ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Du risque à l'incertitude dans les modèles de décisions

Claude Henry

Avril 2005

Cahier n° 2005-008

LABORATOIRE D'ECONOMETRIE
1rue Descartes F-75005 Paris
(33) 1 55558215
http://ceco.polytechnique.fr/
mailto:labecox@poly.polytechnique.fr

Du risque à l'incertitude dans les modèles de décisions

Claude Henry[1]

Avril 2005

Cahier n° 2005-008

Résumé: Rarement une contribution théorique, formulée dans un cadre mathématique original, a eu autant d'influence sur le développement de l'analyse économique et de certaines de ses applications - notamment en assurance et en finance - que le modèle de von Neumann-Morgenstern de choix d'alternatives risquées. Mais ce modèle n'est opérant que sur la base de distributions de probabilité. Dans un nombre croissant de situations mettant en cause le développement durable - conséquences du changement climatique, problèmes de santé publique, etc. - on ne peut pas rendre compte de l'incertitude par une distribution de probabilité, on est réellement en situation incertaine et pas seulement risquée. Il existe cependant des critères de choix, généralisant le critère de von Neumann-Mongerstern, qui commencent à fournir des instruments opérationnels de décisions en incertitude.

Abstract: It is not common for a result in theory, expressed in mathematical terms, to bear upon economic analysis and its applications - specially in insurance and finance - as is the case with the von Neumann-Morgenstern model of decision - making under risk. However this model is dependent upon the existence of a probability distribution to describe the risk facing the decision-maker. In an increasing number of situations challenging the sustainability of development - consequences of climate change, public health issues, etc. - uncertainty doesn't boil down to risk, i.e. uncertainty may not be characterized with a probability distribution. However criteria have recently been found, that generalize the von Neumann-Morgenstern one, for an operational approach of decision-making under uncertainty.

Mots clés : Ambiguïté, Espérance de l'utilité, Incertitude

Key Words : Ambiguïty, Expected utility, Uncertainty

Classification AMS : D81, G22

[1] Laboratoire d'Econométrie, CNRS et Ecole polytechnique.

De von Neumann-Morgenstern à Ghirardato-Maccheroni-Marinacci ce chapitre analyse les étapes essentielles de l'élaboration, de la critique et du dépassement du modèle fondamental de von Neumann et Morgenstern. A cette prise en compte progressive de l'incertitude dans les modèles de décision, correspond l'extension de l'assurabilité à des situations elles aussi incertaines et pas seulement risquées.

Il est intéressant d'observer qu'aujourd'hui, tandis que les consultants américains spécialisés dans l'évaluation des portefeuilles des compagnies d'assurance et de réassurance utilisent pour ce faire une famille de distributions de probabilités (et non plus seulement une distribution de probabilités en un sens, plus ou moins précis, moyenne), des mathématiciens et économistes français et italiens obtiennent de manière endogène dans leurs modèles de décision sous incertitude des ensembles de distributions de probabilités à partir desquelles la décision est prise selon des modalités dont il est rendu compte de manière précise à la fin du chapitre.

1.COMMENT LE RISQUE SE MANIFESTE A L'INDIVIDU

Dans le modèle de décision individuelle face au risque proposé par John von Neumann et Oskar Morgenstern[1], un "risque" (ou plus précisément une variable risquée, ou variable aléatoire) est la combinaison d'un ensemble de niveaux de revenu (ou de gain, ou de richesse) possibles pour l'individu en cause et d'une distribution correspondante de probabilités objectives (fournies à l'individu par son environnement) :

[1] Dans von Neumann, J. and O. Morgenstern (1947).

$X = \{x_1, \ldots, x_N\}$ ensemble des niveaux de revenu possibles

$\mu = \{\pi_1, \ldots, \pi_N\}$ distribution de probabilités correspondante

où π_i $(i = 1, \ldots, N)$ est la probabilité que le niveau de revenu de l'individu soit effectivement π_i. On a évidemment

$$\pi_i \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, N)$$

et

$$\sum_{k=1}^{N} \pi_k = 1.$$

On a ainsi défini une variable aléatoire $\tilde{x}$ sur X avec μ, telle que

$$\Pr \quad \{\tilde{x} = x_i\} = \pi_i.$$

C'est sur des revenus (ou gains, ou richesses) aléatoires que l'individu va exprimer des préférences et faire des choix. Ou, ce qui revient au même du moment que X est fixé une fois pour toutes (ce qui sera toujours possible dans les situations que nous aurons à considérer, en prenant X dès le départ suffisamment grand, quitte à avoir beaucoup de π_i nulles, ce qui n'est pas gênant), sur des distributions de probabilités μ associées à X.

Quels événements peuvent engendrer un revenu aléatoire $\tilde{x}$? un jeu de hasard, un placement financier, un dommage matériel accidentel, un contrat d'assurance pour ce dommage,… Dans tous ces exemples, le revenu aléatoire dépend d'un ou plusieurs événements aléatoires, tel que point d'arrêt d'une roulette, circonstances d'une guerre, prix du baril de pétrole, gravité d'un accident,… Von Neumann et Morgenstern étaient évidemment conscients de cette dépendance, mais ne cherchaient pas à la formaliser autrement qu'en ce qui concerne ses conséquences sur le revenu (ou gain, ou richesse)[2]. Autrement dit, dans l'approche des choix face au risque qu'ils développent, on considère toujours que l'individu s'intéresse exclusivement aux revenus possibles et aux probabilités correspondantes, mais pas aux circonstances qui les provoquent. Il ne lui importe pas, par exemple, de réaliser un revenu aléatoire en bourse plutôt qu'au jeu, ou encore d'encaisser une indemnité d'assurance ; il ne lui importe pas non plus de subir un dommage matériel du fait d'un accident de la circulation plutôt que d'un incendie. Cette neutralité aux circonstances de réalisation du risque ne sera plus vraie dans les approches plus générales considérées dans les dernières sections de ce chapitre.

Pour illustrer cette formalisation de base due à von Neumann et Morgenstern, considérons-en deux applications qui sont au cœur des mathématiques financières.

2.1. Titre à rendement aléatoire

Admettons que l'individu en cause possède, à l'instant initial (instant 0), un revenu initial certain[3] x_0 qu'il peut placer auprès d'une institution financière (qui peut être un marché financier), c'est-à-dire qu'il peut échanger contre un revenu différé aléatoire $\tilde{x}$, appelé titre (ou encore actif). Cela signifie qu'à l'instant 1, par exemple au bout d'un an, l'individu possèdera non plus x_0, mais

$$\tilde{x} = x_0 \left(1 + \tilde{r}\right)$$

[2] Nous ne rappellerons plus dans la suite la diversité des interprétations possibles.

[3] Une variable certaine est une variable aléatoire qui prend la même valeur dans tous les événements aléatoires susceptibles de l'affecter. Cette définition correspond au sens commun.

$\tilde{r}$ étant le rendement aléatoire du titre $\tilde{x}$. Dans le cas particulier où $\tilde{r}$ est lui-même certain ($\tilde{r}$ est égal au même nombre r quoiqu'il arrive entre les instants 0 et 1), alors

$$\tilde{x} = x_0 \, (1 + r)$$

est un revenu certain égal au revenu initial augmenté du produit de celui-ci par le taux d'intérêt r.

2.2 Contrat d'assurance

Considérons une variable aléatoire $\tilde{x}$ définie sur

$$X = \{x_1, ..., x_N\}$$

avec la distribution de probabilités

$$\mu = \{\pi_1, ..., \pi_N\}$$

Dans X, considérons le plus grand des x_i, qui peut être (moyennant, si nécessaire, une renumérotation)

$$x_1 = \max_{k=1,...,N} \; x_k \, .$$

On peut alors interpréter la variable aléatoire

$$\tilde{d} = x_1 - \tilde{x}$$

définie sur

$$\{0, x_1 - x_2, ..., x_1 - x_N\}$$

avec la même distribution de probabilités

$$\mu = \{\pi_1, \pi_2, ..., \pi_N\}$$

comme un dommage matériel aléatoire dû à un événement tel que accident, incendie, vol, etc. Les diverses réalisations possibles de cet événement aléatoire ont une gravité plus ou moins forte, car provoquent des dommages plus ou moins grands.

Dans ces conditions, on dit que l'individu considéré souscrit un contrat d'assurance (avec un autre agent économique, l'assureur) s'il échange le revenu aléatoire $\tilde{x}$ contrer un autre revenu aléatoire

$$\tilde{x} == -\alpha + \tilde{\beta}$$

où

- α est la prime d'assurance ; c'est une variable certaine, indépendante de la réalisation de l'événement aléatoire sous-jacent à $\tilde{x}$; elle est payée par l'assuré à l'assureur antérieurement à cette réalisation.

- $\tilde{\beta}$ est l'indemnité versée à l'assuré ; c'est le remboursement, partiel ou total, du dommage $\tilde{d}$ qu'il subit ; $\tilde{\beta}$ est une variable aléatoire dont les réalisations possibles, avec la distribution de probabilités μ, soit telles que

$$\forall\, i = 1,\dots, N, \quad 0 \leq \beta_i \leq d_i$$

avec

$$P_r\left\{\tilde{\beta} = \beta_i\right\} = \pi_i .$$

On observe que, comme il fallait s'y attendre, $\beta_1 = 0$: il n'y a rien à indemniser quand il n'y a pas de dommage.

Dans le cas particulier où $\tilde{\beta} = \tilde{d}$, on dit que le contrat d'assurance est à couverture totale : $\tilde{x}$ est échangé contre le revenu certain

$$\tilde{x} - \alpha + \tilde{d} = x_1 - \alpha .$$

2. COMMENT L'INDIVIDU EVALUE LE RISQUE AUQUEL IL EST CONFRONTE

Dans l'analyse microéconomique du comportement du consommateur, celui-ci compare entre eux des vecteurs (appelés parfois paniers de consommations) dont les composantes sont des quantités de biens ou services offerts à sa consommation. Ici, l'individu confronté au risque compare des revenus aléatoires. Von Neumann et Morgenstern admettent qu'il est capable de classer ceux-ci, dans le sens suivant : quels que soient les revenus aléatoires $\tilde{x}'$ et $\tilde{x}''$ qu'il est amené à comparer,

- soit il préfère strictement $\tilde{x}'$ à $\tilde{x}''$: $\tilde{x}' > \tilde{x}''$
- soit il préfère strictement $\tilde{x}''$ à $\tilde{x}'$: $\tilde{x}' < \tilde{x}''$
- soit $\tilde{x}'$ et $\tilde{x}''$ lui soit indifférents : $\tilde{x}' \sim \tilde{x}''$.

On a là un préordre de préférences, dont on suppose, comme dans l'analyse du consommateur, qu'il est transitif et continu ; ces deux hypothèses sont naturelles du moment qu'on admet que les préférences de l'individu en cause sont rationnellement définies. Alors, le théorème de Gérard Debreu[4] sur l'existence d'une fonction d'utilité s'applique : le préordre des préférences peut être représenté par une fonction d'utilité V, continue, bornée et croissante, et définie à une transformation continue croissante près, dans le sens où :

$$
\begin{aligned}
&V(\tilde{x}') > V(\tilde{x}'') \quad && \text{si et seulement si } \tilde{x}' > \tilde{x}'' \\
&V(\tilde{x}') < V(\tilde{x}'') \quad && \text{si et seulement si } \tilde{x}' < \tilde{x}'' \\
&V(\tilde{x}') = V(\tilde{x}'') \quad && \text{si et seulement si } \tilde{x}' \sim \tilde{x}''.
\end{aligned}
$$

Pas plus que dans l'analyse du comportement du consommateur, jamais on n'a prétendu que l'individu confronté au risque effectue ses choix en calculant la valeur de la fonction d'utilité pour chaque revenu aléatoire qu'il souhaite comparer à d'autres. Ce que dit le théorème d'existence, c'est que tout ce passe comme s'il effectuait ce calcul, bien qu'il ne le fasse pas effectivement. Personne, jamais, ne connaîtra quelle fonction V caractérise tel individu : mais la seule connaissance de l'existence d'une fonction V, et de ses propriétés qualitatives, informe sur la structure des choix effectués par l'individu dont les

[4] Debreu, G. (1964).

préférences peuvent être représentées par V. Dans l'analyse du comportement du consommateur, où l'espace des choix est celui des quantités consommées, cette connaissance est riche et opérationnelle : elle comporte les propriétés fondamentales des fonctions de demande, par exemple. Mais ici l'espace des choix, espace de variables aléatoires, est beaucoup plus compliqué, et de ce fait V n'apporte pas directement d'information opérationnelle sur les choix effectués. C'est pourquoi von Neumann et Morgestern ont introduit la célèbre *hypothèse de l'espérance de l'utilité*.

On dit qu'un fonction V vérifie l'hypothèse de l'espérance de l'utilité si et seulement s'il existe une fonction numérique u définie sur X

$$u : X \to R : x \to u(x)$$

qui soit continue, croissante et bornée, et telle que, quel que soit le revenu aléatoire possible $\tilde{x}$, on ait

$$V(\tilde{x}) = E[u(\tilde{x})] = \sum_{k=1}^{N} \pi_K \, u(x_k).$$

La fonction u est appelée fonction de von Neumann-Morgenstern (fonction VNM). Puisque V n'est définie qu'à une transformation continue croissante près, u n'est elle-même définie qu'à une transformation affine croissante près ; on peut donc fixer

$$u(0) = 0$$

ce qui est systématiquement la règle de normalisation adoptée ici pour u. Celle-ci étant définie sur X et à valeurs dans R, son maniement et son estimation numérique sont relativement faciles ; c'est une des raisons principales de son utilisation systématique dans les calculs financiers et assurantiels.

Mais cet avantage, largement déterminant, a son revers : la restriction aux fonctions d'utilité V qui vérifient l'hypothèse de l'espérance de l'utilité diminue la généralité de la représentation des préférences entre revenus aléatoires. La situation aurait même pu être plus préoccupante si von Neumann et Morgenstern n'avaient pas été capables de caractériser cette perte de généralité sur des préférences elles-mêmes (et non pas de la manière assez peu transparente qui est celle de l'hypothèse de l'espérance de l'utilité). Ils sont parvenus à cette caractérisation dans leur *théorème de l'espérance de l'utilité*, lequel s'énonce comme suit :

Théorème de l'espérance de l'utilité

Si les préférences peuvent être représentées par une fonction d'utilité V et satisfont un axiome de comportement appelé *axiome d'indépendance*, alors V vérifie l'hypothèse de l'espérance de l'utilité[5].

Le contenu de l'axiome d'indépendance peut être résumé de la manière suivante : le sens de la préférence entre deux revenus aléatoires n'est pas changé lorsqu'on applique à chacun de ceux-ci la même perturbation aléatoire. Plus précisément, l'axiome d'indépendance s'énonce ainsi : quels que soient les revenus aléatoires $\tilde{x}'$, $\tilde{x}''$ et $\tilde{x}$, et quel que soit le nombre λ compris entre 0 et 1, si on a

$$V(\tilde{x}') \geq V(\tilde{x}'')$$

[5] La démonstration de ce théorème est donnée au chapitre 3 de Kreps, D. (1990). Voir aussi le livre fondateur von Neumann, J. and O. Morgestern (1944).

alors on a aussi

$$V\left(\lambda\,\tilde{x}'+(1-\lambda)\tilde{x}\right)\geq V\left(\lambda\,\tilde{x}''+(1-\lambda)\tilde{x}\right).$$

A l'origine, l'aspect restrictif de l'axiome d'indépendance n'est pas apparu, on n'a pas vu quels comportements il exclut. Les paradoxes d'Allais et surtout d'Ellsberg ont plus tard conduit à s'interroger sur la portée des limites de l'axiome d'indépendance, et incité à dépasser ces limites. Mais avant d'y venir, nous devons nous arrêter un moment sur le concept d'*aversion pour le risque*, et sur sa mesure. Cela fournira un point de comparaison utile avec l'*aversion pour l'ambiguïté* qu'Ellsberg a illustrée et qu'ultérieurement d'autres économistes et mathématiciens ont intégrée dans des modèles qui ont repoussé les limites du modèle de l'espérance de l'utilité de von Neumann et Morgenstern.

3. EN QUEL SENS UN INDIVIDU A DE L'AVERSION POUR LE RISQUE

L'aversion pour le risque est le plus souvent définie pour des préférences vérifiant l'hypothèse de l'espérance de l'utilité, hypothèse qui garantit l'existence d'une fonction VNM u.

La concavité de u est alors un indicateur de l'intensité de l'aversion pour le risque. En effet si u est strictement concave (strictement indique que cette fonction est véritablement concave, qu'on n'est pas dans le cas limite d'une fonction linéaire, laquelle correspond à la *neutralité vis-à-vis du risque*) on a, par définition même de la concavité,

$$E\left[u\left(\tilde{x}\right)\right]< u\left(E\left\{\tilde{x}\right\}\right);$$

donc, puisque l'hypothèse de l'espérance de l'utilité est vérifiée,

$$V(\tilde{x}) < V(E\{\tilde{x}\}).$$

Or, cette dernière égalité signifie que, au revenu aléatoire $\tilde{x}$, l'individu en cause préfère strictement le revenu certain égal à l'espérance mathématique de $\tilde{x}$: il évalue $\tilde{x}$ à moins que sa valeur moyenne $E[\tilde{x}]$.

Ceci est bien une indication d'aversion pour le risque. Mais ce n'en est pas une mesure. Voyons maintenant comment définir celle-ci. Comme u est continue et que $u(0)=0$, il existe, en raison de la première des deux inégalités ci-dessus, un nombre positif x_{EC}, compris entre 0 et $E[\tilde{x}]$, tel que

$$E[u(\tilde{x})] = u\,(x_{EC})$$

c'est-à-dire

$$V(\tilde{x}) = V(x_{EC}).$$

Par conséquent x_{EC} apparaît comme le revenu certain équivalent (ou *équivalent – certain*) à $\tilde{x}$, du point de vue des préférences de l'individu en cause. Et la différence

$$\rho = E[\tilde{x}] - x_{EC},$$

appelée *prime de risque*, mesure la diminution de son revenu moyen que l'individu est prêt à accepter pour être complètement débarrassé du risque affectant $\tilde{x}$. C'est une mesure de l'aversion pour le risque. Ce n'est pas la seule : *l'indice de Arrow-Pratt* est plus souvent utilisé dans les calculs financiers et assurantiels.

Si on décompose $\tilde{x}$ en une partie certaine $x_0 = E[\tilde{x}]$ et une partie aléatoire $\tilde{\varepsilon}$ d'espérance mathématique nulle, c'est-à-dire

$$\tilde{x} = x_0 + \tilde{\varepsilon} \text{ avec } \quad E[\tilde{\varepsilon}] = 0,$$

alors $-\rho$ apparaît comme l'équivalent certain de $\tilde{\varepsilon}$, en ce sens que

$$E[u(x_0 + \tilde{\varepsilon})] = u(x_0 - \rho).$$

La prime de risque ρ dépend de x_0 et de $\tilde{\varepsilon}$, et naturellement de u, qui exprime de manière synthétique l'attitude de l'individu vis-à-vis du risque ; on choisira donc pour elle la notation

$$\rho = \rho(u; x_0, \tilde{\varepsilon}).$$

Il ne faut pas confondre prime de risque et prime d'assurance. Elles sont reliées entre elles de la manière suivante. Dans un contrat d'assurance, nous avons vu que

$$\tilde{x} = x_1 - \tilde{d}$$

est échangé contre

$$\tilde{x} = -\alpha + \tilde{\beta} .$$

Si le contrat d'assurance est à couverture totale, la prime d'assurance maximum α_M que l'individu en cause est prêt à payer est déterminée par l'équation

$$V(\tilde{x}) = V(x_1 - \alpha_M) = u(x_1 - \alpha_M)$$

En se reportant à la définition donnée ci-dessus de la prime de risque ρ, on voit donc qu'on a l'égalité des deux équivalents-certains

$$E[\tilde{x}] - \rho = x_1 - \alpha_M$$

soit encore

$$E\left[x_1 - \tilde{d}\,\right] - \rho = x_1 - \alpha_M \ .$$

Comme $x_1 = E[x_1]$, puisque x_1 est une variable certaine, on a par conséquent la relation

$$\alpha_M = \rho + E\left[\tilde{d}\,\right]$$

qui signifie que la prime d'assurance maximum que l'individu est prêt à payer comporte deux composantes, la moyenne du dommage qu'il craint et la prime de risque, qui exprime son aversion vis-à-vis du caractère aléatoire de ce dommage.

On mesure donc l'aversion pour le risque au moyen de la prime de risque. Alternativement on peut la mesurer au moyen de l'*indice absolu de Arrow-Pratt*, qui est plus commode dans les utilisations calculatoires. Cet indice, encore appelé *indice absolu d'aversion pour le risque*, et noté $I_a(u, x_0)$, est en fait un indice différentiel de concavité de la fonction VNM u[6] :

$$I_a(u, x_0) = -\frac{u''(x_0)}{u'(x_0)}$$

où x_0 est une revenu certain quelconque.

Encore faut-il s'assurer de l'équivalence de ces deux mesures ; elle résulte immédiatement du *théorème de Pratt*[7]. Dans ce théorème, on considère deux individus, dont les fonctions VNM sont respectivement u_1 et u_2, concaves et au moinsdeux fois continûment différentiables. On considère comme précédemment

$$\tilde{x} = x_0 + \tilde{\varepsilon}$$

et on utilise les notations, pour $i = 1, 2,$

$$x_{EC}(u_i; \tilde{x}) = x_0 - \rho(u_i; x_0, \tilde{\varepsilon}) .$$

On a alors le théorème de Pratt, qui s'énonce comme suit :

Théorème de Pratt

Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

[6] Son existence requiert que u soit au moins deux fois continûment différentiable.

[7] Pour des développements plus détaillés sur la mesure de l'aversion pour le risque et, en particulier, pour la démonstration du théorème de Pratt, voir Arrow, K. (1971).

1 u_1 est "plus concave" que u_2 , c'est-à-dire que la fonction g définie par

$$g = u_1 \, o \; u_2^{-1}$$

est elle-même une fonction concave.

2 Pour tout revenu aléatoire $\tilde{x}$ possible, on a

$$\rho\,(u_1\,;x_0\,,\tilde{\varepsilon}\,) \geq \rho\,(u_2\,;x_0\,,\tilde{\varepsilon}\,)$$

3 Pour tout revenu aléatoire $\tilde{x}$ possible, on a

$$x_{EC}\,(u_1\,;\tilde{x}) \leq x_{EC}\,(u_2\,;\tilde{x}).$$

4 Quel que soit le nombre positif x_0

$$I_a\,(u_1\,;x_0) \geq I_a\,(u_2\,;x_0).$$

On voit donc qu'entre tous les indicateurs introduits pour mesurer l'aversion pour le risque, il n'y a aucune contradiction : qui a plus d'aversion pour le risque selon un indicateur en a plus aussi selon un autre.

Pour montrer qu'il ne s'agit pas de développements abstraits, donnons deux exemples de critères de sélection de portefeuille bâtis à partir des indices d'Arrow-Pratt, sachant qu'à l'indice absolu s'adjoint l'*indice relatif d'aversion pour le risque* :

$$I_r(u;x_0) = x_0 \; I_a(u;x_0).$$

On sait qu'un *portefeuille* est un ensemble d'actifs (ou titres) ayant des rendements aléatoires (pour quelques-uns d'entre eux, peut-être, certains). Imaginons un individu disposant d'un revenu initial certain x_0, qu'il cherche à placer sous forme de portefeuille constitué de deux types d'actifs :

- *un actif risqué* à rendement aléatoire $\tilde{r}$
- *un actif certain* à rendement certain s.

Comment alors l'individu peut-il répartir, au mieux de ses intérêts, son revenu initial entre ces deux actifs ? La réponse dépend de son attitude vis-à-vis du risque formalisée par sa fonction VNM u.

Considérons qu'il place en actif risqué le montant y et en actif sans risque le montant (complémentaire par rapport à son revenu initial x_0) $x_0 - y$, et qu'il le fait rationnellement du point de vu de son intérêt personnel, c'est-à-dire de façon à maximiser l'utilité $E[u(\tilde{x})]$, où

$$\tilde{x} = y(1+\tilde{r}) + (x_0 - y)(1+s).$$

On a alors les deux théorème suivants :

Théorèmes de sélection de portefeuille[8]

[8] Voir Gollier, C. (2001) .

(1) Si l'indice absolu d'aversion pour le risque de l'individu diminue lorsque le revenu initial x_0 augmente, alors le montant y placé sous forme d'actif risqué augmente avec x_0.

(2) Si l'indice relatif d'aversion pour le risque diminue lorsque le revenu initial x_0 augmente, alors la proportion y/x_0 du revenu initial sous forme d'actif risqué augmente avec x_0.

4. LE PARADOXE D'ELLSBERG ET L'AMBIGUÏTE

Le paradoxe d'Allais[9] n'avait fait qu'égratigner au début des années 50 le modèle de von Neumann-Morgenstern, car il ne mettait en cause que les comportements dans des situations extrêmes. Le paradoxe d'Ellsberg[10], formulé dix ans plus tard, a en revanche montré que les limites du modèle étaient beaucoup plus significatives qu'on ne l'avait pensé auparavant. Il a fallu un certain temps pour en prendre conscience, et beaucoup plus pour commencer à formuler des modèles moins restrictifs qui ne tombent sous le coup ni du paradoxe d'Allais ni du paradoxe d'Ellsberg.

Ce dernier a été présenté dans le contexte suivant : un expérimentateur met un échantillon de sujets face à la situation suivante : un vase contient 90 boules dont on sait que 30 sont rouges et les 60 autres bleues ou jaunes (on ne connaît pas parmi celles-ci les proportions respectives de bleues et de jaunes ; il est tout aussi possible qu'il y en ait 30 et 30, que 0 et 60, ou 60 et 0, etc…). Chaque sujet

[9] Voir Allais, M. (1953) et Allais, M. (1987).

[10] Ellsberg, D. (1961). David Ellsberg est très connu pour son paradoxe, mais il l'est bien davantage pour avoir transmis à des journalistes américains les "Pentagon papers" auxquels il avait accès en raison de sa position au ministère américain de la Défense. Ces documents ultra confidentiels montraient, de l'intérieur, les incohérences de la conduite de la guerre au Vietnam sous l'administration Nixon. Les poursuites engagées contre lui par le Pentagone n'ont jamais abouti en raison du scandale du Watergate, et de la chute de Nixon.

va tirer une boule au hasard et a le choix entre deux loteries (c'est-à-dire deux types de conséquences) :

- soit gagner € 100 si une boule rouge sort, et ne rien gagner autrement (loterie R) ;
- soit gagner € 100 si une boule bleue sort, et ne rien gagner autrement (loterie B).

Expérimentalement, on observe que la plupart des sujets préfèrent la loterie R à la loterie B.

Ensuite, on fait une deuxième expérience, dans laquelle chaque sujet va encore tirer du vase une boule, en ayant cette fois le choix entre deux autres loteries:

- soit gagner € 100 si une boule rouge sort, rien si c'est une bleue, et € 100 aussi si c'est une jaune (loterie $R \cup J$)
- soit ne rien gagner si une boule rouge sort, € 100 si c'est une bleue et aussi € 100 si c'est une jaune (loterie $B \cup J$).

Expérimentalement, on observe que la plupart des sujets préfèrent la loterie $B \cup J$ à la loterie $R \cup J$. Qui plus est, la plupart des sujets à la fois préfèrent R à B et $B \cup J$ à $R \cup J$.

Ellsberg montre alors que ces préférences simultanées sont incompatibles avec l'existence de probabilités sur la base desquelles ces sujets feraient leurs choix. En effet, s'ils se comportaient conformément au modèle de von Neumann-Morgenstern, ou plus exactement conformément au modèle de

Savage[11], leur préférence pour R par rapport à B ne pourrait être compatible qu'avec l'inégalité entre probabilités

$$\Pr(R) > \Pr(B)$$

puisque les gains sont les mêmes (€ 100).

De même, leur préférence pour $B \cup J$ par rapport à $R \cup J$ ne pourrait être compatible qu'avec

$$\Pr(B \cup J) > \Pr(R \cup J)$$

puisque les gains sont les mêmes (deux fois € 100). Mais, en raison de l'indépendance stochastique des tirages,

$$\Pr\ (B \cup J) = \Pr(B) + \Pr(J)$$

et

$$\Pr\ (R \cup J) = \Pr(R) + \Pr(J)$$

On devrait donc avoir simultanément

$$\Pr\ (R) > \Pr\ (B)$$

et

$$\Pr\ (B) + \Pr\ (J) > \Pr\ (R) + \Pr\ (J)$$

ce qui est manifestement impossible.

---

[11] Dans le modèle de Savage les probabilités sont subjectives, et non pas objectives comme dans le modèle de von Neumann-Morgenstern. Voir Savage, L. (1954).

Ce qui se passe, c'est qu'en préférant R à B, et $B \cup J$ à $R \cup J$, les sujets fuient l'ambiguïté inhérente aux loteries qui séparent B et J, alors qu'il n'y a pas de distinction correspondante au sein de l'information disponible avant tirage. Et cette fuite devant l'ambiguïté n'est pas représentable en probabilité, du moins avec une distribution unique de probabilités. C'est bien le cœur des modèles de von Neumann-Morgenstern et de Savage qui est touché.

5. SUR LE CHEMIN DE MODELES DE DECISION EN INCERTITUDE NON PROBABILISABLE

Les travaux d'Ellsberg ont constitué un stimulant puissant à dépasser les limites des modèles de von Neumann-Morgenstern et Savage ; en particulier à traiter vraiment de cette incertitude que, dès 1921, John Maynard Keynes et Franck Knight (travaillant en totale indépendance l'un de l'autre)[12], ont distingué du risque, celui-ci étant probabilisable alors que, selon leur définition, l'incertitude ne l'est pas. Si en effet les sujets d'Ellsberg, dans un contexte beaucoup plus simple que ceux dans lesquels les décisions financières, assurantielles, celles exprimant les choix publics, etc… doivent être prises, nient par leur comportement l'existence d'une distribution de probabilités qui, selon von Neumann-Morgenstern-Savage, les guiderait, alors c'est que Keynes et Knight avaient raison : l'incertitude intrinsèque mérite elle aussi un traitement systématique, que les modèles disponibles n'assurent pas.

Dès les travaux d'Allais, on avait compris que, si le modèle de von Neumann-Morgenstern a une faiblesse sérieuse, c'est dans l'hypothèse sur les comportements que constitue l'axiome d'indépendance qu'elle se loge. C'est donc

[12] Keynes, J.M. (1921) et Knight, F. (1921).

d'abord de cette hypothèse que les travaux post-Ellsberg ont cherché à se libérer. Ainsi Itzhak. Gilboa et David Schmeidler[13] ont-ils affaibli l'axiome d'indépendance de manière drastique : ce n'est plus vis-à-vis d'une perturbation aléatoire quelconque $\tilde{x}$ que les préférences doivent rester invariantes, mais seulement vis-à-vis d'une perturbation certaine x. Ils restreignent de ce fait beaucoup moins l'ensemble des préférences auxquelles leurs résultats vont s'appliquer ; autrement dit les comportements dont leur modèle rend compte sont beaucoup plus divers ; en particulier, ils ne tombent plus sous le coup des paradoxes d'Allais et d'Ellsberg.

Mais, pour obtenir une caractérisation formalisée des comportements en termes de maximisation d'une espérance mathématique d'une fonction généralisant la fonction VNM u, Gilboa et Schmeidler introduisent une nouvelle hypothèse sur les préférences. Il s'agit d'une hypothèse d'aversion pour l'ambiguïté : $\tilde{x}', \tilde{x}''$ étant deux revenus aléatoires possibles quelconques, et λ un nombre quelconque compris entre 0 et 1, alors, si $\tilde{x}'$ et $\tilde{x}''$ sont indifférents pour l'individu concerné, on a

$$\lambda \tilde{x}' + (1-\lambda)\tilde{x}'' \geq \tilde{x}'$$[14].

Dans ces conditions, Gilboa et Schmeidler obtiennent la remarquable caractérisation suivante : il existe un ensemble P de distributions de probabilités sur X, ensemble fermé et convexe, et une fonction $u : X \rightarrow R$[15],

[13] Gilboa, I. and D. Schmeidler (1989).

[14] Et $\geq \tilde{x}''$, sans qu'il soit nécessaire de l'indiquer, puisque $\tilde{x}'$ et $\tilde{x}''$ sont quelconques dans leurs ensembles respectifs de variation.

[15] Analogue à la fonction VNM dont elle partage les propriétés.

tels qu'un revenu aléatoire quelconque $\tilde{x}'$ est préféré à un autre revenu aléatoire quelconque $\tilde{x}''$ si et seulement si :

$$\min_{\mu'\in P} E_{\mu'}\left[u\left(\tilde{x}'\right)\right] > \min_{\mu''\in P} E_{\mu''}\left[u\left(\tilde{x}''\right)\right],$$

la notation $E_{\mu}\left[u\left(\tilde{x}\right)\right]$ signifiant qu'on calcule l'espérance mathématique de $u\left(\tilde{x}\right)$ avec la distribution de probabilité μ.

Ce résultat est non seulement remarquable intrinsèquement, par l'ampleur du pas qu'il fait franchir à la théorie de la décision en incertitude, tout en restant dans la ligne de formalisation de von Neumann-Morgenstern et, plus spécifiquement, de Savage[16]. Il est également remarquable par le fait qu'il exhibe un ensemble de distributions de probabilités que l'individu concerné considère comme méritant examen, c'est-à-dire méritant qu'on applique chacune des distributions de l'ensemble à l'évaluation de l'indicateur $u\left(\tilde{x}\right)$, et qu'on compare ces évaluations comme l'indique l'inégalité ci-dessus.

Cependant, comme représentation des comportements en incertitude, le résultat de Gilboa et Schmeidler est insatisfaisant. Il s'avère que leur hypothèse d'aversion à l'ambiguïté est trop unilatérale : elle conduit à exclure tous les comportements qui ne manifestent pas le pessimisme représenté par la minimisation sur l'ensemble P des deux côtés de l'inégalité ci-dessus ; il s'agit de choisir, relativement à P, la moins mauvaise des pires situations.

---

[16] Car, chez Savage, la distribution de probabilités n'est pas fixée a priori, elle apparaît, de même qu'ici, comme un résultat ; mais elle est unique, en égard au caractère plus restrictif des hypothèses de Savage.

Le travail de Gilboa et Schmeidler apparaît donc comme une étape très significative, pas vraiment opérationnelle en soi mais traçant clairement une voie de généralisation.

6. UN ABOUTISSEMENT (PROVISOIRE)

Deux équipes de chercheurs ont poursuivi dans cette voie ; l'une est française (Gajdos, Tallon, Vergnaud, …)[17] et l'autre italienne (Ghirardato, Maccheroni, Marinacci, …). Ces deux équipes ont obtenu des résultats remarquables ; au moins provisoirement, ce sont à ce jour les Italiens qui ont obtenu le résultat le plus général, qui se prête aussi à une interprétation très claire, malgré les difficultés mathématiques que les auteurs ont dû surmonter. En dépit de ces qualités, beaucoup reste à faire.

Voici l'essentiel du modèle de Ghirardato-Marccheroni-Marinacci.
Les hypothèses sont les mêmes que chez Gilboa-Schmeidler (en particulier l'affaiblissement radical de l'axiome d'indépendance), sauf qu'il n'y a pas d'hypothèse d'aversion pour l'ambiguïté : on n'impose rien a priori sur l'attitude à l'égard de l'ambiguïté. Le problème de caractérisation des choix devient alors beaucoup plus difficile, et sa solution beaucoup plus riche. Comme Gilboa – Schmeidler, Ghirardato-Maccheroni-Marinacci démontrent qu'il existe un ensemble P de distributions de probabilités sur X, ensemble fermé (et même faiblement compact) et convexe, et une fonction $u : X \to R$ (avec les propriétés habituelles) ; P et u sont tels – ici apparaît la nouveauté décisive - que les préférences sur la revenus aléatoires possibles $\tilde{x}$ sont représentées par les somme pondérée suivante d'espérances mathématiques en u :

[17] Voir par exemple Gajdos, T. , J.M. Tallon and J.C. Vergnaud (2004).

$$\alpha \min_{\mu \in P} E_\mu \left[u\left(\tilde{x}\right)\right] +$$
$$+ \left(1-\alpha\right) \max_{\mu \in P} E_\mu \left[u\left(\tilde{x}\right)\right]$$

où α, qui est une valeur numérique comprise entre 0 et 1, unique si P n'est pas réduit à une distribution de probabilités unique, et est endogène au résultat ainsi énoncé, s'interprète comme le *coefficient* (on pourrait aussi dire *indice*) *d'aversion pour l'ambiguïté*.

La généralité du résultat et la clarté de son interprétation en termes d'ambiguïté en font une étape capitale sur le chemin d'un traitement complet et opérationnel de la décision sous incertitude. Il contient tous les résultats précédents. Et, dans un tout autre registre, il rationalise les procédures heuristiques d'évaluation des portefeuilles de "risques" (c'est-à-dire de contrats signés par des compagnies d'assurance ou de réassurance, où beaucoup de "risques" sont en fait des engagements incertains, au sens de la distinction que nous avons pratiquée dans ce chapitre) qu'opèrent aux Etats-Unis des firmes de notation spécialisées dans l'assurance. Etape cependant, et non pas aboutissement car, en matière d'agrégation de choix individuels, d'une part, et de modèles dynamiques de l'autre, a peu près tout reste à faire.

REFERENCES

Allais, M. (1953), « Le comportement de l'homme rationnel devant le risque, critique des postulats et axiomes de l'école américaine », *Econometrica*, 21 : 503-546.

Allais, M. (1987), « Allais paradox », *The New Palgrave, a dictionary of economics*, The Macmillan Press, London, 80-82.

Arrow, K. (1971), *Essays in the theory of risk-bearing* , Markham, Chicago.

Debreu, G. (1964), « Continuity properties of Paretian utility », *International Economic Review*, 5 : 285-293.

Ellsberg, D. (1961), « Risk, ambiguity and the Savage axioms », *Quarterly Journal of Economics*, 75 : 643-669.

Gajdos, T., J.M. Tallon and J.C. Vergnaud (2004), « Decision making with imprecise probabilistic information », *Journal of Mathematical Economics*, 40 : 647-681.

Ghirardato, P., F. Maccheroni and M. Marinacci (2002), *Ambiguity from the differential viewpoint*, Working Paper n° 17/2002, ICER, Università di Torino.

Gilboa, I. and D. Schmeidler (1989), « Maximum expected utility with non unique prior », *Journal of Mathematical Economics*, 18 : 141-153.

Gollier, C. (2001), *The economics of risk and time*, The MIT Press, Cambridge (Mass).

Keynes, J.M. (1921), A *treatise on probability*, The Macmillan Press, Londres.

Knight, F. (1921), *Risk, uncertainty and profit*, Kelley, New-York.

Savage, L. (1954), *The foundations of statistics*, John Wiley, New York.

Von Neumann, J. and O. Morgenstern (1947), *Theory of games and economic behaviou*r, Princeton University Press