probabilidad de supervivencia. A nivel de ejemplo:

Si consideramos la barrera parabólica  $b(t) = \sqrt{1 + \frac{t}{0.2}}$  con  $u = 1$  y  $c = 1.5$  , mediante un proceso de simulación hallamos que la probabilidad de supervivencia es 0,4063619971.

La barrera lineal que hará que la probabilidad de supervivencia coincida con la hallada en la parabólica será  $b(t) = 1 + 0.865234375 \cdot t$ , siendo el punto de corte el valor  $t = 4.3673$  :



La importancia de esta comparación quedará patente cuando planteemos el valor actual de los dividendos. Podremos elegir entonces entre las dos barreras que provocan la misma probabilidad de ruina , en función de criterios basados en el valor actual de los dividendos repartidos.



## BIBLIOGRAFIA

Bühlmann, H. (1970), "*Mathematical Methods in Risk Theory*", Springer Verlag, New York.

Cramer, H. (1930), "*On the Mathematical Theory of Risk*", Skandia Jubilee Volume, Stockholm.

Feller, W. (1971), "*An Introduction to Probability Theory and its Applications*", Vol II, 2nd ed. John Wiley & Sons, New York.

Gerber, H. (1975), "*An Introduction to Mathematical Risk Theory*", Ed. Richard D. Irwin. Illinois.

Gerber, H. (1981), "On the Probability of Ruin in the Presence of a Linear Dividend Barrier", *Scandinavian Actuarial Journal*, 105-115.

Grandell, J. (1991), "*Aspects of Risk Theory*", Springer Verlag, New York.

Panjer, H., Willmot, G. (1992), "*Insurance Risk Model*", Society of Actuaries.

Siegl, T., Tichy, R. (1996), "Lösungsverfahren eines Risikomodells bei exponentiell fallender Schadensverteilung" *Mitteilungen der Schweizerische Aktuarvereinigung*. Heft 1/1996.