

## Laboratoire d'Economie des Transports

Unité Mixte de Recherche du CNRS n° 5593  
Université Lumière Lyon 2 - ENTPE

# ILOT Interactions Localisations Transport Phase I

---

Rapport final

Décembre 2006

PREDIT (Groupe Opérationnel n°1)

Ministère des Transports, de l'Équipement, du Tourisme et de la Mer

Direction de la Recherche et de l'Administration Scientifique et  
Technique

Lettre de commande 05MT5027

*rapportILOT-finalv2.doc - 03/01/2007*

Ce document devrait être référencé de la manière suivante :

Charles RAUX (dir), Pablo JENSEN (dir), Margaret EDWARDS, Fabrice MARCHAL, John Mc BREEN (2006) *Interactions Localisations Transport. Projet ILOT – Phase I*. Rapport final pour la DRAST. PREDIT. Laboratoire d'Economie des Transports, Lyon.

LABORATOIRE D'ECONOMIE DES TRANSPORTS  
(UMR 5593 CNRS)

A L'UNIVERSITE LUMIERE-LYON 2 :	A L'ECOLE NATIONALE DES TRAVAUX PUBLICS DE L'ETAT :
<p>LET ISH 14, avenue Berthelot 69363 LYON Cedex 07</p> <p>Téléphone +33 (0) 4 72 72 64 03 Télécopie +33 (0) 4 72 72 64 48</p>	<p>LET ENTPE rue Maurice Audin 69518 VAULX-EN-VELIN Cedex</p> <p>Téléphone +33 (0) 4 72 04 70 46 Télécopie +33 (0) 4 72 04 70 92</p>

## Résumé

---

Ce rapport présente la première phase d'activité (à un an) du projet ILOT (Interactions Localisations Transports). Le projet ILOT consiste à appliquer la modélisation multi-agents aux rapports entre mobilité locale et transformation des espaces dans les aires urbaines. Il vise à développer dans un premier temps un ensemble de « briques » théoriques susceptibles de représenter de manière pertinente l'émergence de comportements collectifs en matière de rythmes temporels d'activités et de localisation. Notre originalité consiste à développer des modèles simples, pour étudier de manière rigoureuse les ingrédients de base du modèle avant de se lancer dans les simulations de grande taille. A plus long terme, ces « briques » théoriques seront le matériau de base pour élaborer des modèles appliqués, susceptibles d'être confrontés à des situations réelles.

Dans la phase I de ILOT, dont rend compte ce rapport final, le projet comporte trois activités : (A) l'exploration théorique de l'émergence de comportements « stylisés » de rythmes temporels et de localisation d'activités à travers une « ville-modèle » ; (B) le couplage de modèles éprouvés dans les domaines respectifs du transport et des localisations, en particulier les modèles applicables à des problèmes pratiques ; (C) l'identification et la résolution des obstacles informatiques relatifs à la simulation, à la collecte des données et à l'analyse des résultats de ces modèles.

Nous avons cherché à comprendre l'influence de différents niveaux de détail de modélisation de certains facteurs de formation de la rente et de la densité. Nous avons étudié en particulier le rôle des interactions entre individus, et la différence de revenus et de coûts de transport, dans différentes configurations de modèles de formation de la rente et de la densité.

L'approche agent a permis de mieux comprendre les modèles agrégés de départ et de les étendre vers plus de pertinence. En particulier cette approche nous a permis d'étudier de façon plus fine l'influence des interactions et de coûts de transports hétérogènes sur les densités et les rentes.

Nos études successives nous ont permis une complexification progressive des configurations étudiées. Ceci nous a permis d'étudier séparément l'influence de chaque facteur d'hétérogénéité sur l'équilibre obtenu et donc une qualification plus claire des facteurs d'influence qu'il est important de modéliser finement.

### *Modèle de formation de la rente, avec surfaces et densité de logement constantes*

Nous avons tout d'abord développé un modèle de formation de la rente, avec surfaces et densité de logement constantes, et testé pour la formation de la rente, différents processus de surenchère pour les loyers des logements. Nous avons ensuite étendu ce modèle dans plusieurs directions indépendantes : coût de transport vers un lieu de travail central, centres différenciés par le nombre de logements ou leur surface, différence de revenu et différence des coûts de transport unitaires entre deux populations.

Premièrement, nous avons pu observer comment au sein de deux populations fortement liées l'une à l'autre, un coût de transport plus élevé pouvait conduire les individus concernés à se

concentrer au centre, en se séparant de l'autre population. Dans ce cas, les densités ne dépendent que de la différence de coût de transport.

Deuxièmement, lorsque les deux populations sont liées chacune plus à l'autre qu'à elle-même (comme peuvent l'être dans certains cas firmes et travailleurs), nous avons pu observer une ségrégation moins marquée, et dépendant du facteur entre les deux coûts de transport unitaires. Dans ce cas, la ségrégation diminue aussi avec le nombre de liens. On observe alors des configurations proches de centres secondaires autour des villes.

Ces modèles, bien que simples, permettent de montrer le rôle majeur que joue la différence de coûts de transport sur la ségrégation spatiale à l'intérieur de la ville. De plus ces études montrent l'influence des liens entre individus (outre la différence des coûts de transport) sur les formes de ségrégation observées.

### *Modèle de formation de la rente, avec surfaces et densité de logement variables*

Dans un deuxième modèle de formation de la rente, nous avons introduit des surfaces et des densités variables, et ajouté un terme de préférence pour la surface dans l'utilité. Ainsi, l'équilibre résulte d'un compromis des individus entre leurs coûts de transports et la surface de chaque logement.

Après avoir vérifié la fidélité du modèle individu-centré au modèle théorique, dans un cas simple où il était possible d'en connaître analytiquement la solution, nous avons simulé avec ce modèle des configurations plus compliquées, avec deux ou plusieurs populations différentes dans la même ville.

Pour commencer, nous avons étudié comment le coût de transport unitaire influence les densités respectives de deux populations de revenus différents, en conduisant ou non à une ségrégation spatiale. Nous avons ensuite étudié dans le cas d'une ségrégation, l'influence de différentes configurations d'interactions déterministes et aléatoires, et montré leur influence sur les densités obtenues.

Nous avons ensuite étudié comment la différence de coûts de transport pouvait mener à une ségrégation spatiale. Nous avons pu observer des densités concentriques suivant des coûts de transport unitaires décroissants. Des coûts de transports globalement plus faibles conduisent à l'étalement des populations, et donc à une influence plus visible de leurs positions l'une sur l'autre. Inversement une différence plus marquée entre coûts de transport, conduit à une plus grande différence de distribution de la densité entre les deux populations, et semble réduire ainsi leur compétition pour le sol et la pression de l'une sur l'autre.

Dans le modèle précédent, les rentes dépendent seulement de la densité. Nous avons introduit un peu de réalisme en les faisant résulter d'interactions individuelles de marchandage entre propriétaires et locataires. Même si la densité optimale et les rentes prévues par la théorie continuent à pouvoir être atteintes, elles ne le sont plus dans tous les cas. En particulier, les locataires parviennent parfois à obtenir des rentes inférieures à celles prévues par la théorie. Mais il peut aussi arriver que la dureté des marchandages conduise à des échecs de mouvements, frustrant finalement à la fois les locataires et les propriétaires.

### *Modèle de formation de la rente, avec cohabitation entre firmes et individus*

Dans un troisième modèle, nous avons étudié une cohabitation entre firmes et individus. Les firmes conservent des coûts de transports dépendant de leur distance aux autres firmes, alors que le coût de transport des individus dépend de leur distance à leur lieu de travail (firme).

La coexistence de firmes et de travailleurs conduit à des équilibres plus subtils, où non seulement leurs liens d'interactions directes (salaires), mais aussi la concurrence pour l'espace ainsi que l'ordre des relocalisations, jouent sur la formation des densités.

Nous avons considéré différentes formes de redistribution du profit des firmes provenant d'un rapprochement géographique facilitant leurs interactions. Nous avons notamment testé l'accroissement du poste budgétaire consacré au financement des locaux des firmes, le subventionnement des logements de leurs travailleurs ou de leurs coûts de transport. Les choix de redistribution du profit affectent directement soit la rente, soit les choix de localisation des firmes et/ou des travailleurs et influencent dès lors fortement les densités observées de l'ensemble des firmes et des travailleurs.

Enfin, nous avons pu observer que le hasard de l'ordre des relocalisations, en favorisant soit la symétrie, soit l'asymétrie des firmes pouvait conduire à des configurations très différentes.

L'approche agent nous a donc permis de simuler et d'étudier des configurations plus complexes et réalistes que le modèle agrégé dont nous sommes partis.

### *Modèle de ville avec propriétaires et locataires*

Avec le modèle de ville faisant interagir propriétaires et locataires, nous avons tout d'abord élaboré un modèle générique, qui a été ensuite étudié dans deux cas particuliers, l'un dans lequel les emplois sont tous localisés au centre, l'autre où chaque individu va visiter tous les autres.

Ce modèle de loyers formés à partir de la demande des locataires est bien compris et robuste. Nous avons établi l'existence d'un équilibre de population pour chaque jeu de paramètres, et le modèle converge avec le modèle théorique dans le cas du modèle avec emplois localisés au centre.

Nous concevons le modèle actuel comme étant une base de prototypes potentiels, et sommes en train d'évaluer les pistes les plus prometteuses pour la suite. Au niveau informatique, nous allons améliorer le programme en ajoutant des possibilités de complexifier le modèle.

### *Modélisation de la congestion routière*

En ce qui concerne la modélisation de la congestion, nous avons élaboré, dans un cas très simple réduit à un goulot, un modèle robuste, convergeant grâce à la prise en compte d'hétérogénéités entre agents. Il est possible d'utiliser une telle règle désagrégée dans un modèle opérationnel.

## *Couplage des modèles de trafic aux modèles de localisation*

La tâche consacrée au couplage des modèles de trafic aux modèles de localisation, a consisté à définir une interface logicielle qui permette aux modèles de localisation et d'occupation du sol d'accéder de manière transparente aux performances de l'infrastructure de transport, sans avoir à tenir compte de la complexité d'un modèle de transport complet. Le cahier des charges informatique a été établi. La mise en œuvre informatique de l'interface logicielle entre modèles de transport et modèles de localisation est encore en chantier.

## *Choix d'une plate-forme de développement multi-agent*

Nous avons cherché à choisir une plate-forme de développement multi-agent. Un premier tour des possibles nous a mené à nous focaliser sur RePast, l'une des plus connues et des plus utilisées, et MadKit, qui a été choisi pour le projet MIRO. Ces deux plates-formes présentent chacune leurs avantages. Cependant, parmi ses nombreux points forts, Repast dispose de fonctionnalités spatiales de base. Il nous paraît plus intéressant et original d'investir une réflexion et un développement supplémentaire sur le modèle d'interactions sociales que sur les fonctionnalités spatiales de base, ce qui nous amène à privilégier pour le moment Repast.

# Sommaire

---

<b>INTRODUCTION</b> .....	<b>1</b>
<b>1 MODÈLE DE DENSITÉ ET DE RENTE URBAINE</b> .....	<b>3</b>
1.1 Introduction .....	3
1.2 Formation de la densité et de la rente avec surfaces et densité constantes .....	5
1.3 Formation de la densité et de la rente avec surfaces et densités variables.....	28
1.4 Formation de densités et de rentes de firmes et d'employés .....	52
1.5 Conclusion.....	69
<b>2 MODÈLE DE VILLE AVEC PROPRIÉTAIRES ET LOCATAIRES</b> .....	<b>70</b>
2.1 Le modèle générique .....	70
2.2 Un modèle d'emplois localisés au centre .....	72
2.3 Un modèle de sociabilité.....	74
2.4 L'application informatique: .....	77
2.5 Perspectives .....	79
<b>3 MODÈLE INDIVIDU-CENTRÉ DE LA CONGESTION ROUTIÈRE</b> .....	<b>81</b>
3.1 Modèle et équilibre analytique.....	81
3.2 Modèle individu centré .....	84
3.3 Conclusion.....	88
<b>4 COUPLAGE DES MODÈLES DE TRAFIC AUX MODÈLES DE LOCALISATION</b> .....	<b>89</b>
4.1 Objectifs .....	89
4.2 Travaux réalisés.....	89
<b>5 LES ENVIRONNEMENTS POSSIBLES DE DÉVELOPPEMENT</b> .....	<b>92</b>
5.1 Madkit .....	92
5.2 Repast .....	93
5.3 Quelques autres environnements possibles.....	93
5.4 Synthèse de la comparaison entre Repast et Madkit .....	95
5.5 Conclusion.....	96
<b>CONCLUSION</b> .....	<b>97</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b> .....	<b>100</b>
<b>ANNEXES. AU SUJET DU MODÈLE DE CONGESTION</b> .....	<b>102</b>
<b>ANNEXE. SPÉCIFICATIONS DU COUPLAGE DES MODÈLES DE TRAFIC AUX MODÈLES DE LOCALISATION</b> .....	<b>109</b>

## Liste des figures

---

Figure 1. La forme de la densité observée pour le premier modèle est la même quelle que soit la valeur du paramètre de surenchère.....	7
Figure 2. Pour ce modèle, la rente finale dépend du paramètre de surenchère.....	8
Figure 3(a) et (b). Modèle 3a Etat de convergence (a) ne correspondant pas à un optimum social et (b) correspondant à un optimum social.....	10
Figure 4. Modèle 3a. Variance de l'utilité dans la population à l'état de convergence, en fonction du revenu $Y$ , pour deux valeurs extrêmes du paramètre $k$ (0,05 et 0,95).....	11
Figure 5. Modèle 3a. Rentes à l'état de convergence, en fonction du revenu $Y$ , pour différentes valeurs du paramètre $k$ .....	11
Figure 6. Modèle 3b. Variance de l'utilité dans la population à l'état de convergence, en fonction du revenu $Y$ , pour différentes valeurs du paramètre $\delta$ ( <i>variant entre 0,01 et 0,2, soit des surenchères de 1% à 20%</i> ).....	14
Figure 7. Variance de l'utilité dans la population à l'état de convergence, en fonction du revenu $Y$ , pour différentes valeurs du paramètre $k$ ( <i>variant entre 0,05 et 0,85</i> ).....	15
Figure 8. Rente moyenne à l'état de convergence, en fonction du revenu $Y$ , pour différentes valeurs du paramètre $k$ ( <i>variant entre 0,05 et 0,85</i> ).....	15
Figure 9. Modèle 5. Variabilité de l'utilité dans la population à l'état de convergence, en fonction du revenu $Y$ , pour différentes valeurs du paramètre $k$ ( <i>variant entre 0,05 et 0,85</i> ).....	17
Figure 10. Modèle 5. Utilités associées à chaque localité pour différentes valeurs de $Y$ ( $k=0,05$ ).....	17
Figure 11. Modèle 5. Rentes pour différentes valeurs de $Y$ ( $k=0,05$ ).....	18
Figure 12. Un exemple de courbe des rentes lorsque les coûts de transports intègrent la distance au travail et aux individus.....	18
Figure 13. Courbe des rentes en fonction de la position dans la ville, pour différentes surfaces au centre. Lorsque la surface au centre diminue, les rentes croissent (capacité au centre égale celle en périphérie (20)).....	19
Figure 14. Courbe des loyers en fonction de la position dans la ville, pour différentes surfaces au centre.....	20
Figure 15(a) et (b). Pour deux surfaces différentes au centre (a et b), la courbe des rentes en fonction de la position dans la ville ne varie pas suivant les capacités au centre.....	21
Figure 16. Rentes et densités dans le cas où une différence de revenu conduit à la différenciation spatiale de deux populations.....	22
Figure 17. Rentes et densités dans le cas où une différence de revenu ne conduit pas à la différenciation spatiale de deux populations (rentes très basses).....	22
Figure 18 (a, b et c). Ségrégation spatiale de deux populations dont le coût unitaire de transport de l'une est dix fois plus grande de l'autre. Ici figurent la densité (a), les utilités des deux populations pour chaque localité (b) et la courbe des rentes (c).....	23



Figure 19 (a, b et c). Ségrégation spatiale de deux populations sans lien de dépendance entre elles, dont le coût unitaire de transport de l'une est dix fois plus grande de l'autre. Ici figurent la densité (a), les utilités des deux populations pour chaque localité (c) et la courbe des rentes (b). .....	24
Figure 20. (a,b,c et d). Populations inter- mais non intra-connectées. Densités (a et c) et rentes (b et d) observées pour des coûts de transports unitaires différant d'un facteur 2 (a et b) et 10 (c et d).....	25
Figure 21. (a et b). Populations inter- sans être intra-connectées à 50%. Densités (a) et rentes (b) dans la ville observées pour des coûts de transports unitaires différant d'un facteur 2. ....	26
Figure 22. (a et b). Populations inter- sans être intra-connectées à 2%. Densités (a) et rentes (b) dans la ville observées pour des coûts de transports unitaires différant d'un facteur 2. ....	26
Figure 23. (a et b). Populations inter- sans être intra-connectées à 50%. Densités (a) et rentes (b) dans la ville observées pour des coûts de transports unitaires différant d'un facteur 10.....	27
Figure 24. (a et b). Populations inter- mais non intra-connectées à 2%. Densités (a) et rentes (b) dans la ville observées pour des coûts de transports unitaires différant d'un facteur 10.....	27
Figure 25. Distribution optimale suivant le modèle théorique pour $N=10$ , $\alpha=1$ , $t=1$ , $R_A=1$ . .	30
Figure 26 (a) et (b). Densité $N(x)$ (a) et rentes $R(x)$ (b), pour trois différentes valeurs de $Y$ correspondant à trois budgets logement ( $s(x)R(x)=Y/3$ ) différents, toutes choses égales par ailleurs. Le budget logement n'influence pas la densité, uniquement le niveau de rentes. ....	31
Figure 27. Courbes de densité pour différentes tailles de population ( $N$ ). Résultats de simulation (courbes avec des carrés) et densités du modèle analytique correspondant (ligne simple de même couleur). ....	32
Figure 28. Densité optimale suivant le modèle de population pour différents coûts de transport unitaires ( $N=50$ , $\alpha=1$ , $Y=700$ ). ....	33
Figure 29. Densité de deux sous-populations de revenus différents ( $Y_1=100$ , $Y_2= 700$ ), pour un coût de transport unitaire $t=0,1$ .....	34
Figure 30. Densité de deux sous-populations de revenus différents ( $Y_1=100$ , $Y_2= 700$ ), pour un coût de transport unitaire $t=3$ .....	34
Figure 31. Densité de deux sous-populations de revenus différents ( $Y_1=100$ , $Y_2= 700$ ), pour un coût de transport unitaire $t=4$ . ....	35
Figure 32. Densité de deux sous-populations de revenus différents ( $Y_1=100$ , $Y_2= 700$ ), pour un coût de transport unitaire $t=5$ . ....	35
Figure 33. Densité de deux sous-populations de revenus différents ( $Y_1=100$ , $Y_2= 700$ ), pour un coût de transport unitaire $t=10$ . ....	36
Figure 34. Différentes configurations sont observées, en fonction de la valeur de $t$ , et du rapport entre les revenus des deux populations.....	37
Figure 35. Densités et rentes pour deux populations ayant des coûts unitaires de transport différents. Référence où tout individu est lié à l'ensemble des autres individus. ....	38

Figure 36. Densités et rentes pour deux populations de revenus différents. Liens uniquement aux individus de la population partageant un même revenu. ....	38
Figure 37. Densités et rentes pour deux populations ayant des revenus différents. Liens uniquement aux individus de l'autre population. ....	39
Figure 38. Densités et rentes pour deux populations ayant des revenus différents. Un individu est lié aléatoirement à 90% des autres individus. ....	39
Figure 39. Densités et rentes pour deux populations ayant des revenus différents. Un individu est lié aléatoirement à 75% des autres individus. ....	40
Figure 40. Densités et rentes pour deux populations ayant des revenus différents. Un individu est lié aléatoirement à 50% des autres individus. ....	40
Figure 41. Densités et rentes pour deux populations ayant des revenus différents. Un individu est lié aléatoirement à 25% des autres individus. ....	40
Figure 42. Densités et rentes pour deux populations ayant des revenus différents. Un individu est lié aléatoirement à 10% des autres individus. ....	41
Figure 43. Sensibilité de la position de deux populations avec des coûts de transport différents ( $t_1$ et $t_2$ ) au facteur entre ces deux coûts de transport, pour différentes valeurs du plus grand ( $t_1$ ). ....	42
Figure 44. Indicateurs agrégés de l'influence de $t_1$ et $t_1/t_2$ sur les densités. Nombre de localités ( $dx$ ) occupées par chacune des populations, et densité maximale ( $max$ ). ....	43
Figure 45. Densité dans la ville d'un nombre croissant de populations de $t$ différents, tels que $t_1=1$ et $t(n)/t(n+1) = 2$ . ....	44
Figure 46. Densité dans la ville d'un nombre croissant de populations de $t$ différents, tels que $t_1=0.5$ et $t(n)/t(n+1) = 2$ . ....	45
Figure 47. Densité dans la ville d'un nombre croissant de populations de $t$ différents, tels que $t_1=1$ et $t(n)/t(n+1) = 4$ . ....	46
Figure 48. Rentes finales simulées pour différentes valeurs de $dk$ ....	48
Figure 49. Rentes finales pour différentes valeurs de $k_{min}$ . ....	49
Figure 50. Rentes finales pour différentes valeurs de $kMinFav$ : les propriétaires acceptent soit la première (1st bid R), soit la deuxième (2nd bid R), soit la troisième (3rd bid R) offre favorable. ....	49
Figure 51. Densités finales pour différentes valeurs de $kMinFav$ : les propriétaires acceptent soit la première (1st bid R), soit la deuxième (2nd bid R), etc... offre favorable. ....	50
Figure 52. Différents cas de figures sont observés en fonction de du nombre minimal d'offres valables avant acceptation par le propriétaire ( $nMinFav$ ), et du niveau minimal d'offre par les locataires ( $k_{min}$ ). ....	51
Figure 53. Etude de la densité des travailleurs en fonction de leur coût de transport unitaire. ....	54
Figure 54. Influence du coût unitaire de transport des firmes $\tau$ sur la densité des firmes et des travailleurs. ....	55
Figure 55. Influence de $\alpha = \beta$ sur les densités de firmes et de travailleurs. ....	56
Figure 56. Dans certains cas la relocalisation alternée des firmes et des travailleurs ne permet pas la convergence vers un état stationnaire. ....	57

Figure 57. Dans le cas d'une ségrégation spatiale concentrique des firmes et des travailleurs, on observe une stabilisation quelle que soit l'alternance des relocalisations.....	57
Figure 58. Densités de référence des firmes et des habitants.....	59
Figure 59. L'accroissement du budget logement des firmes mène à une ségrégation spatiale.....	59
Figure 60. L'accroissement de l'aide au transport favorise l'habitat en périphérie des travailleurs et par conséquent l'étalement des firmes. ....	60
Figure 61. Loyers (sR) dans la ville en fonction du niveau de subventionnement du logement. L'accroissement des subventions conduit à une flambée des loyers. ....	61
Figure 62. Densités des firmes et des travailleurs dans la ville en fonction du niveau de subvention des logements. L'accroissement des subventions conduit à l'étalement des firmes et des travailleurs. ....	61
Figure 63. Densité dans la ville pour deux types de firmes et leurs travailleurs lorsqu'une des deux firmes utilise une partie de son profit pour accroître le financement de ses locaux (a=0.1%)......	62
Figure 64. Densité dans la ville pour deux types de firmes et leurs travailleurs lorsqu'une des deux firmes utilise une partie de son profit pour accroître le financement de ses locaux. (a=100%).....	63
Figure 65. Densité dans la ville pour deux types de firmes et leurs travailleurs lorsqu'une des deux firmes utilise une partie de son profit pour accroître le financement de ses locaux. Exemple d'une configuration asymétrique (a=1%). ....	63
Figure 66. Densités pour deux firmes, dont l'une subventionne faiblement le transport de ses travailleurs, et de leurs travailleurs. ....	64
Figure 67. Densités dans la ville pour deux types de firmes et leurs travailleurs lorsqu'un des types (le type 2) de deux firmes subventionne le transport de ses travailleurs. L'accroissement des subventions favorise la localisation des travailleurs en périphérie.....	65
Figure 68. Densités des firmes et travailleurs lorsque les profits sont utilisés pour les locaux des firmes (firmes 1) ou pour subventionner le transport des travailleurs (firmes 2). ....	66
Figure 69. Densités des firmes et travailleurs lorsque la part de profit utilisée pour subventionner les coûts de transport est supérieure à celle utilisée pour le financement des locaux.....	67
Figure 70. Accroissement relatif de la part de profit dédiée au financement des locaux des firmes de type 1.....	67
Figure 71. Exemple d'une configuration asymétrique.....	68
Figure 72 : Comparaison entre la théorie et la simulation pour le rayon de la ville. ....	73
Figure 73 : Forme du loyer dans la ville. . ....	74
Figure 74 : (a) Utilités initiales pour une distribution des locataires au hasard. (b) Loyers initiaux.....	75
Figure 75 : A l'équilibre (après 300 itérations), (a) Les utilités des logements (b) la distribution des loyers. ....	76
Figure 76 : Equilibre pour différentes valeurs de population initiale. ....	77
Figure 77 : Equilibre pour différents flux partant. ....	77

Figure 78 : Image d'écran de la « ville ». Les logements occupés sont en vert les nouveaux arrivants sont rouges.....	78
Figure 79 : Image d'écran des valeurs moyennes .....	79
Figure 80 : (a) Graphe des taux de départ de l'équilibre et de l'optimum social (en tirets). La capacité du goulot d'étranglement est 2. Quand le taux de départ devient supérieur à 2 un bouchon se produit. (b) Fonctions du coût de l'équilibre et de l'optimum social où il n'y a pas de congestion. Les traits verticaux marquent le premier et le dernier à partir. ....	84
Figure 81 : (a) Coût moyen pour 2000 agents homogènes avec 5% remise à jour à chaque itération. (b) Le taux de départs à A et B. ....	85
Figure 82 : Distribution gaussienne, avec une variance de 100, des heures d'arrivées préférées de 2000 agents autour de $t^* = 0$ . Le nombre d'agents est moyenné sur trois unités de temps. ....	86
Figure 83 : (gauche) Les coûts moyens et les coûts de congestion pour des agents homogènes et pour des agents hétérogènes avec une distribution gaussienne, de variance 100, des heures d'arrivées préférées. (droite) Taille et fréquence des changements des heures de départ pour les agents homogènes et hétérogènes.....	86
Figure 84 : (gauche) Le coût moyen pour une gamme des variances pour un taux de rafraîchissement de 4%. Les lignes droites de la même couleur sont la moyenne entre 100 et 800 itérations du coût moyen. (droite) La stabilité (écart type entre 100 et 800 itérations) contre la variance de la distribution des heures d'arrivées préférées.....	87
Figure 85 : La stabilité pour une gamme des variances et des taux de rafraîchissements. « Variance PAT » est la variance de la distribution des heures d'arrivée préférées, égale à zéro pour les agents homogènes. « Reviewing Rate » est le taux de rafraîchissement et « Standard Deviation » est l'écart type du coût moyen.....	88

# Introduction

---

La modélisation des transports est non seulement importante pour prévoir les conditions de circulation en ville et leurs impacts économiques et environnementaux, mais joue également un rôle dans le développement urbain à plus long terme. En effet l'accessibilité peut influencer les choix de localisation des entreprises et des ménages. Dès lors pour comprendre le développement à long terme d'un espace urbain, la modélisation des transports en interaction avec les choix de localisation est nécessaire.

Toutefois les liens entre transports et localisations s'insèrent dans un réseau d'influences nombreuses. En effet les entreprises choisiront leur localisation en fonction des infrastructures permettant leur approvisionnement, et l'écoulement des biens produits, du marché du foncier et du marché de l'immobilier d'entreprise, mais seront également influencées par la localisation d'autres entreprises (éventuellement concurrentes), de la proximité de la main-d'œuvre (et donc de zones résidentielles). Les employés eux-mêmes choisiront leur résidence en fonction de leur lieu de travail, mais aussi, outre bien entendu le marché immobilier, des écoles, commerces, lieux culturels ou plus subtilement de paramètres subjectifs ('quartiers préférés'), etc... Les localisations des entreprises et des employés déterminent en grande partie la mobilité, et la formation de congestions, dont les caractéristiques peuvent varier en fonction des stratégies des automobilistes, et de l'information dont ils disposent. La congestion appelle à son tour un développement ciblé des infrastructures... Ainsi, si les transports dans une ville influencent en partie l'implantation de nouvelles activités et le développement de zones résidentielles, le développement de celles-ci peut accroître la demande en transport et conduire à développer les infrastructures existantes.

La modélisation du développement de la ville est donc complexe car elle comprend des entités de natures, d'échelles, de rôles très différents (géographiques, économiques, institutionnels, individuel,...), interconnectées par des liens multiples nécessitant des couplages délicats.

Le projet ILOT consiste à appliquer la modélisation multi-agents aux rapports entre mobilité locale et transformation des espaces dans les aires urbaines. Il vise à développer dans un premier temps un ensemble de « briques » théoriques susceptibles de représenter de manière pertinente l'émergence de comportements collectifs en matière de rythmes temporels d'activités et de localisation. Notre originalité consiste à développer des modèles simples, pour étudier de manière rigoureuse les ingrédients de base du modèle avant de se lancer dans les simulations de grande taille. A plus long terme, ces « briques » théoriques seront le matériau de base pour élaborer des modèles appliqués, susceptibles d'être confrontés à des situations réelles.

Dans la phase I de ILOT, dont rend compte ce rapport final, le projet comporte trois activités : (A) l'exploration théorique de l'émergence de comportements « stylisés » de rythmes temporels et de localisation d'activités à travers une « ville-modèle » ; (B) le couplage de modèles éprouvés dans les domaines respectifs du transport et des localisations, en particulier les modèles applicables à des problèmes pratiques ; (C) l'identification et la résolution des obstacles informatiques relatifs à la simulation, à la collecte des données et à l'analyse des résultats de ces modèles.

Au titre de l'activité A, sont présentées en trois sections successives plusieurs « briques » de modèles : des variations autour de modèles de densité et de rente urbaine, un prototype de modèle de ville avec propriétaires et locataires, et un modèle individu-centré de la congestion routière.

Au titre de l'activité B, l'avancement du travail sur le couplage entre modèles de transport et modèles d'occupation du sol est présenté dans une quatrième section. Cette section évoque également l'acquisition de moyens de calcul spécialisés pour le travail de simulation, et de bases de données géomatiques, qui représente l'essentiel du subventionnement de cette recherche : cet équipement a d'ores et déjà permis la réalisation des nombreuses simulations, gourmandes en calcul, pour les activités A et B.

Enfin, pour l'activité C dans la cinquième section, sont analysées différentes plates-formes de développement informatique.

# 1 Modèle de densité et de rente urbaine

---

## 1.1 Introduction

---

La littérature propose plusieurs modèles de développement urbain intégrant les transports. Initialement simples, les modèles n'ont cessé de se complexifier pour gagner en réalisme et en précision. Ainsi, aux premiers modèles agrégés d'interaction spatiale (commençant par Lowry 1963) ont succédé des modèles d'optimisation de l'utilité (logit multinomial) (de Echenique 1977 à Alberti et Waddell 2000), puis des modèles de microsimulation (p.ex. Miller et Savini 1998, Veldhuisen et al. 2000), avant le recours à la modélisation automates cellulaires (White et Engelen 1993) et multi-agents (p.ex. Sanders et al. 1997, Arentze et Timmermans, 2003).

De plus, il apparaît qu'il n'existe pas de modèle idéal, en raison de la diversité du phénomène urbain en fonction des pays, cultures, contraintes géographiques (Webster et al. 1988), etc.

La question apparaît donc moins de construire *le* modèle, que de comprendre les implications des hypothèses de modélisation, pour savoir quand elles sont pertinentes ou non en fonction de la réalité à simuler.

Or les modèles très fins nécessitent des données très nombreuses pour leur calage. De plus, s'ils permettent au modélisateur d'exprimer des hypothèses plus fines, ils sont plus difficiles à explorer en raison de la multitude de paramètres et donc à analyser, en particulier à un niveau global. Plus le modèle est complexe, plus il nécessite de simulations pour son exploration, et plus chaque simulation est coûteuse, plus il devient donc difficile et coûteux à étudier.

Or il apparaît que certains des sous-modèles en cherchant à exprimer au plus près des hypothèses réalistes, sont parfois inutilement précis et coûteux.

Dès lors, tenter de trouver une échelle minimale pour les sous-modèles relève non seulement des pratiques de 'bonne' modélisation mais permet ici d'alléger le modèle général pour le rendre plus facilement étudiable. On pourra en tirer des conclusions plus claires, en particulier concernant le rôle des transports dans le développement urbain.

### *Objectif*

Notre objectif est de comprendre les conséquences de différents choix d'échelle et de détail possible pour les sous-modèles de développement de la ville (incluant les transports), pour nous aider à déterminer les échelles minimales pertinentes de modélisation suivant le cas (en vue à long terme de l'intégration dans un modèle plus complet). Nous avons cherché à comprendre quand une modélisation plus fine pouvait changer qualitativement les résultats. Nous nous sommes intéressés à l'influence des interactions entre firmes et/ou individus, à l'hétérogénéité des revenus, des coûts de transports, de la surface et du nombre des logements sur la formation de la rente et de la densité.

### *Mise en œuvre*

Nous partons de modèles agrégés d'équilibre. Nous développons des modèles plus fins, individus-centrés ou multi-agents d'évolution. Ces modèles plus fins permettent de proposer des algorithmes conduisant aux équilibres prédits. Ils permettent de comprendre sous quelles



hypothèses ces équilibres sont effectivement atteints, et d'évolutions alternatives dans les autres cas.

Dans toutes ces études nous faisons l'hypothèse d'une ville qui se développe de la même façon suivant toutes les directions : nous nous limitons donc à une étude en une dimension.

Nous étudions des modèles de rentes et de densités de complexité croissante. Nous nous intéressons principalement à la rente différentielle telle qu'elle est définie par Thisse (Duranton et Thisse 1996). En effet nous cherchons à comprendre l'influence d'une demande hétérogène sur la formation de la rente.

Nous proposons des modèles agents qui permettent de faire le lien entre des hypothèses à l'échelle individuelle et l'évolution globale, et de comprendre dans quelles conditions un équilibre est atteint. Cette approche plus fine permet aussi d'introduire et d'étudier des facteurs d'influence (hétérogènes) et des mécanismes plus fins que ne le permettraient des modèles agrégés. Nous nous intéressons plus particulièrement à l'influence du coût de transport sur la formation de la rente.

### *Plan*

Nous partons de modèles très simples de formation de la rente en testant les conditions d'atteinte d'un équilibre social (section 2). Nous recherchons et testons la robustesse de différents mécanismes de surenchère sur la rente lors des changements de lieux. Nous étendons ensuite le modèle de base en testant une fonction de coût de transport différente, en simulant un centre avec des caractéristiques particulières, en étudiant l'influence de la différence de revenu puis de coût unitaire de transport sur la ségrégation spatiale.

Nous étudions ensuite des modèles de formation de la densité et de la rente, à partir d'un modèle proposé par Fujita et Thisse (section 3). Nous commençons par retrouver l'équilibre prédit par Fujita et Thisse pour une configuration simple. Nous étendons ensuite ce modèle à des configurations plus complexes qui seraient plus difficilement résolubles analytiquement.

Pour commencer nous étudions l'influence du coût de transport unitaire sur la position relative de deux populations différant par leurs revenus. Nous étudions de plus pour cela l'influence des liens entre individus influant sur leurs déplacements.

Ensuite nous étudions l'influence de la différence de coût de transport sur la position relative de deux (puis plusieurs) populations (avec le même revenu).

Nous introduisons alors un mécanisme de marchandage.

Enfin, dans un dernier temps (section 4), nous étudions un modèle de densité et de rente avec des firmes et des travailleurs. Nous observons l'influence de différents de choix de redistribution des profits des firmes (affectées aux locaux de la firme, aux logements ou aux coûts de transport des travailleurs) sur les densités de firmes et de travailleurs obtenues. Nous étudions ensuite comment la combinaison de firmes avec différents choix de redistribution peut conduire à différents types de configurations de densités.



## 1.2 Formation de la densité et de la rente avec surfaces et densité constantes

---

### 1.2.1 Principe des modèles

---

On suppose que la ville est définie par un ensemble de localités avec chacune le même nombre de logements, qui ont tous la même surface.

Un individu dispose d'un revenu, qu'il partage entre les coûts de logement, de transports, et les dépenses diverses. Ainsi pour un individu on a :

$$Y = s(x)R(x) + T(x) + z$$

Où  $Y$  est le revenu

$T(x)$  représente le coût de transport

$s(x)$  est la surface louée

$R(x)$  est la rente par unité de surface (et  $s(x)R(x)$  représente le loyer)

$z$  est la portion du revenu qui n'est pas dédiée au logement.

Le coût de transport est le coût d'aller visiter les autres individus. En effet en plus d'une tendance naturelle à l'interaction sociale et économique, le regroupement des individus permet la mise en place et le partage de services (voirie, écoles, etc...). Ceci permet d'introduire le besoin d'accéder à des équipements et services collectifs qui sont justement fréquentés par les individus en interaction. De plus ce type de modèle permet la formation endogène d'un centre - et non sa formation exogène comme dans les modèles théoriques où les emplois sont localisés dans un centre préexistant.

Le coût de transport en tout point  $x$  est calculé de la façon suivante

$$T(x) = \int t|x - y|n(y)dy$$

Où  $t$  est le coût de transport unitaire (par kilomètre parcouru)

$y$  parcourt l'ensemble des localités de la ville

$n(y)$  est la densité de population en  $y$ .

On définit l'utilité d'un individu situé en  $x$ , sous la forme

$$U(s,x) = z = Y - T(x) - s(x)R(x).$$

Au cours de l'évolution, tout individu cherche à déménager vers le logement qui optimise son utilité. Si ce logement est déjà occupé, l'individu propose une surenchère du loyer. Dans le cas où son utilité est déjà optimale, et où il peut s'attendre à ce que la demande pour son logement soit forte sur le marché, il surenchérit afin d'éviter le coût d'un déménagement.

Nous avons étudié deux principes de surenchère :

soit proportionnelle à la différence d'utilité escomptée (qui correspond à une différence de coût de transport escomptée)

$$(R'(x) = R(x) + k dU) \rightarrow \text{Modèles indicés par } a$$

Si la meilleure nouvelle localisation est la localisation que l'individu occupe déjà (la différence d'utilité est donc nulle, ainsi que toute surenchère), la surenchère se base sur la différence entre la meilleure utilité, et la deuxième meilleure utilité escomptée dans la ville. En effet on suppose qu'afin de pouvoir rester où il est, l'individu est prêt à réinvestir la perte qu'il subirait s'il devait déménager.

soit proportionnelle à la rente actuelle de la localité cible, quelle qu'elle soit (y compris si l'individu y réside déjà) ( $R'(x)=R(x)(1+\delta)$ ) → *Modèles indicés par b*

## 1.2.2 Un modèle simple de formation de la ville

---

Dans un premier temps nous cherchons ainsi à définir la forme de la densité (pour pouvoir dans un deuxième temps nous focaliser ensuite sur la formation de la rente).

Pour cela nous considérons une ville 'infinie' où les individus viennent s'installer les uns après les autres. La capacité

### 1.2.2.1 Particularités du modèle étudié

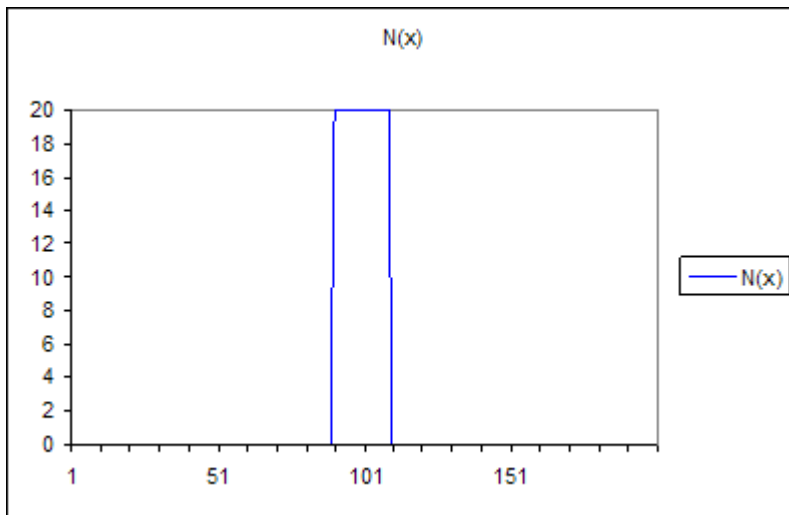
Chaque nouvel individu choisit la localité lui permettant d'optimiser son utilité. S'il reste des places libres, l'individu s'installe en payant la rente actuelle, sinon, il propose une surenchère de type  $b$  (proportionnelle à la rente précédente). Sa venue chasse un individu, qui cherche à se relocaliser suivant le même principe, en chassant lui-même éventuellement un nouvel individu, et ainsi de suite jusqu'à ce que le dernier individu chassé gagne une localité où il reste des places libres.

### 1.2.2.2 Résultats

a) La forme de la densité est toujours la même

Quelle que soit la valeur du paramètre de surenchère, les individus se concentrent autour d'un centre en occupant toutes les places de chaque localité.

Nous avons représenté ci-dessous le nombre d'individus par localité en fonction de la position dans la ville.

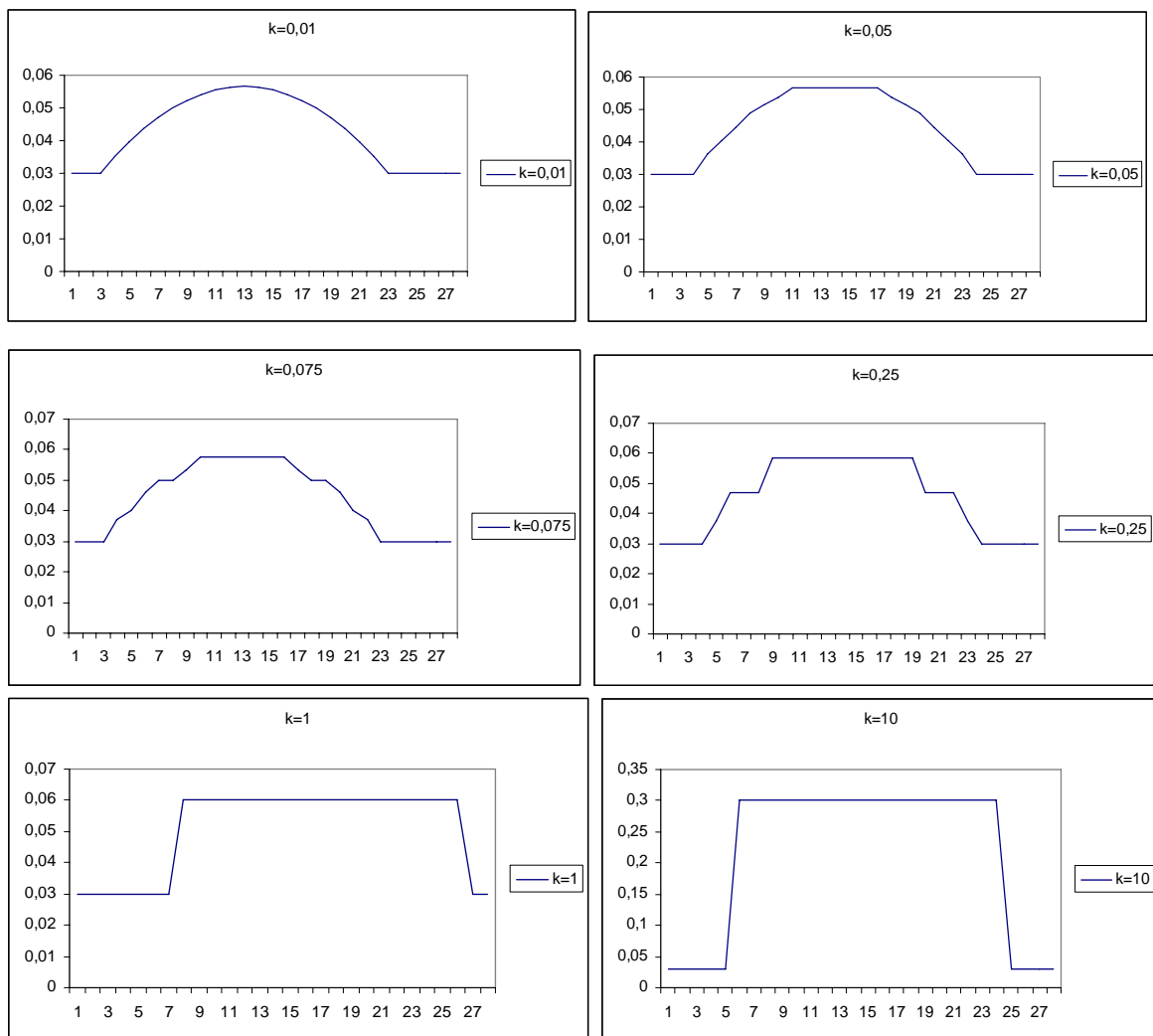


**Figure 1. La forme de la densité observée pour le premier modèle est la même quelle que soit la valeur du paramètre de surenchère.**

b) La rente varie (suivant la valeur du paramètre de surenchère)

En revanche la valeur du paramètre de surenchère détermine le niveau de rentes atteint (qui dépend aussi du nombre de surenchères et donc de la taille de la population).

Nous avons représenté ci-dessous la courbe de la rente en fonction de la position, pour le centre habité. En dehors de ce centre la rente demeure partout égale à sa valeur initiale (homogène), ainsi qu'on peut le voir aux extrémités de chaque graphique. Cette rente est normalisée par le revenu, dont jusqu'à un tiers peut être consacré au logement (ce qui correspondrait à une rente de 0.3).



**Figure 2. Pour ce modèle, la rente finale dépend du paramètre de surenchère.**

La rente finale croît avec la valeur du paramètre de surenchère, et le nombre de surenchères pour chaque localité, qui dépend lui-même de la taille de la population. Nous l'avons toutefois limitée par un budget maximal que peuvent consacrer les individus à leur logement.

### 1.2.2.3 Conclusion

Ce premier modèle permet donc d'étudier l'influence du paramètre de surenchère et de la taille de la population sur la valeur de la rente.

Dans ce qui suit, nous nous restreindrons donc, sans perte de généralité, à une ville dont la capacité correspond exactement à la taille de la population et nous ne nous intéresserons plus à la formation de la densité.

Nous nous concentrons notre étude sur de la formation de la rente, en recherchant aussi pour celle-ci un état qui ne soit pas simplement 'final' mais qui puisse être qualifié d'équilibre (défini ci-après).

## 1.2.3 Choix du processus de surenchère

---

### 1.2.3.1 Particularités des modèles étudiés

A chaque pas de temps on choisit l'individu dont l'utilité est la moindre. Il détermine dans quelle localité il pourrait maximiser son utilité. Il surenchérit sur la rente actuelle suivant l'une des deux règles précédemment citées dans le 1.2.1. Il prend alors la place de l'individu de la localité cible, dont l'utilité est la plus petite. Celui-ci le remplace à sa place initiale.

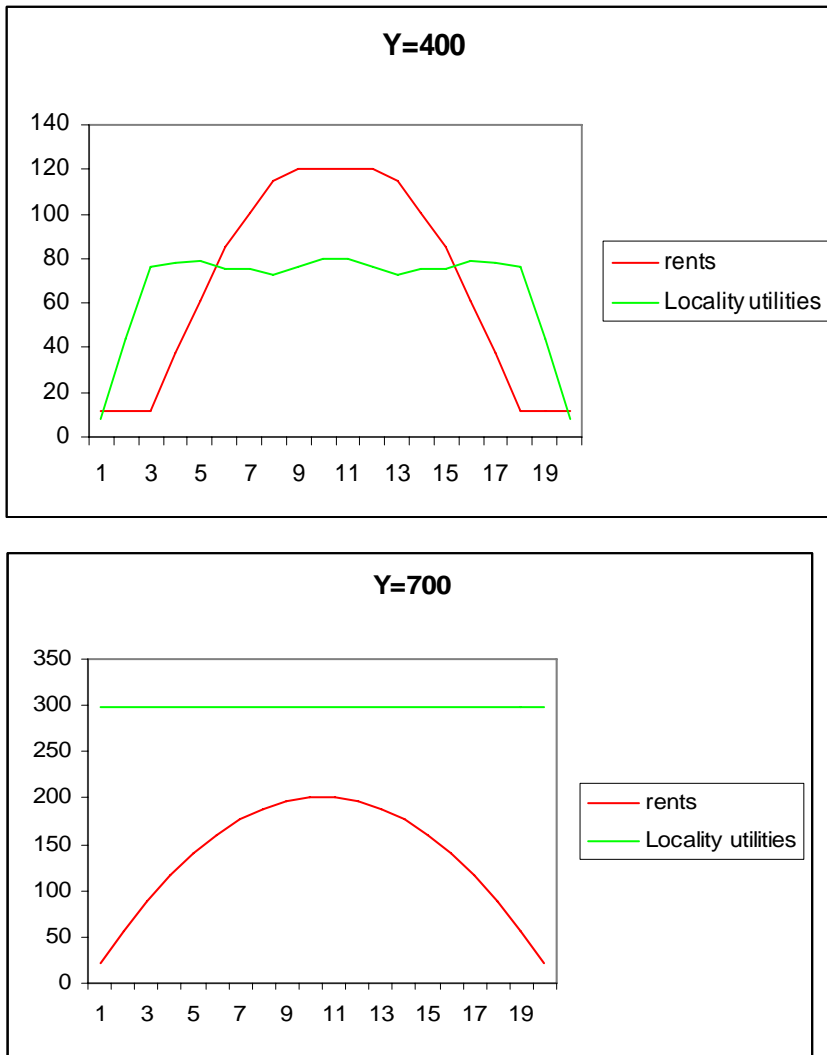
### 1.2.3.2 Deux types de résultats

Initialement l'utilité n'est pas la même pour tous, puisque les rentes sont les mêmes partout, alors que les coûts de transports varient en fonction de la position dans la ville. Les individus au centre de la ville sont ainsi favorisés, à l'opposé de ceux en périphérie. C'est cette disparité qui initie la dynamique de surenchères et de mouvements.

L'algorithme, suivant lequel chacun cherche à optimiser son utilité, vise à permettre une homogénéisation de l'utilité, l'atteinte d'un équilibre social où toutes les positions dans la ville sont équivalentes en termes de coût.

Nous observons ainsi deux grands types de résultats : soit l'atteinte d'un tel équilibre défini par une utilité homogène, soit un état où subsistent des disparités. Un tel état peut survenir par exemple si le revenu alloué aux individus, et donc leur budget logement, est insuffisant pour compléter le processus de surenchère.

Nous montrons ci-dessous deux configurations correspondant à ces deux grands types de résultats (non-équilibre (Figure 3 (a)) et équilibre (Figure 3 (b)) tels que nous venons de les définir). Nous avons représenté la rente (courbe en rouge) et l'utilité pour chaque localité (courbe verte).



**Figure 3(a) et (b). Modèle 3a Etat de convergence (a) ne correspondant pas à un optimum social et (b) correspondant à un optimum social.**

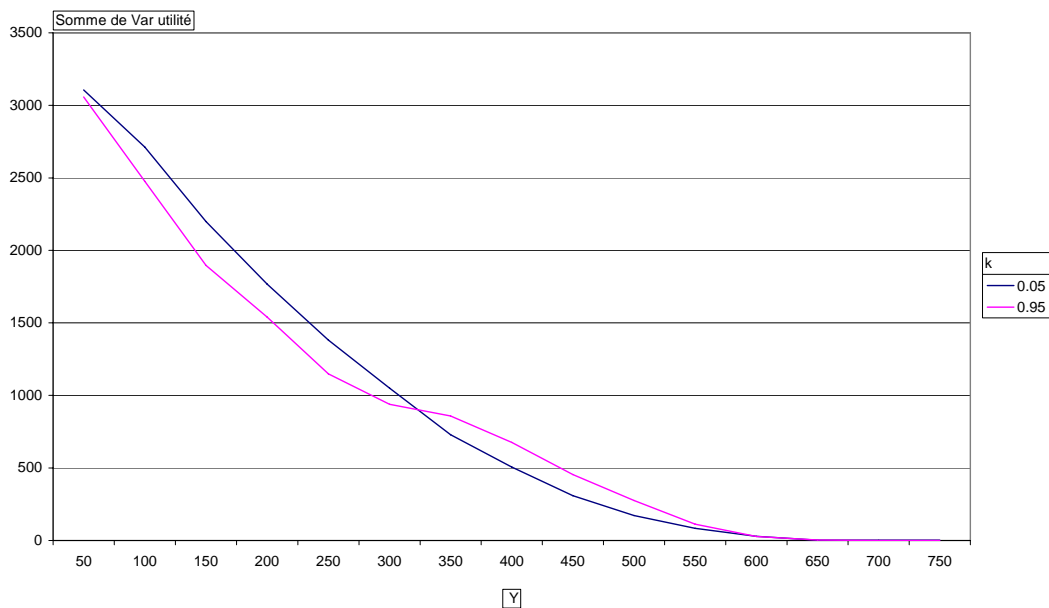
Lorsque l'équilibre social est atteint, l'utilité est la même partout et les rentes reproduisent la fonction de coût de transport inversée. Hors de cet équilibre, les rentes s'éloignent de cette fonction inversée, tout en restant plus grandes au centre. De plus l'utilité n'est la même partout.

Comme l'état d'équilibre est unique, défini par une utilité homogène et des rentes correspondant à la fonction inversée des coûts de transport, nous cherchons dans cette étude à caractériser simplement quand il est atteint ou non.

### 1.2.3.3 Modèle à surenchère de type a (proportionnelle à la différence d'utilité)

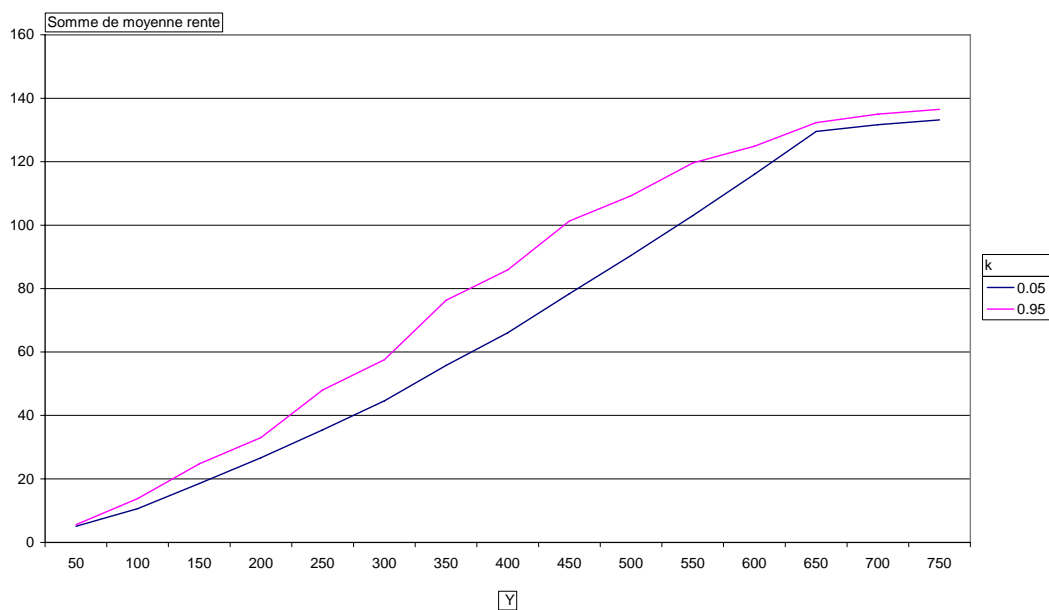
Pour mesurer la distance d'un état final à l'équilibre, nous avons représenté ci-dessous la variance de l'utilité dans la population en fonction du niveau de revenu pour différentes valeurs du paramètre de surenchère  $k$ .

Dans le graphe suivant nous avons représenté cette variabilité (calculée comme la variance dans la ville) en fonction du revenu  $Y$  (en abscisse), pour deux valeurs extrêmes de  $k$  (0,05 et 0,95).



**Figure 4. Modèle 3a. Variance de l'utilité dans la population à l'état de convergence, en fonction du revenu  $Y$ , pour deux valeurs extrêmes du paramètre  $k$  (0,05 et 0,95)**

Nous pouvons voir que l'atteinte de l'état d'équilibre ne dépend pas de la valeur de  $k$ , mais uniquement d'un niveau de revenu suffisant ( $Y > 650$ ).



**Figure 5. Modèle 3a. Rentes à l'état de convergence, en fonction du revenu  $Y$ , pour différentes valeurs du paramètre  $k$**

En ce qui concerne les rentes, nous pouvons observer que les rentes moyennes s'accroissent avec le niveau de revenu  $Y$ . Elles augmentent plus rapidement pour  $Y < 650$  que pour  $Y > 650$ .

Voici une approche par équations de cette question.

Initialement la rente dans la ville vaut une fraction fixe du revenu moyen ( $Y/H$ ).

Lorsque le revenu moyen est assez élevé, les surenchères successives permettent de faire croître la rente au centre jusqu'à refléter idéalement les différences de coûts de transport dans la ville. S'il n'est pas assez élevé, les localités en périphérie ne donnent pas lieu à surenchère et gardent leur rente d'origine. Les individus en périphérie, dont les coûts de transport plus élevés ne sont pas compensés par des rentes moins élevées en proportion, présentent une utilité plus faible.

Cherchons à comprendre comment l'accroissement du revenu moyen agit sur la rente moyenne dans chacun de ces deux cas de figure. Dans équations qui suivent  $x$  indique la position dans la ville ;  $x = 0$  correspond à une position au centre ;  $x = \pm L/2$  correspond à une position en périphérie.

Initialement la rente vaut

$$R_i(x) = Y_i/H$$

Lorsqu'elle reflète la différence de coût de transport, elle vaut

$$R_i(x) = Y_i/H + T_{max} - T_{min} - T(x) = Y_i/H - T(x) + DT$$

Le coût de transport en  $x$  peut s'écrire :

$$T(x) = A(x^2 + L(L/2 + 1))$$

Où  $A = C * t$ ,  $t$  étant le coût de transport unitaire et  $C$  la capacité de chaque localité (nombre de logements).

Commençons par le cas où les rentes reflètent la différence de coût de transport dans la ville. La rente moyenne pour un certain revenu moyen  $Y_i$  vaut

$$R_{moy}^i = Y_i/H + DT - T_{moy}$$

Puisque les coûts de transports ne varient pas (ni leur moyenne, ni leur écart extrême) nous pouvons voir que l'accroissement de la rente est proportionnel dans ce cas à l'accroissement de la rente de base, elle-même proportionnelle avec un facteur  $1/H$  à l'accroissement du revenu.

Nous pouvons de plus comprendre que cette configuration est possible à partir du moment où le budget de logement maximal ( $Y_i/K$ ) permet une surenchère maximale de la rente (au centre) au moins supérieure ou égale à la différence de coût de transport entre le centre et la périphérie. Autrement dit :

$$Y_i (1/K - 1/H) > T(L/2) - T(0)$$

Considérons à présent le cas où seule une partie des rentes reflète la différence de coûts de transport.

Lorsque le revenu augmente, l'accroissement de la rente de base mène à l'accroissement de la rente moyenne ainsi que dans le cas précédent. Toutefois en plus de cet accroissement de la rente moyenne, une partie des localités peut passer de la rente de base à une rente qui traduise la différence de coût de transport avec le centre.

Commençons par définir sous quelles conditions de revenu une nouvelle localité peut donner lieu à surenchère.

Pour que la rente d'au moins  $2k+1$  localités donne lieu à surenchère il faut que la différence entre la rente de base ( $Y_i/H$ ) et la surenchère maximale correspondant au budget logement ( $Y_i/K$ ) soit supérieure à la différence de coût de transport entre le centre et la localité  $k$ .

$$Y_i (1/K - 1/H) > T(k) - T(0)$$



Or la différence de coût de transport entre une localité située en  $k$  et le centre vaut

$$T(k)-T(0)=Ak^2$$

La condition devient donc :

$$Y_i > Ak^2/(1/K-1/H)$$

En particulier l'ajout d'une localité donnant lieu à surenchère nécessite un accroissement du revenu moyen de :

$$dY_i = (T(k+1)-T(k))/(1/K-1/H)=A(2k+1)/(1/K-1/H)$$

Cherchons à présent à quantifier l'impact sur la rente moyenne de l'ajout d'une localité.

La différence de rente moyenne lors de l'ajout d'une localité (à rente de base inchangée) peut se déduire directement de la différence de coût de transport moyen.

Le coût de transport moyen entre les localités  $-k$  et  $k$  vaut

$$T_{moy}[-k, k] = \frac{1}{2k+1} \sum_{i=-k}^k T(i) = \frac{2}{2k+1} A \sum_{i=0}^k i^2 + AL\left(\frac{L}{2}+1\right) = A \left\{ \frac{1}{k+\frac{1}{2}} \cdot \frac{k(k+\frac{1}{2})(k+1)}{3} + L\left(\frac{L}{2}+1\right) \right\}$$

$$T_{moy}[-k, k] = A \left\{ \frac{k(k+1)}{3} + L\left(\frac{L}{2}+1\right) \right\}$$

Dès lors

$$T_{moy}[-(k+1), k+1] - T_{moy}[-k, k] = A \left\{ \frac{(k+2)(k+1)}{3} - \frac{(k+1)k}{3} \right\} = \frac{2A(k+1)}{3}$$

De plus

$$DT_{k+1} - DT_k = T(k+1) - T(k) = A(2k+1)$$

D'où

$$\{DT_{k+1} - T_{moy}[-(k+1), k+1]\} - \{DT_k - T_{moy}[-k, k]\} = \frac{A(4k+1)}{3} > 0$$

Or rappelons que

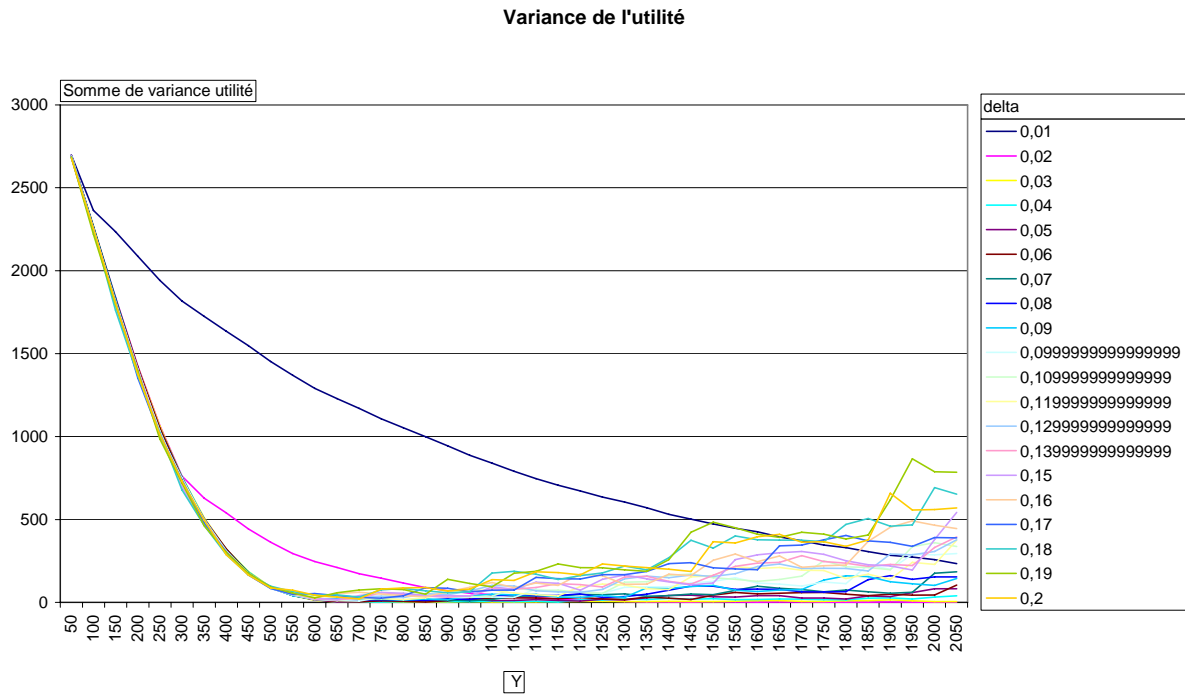
$$R_{moy}^i = Y_i/H + DT - T_{moy}$$

Alors que dans les configurations d'équilibre nous avons  $DT - T_{moy}$  constant, ici il s'accroît avec le nombre de localités donnant lieu à surenchère. Lorsque le revenu moyen croît il y a donc ici deux sources d'augmentation de la rente moyenne :  $Y_i/H$  comme précédemment, mais en plus  $DT - T_{moy}$ .

Ceci explique la pente plus forte de la rente moyenne (en fonction du revenu) observée en dessous d'un certain seuil de revenu (tant que toutes les localités ne donnent pas lieu à surenchère).

#### 1.2.3.4 Modèle à surenchère de type b (proportionnelle à la rente)

Nous avons représenté dans le graphe ci-dessous, pour le modèle 3b, la variance de l'utilité au sein de la population après convergence, en fonction du revenu  $Y$  pour différentes valeurs de  $\delta$ .



**Figure 6. Modèle 3b. Variance de l'utilité dans la population à l'état de convergence, en fonction du revenu  $Y$ , pour différentes valeurs du paramètre  $\delta$  (variant entre 0,01 et 0,2, soit des surenchères de 1% à 20%)**

Ici la surenchère est optimale pour un  $\delta$  autour de 3%-5%. En dessous, l'état attendu n'est pas atteint. Au-dessus le pas de surenchère est trop grossier pour permettre une bonne convergence. Dès lors la variance de l'utilité (égale au revenu qui ne soit consacré ni au coût de transport, ni au logement) dans la population, s'accroît en valeur absolue avec le niveau de revenu.

#### 1.2.3.5 Conclusion

Après cette première étude, nous avons choisi de ne retenir que le mécanisme de surenchère proportionnelle à la différence d'utilité escomptée (modèle a), car elle donne un résultat plus robuste par rapport à ce paramètre de surenchère.

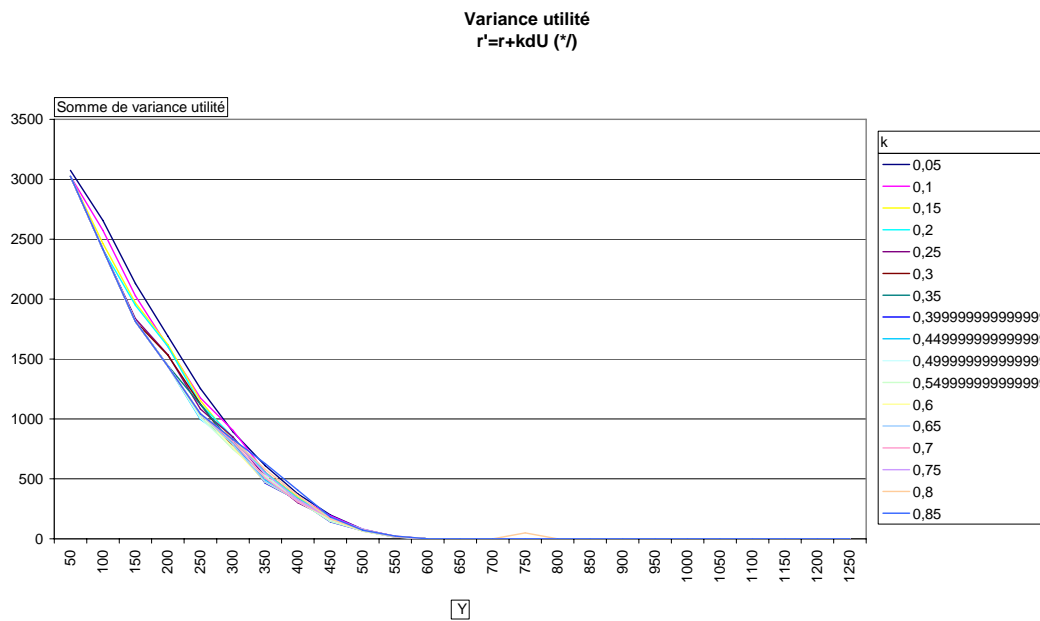
#### 1.2.4 Processus symétriques d'accroissement/diminution de la rente

Dans le modèle précédent les rentes ne peuvent que s'accroître, de sorte que le niveau de rente moyen finalement obtenu dépend du budget logement (égal au tiers du revenu  $Y$ ) qui détermine la limite de surenchère.

Or dans une ville, les logements peuvent aussi perdre en valeur et voir leur loyer baisser si la demande est faible.

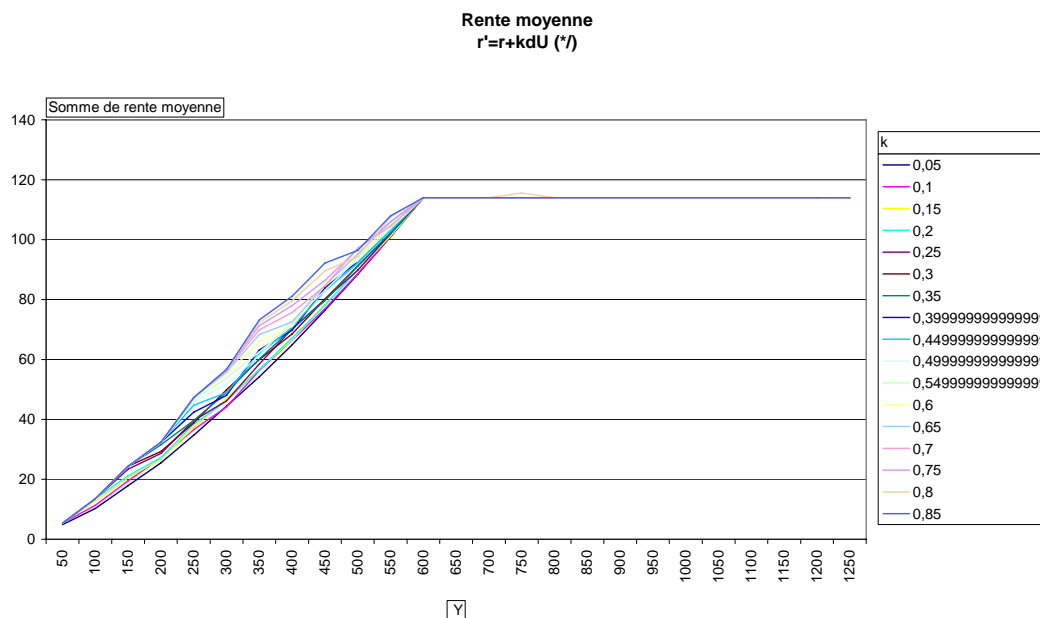
Pour plus de réalisme et de robustesse nous choisissons d'ajouter un processus de régulation au modèle : les rentes de la localité quittée par l'individu qui choisit de déménager, diminuent de façon symétrique à l'accroissement de la rente de la localité qu'il choisit comme destination.

Nous avons représenté ci-dessous la variance de l'utilité dans la population, qui reste aussi bonne que précédemment, en ne dépendant que du niveau de revenu (et non de la valeur du paramètre  $k$ ).



**Figure 7. Variance de l'utilité dans la population à l'état de convergence, en fonction du revenu  $Y$ , pour différentes valeurs du paramètre  $k$  (variant entre 0,05 et 0,85)**

Regardons à présent comment varie la rente moyenne en fonction du revenu pour différentes valeurs du paramètre de surenchère  $k$ .



**Figure 8. Rente moyenne à l'état de convergence, en fonction du revenu  $Y$ , pour différentes valeurs du paramètre  $k$  (variant entre 0,05 et 0,85)**

La rente moyenne croît linéairement avec le revenu (et donc le budget logement) jusqu'à un revenu de 650. Le graphe précédent nous indique que pour les valeurs de revenu inférieures, l'état atteint ne correspond pas à un équilibre, et qu'une partie de la population a une utilité moindre (faute de moyens suffisants pour surenchérir).

Toutefois pour un revenu supérieur à 650, alors que l'utilité devient homogène dans la population (qui a donc atteint un état d'équilibre), la rente moyenne finale cesse de dépendre du revenu  $Y$ .

### 1.2.5 Introduction aux études

---

A présent que nous avons un modèle de formation de la rente, nous allons en proposer plusieurs extensions dans des directions indépendantes, en cherchant à y introduire un peu plus de réalisme. Nous cherchons à évaluer comment ces nouvelles hypothèses influent sur l'atteinte de l'équilibre.

Pour la première étude nous allons remplacer le coût 'social' d'aller visiter les autres individus par le coût de transport vers un lieu de travail.

Pour la deuxième étude nous allons introduire un centre dans la ville, qui diffère par le nombre de logements disponibles et/ou la surface de chaque logement. En effet l'hétérogénéité de la taille des logements est une réalité dans de nombreuses villes.

Troisièmement nous allons étudier comment une différence de revenu puis, quatrièmement une différence des coûts de transport unitaires, influent sur la ségrégation spatiale de deux populations.

### 1.2.6 Coût de transport vers un lieu de travail central

---

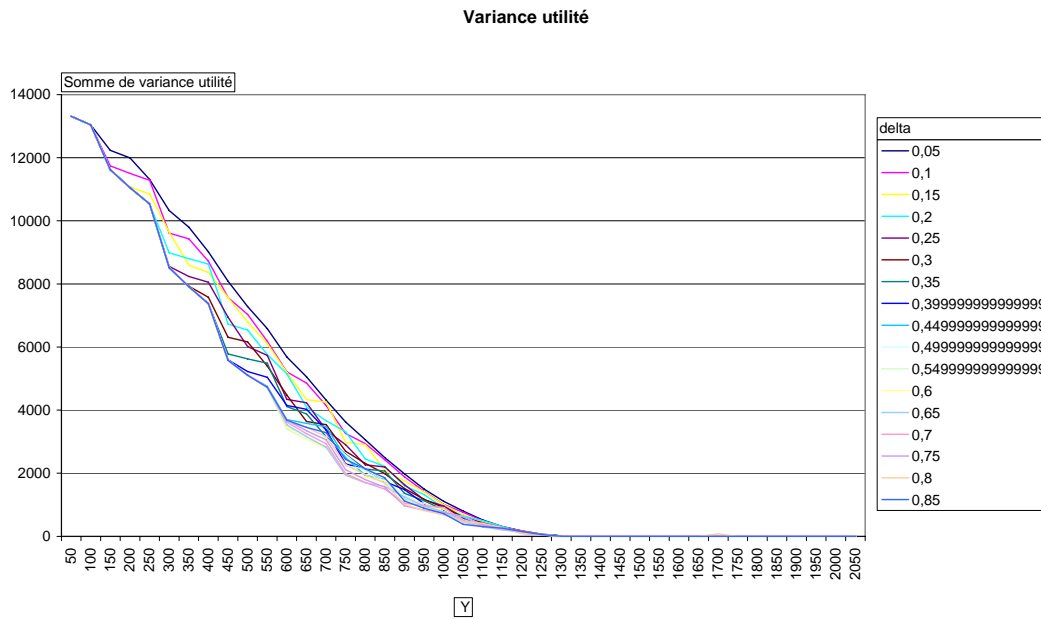
#### 1.2.6.1 Particularités du modèle étudié

Dans le modèle 5, le coût de transport n'est plus calculé comme la distance aux autres mais à un lieu de travail central. Il décroît donc linéairement en partant du centre, repéré par la localité  $x_c$ .

$$T(x) = |x - x_c| t$$

#### 1.2.6.2 Résultats : valeurs de paramètres conduisant à un équilibre

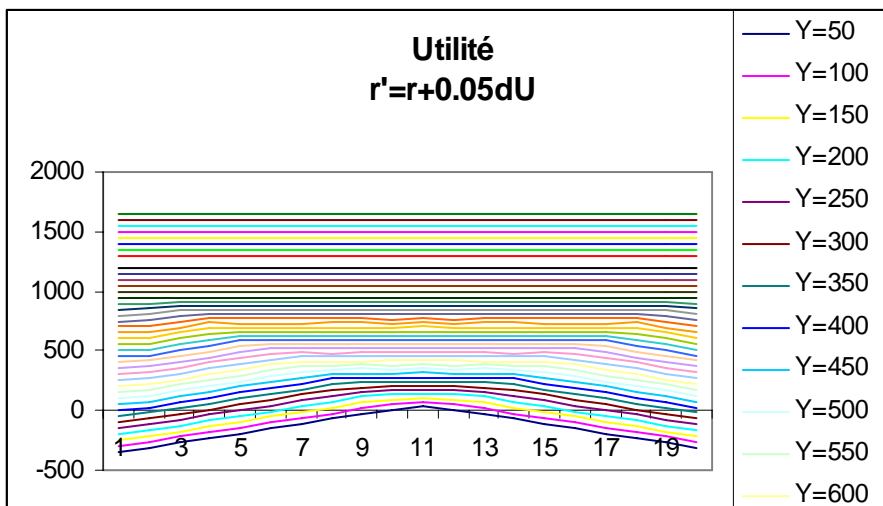
Commençons par observer la variabilité des utilités.



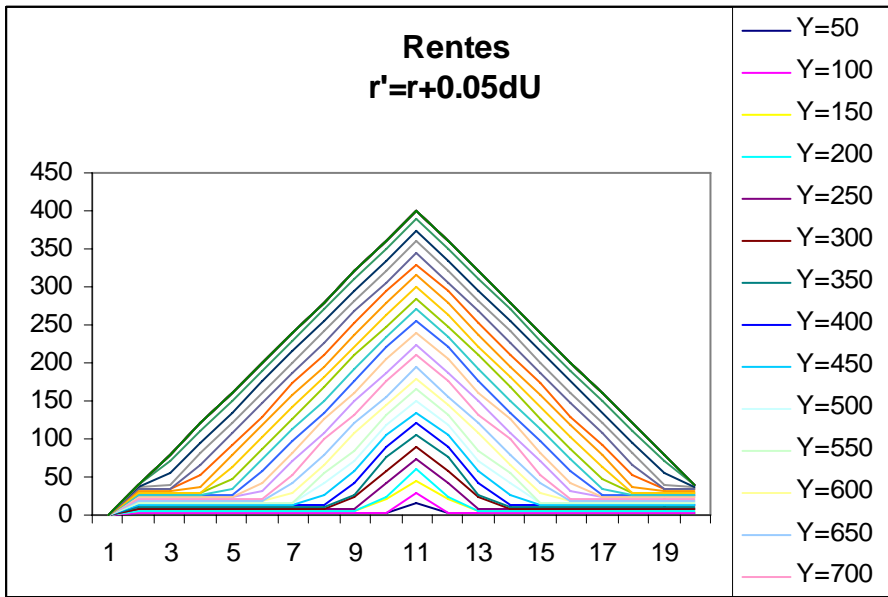
**Figure 9. Modèle 5. Variabilité de l'utilité dans la population à l'état de convergence, en fonction du revenu  $Y$ , pour différentes valeurs du paramètre  $k$  (variant entre 0,05 et 0,85)**

Elle nous indique que pour un revenu suffisamment élevé ( $>1300$ ) on retrouve ici encore une variabilité homogène correspondant à un état d'équilibre, au sens où nous l'avons défini plus haut. (Comme nous n'avons pas normalisé le coût de transport dans ces premières versions, les valeurs minimales de revenu permettant d'atteindre un optimum social ne sont pas les mêmes pour les différentes définitions du coût de transport.)

Ci-dessous figurent des exemple de courbes d'utilité et de rente pour  $k=0,05$  et différentes valeurs de  $Y$ , qui permettent de suivre la diminution de la variabilité de l'utilité, et en parallèle la convergence de la courbe des rentes vers le triangle attendu.

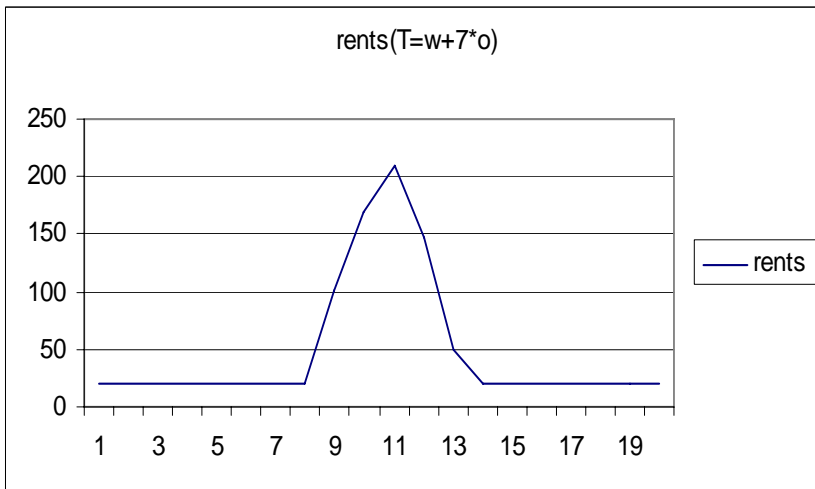


**Figure 10. Modèle 5. Utilités associées à chaque localité pour différentes valeurs de  $Y$  ( $k=0,05$ )**



**Figure 11. Modèle 5. Rentes pour différentes valeurs de Y ( $k=0,05$ )**

Nous avons également testé l'effet de l'association de coûts de transport vers un lieu de travail et vers les autres individus.



**Figure 12. Un exemple de courbe des rentes lorsque les coûts de transports intègrent la distance au travail et aux individus.**

Lorsqu'on associe coût de transport vers un lieu de travail et vers les autres individus, on obtient une forme de rente entre le triangle et la parabole.

### 1.2.7 Simulation d'un centre (à surface et/ou capacités différentes)

#### 1.2.7.1 Particularités du modèle étudié

Le quart central des localités définit un centre, où le nombre de logements est plus grand ou égal, et la surface d'un logement est plus petite ou égale, qu'en périphérie.

L'augmentation du nombre de logements (ou capacité) au centre peut s'apparenter à la construction de nouveaux logements (immeubles).

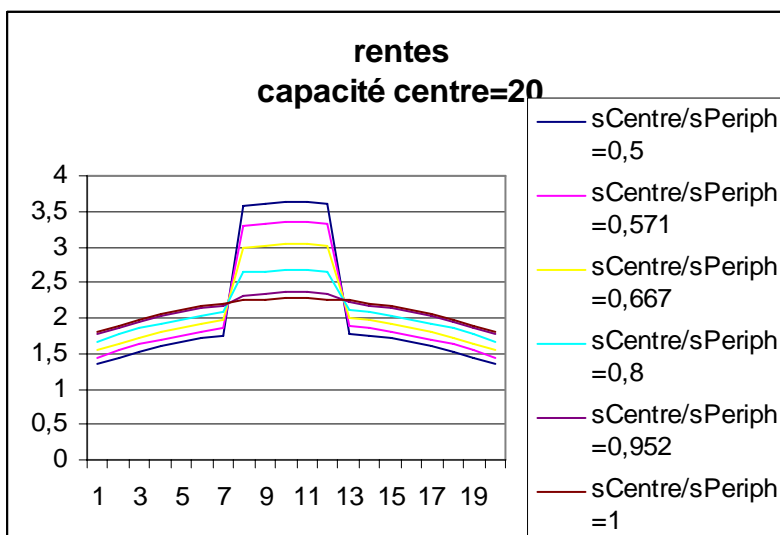
La diminution au centre de la ville, de la surface par logement, peut s'expliquer par la concurrence des firmes occupant une partie de la surface disponible (nous étudierons dans une partie ultérieure, une ville où cohabitent firmes et travailleurs).

Le changement des rentes d'arrivée et de départ ne se fait qu'à la condition que la capacité de la localité d'arrivée soit déjà saturée.

Nous avons fait une étude en cherchant à observer comment chacun de ces paramètres (surface et nombre de logements au centre) influait sur les résultats. La capacité en périphérie est de 20 logements par localité.

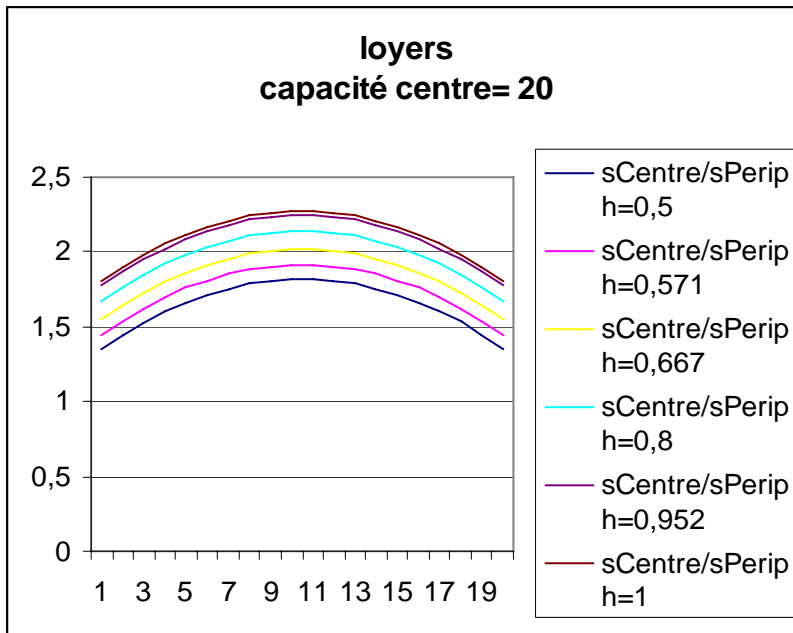
*1.2.7.2 Plus la surface au centre est réduite, plus la rente par unité de surface au centre devient grande*

Les simulations montrent que plus la surface d'un logement au centre est réduite et plus la rente par unité de surface au centre croît – relativement à la périphérie. En effet puisque le loyer maximal que les individus sont prêts à payer ne varie pas, la rente acceptable par unité de surface croît lorsque la surface par logement diminue.



**Figure 13. Courbe des rentes en fonction de la position dans la ville, pour différentes surfaces au centre. Lorsque la surface au centre diminue, les rentes croissent (capacité au centre égale celle en périphérie (20)).**

Toutefois cette différence centrale est uniquement liée à la différence de surface. Si l'on calcule les loyers ( $=s(x)R(x)$ ), la courbe devient plus régulière.



**Figure 14. Courbe des loyers en fonction de la position dans la ville, pour différentes surfaces au centre.**

Nous pouvons observer que le loyer moyen croît avec la diminution de la surface et l'augmentation de la rente au centre.

La différence d'une courbe à l'autre est due à la conservation d'une rente moyenne constante, sous la contrainte d'une surface plus petite au centre. En effet comme nous avons pu le voir les surenchères sur la rente par unité de surface sont d'autant plus importantes que la surface par logement est petite.

En effet le loyer moyen sur les localités (et non la population) peut s'écrire

$$l_k = \frac{1}{L} \sum s_k(x) R_k(x) = \frac{1}{L} \left\{ \sum_{\text{périphérie}} s_k(x) R_k(x) + \sum_{\text{centre}} s_k(x) R_k(x) \right\}$$

$$l_k = \frac{1}{L} \left\{ \sum_{\text{périphérie}} s_1(x) R_k(x) + \sum_{\text{centre}} s_1(x) R_k(x) - \sum_{\text{centre}} s_1(x) R_k(x) \sum_{\text{centre}} s_k(x) R_k(x) \right\}$$

$$l_k = \frac{1}{L} \left\{ \sum s_1(x) R_k(x) + \sum_{\text{centre}} (s_k(x) - s_1(x)) R_k(x) \right\}$$

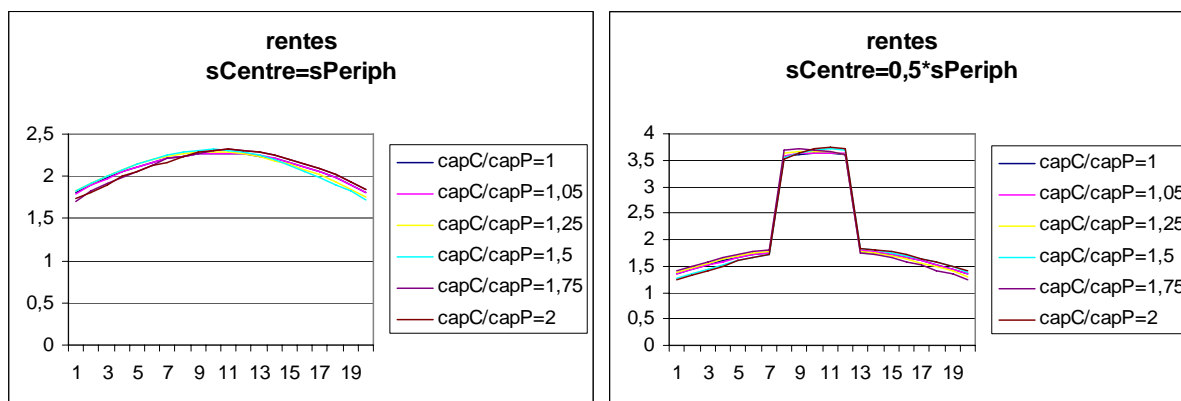
$$l_k - l_0 = \frac{1}{L} (s_k(\text{centre}) - s_1(\text{centre})) \sum_{\text{centre}} R_k(x)$$

A noter : plus la capacité au centre est grande, plus la convergence apparaît difficile.

### 1.2.7.3 La capacité au centre ne joue pas sur les rentes finales.

En effet nous avons tracé ci-dessous les rentes suivant différentes capacités (nombres de logements) au centre, pour deux exemple de surface au centre.





**Figure 15(a) et (b).** Pour deux surfaces différentes au centre (a et b), la courbe des rentes en fonction de la position dans la ville ne varie pas suivant les capacités au centre.

Bien que les rentes soient différentes pour les deux exemples de surface au centre, elles ne varient pas suivant les capacités.

#### 1.2.7.4 Conclusion de cette étude

Les résultats sont relativement intuitifs et prouvent la fiabilité de l'algorithme proposé.

La rente ne croît pas avec la capacité (nombre de logements par localité). Elle ne dépend pas du nombre de surenchères mais seulement des paramètres définissant l'équilibre (le niveau de revenu et le coût de transport unitaire).

A l'opposé, la rente croît avec la diminution de la surface au centre. (En effet nous faisons l'hypothèse (réaliste) que les individus consacrent un budget logement qui varie peu pour un niveau de revenu donné.) Ceci correspond à un phénomène observé dans les grandes villes européennes. De plus le loyer moyen croît avec la rente maximale au centre, indice ici pour nous de plus forte demande, ce qui semble également réaliste lorsqu'on compare le marché de l'immobilier pour différentes villes avec différents niveaux d'activité et donc d'attractivité pour le travailleur.

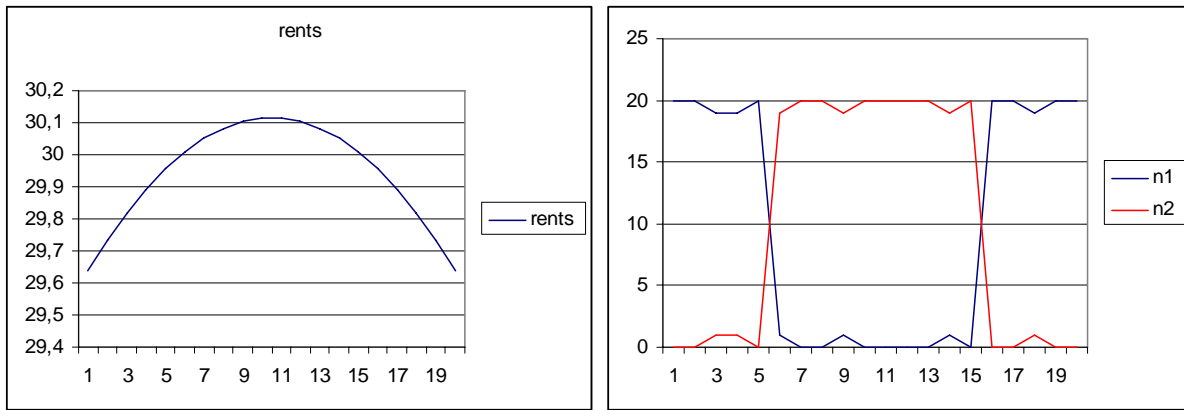
### 1.2.8 Influence de la différence de revenu

#### 1.2.8.1 Particularités du modèle étudié

Nous continuons à étendre le modèle de la rente en considérant deux populations de même taille qui divergent par leur revenu.

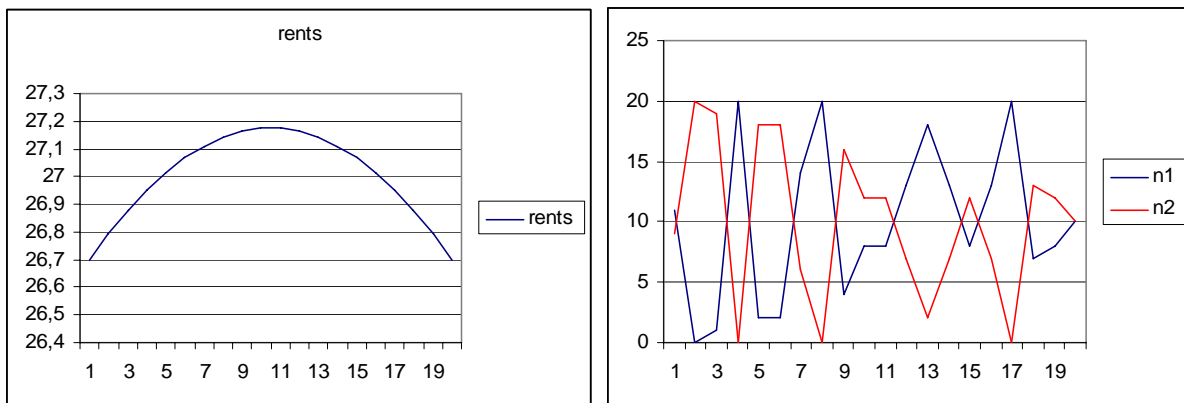
#### 1.2.8.2 La différence de revenu ne conduit pas toujours à une différenciation spatiale

Voici un premier exemple où le jeu de surenchère conduit la rente au centre à dépasser le budget logement des plus pauvres (ici 30). La valeur initiale la rente est légèrement inférieure à ce budget logement et vaut 29,94. Nous avons représenté dans la ville la courbe de la rente, ainsi que le nombre d'individus de chaque population dans les différentes localités.



**Figure 16. Rentes et densités dans le cas où une différence de revenu conduit à la différenciation spatiale de deux populations.**

Toutefois si les rentes demeurent en dessous du budget maximal des plus pauvres, aucune différenciation ne se produit, puisque toutes les localités leur restent accessibles.



**Figure 17. Rentes et densités dans le cas où une différence de revenu ne conduit pas à la différenciation spatiale de deux populations (rentes très basses).**

### 1.2.8.3 Conclusion de cette étude

Par ce processus la différence de revenus ne conduit à une différenciation spatiale que dans un petit nombre de cas de figure. Le budget maximal agit comme un couperet qui interdit à un individu certaines localités suivant son niveau de revenu. Si les rentes sont trop basses ou trop hautes, elles échappent à ce seuil, qui n'a plus d'effet sur la dynamique.

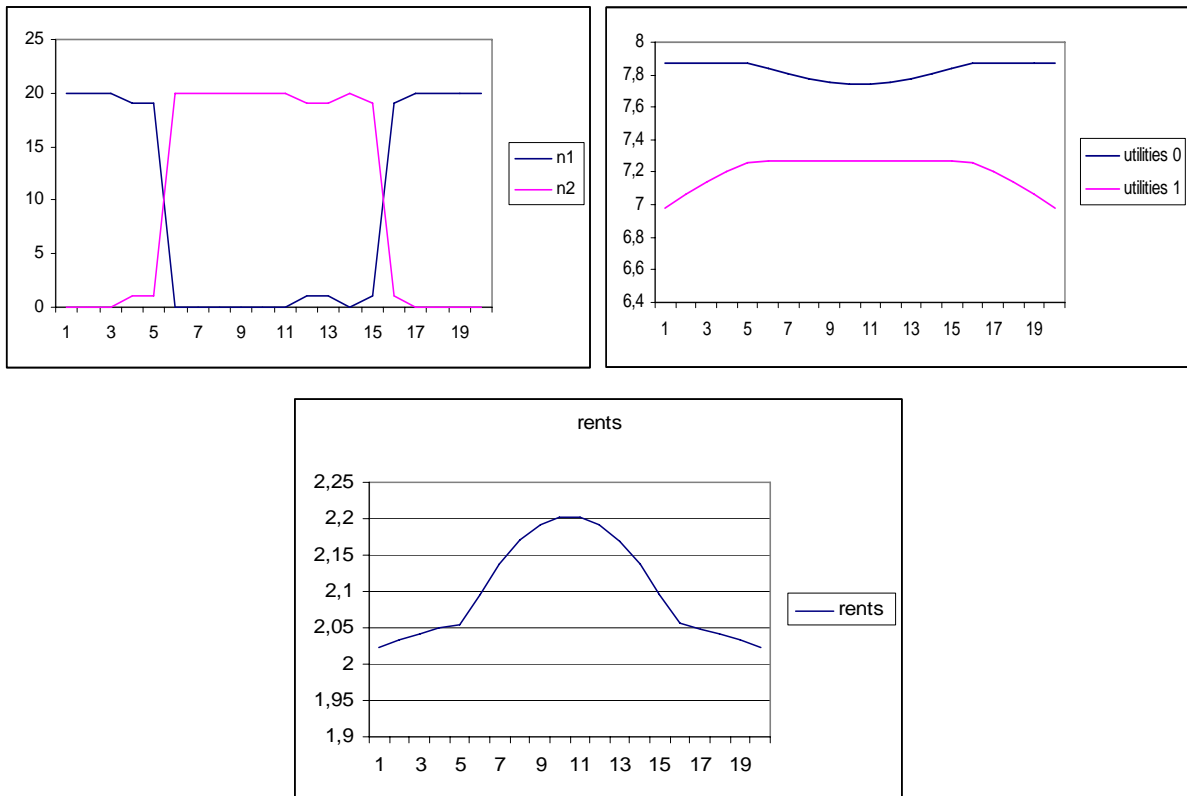
## 1.2.9 Influence de la différence de coût de transport

### 1.2.9.1 Particularité de l'étude

Nous considérons ici deux populations de même taille mais différant par leur coût de transport unitaire. Après avoir observé leur ségrégation spatiale, nous testons l'influence de différents types de liens d'interaction entre les individus sur la configuration finale.

### 1.2.9.2 La différence de coût de transport conduit à une ségrégation spatiale

Une différence de coût de transport entre deux populations, conduit à une ségrégation spatiale dans la majorité des cas testés. A titre d'exemple voici les densités finales dans la ville, les utilités associées aux localités pour les deux populations, et la courbe de la rente dans la ville pour un cas où le coût unitaire de transport de la deuxième population est dix fois plus important que celui de la première (des résultats similaires peuvent être obtenus pour des différences de coûts de transport unitaires moins marqués).



**Figure 18 (a, b et c). Ségrégation spatiale de deux populations dont le coût unitaire de transport de l'une est dix fois plus grande de l'autre. Ici figurent la densité (a), les utilités des deux populations pour chaque localité (b) et la courbe des rentes (c).**

Les courbes des utilités nous prouvent l'atteinte d'un état d'équilibre : elles sont constantes dans les zones occupées par chacune des populations, et décroissent en dehors. La population dont les coûts de transports sont les plus élevés occupe le centre. Enfin la rente semble changer de courbure d'une population à l'autre.

En effet une différence de coût de transport unitaire n'agit pas simplement comme un seuil (ainsi que le niveau de revenu précédemment), mais signifie une mesure différente de l'espace : une même distance est perçue différemment, et lorsque le coût unitaire de transport est plus grand, la rente s'accroît plus vite. Le lien entre les coûts de transports associés à une distance à parcourir et la surface permettant de le compenser dans l'utilité n'est pas la même. C'est cette différence fondamentale qui conduit à la ségrégation observée.

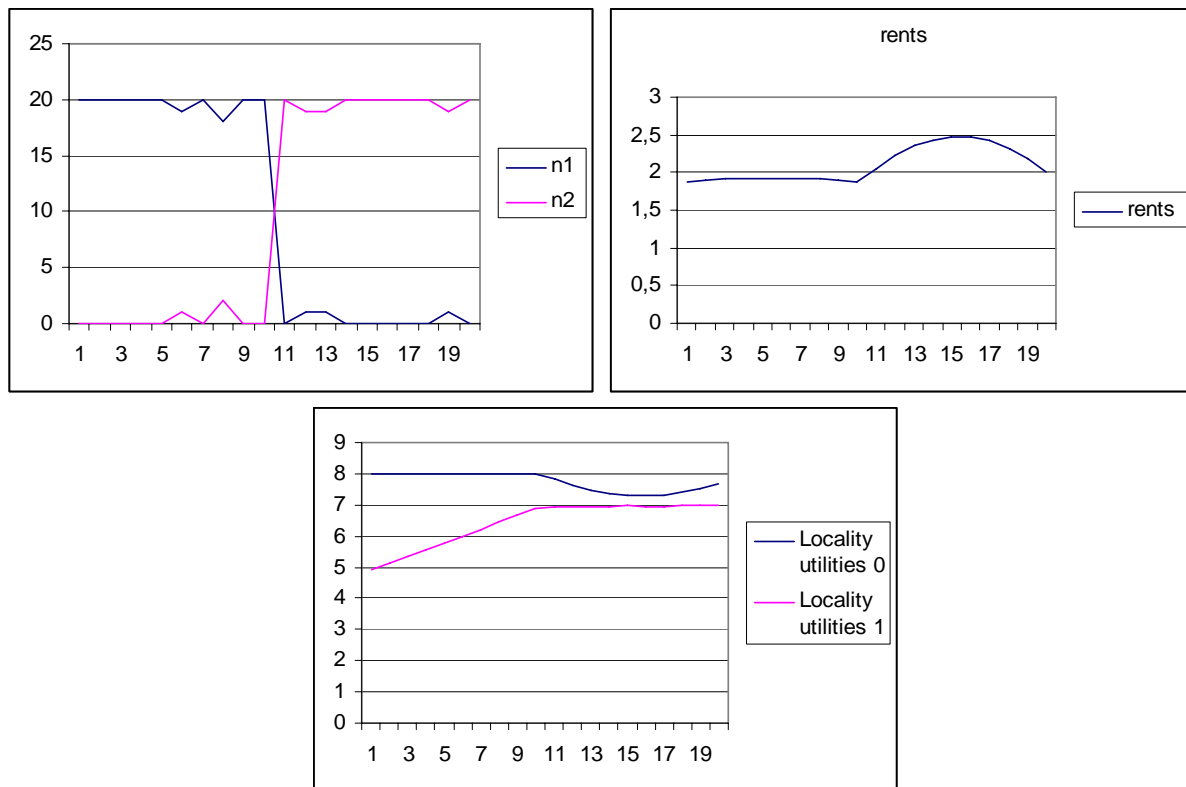
### 1.2.9.3 Influence des liens entre individus sur la configuration finale

Rappelons que le coût de transport dépend de la distance aux autres individus. Jusqu'ici chaque individu était lié à l'ensemble des autres individus.

Nous testons à présent deux autres structures d'interaction : pour commencer des populations uniquement intra-connectées (sans lien l'une avec l'autre) et uniquement inter- sans être intra-connectées (un individu est lié uniquement aux individus de l'autre population).

#### a) Populations intra-connectées

Nous avons représenté ci-dessous la ségrégation observée pour deux populations n'interagissant pas. Les coûts unitaires de transport de la deuxième sont ici aussi 10 plus importants que ceux de la première. Toutefois ici les individus de chaque population n'interagissent qu'avec ceux partageant leur coût de transport unitaire.



**Figure 19 (a, b et c). Ségrégation spatiale de deux populations sans lien de dépendance entre elles, dont le coût unitaire de transport de l'une est dix fois plus grande de l'autre. Ici figurent la densité (a), les utilités des deux populations pour chaque localité (c) et la courbe des rentes (b).**

La ségrégation persiste, mais puisque les populations ne dépendent plus l'une de l'autre, elles forment deux villes distinctes l'une à côté de l'autre. Le fait que l'utilité soit homogène pour chacune des populations dans la zone qu'elle occupe, en atteste la convergence.

La différence des coûts de transport unitaires conduit à des courbes de rentes et à des maxima très différents (rente supérieure pour la deuxième population dont les coûts de transport sont plus élevés).

Ceci se traduit aussi sur les courbes d'utilité pour les parties non occupées. La deuxième population dont les coûts de transport sont plus élevés est située dans la partie droite de la ville, où son utilité est maximale et homogène. Son utilité hors de cette zone est dominée par les coûts de transports, donc la distance. Elle diminue de façon apparemment linéaire lorsqu'on s'éloigne (vers la gauche). Au contraire l'utilité de la première population, dont les coûts de transports sont plus petits dépend surtout de la variation importante de la rente

imposée par la deuxième population. Cette variation est plus importante que la sienne en raison de coûts de transports plus élevés. Son utilité ressemble donc plus à une parabole.

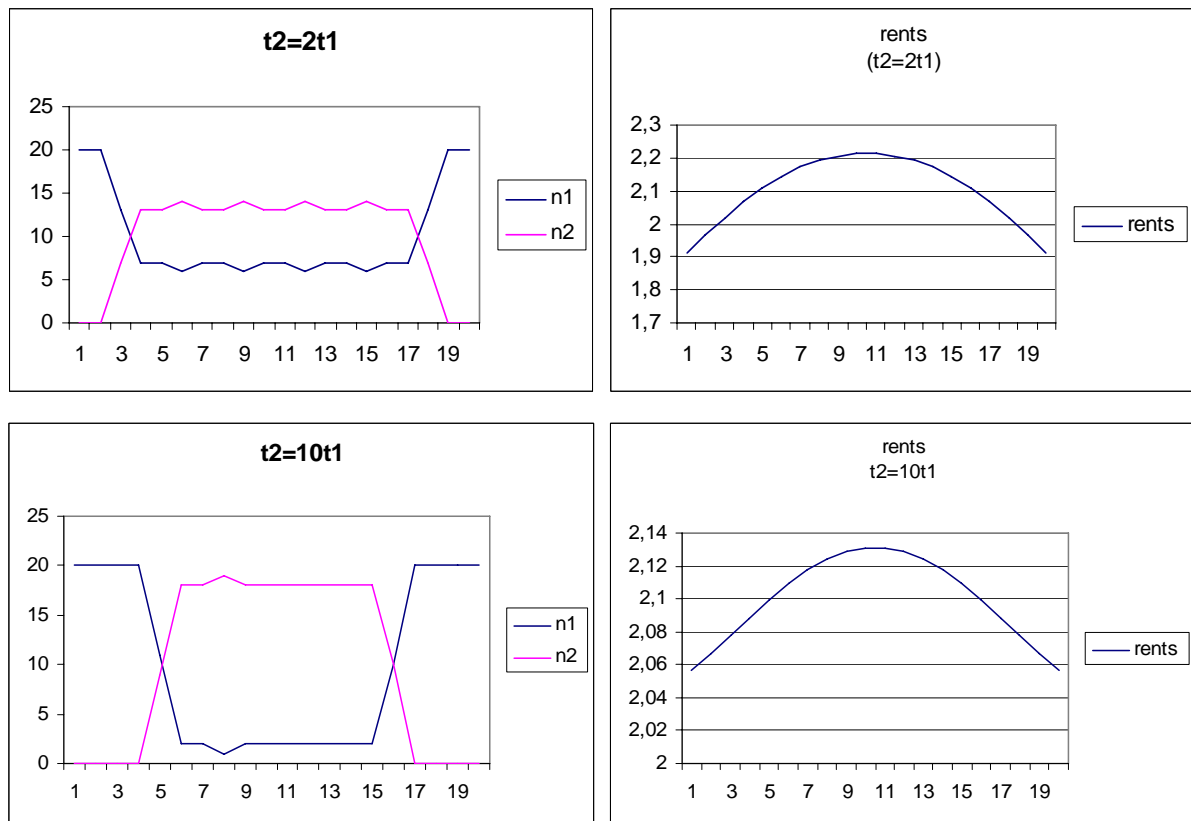
#### b) Populations inter- sans être intra-connectées

Nous testons ce qui se produit lorsque les individus de chaque population cherchent à minimiser leur distance à l'ensemble des individus de l'autre population. Ceci pourrait être par exemple le cas de firmes cherchant à se rapprocher du marché des travailleurs, et de travailleurs cherchant à se rapprocher des firmes.

Dans un premier temps nous avons testé des liens vers l'ensemble de l'autre population, puis à seulement une partie (ce qui se rapproche plus d'une configuration réaliste).

#### Liens à l'ensemble de l'autre population

Les configurations observées dépendent du facteur de proportionnalité entre les deux coûts de transport unitaires. Nous avons représenté ci-dessous les densités et les rentes pour des facteurs 2 et 10.



**Figure 20. (a,b,c et d). Populations inter- mais non intra-connectées. Densités (a et c) et rentes (b et d) observées pour des coûts de transports unitaires différent d'un facteur 2 (a et b) et 10 (c et d).**

Plus la différence de coût de transport unitaire est importante, plus la population dont le coût est le plus important se concentre au centre et plus la ségrégation est marquée.

En effet, initialement les deux populations sont également représentées dans chaque localité, et donc les individus de chaque sous-population ont intérêt à se situer au centre pour être au

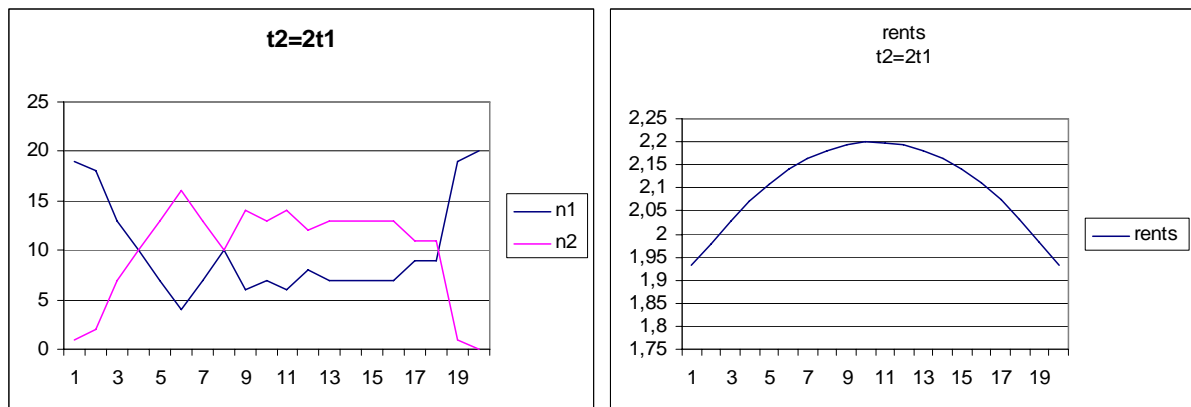
plus près de l'ensemble des individus de l'autre sous-population. Ceci reste vrai tant que l'autre sous-population se distribue de façon symétrique.

De plus la population dont le coût de transport est le plus élevé a une incitation plus forte à gagner le centre, et fait croître plus fortement la rente.

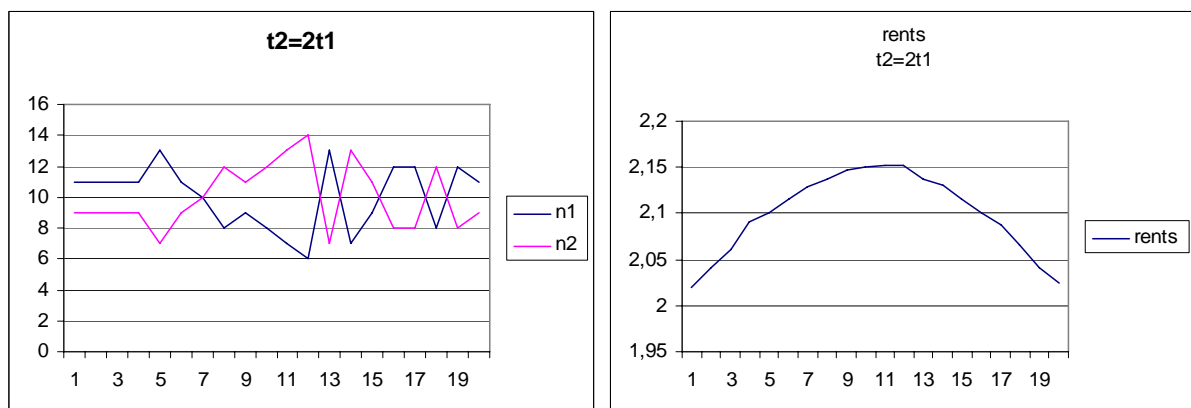
Liens à une partie de l'autre population

Voyons à présent ce qui se passe lorsque de façon plus réaliste les liens ne sont plus vers l'ensemble, mais seulement une partie de l'autre population.

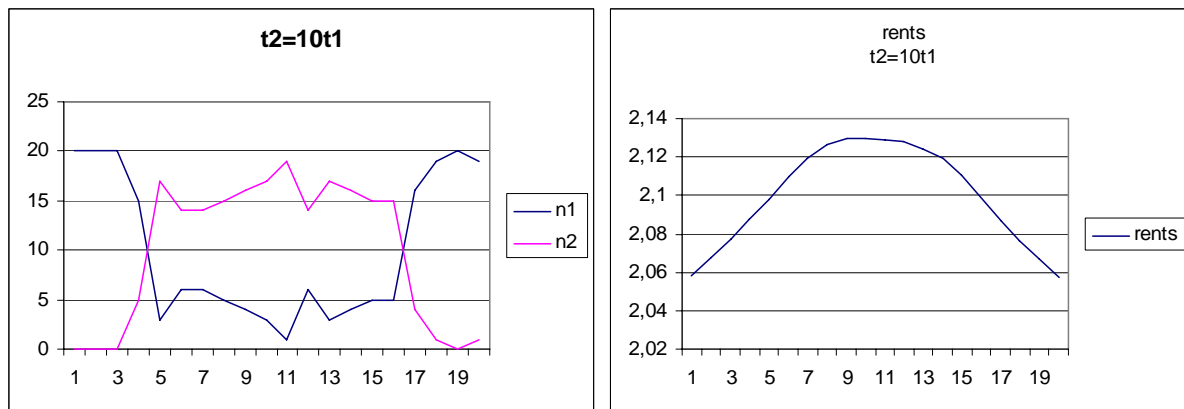
Nous avons représenté les densités et les rentes pour des facteurs 2, puis 10 et pour chaque facteur, nous avons testé des liens vers 50% et 2% de l'autre population.



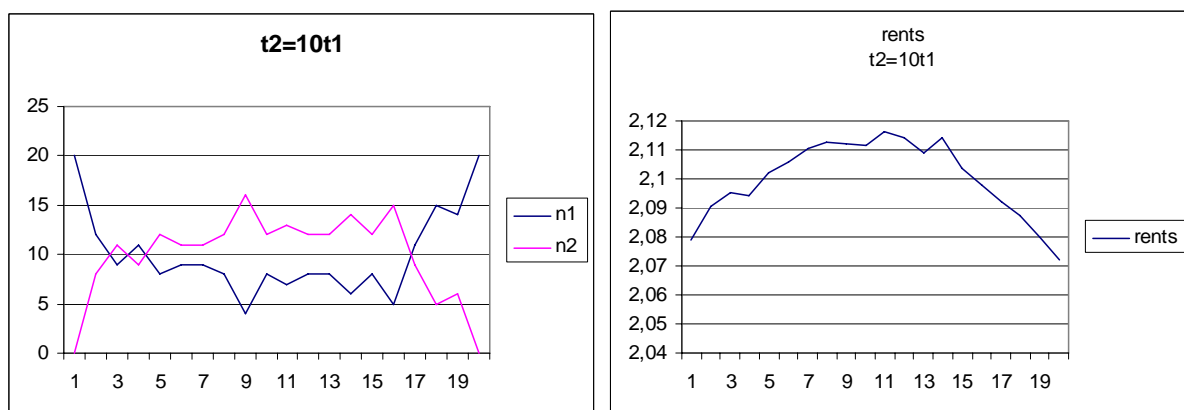
**Figure 21. (a et b). Populations inter- sans être intra-connectées à 50%. Densités (a) et rentes (b) dans la ville observées pour des coûts de transports unitaires différent d'un facteur 2.**



**Figure 22. (a et b). Populations inter- sans être intra-connectées à 2%. Densités (a) et rentes (b) dans la ville observées pour des coûts de transports unitaires différent d'un facteur 2.**



**Figure 23. (a et b). Populations inter- sans être intra-connectées à 50%. Densités (a) et rentes (b) dans la ville observées pour des coûts de transports unitaires différent d'un facteur 10.**



**Figure 24. (a et b). Populations inter- mais non intra-connectées à 2%. Densités (a) et rentes (b) dans la ville observées pour des coûts de transports unitaires différent d'un facteur 10.**

Plus le nombre de liens est petit, moins la ségrégation est marquée, et moins la courbe de la rente présente un maximum net au centre.

En effet d'une part la pression à se localiser en fonction de la position des autres individus est moins forte. Ainsi la distribution finale dépend en partie de l'aléatoire de la distribution initiale.

D'autre part rendre les liens d'interactions (et donc les contraintes) hétérogènes conduit à passer d'un optimum unique (et donc d'une rente maximale unique) à plusieurs optima localisés suivant les contraintes de chaque individu (et à une courbe de rente moins lisse, dont le maximum n'est apparemment plus unique).

Nous pouvons rapprocher ces résultats de ce qu'on observe en périphérie de certaines villes (centres secondaires).

#### 1.2.9.4 Conclusion de ces études

Premièrement nous avons pu observer comment au sein de deux populations fortement liées l'une à l'autre, un coût de transport plus élevé pouvait conduire les individus concernés à se

concentrer au centre en se séparant spatialement de l'autre population. Dans ce cas les densités ne dépendent que de la différence de coût de transport.

Deuxièmement lorsque les deux populations sont liées chacune plus à l'autre qu'à elle-même (comme peuvent l'être dans certains cas firmes et travailleurs) nous avons pu observer une ségrégation moins marquée, et dépendant du facteur entre les deux coûts de transport unitaires. Dans ce cas la ségrégation diminue aussi avec le nombre de liens. On observe alors des configurations proches de centres secondaires autour des villes.

Ces modèles bien que simples permettent de montrer le rôle majeur que joue la différence de coûts de transport sur la ségrégation spatiale à l'intérieur de la ville. De plus ces études montrent l'influence des liens entre individus (outre la différence des coûts de transport) sur les formes de ségrégation observées.

### 1.3 Formation de la densité et de la rente avec surfaces et densités variables

---

Dans la partie précédente nous avons étudié la formation de rente sous la seule contrainte de coûts de transport, les surfaces des logements et le nombre de logements par localité étant supposés constants et homogènes.

Dans la partie qui suit, pour un peu plus de réalisme, nous introduisons des surfaces (et des densités) variables, et ajoutons un terme de préférence pour la surface dans l'utilité. Ainsi l'équilibre résulte d'un compromis des individus entre leurs coûts de transports et la surface de chaque logement.

#### 1.3.1 Principe du modèle

---

##### 1.3.1.1 *Modèle théorique*

Ce modèle est présenté dans Fujita et Thisse (2003).

Un individu dispose ici aussi d'un revenu, qu'il partage entre les coûts de logement, de transports, et les dépenses diverses. Ainsi pour un individu on a :

$$Y = s(x)R(x) + T(x) + z$$

Où  $Y$  est le revenu

$T(x)$  représente le coût de transport

$s(x)$  est la surface louée

$R(x)$  est la rente

$z$  est la portion du revenu qui n'est pas dédiée au logement.

On définit l'utilité d'un individu situé en  $x$ , où il dispose d'une surface  $s$ , sous la forme

$$U(s,x) = I + \alpha \log s - T(x).$$

Avec  $I$  : zone d'interaction avec d'autres individus (supposée ici constante : tout le monde est en contact avec tout le monde, suivant une simplification de Beckman (1976) permettant de calculer analytiquement une solution au modèle général)



Le coût de transport est calculé de la façon suivante

$$T(x) = \int_I t|x-y|n(y)dy$$

Où  $t$  est le coût de transport unitaire (par kilomètre parcouru)

$y$  parcourt l'ensemble des localités de la ville

$n(y)$  est la densité de population en  $y$ .

$\alpha$  est un paramètre du modèle définissant la préférence pour la surface de logement dans le calcul de l'utilité.

Le coût total est défini par le coût résidentiel, auquel on ajoute un coût d'opportunité. En effet on suppose que le sol qui n'est pas utilisé pour l'habitat, en dehors de la ville, l'est pour l'agriculture avec une rente constante  $R_A$ . La ville s'étend entre  $-b$  et  $b$ .

Le coût résidentiel est sommé sur l'ensemble des localités habitées, c'est-à-dire entre  $-b$  et  $b$ , et pondéré à chaque localité par la densité d'occupation. Il s'écrit :

$$\begin{aligned} C_r &= \int_{-b}^b \{Y - (T(x) + z(s(x), x))\}n(x)dx = \int_{-b}^b Yn(x)dx - \int_{-b}^b \{T(x) + z(s(x), x)\}n(x)dx \\ &= Y \int_{-b}^b n(x)dx - \int_{-b}^b \{T(x) + z(s(x), x)\}n(x)dx = YN - \int_{-b}^b \{T(x) + z(s(x), x)\}n(x)dx \end{aligned}$$

Où  $z(s(x), x) = Y - T(x) - s(x)R(x)$

Le premier terme est constant. De plus le deuxième terme est l'intégrale d'une fonction strictement positive. Chercher à minimiser le coût résidentiel global  $C_r$  est donc équivalent à minimiser le coût résidentiel  $C_r'$  suivant :

$$C_r' = \int_{-b}^b \{T(x) + Z(s(x), x)\}n(x)dx$$

A cela il faut ajouter le coût d'opportunité sommé sur l'ensemble des localités :

$$C_o = \int_{-b}^b \{R_A s(x)\}n(x)dx$$

Finalement on définit le coût à minimiser comme la somme de ces deux coûts,  $C_r'$  et  $C_o$  :

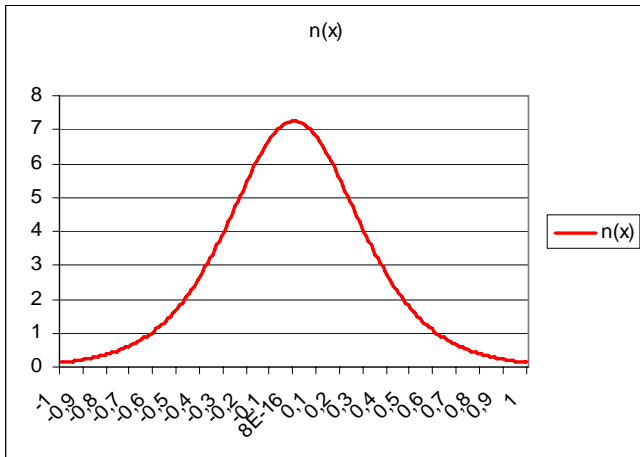
$$C \equiv \int_{-b}^b \{T(x) + Z(s(x), x) + R_A s(x)\}n(x)dx$$

La densité optimale est calculée comme minimisant ce coût global.

$$n^*(x) = \frac{\alpha}{2t} \frac{k^2 \exp(k|x|)}{(1 + \exp(k|x|))^2} \quad \text{où } k^2 = \frac{t}{\alpha^2} \left( \frac{tN^2}{4} + 4R_A \right)$$

Et  $R^*(x) = \alpha n^*(x)$ .

Voici par exemple la distribution optimale pour  $N=10$ ,  $\alpha=1$ ,  $t=1$ ,  $R_A=1$ .



**Figure 25. Distribution optimale suivant le modèle théorique pour  $N=10$ ,  $\alpha=1$ ,  $t=1$ ,  $R_A=1$ .**

### 1.3.1.2 Modèle de simulation

Nous cherchons à construire un modèle où la densité et la rente ne correspondent pas à un optimum analytique statique mais résultent d'un processus itératif de décisions individuelles dont l'équilibre émerge au cours d'une simulation. Dans ce processus, les choix d'individus qui déménagent pour optimiser leur utilité individuelle modifient la demande et donc la rente des localités. Les variations de densité affectent la surface disponible pour chacun, et donc aussi l'utilité associée à une localité.

Nous reprenons la définition de l'utilité du modèle théorique :

$$U(s,x) = I + \alpha \log s - T(x).$$

$$\text{sous la contrainte } Y = T(x) + s(x)R(x) + z$$

A chaque itération on détermine l'individu dont l'utilité est la plus basse. Cet individu prospecte l'ensemble des localités de la ville et choisit pour s'y installer celle qui maximise son utilité. Ce mouvement modifie la surface par individu et la rente des localités de départ et d'arrivée. La simulation se poursuit jusqu'à stabilisation de la densité dans la ville.

La surface allouée à chacun (elle est également répartie entre tous les occupants d'une localité) est définie par

$$s(x) = \frac{1}{n(x)}$$

Concernant le calcul de la nouvelle rente, nous faisons l'hypothèse que la part du revenu dédiée au logement est constante, ainsi la nouvelle rente pour la localité  $x$ ,  $R'(x)$  se calcule comme :

$$R'(x) = \frac{s(x)R(x)}{s'(x)}$$

Pour obtenir des niveaux de rente comparables à ceux du modèle théorique, nous faisons de plus l'hypothèse que

$$s(x)R(x) = \alpha$$

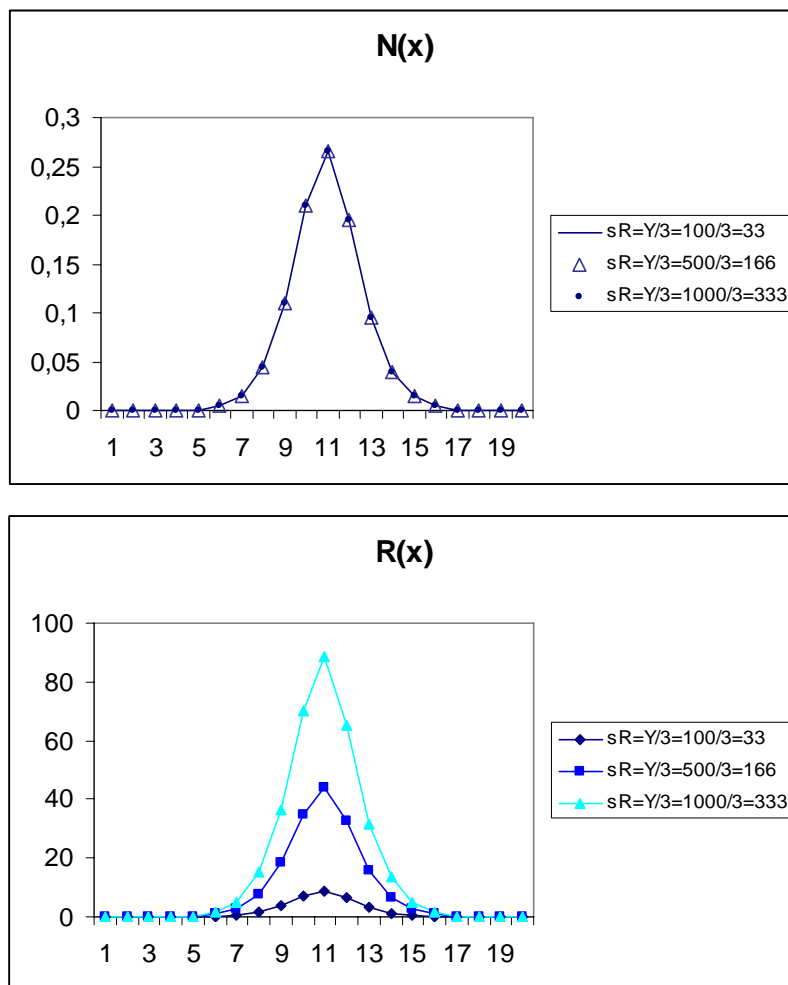
En effet Fujita et Thisse montrent qu'à l'équilibre l'égalité suivante est vérifiée (\* indique qu'il s'agit de la valeur correspondant à l'équilibre) :

$$\alpha = s^*(x)R^*(x).$$

Nous montrons ci-dessous que cette hypothèse affecte uniquement le niveau des rentes, et non la densité obtenue.

En effet si nous découplons le budget consacré au logement,  $s(x)R(x)$ , de la valeur de  $\alpha$ , il est possible d'observer lequel de ces paramètres influence la densité (et/ou les rentes).

Pour cela nous prenons  $\alpha=1$ , et  $s(x)R(x)=Y/3$ . Nous testons  $Y=100$ ,  $Y=500$  et  $Y=1000$ .



**Figure 26 (a) et (b). Densité  $N(x)$  (a) et rentes  $R(x)$ (b), pour trois différentes valeurs de  $Y$  correspondant à trois budgets logement ( $s(x)R(x)=Y/3$ ) différents, toutes choses égales par ailleurs. Le budget logement n'influence pas la densité, uniquement le niveau de rentes.**

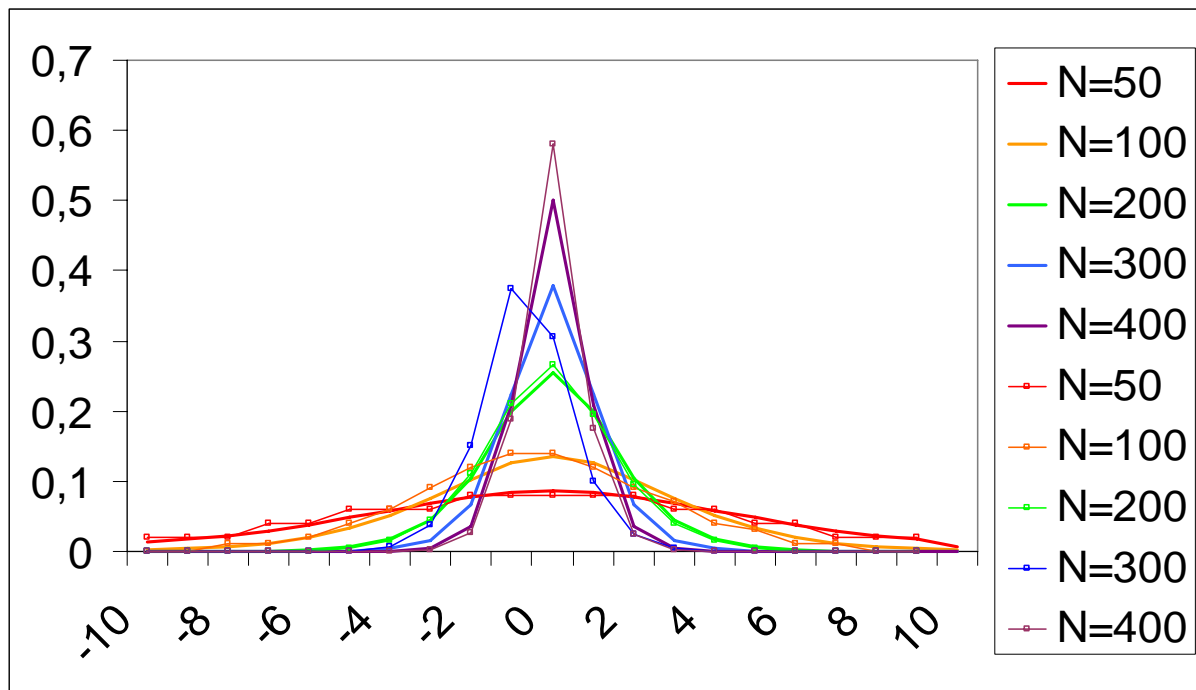
Il apparaît que la valeur du budget logement n'influence pas la densité obtenue, seulement le niveau des rentes. De plus comme la rente est proportionnelle à la densité ces courbes sont équivalentes à un facteur multiplicatif près (puisque les densités associées sont identiques).

$$R(x) = \frac{C}{s(x)} = C \cdot N(x)$$

### 1.3.2 Le modèle individu-centré retrouve la densité optimale théorique

Le modèle individu-centré permet de retrouver la courbe des rentes et de densité correspondant à la densité optimale prévue par la théorie.

Sur le graphe ci-dessous nous avons représenté différentes courbes de densité pour des populations variant d'un total de 50 à 400 individus. Les résultats de simulations figurent avec des carrés (pleins ou vides) reliés par une ligne. La référence du modèle théorique figure avec la même couleur, mais en trait simple. La légende à droite indique l'effectif associé à chaque couleur de courbe.

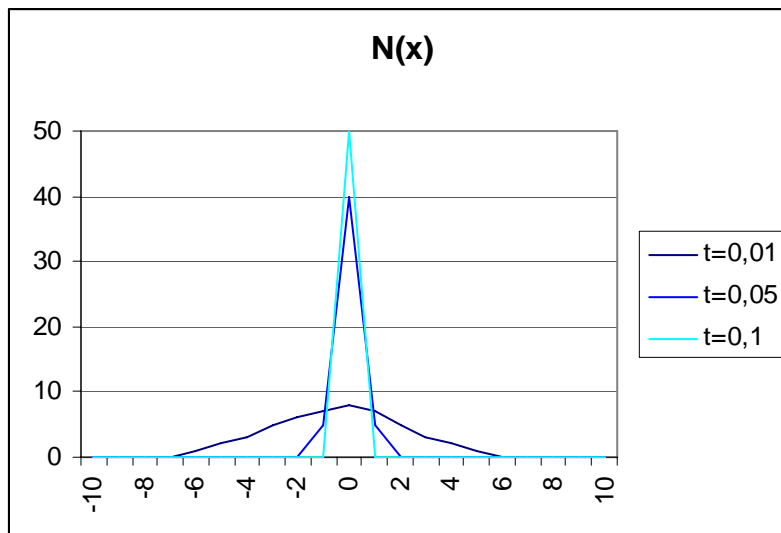


**Figure 27. Courbes de densité pour différentes tailles de population (N). Résultats de simulation (courbes avec des carrés) et densités du modèle analytique correspondant (ligne simple de même couleur).**

Nous pouvons voir que dans la majorité des cas le modèle de simulation retrouve la courbe de densité prévue par la théorie.

Le modèle individu-centré de simulation permet donc de retrouver les résultats du modèle théorique sur un cas simple où celui-ci est soluble et où il est possible de calculer la densité correspondant à un optimum social.

Voici par exemple l'évolution de la densité pour différents coûts de transport unitaires. Plus le coût est important, et plus la population se concentre au centre.



**Figure 28. Densité optimale suivant le modèle de population pour différents coûts de transport unitaires ( $N=50$ ,  $\alpha=1$ ,  $Y=700$ ).**

Nous allons à présent pouvoir utiliser le modèle de simulation pour étudier dans un cas plus compliqué, impliquant deux populations et des coûts de transport variables, où une solution théorique serait plus difficile à calculer.

### 1.3.3 Influence du coût unitaire de transport sur la localisation de deux populations différant par leurs revenus

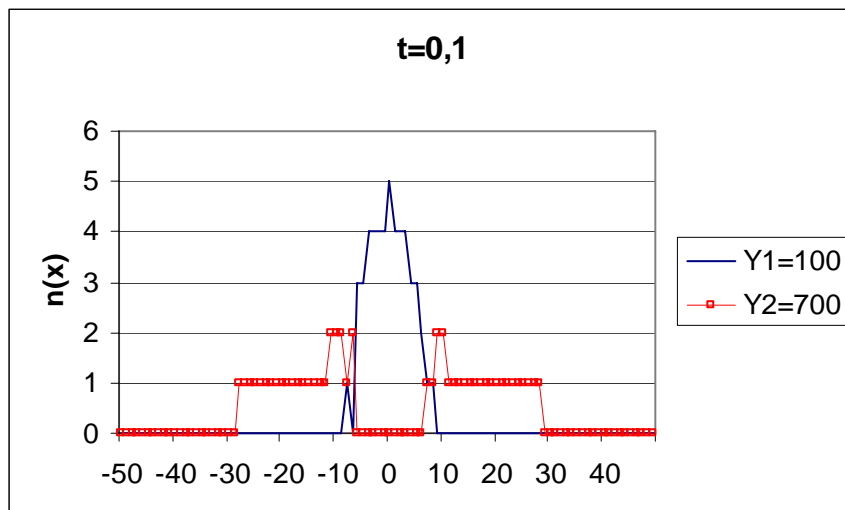
Nous considérons à présent une ville avec 100 habitants qui se divise en deux sous-populations de 50 habitants chacune. Les individus de la première sous-population disposent d'un revenu de  $Y_1=100$ . Ceux de la deuxième, d'un revenu de  $Y_2=700$ .

Chaque individu consacre un tiers de son revenu au logement. De plus nous supposons, pour rester fidèles au modèle théorique de référence ( $\alpha = s(x)R(x)$ ), que la préférence pour l'espace ( $\alpha$ ) s'accroît avec le budget logement, que nous faisons dépendre du revenu ( $s(x)R(x) = \frac{Y}{3}$ ).

(Ainsi on obtient  $\alpha = s(x)R(x) = \frac{Y}{3}$ )

Nous avons testé comment le coût unitaire de transport,  $t$ , influençait la distribution des deux sous-populations dans la ville.

Commençons par un coût unitaire de transport  $t=0,1$ .



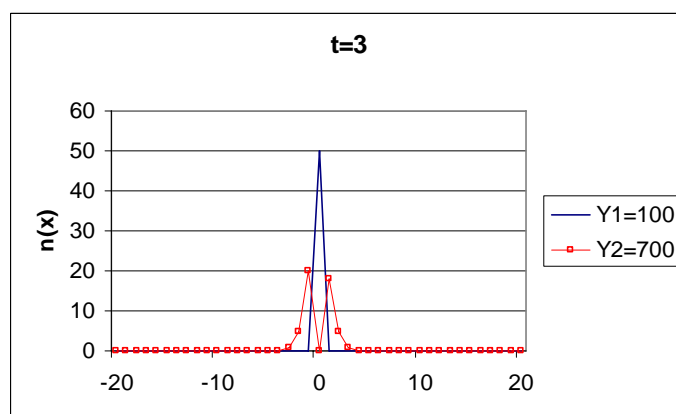
**Figure 29. Densité de deux sous-populations de revenus différents ( $Y_1=100$ ,  $Y_2= 700$ ), pour un coût de transport unitaire  $t=0,1$**

La population à plus haut revenu et plus grande préférence pour l'espace peut payer des coûts de transport plus élevés, et se placer en périphérie où la surface par logement est plus grande. La population à plus faible revenu, au contraire, reste près du centre (où les logements sont plus petits) afin de minimiser ses coûts de transport.

De plus pour cette valeur de  $t$ , nous pouvons voir que les deux populations ne se mêlent pas.

En effet, en raison de leur différence de revenus, et donc de la différence de leurs budgets logement, la rente qu'ils sont prêts à payer pour une surface donnée, diffère ; or à une localité donnée, la surface attribuée à chaque individu est la même, quel que soit son revenu. Dès lors les localités occupées par les plus hauts revenus présentent une rente au m<sup>2</sup> trop élevée pour attirer les moins hauts revenus. Inversement les localités occupées par les plus faibles revenus associent une surface trop faible à une rente donnée, pour attirer les plus hauts revenus.

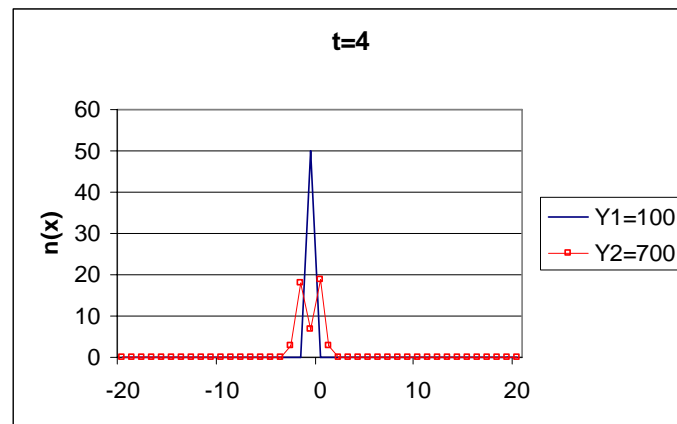
Accroissons à présent le coût de transport unitaire jusqu'à une valeur de  $t=3$ .



**Figure 30. Densité de deux sous-populations de revenus différents ( $Y_1=100$ ,  $Y_2= 700$ ), pour un coût de transport unitaire  $t=3$**

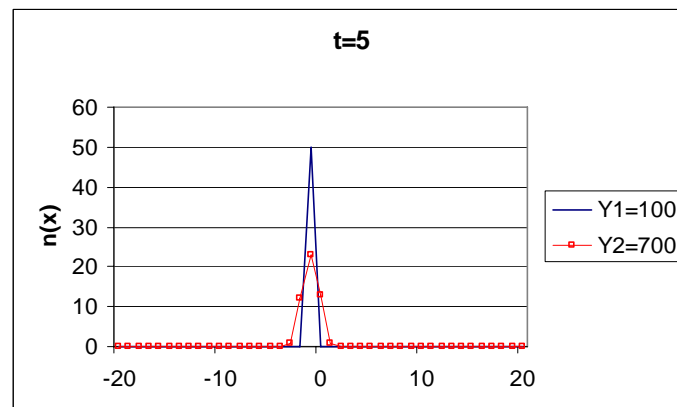
Les deux populations restent séparées. Toutefois l'accroissement du coût de transport unitaire incite les plus hauts revenus à se rapprocher du centre, et les plus faibles revenus à se concentrer plus que précédemment.

En accroissant encore  $t$ , la pression devient si forte qu'une partie des hauts revenus accepte de choisir le centre. Toutefois la majorité des hauts revenus continue à préférer la périphérie.



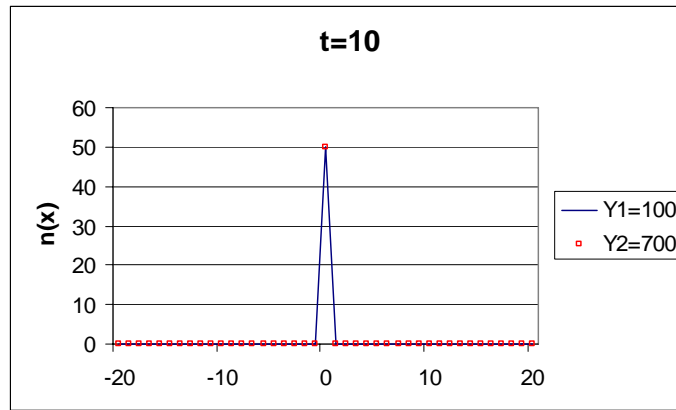
**Figure 31.** Densité de deux sous-populations de revenus différents ( $Y_1=100$ ,  $Y_2= 700$ ), pour un coût de transport unitaire  $t=4$ .

Un nouvel accroissement de  $t$  change la forme de la densité des hauts revenus.



**Figure 32.** Densité de deux sous-populations de revenus différents ( $Y_1=100$ ,  $Y_2= 700$ ), pour un coût de transport unitaire  $t=5$ .

A présent, les hauts revenus préfèrent également le centre. Toutefois, alors que les plus faibles revenus se concentrent uniquement au centre, les hauts revenus se situent encore en partie en périphérie.



**Figure 33. Densité de deux sous-populations de revenus différents ( $Y_1=100$ ,  $Y_2=700$ ), pour un coût de transport unitaire  $t=10$ .**

Enfin lorsqu'on augmente le coût de transport unitaire suffisamment ( $t=10$ ), la pression devient telle que les deux populations se concentrent au centre.

Notons que si  $t$  est inférieur à une certaine valeur ( $t=0,01$  ici), son poids devient négligeable dans la fonction d'utilité, aucune des deux populations ne souhaite de regroupement, et l'état initial est conservé.

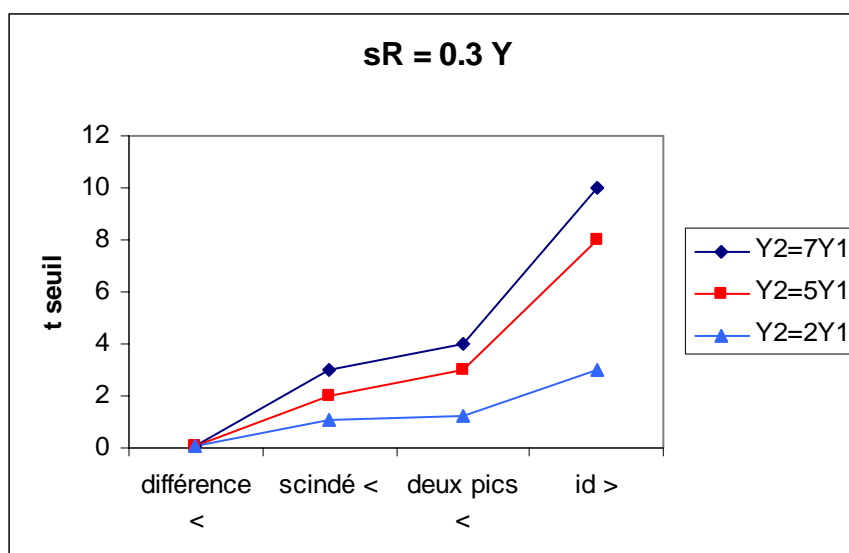
Pour résumer nous pouvons observer quatre différents changements de configuration, en fonction de la valeur de  $t$  :

- Une **différenciation** spatiale apparaît entre les deux populations, celle à plus haut revenu se situant en périphérie (pour l'exemple précédent :  $t=0,1$ )
- Les deux populations cessent d'être spatialement **scindées** (elles le sont jusqu'à  $t=3$  inclus) : celle en périphérie se situe aussi au centre.
- Pendant un certain temps la densité de la population en périphérie a **deux pics** : même si la population à plus haut revenu est présente au centre, elle préfère majoritairement rester en périphérie (jusqu'à  $t=4$ )
- La population à plus haut revenu passe à un pic au centre (entre  $t=4$  et  $t=10$ ), avant finalement que les deux populations aient des densités **identiques** (pour  $t=10$ )

Nous avons représentés ces différents changements en fonction de la valeur de  $t$ , pour différents facteurs de proportionnalité entre les revenus des deux populations

$$(Y_2=7Y_1, Y_2=5Y_1, Y_2=2Y_1).$$





**Figure 34. Différentes configurations sont observées, en fonction de la valeur de  $t$ , et du rapport entre les revenus des deux populations.**

Plus les revenus sont différents, plus le coût de transport unitaire doit être élevé pour mener au rapprochement des densités des deux populations.

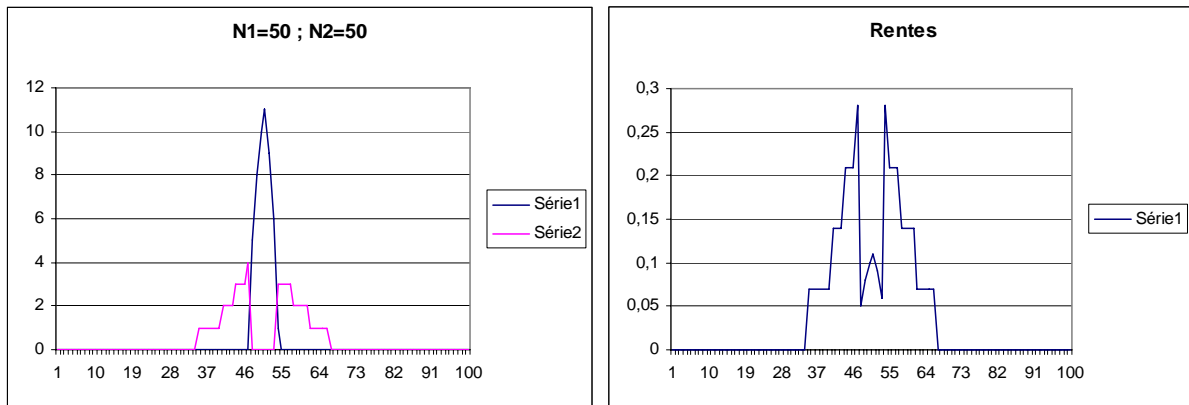
#### 1.3.4 Influence des liens sur la localisation de deux populations différant par leurs revenus

Après avoir introduit un peu de réalisme en considérant plusieurs populations de revenus différents, nous en introduisons un peu plus en nous intéressant à des configurations où chaque individu n'est pas relié à l'ensemble des autres individus, mais seulement à une partie. Nous nous limitons ici à deux populations pour rendre l'influence plus claire.

En partant d'une référence où tout individu est relié à l'ensemble des populations, nous observons successivement ce qui se passe lorsque les liens sont uniquement internes à chaque population, puis uniquement dirigés vers l'autre. Enfin nous observons ce qui se passe pour des liens aléatoires vers une partie de l'ensemble de la population.

##### 1.3.4.1 Lien à tous

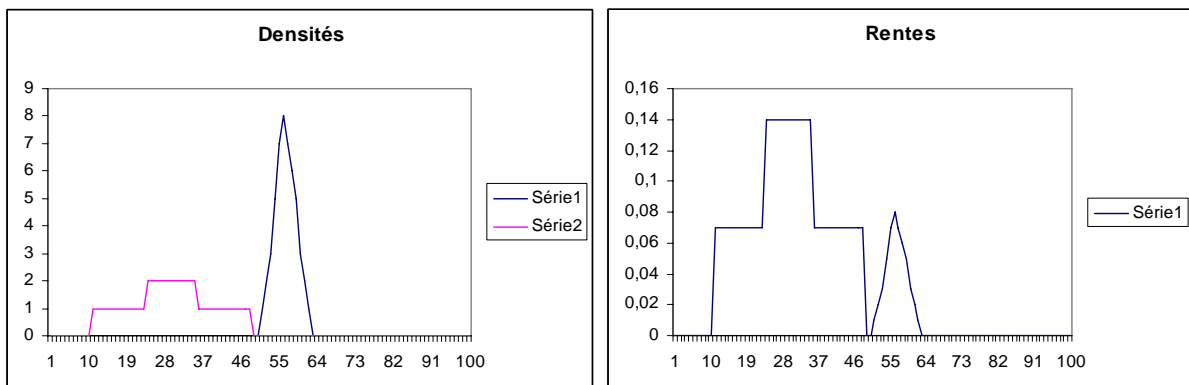
Ceci constitue la référence. Les plus aisés, qui peuvent assumer sans problème les frais de transport, préfèrent la périphérie où ils peuvent trouver des logements plus spacieux. Le centre est marqué par des logements plus petits et des rentes plus basses.



**Figure 35. Densités et rentes pour deux populations ayant des coûts unitaires de transport différents. Référence où tout individu est lié à l'ensemble des autres individus.**

*1.3.4.2 Liens à l'intérieur de chaque population*

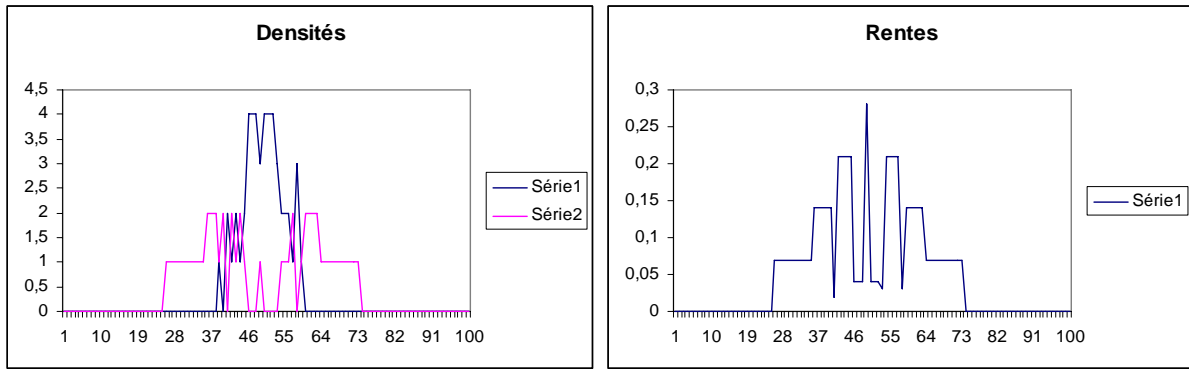
Comme les deux populations deviennent indépendantes, elles forment deux villes distinctes. Leurs caractéristiques respectives influencent la forme et les rentes de chaque ville. La population moins riche se concentre plus, avec des loyers moins élevés.



**Figure 36. Densités et rentes pour deux populations de revenus différents. Liens uniquement aux individus de la population partageant un même revenu.**

*1.3.4.3 Liens seulement vers l'autre population*

Les deux populations s'entremêlent de leur mieux dans l'espoir de réduire leurs coûts. Nous pouvons toutefois observer que la population moins riche se concentre au centre.



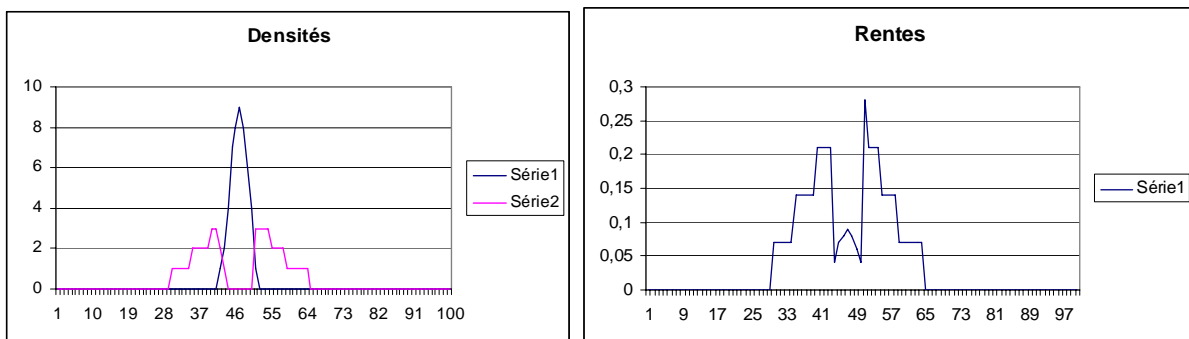
**Figure 37. Densités et rentes pour deux populations ayant des revenus différents. Liens uniquement aux individus de l'autre population.**

#### 1.3.4.4 Liens aléatoires vers une partie de la population

Nous avons représenté ci-dessous les résultats pour des liens aléatoires vers 90%, 75%, 50%, 25% et 10% de la population.

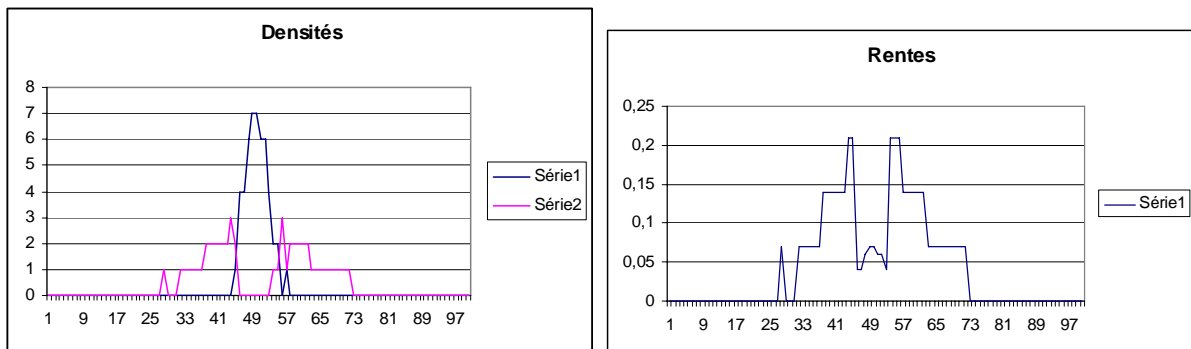
La population moins riche continue à se concentrer au centre. Toutefois plus le nombre de liens est restreint, moins la ségrégation spatiale est nette. En effet la diminution du nombre de liens peut conduire à des localisations optimales hétérogènes et donc ne pas favoriser les concentrations précédentes. De plus les coûts de transports pèsent moins en regard de la rente. Ainsi on reste plus proche de l'état initial.

a) 90%



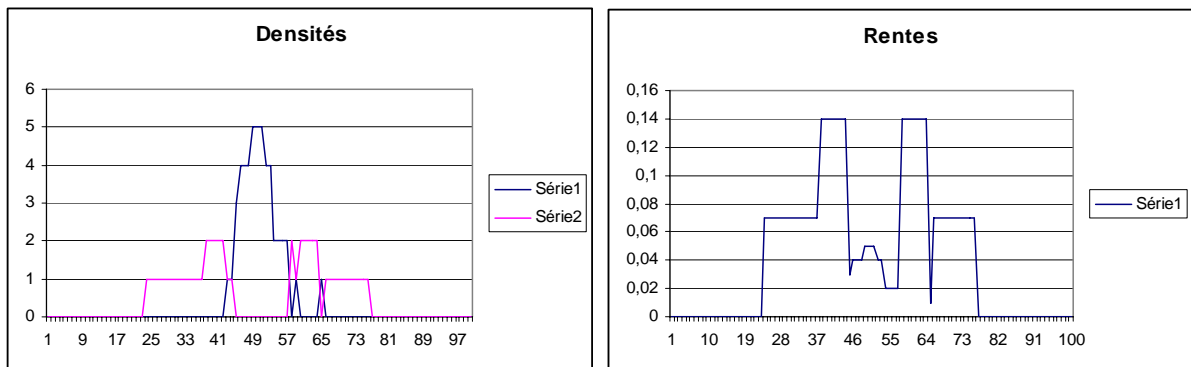
**Figure 38. Densités et rentes pour deux populations ayant des revenus différents. Un individu est lié aléatoirement à 90% des autres individus.**

b) 75 %



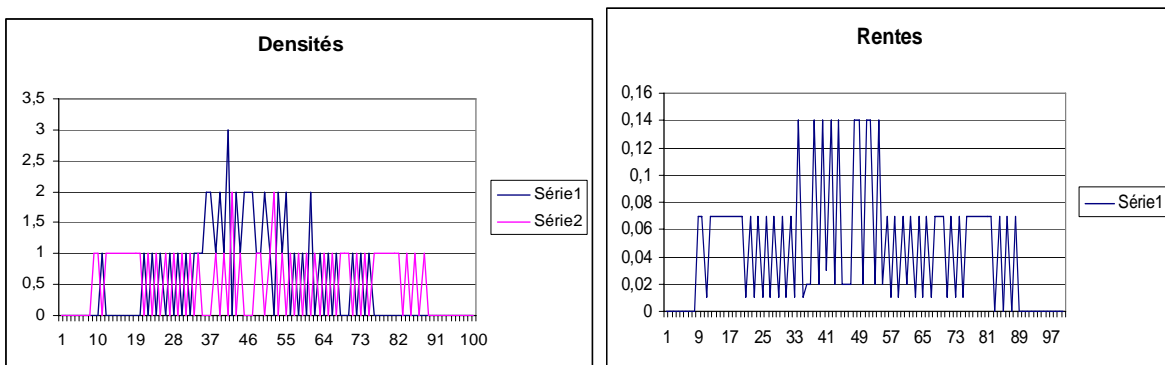
**Figure 39. Densités et rentes pour deux populations ayant des revenus différents. Un individu est lié aléatoirement à 75% des autres individus.**

c) 50%



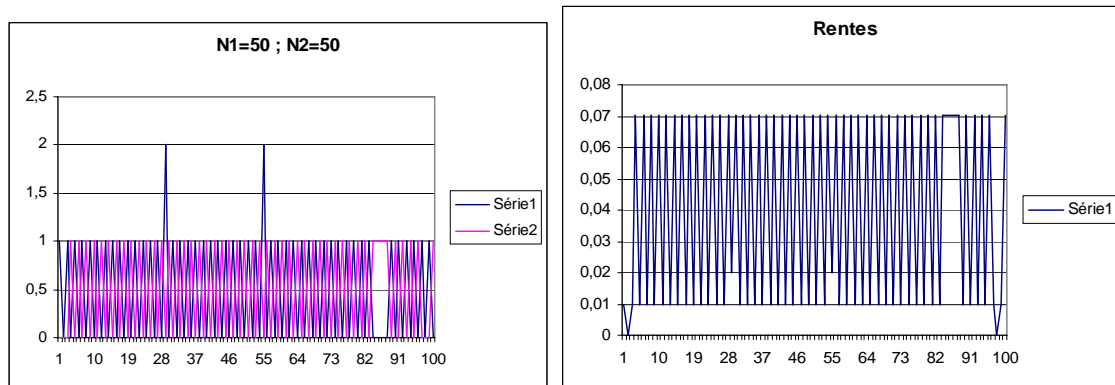
**Figure 40. Densités et rentes pour deux populations ayant des revenus différents. Un individu est lié aléatoirement à 50% des autres individus.**

d) 25%



**Figure 41. Densités et rentes pour deux populations ayant des revenus différents. Un individu est lié aléatoirement à 25% des autres individus.**

e) 10%



**Figure 42. Densités et rentes pour deux populations ayant des revenus différents. Un individu est lié aléatoirement à 10% des autres individus.**

#### 1.3.4.5 Conclusion de cette étude

Nous avons étudié l'influence des interactions sur la formation des densités pour deux populations avec des revenus différents. Notre étude a porté pour commencer sur des différences d'interaction à l'échelle des populations. Nous avons décrit certaines formes d'interaction menant à une influence spatiale entre les deux populations, et d'autres menant à leur indépendance.

Nous avons aussi étudié le cas d'un réseau d'interactions aléatoire (indifférencié quant à la population cible) concernant de 90% à 10% de l'ensemble de la population. Moins le réseau est dense, moins élevés sont les coûts de transport et plus l'hétérogénéité des optima réduit la concurrence, menant à une ségrégation spatiale moins nette des deux populations et à des rentes moins élevées.

En dépit de la différence de fonction d'utilité, nous retrouvons ici une même importance des coûts de transport unitaires et des liens entre individus sur la rente (et ici la densité) que précédemment (1.2.9).

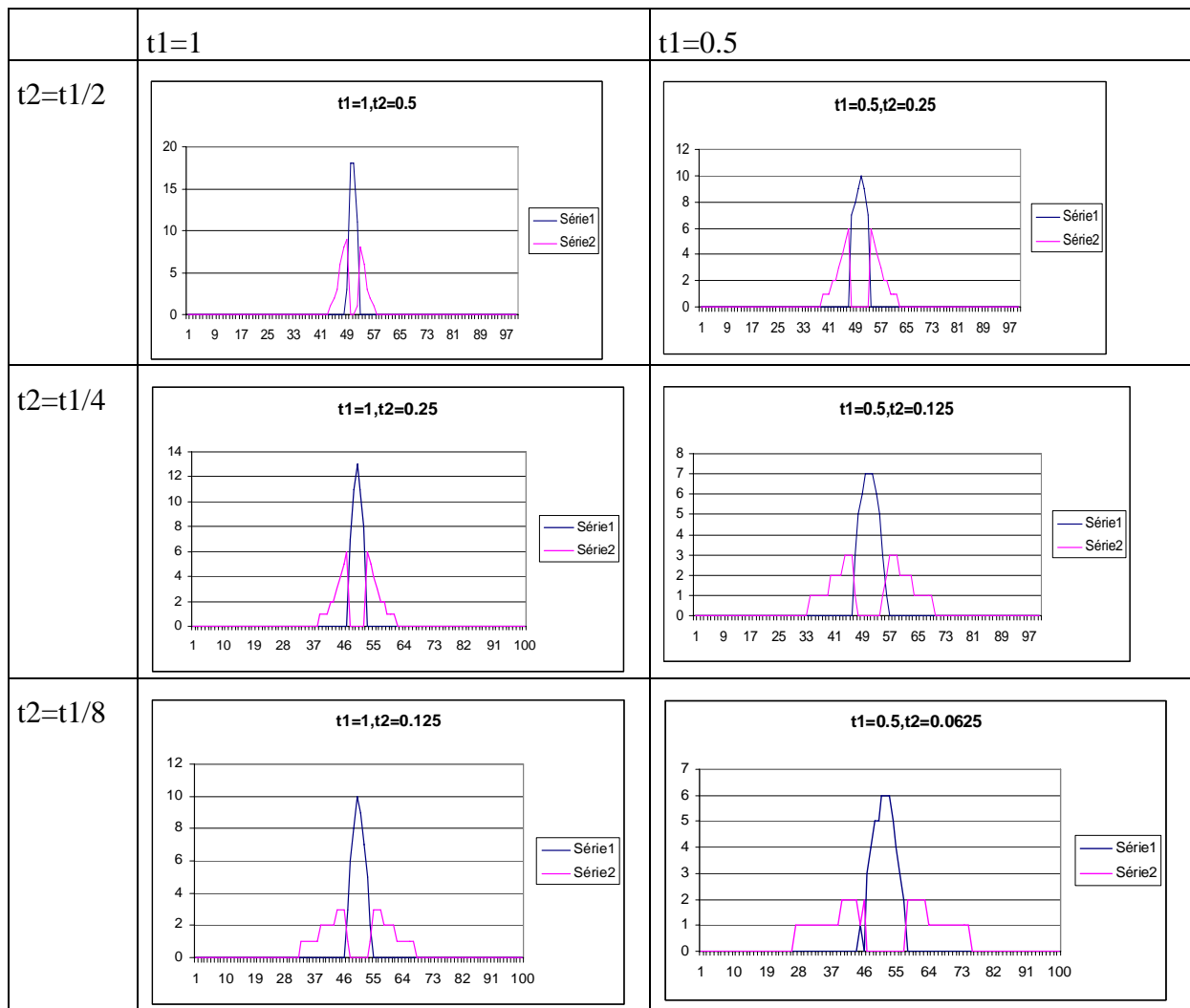
### 1.3.5 Populations avec des coûts de transport différents

Après avoir étudié comment le coût de transport influe sur la position de deux populations avec des revenus différents, nous considérons à présent des populations qui diffèrent par leur coût de transport unitaire.

#### 1.3.5.1 Influence de la valeur des coûts de transport pour deux populations

La différence de coûts unitaires de transport conduit à une ségrégation spatiale des deux populations.

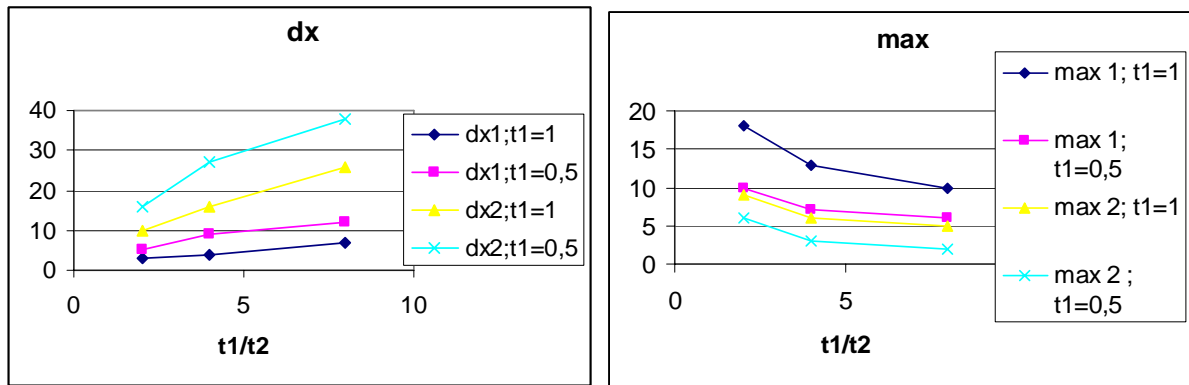
Nous avons représenté ci-dessous dans un tableau la configuration observée pour différentes valeurs de  $t_1$  (colonnes) et différents facteurs entre  $t_1$  et  $t_2$  (lignes).



**Figure 43. Sensibilité de la position de deux populations avec des coûts de transport différents ( $t_1$  et  $t_2$ ) au facteur entre ces deux coûts de transport, pour différentes valeurs du plus grand ( $t_1$ ).**

Les valeurs de  $t_1$  et de  $t_1/t_2$  influencent la configuration finale de la ville. Plus  $t_1$  est grand, plus la population se concentre au centre. Plus  $t_1/t_2$  est grand, plus la ‘pente’ de la distribution varie d’une population à l’autre.

Nous cherchons à mieux comprendre comment ces distributions varient en fonction de  $t_1$  et de  $t_1/t_2$ . Pour cela nous les caractérisons par deux valeurs : la densité maximale observée ( $\max_i$ , où  $i$  indique la population, avec des  $t$  décroissants), et la ‘surface’ occupée ( $dx_i$ ). Nous cherchons à observer comment ces valeurs varient avec  $t_1$  et  $t_1/t_2$ .



**Figure 44. Indicateurs agrégés de l'influence de  $t_1$  et  $t_1/t_2$  sur les densités. Nombre de localités (dx) occupées par chacune des populations, et densité maximale (max).**

Nous pouvons ainsi observer que l'influence suit bien un sens intuitif, sans être pour autant linéaire.

La première population, dont le coût de transport est plus élevé ( $t_1 > t_2$ ) a un maximum plus élevé et occupe moins de localités que la deuxième population.

Le nombre de localités décroît, et le maximum croît, avec l'augmentation de  $t_1$  (qui à  $t_1/t_2$  constant affecte les deux populations à la fois).

Lorsque  $t_1/t_2$  croît la surface augmente et le maximum diminue. En effet la deuxième population se concentre moins, ce qui réduit aussi la pression menant à la concentration de la première population.

Cette étude nous donne une première idée de l'influence des coûts unitaires de transports, dont l'influence est intuitive, sans être toutefois linéaire.

Dans le paragraphe suivant, nous étudierons l'influence du coût unitaire de transport mais dans le cas non plus de deux mais de plusieurs populations.

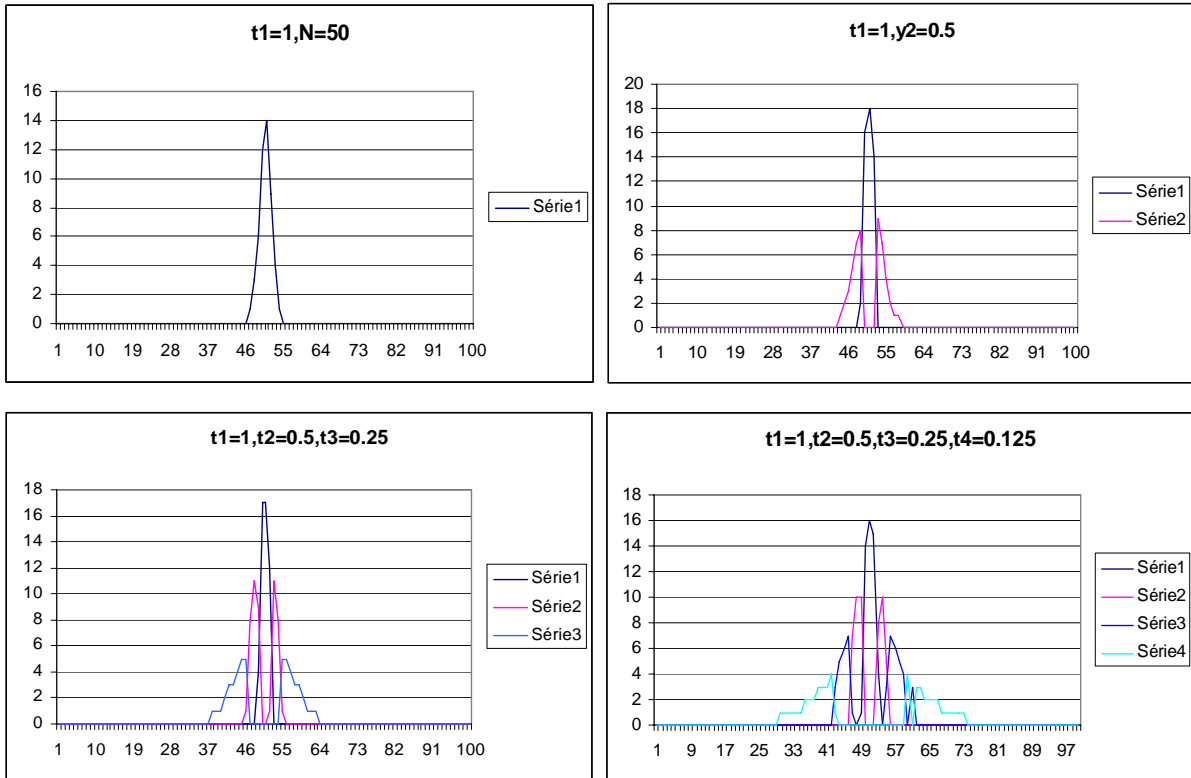
#### 1.3.5.2 Plusieurs populations avec des coûts de transport différents

Nous cherchons ici à évaluer si l'introduction d'un plus grand nombre de populations change qualitativement ou non les résultats. Pour cela nous partons de valeurs de paramètres conduisant à une ségrégation spatiale.

Nous commençons par observer comment l'ajout de populations avec des coûts de transport différents influe sur la configuration de la ville. Puis pour un même facteur de proportionnalité entre deux coûts de transport successifs nous diminuons l'ensemble des coûts de transports. Enfin nous observons comment l'accroissement du facteur de proportionnalité entre deux coûts de transport unitaires successifs influe sur la configuration de la ville.

##### a) Nombre croissant de populations

Nous partons d'une population dont le coût de transport unitaire est 1. Ensuite nous ajoutons successivement des populations en divisant successivement pour chacun le coût unitaire de transport par deux.



**Figure 45. Densité dans la ville d'un nombre croissant de populations de  $t$  différents, tels que  $t_1=1$  et  $t(n)/t(n+1) = 2$ .**

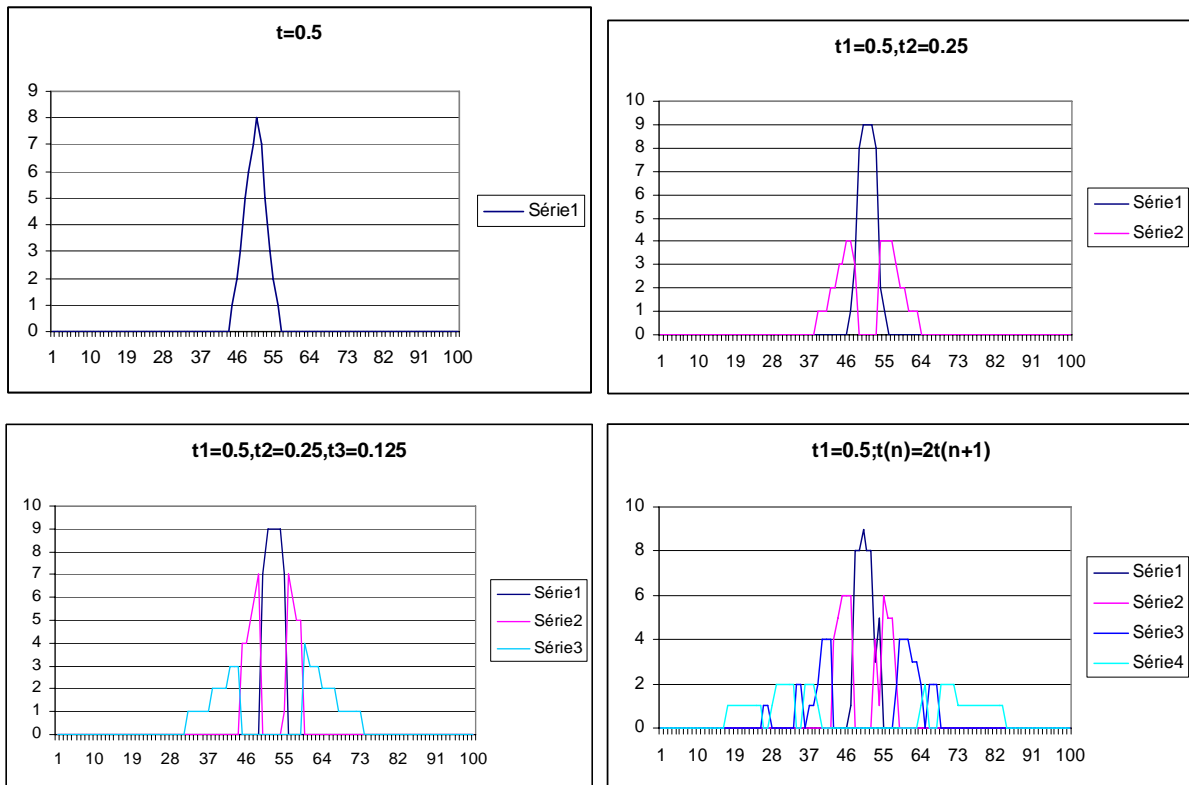
Les populations occupent des cercles concentriques suivant des coûts de transport décroissants. Nous pouvons observer aussi que l'ajout d'une nouvelle population influence la distribution des populations précédemment insérées, qui se concentrent plus. Enfin la différence de coût unitaire de transport influence à la fois le maximum, la 'pente' de la distribution et le nombre de localités occupées.

Ces simulations nous permettent d'observer une influence plus subtile que le simple ordre par revenus croissants prédit par Fujita et Thisse dans le cas d'une différence de revenus.

#### b) Influence de la diminution de l'ensemble des coûts de transport

Nous reprenons l'étude précédente, mais cette fois avec  $t_1=0.5$ , soit la moitié de la valeur précédente. Nous cherchons à savoir l'effet d'une diminution générale des coûts de transports tout en gardant le même facteur de proportionnalité d'un coût unitaire de transport à l'autre.



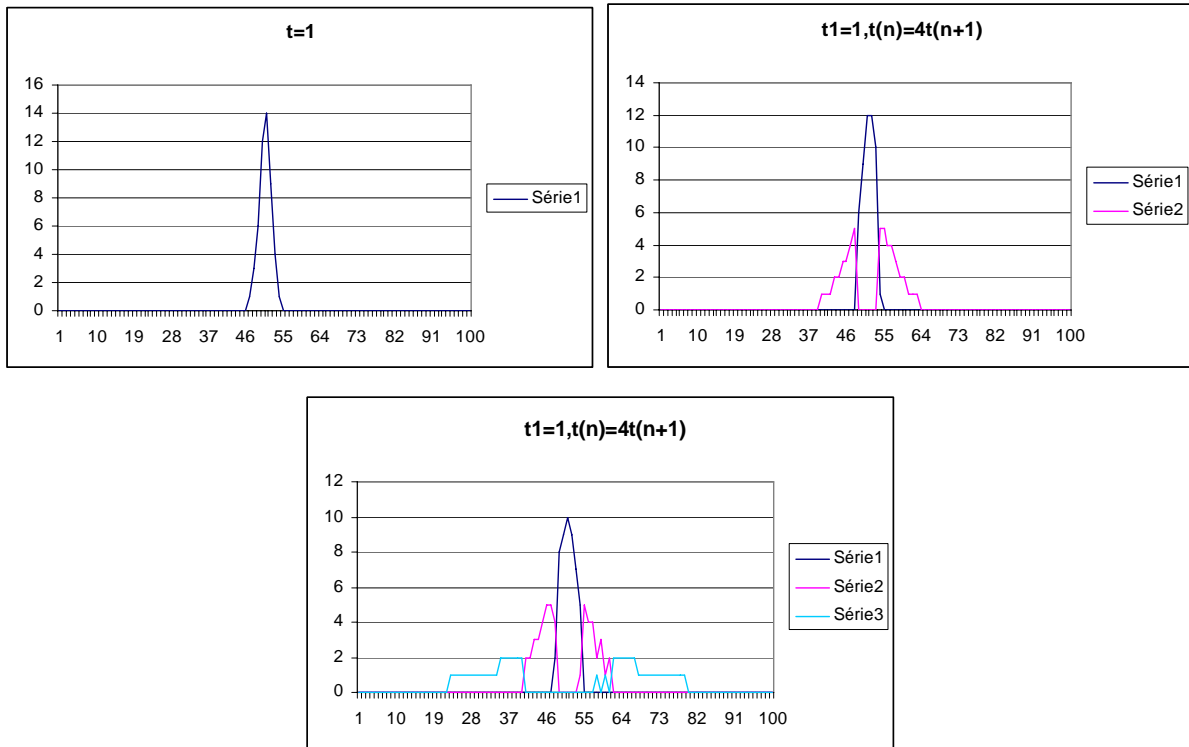


**Figure 46. Densité dans la ville d'un nombre croissant de populations de  $t$  différents, tels que  $t_1=0.5$  et  $t(n)/t(n+1) = 2$ .**

Nous pouvons voir que l'évolution est proche de celle observée précédemment. Toutefois en raison de la diminution des coûts de transport les populations sont moins concentrées et les pentes des densités, moins fortes. Ainsi l'influence de l'ajout de populations apparaît plus clairement.

c) Accroissement du facteur de proportionnalité entre deux coûts de transport successifs

Nous cherchons à voir à présent ce qui se passe lorsqu'on accroît le facteur de proportionnalité entre deux coûts de transport successifs. Nous partons d'une population avec un coût de transport unitaire égal à 1 et nous insérons des populations en divisant pour chacune le coût de transport par quatre.



**Figure 47. Densité dans la ville d'un nombre croissant de populations de  $t$  différents, tels que  $t_1=1$  et  $t(n)/t(n+1) = 4$ .**

La densité (et sa pente) varie plus d'une population à l'autre que précédemment. Ainsi l'ajout d'une nouvelle population semble avoir moins d'effet sur celles déjà présentes, que précédemment.

### 1.3.5.3 Conclusion

Nous avons étudié dans cette partie comment la différence de coûts de transports entraîne une ségrégation spatiale. Les populations se placent dans des cercles concentriques suivant des coûts de transport décroissants. De plus l'ajout d'une nouvelle population affecte la distribution des populations déjà présentes, en accroissant la pression pour l'espace et en incitant les populations déjà présentes à se concentrer davantage.

L'influence des populations les unes sur les autres devient plus apparente pour des coûts de transport plus faibles qui leur permettent d'occuper un plus grand nombre de localités.

En revanche elle semble décroître lorsque la différence entre deux coûts de transports successifs s'accroît, en diminuant la pression d'une population sur celle qui la précède.

### 1.3.6 Formation de la densité et de la rente suivant un processus de marchandage

Dans le modèle décrit au 1.3.1 les choix individuels permettent de retrouver la densité théorique optimale, et les rentes, qui sont proportionnelles à la demande, c'est-à-dire à la densité, s'en déduisent.

Nous voulons dans ce nouveau modèle que les rentes résultent également d'interactions individuelles propres.

### 1.3.6.1 Description du modèle

Dans ce modèle, un individu qui espère gagner en utilité lors de son déménagement vers une nouvelle localisation a la possibilité de réinvestir une partie de son gain en coût de transport (caractérisée par le paramètre  $k$ ) dans le surenchérissement de la rente.

Si  $x$  représente sa position actuelle, et  $x'$  celle qu'il désire gagner, sa proposition de rente est définie comme :

$$r(i, x', k) = \frac{Y - T(x') - z - (1 - k)|T(x) - T(x')|}{s'}$$

Eclaircissons le choix de cette formule. Supposons que l'individu cherche à minimiser son coût de transport (c'est le plus souvent le cas).

Si  $k=0$ ,

$$r(i, x', 0) = \frac{Y - T(x') - z - |T(x) - T(x')|}{s'} = \frac{Y - T(x) - z}{s'}$$

On retrouve le calcul de rente précédent : le budget logement ( $s'R = Y - T(x) - z$ ) est fixe. La rente proposée est uniquement plus élevée que la précédente dans la mesure où l'arrivée d'un nouveau locataire diminue la surface allouée à chacun pour un budget fixe ( $s'R$  est constant). Ainsi si on indice par 1 les rentes et surfaces initiales de la localité cible, et par 2, celles après l'arrivée d'un nouveau locataire et si on suppose que le budget logement soit le même pour les deux localités (il est initialement identique partout), on aura

$$s_1(x)R_1(x) = s_2(x)R_2(x)$$

soit

$$R_2(x) - R_1(x) = \left( \frac{s_1(x)}{s_2(x)} - 1 \right) R_1(x) = \left( \frac{n_2(x)}{n_1(x)} - 1 \right) R_1(x) > 0.$$

Prendre  $k=0$  permet donc déjà de surenchérir. C'est pourquoi nous avons aussi testé des valeurs de  $k$  négatives.

Si  $k=1$ ,

$$r(i, x', 1) = \frac{Y - T(x') - z}{s'} = \frac{Y - T(x) - z + (T(x) - T(x'))}{s'}$$

Le locataire accepte ici de réinvestir la totalité du gain en coût de transport dans la nouvelle rente.

Le propriétaire des logements a de son côté la possibilité soit d'accepter soit de refuser l'offre de rente d'un nouveau locataire. Il ne peut accepter que les rentes 'favorables', c'est-à-dire supérieures à sa rente actuelle. De plus il a la possibilité de refuser un certain nombre d'offres favorables, dans l'espoir d'obtenir des rentes plus élevées. Le paramètre  $nMinFav$  indique le nombre d'offres favorables (ou de surenchères) qu'il exige avant d'accepter le nouveau locataire.

Le locataire a la possibilité de surenchérir plusieurs fois (jusqu'à atteindre son budget logement maximal, égal au tiers de son revenu  $Y$ ) si ses offres sont refusées. On introduit deux paramètres :  $k_{min}$  et  $dk$ , qui correspondent respectivement à la première surenchère (la plus basse)

$$r_0(i, x', k_{\min}) = \frac{Y - T(x') - z - (1 - k_{\min})|T(x) - T(x')|}{s'}$$

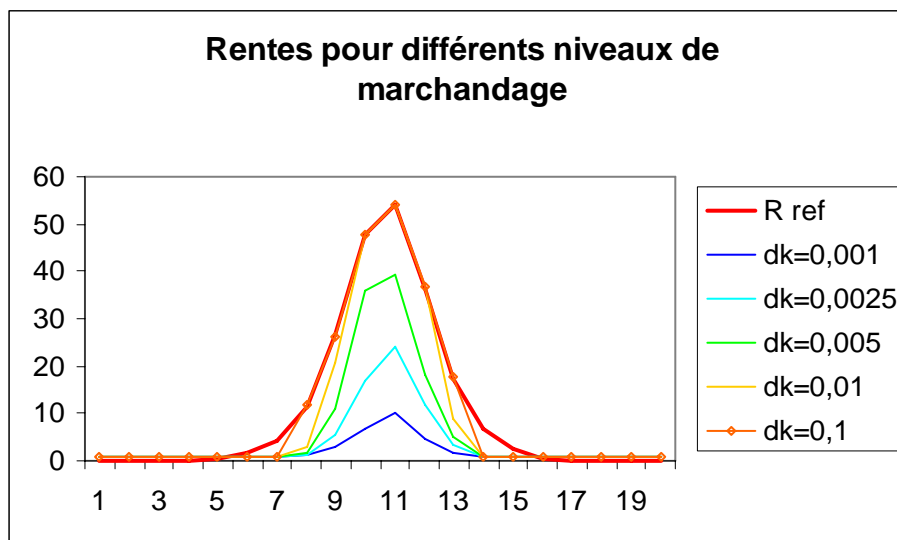
et à la différence de valeur de  $k$  d'une surenchère à l'autre ( $k_{t+1} = k_t + dk$ ).

$$r_{t+1}(i, x', k_{t+1}) = \frac{Y - T(x') - z - (1 - (k_t + dk))|T(x) - T(x')|}{s'}$$

Des études de sensibilité de ce modèle ont permis d'observer différents types d'états finaux. En fonction de la valeur des paramètres, on retrouve ou non la densité et la rente prévues par le modèle théorique.

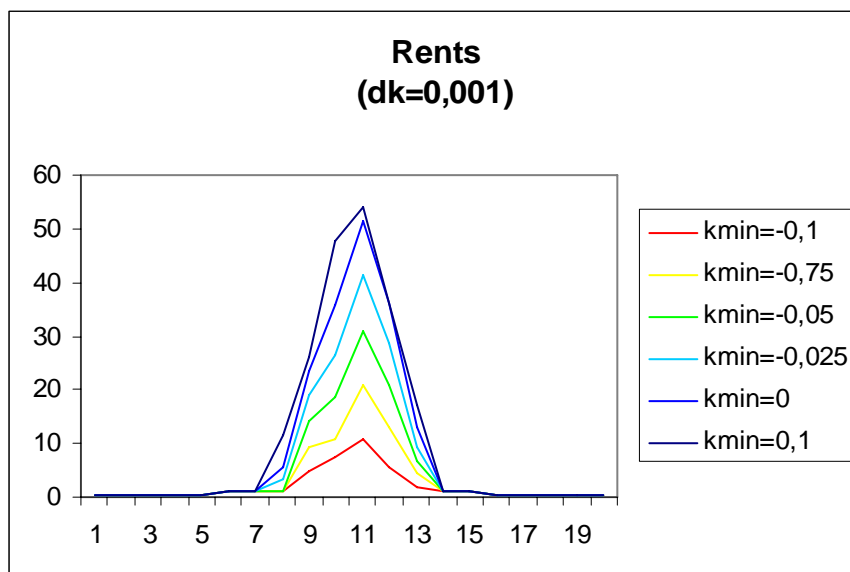
### 1.3.6.2 Premier résultat : les paramètres de marchandage déterminent les rentes finales

La rente attendue (correspondant au résultat du modèle théorique) est atteinte ou non. Ci-dessous nous avons représenté sa valeur dans la ville en fonction du pas de surenchère entre deux offres, de la surenchère minimale, du nombre d'offres acceptables refusées.



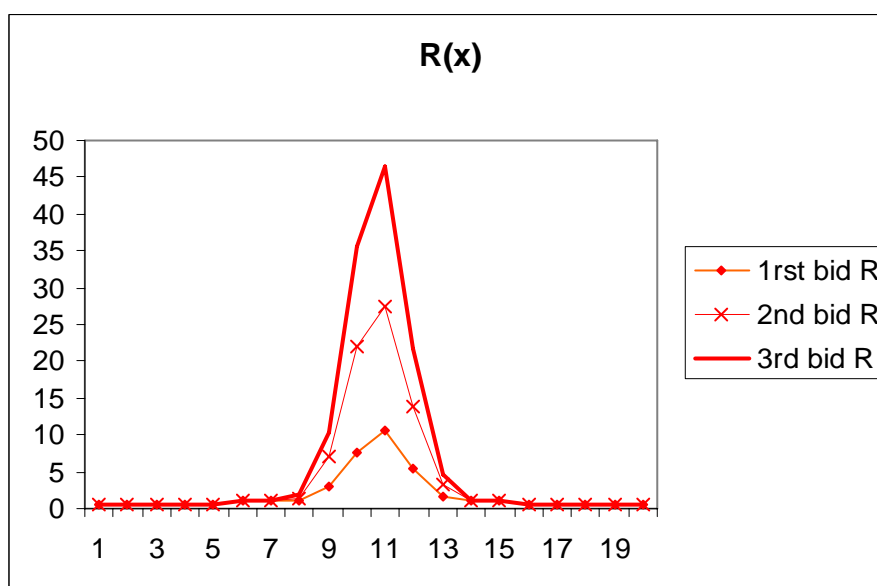
**Figure 48. Rentes finales simulées pour différentes valeurs de  $dk$**

Plus le pas de surenchère est fin (et le marchandage des locataires serré), plus les rentes finales sont basses, à l'avantage des locataires.



**Figure 49. Rents finales pour différentes valeurs de  $k_{min}$ .**

Plus la première rente proposée ( $k_{min}$ ) est basse, plus les locataires parviennent à obtenir des rentes peu élevées.



**Figure 50. Rents finales pour différentes valeurs de  $k_{MinFav}$  : les propriétaires acceptent soit la première (1st bid R), soit la deuxième (2nd bid R), soit la troisième (3rd bid R) offre favorable.**

Plus les propriétaires sont exigeants (en refusant les premières offres), plus ils parviennent à obtenir des rentes élevées.

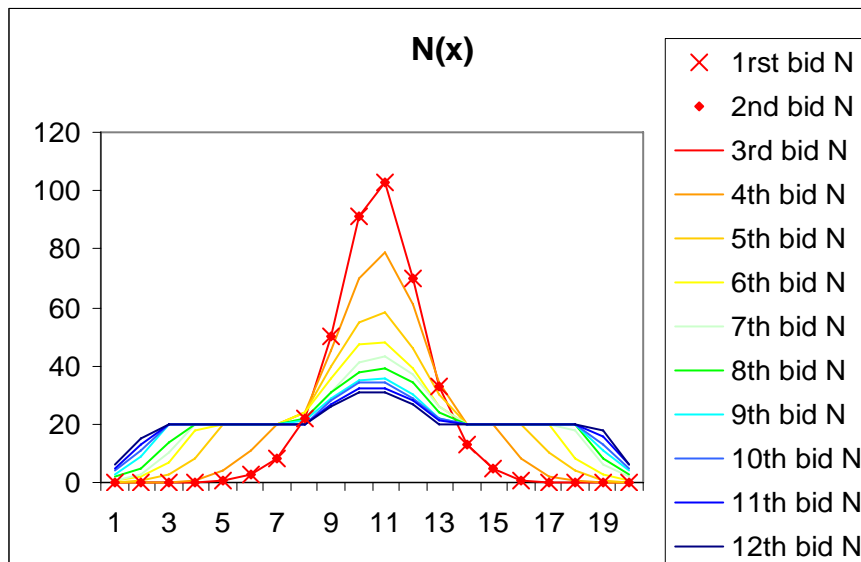
Résumons ces premiers résultats plutôt intuitifs. En se montrant plus exigeant dans le marchandage (soit en cherchant à faire les offres les plus basses possibles pour les locataires, soit en refusant les premières offres pour les propriétaires) chacun des partenaires peut influencer la forme de la rente finale à son avantage.

Toutefois ces premiers résultats s'appliquent dans une zone de paramètres où la densité optimale est atteinte. Or, ce n'est pas toujours le cas.

### 1.3.6.3 Deuxième résultat : les paramètres de marchandage déterminent aussi les densités finales

En effet si les propriétaires tardent trop à accepter les offres de nouvelles rentes, certains mouvements ne peuvent se faire, à la défaveur à la fois des locataires (qui aimeraient diminuer leurs coûts de transport) et des propriétaires (qui n'auront aucun accroissement de la rente du tout).

Nous avons représenté ci-dessous la densité finale en fonction du nombre de refus par les propriétaires, d'offres acceptables.



**Figure 51. Densités finales pour différentes valeurs de  $kMinFav$  : les propriétaires acceptent soit la première (1st bid R), soit la deuxième (2nd bid R), etc... offre favorable.**

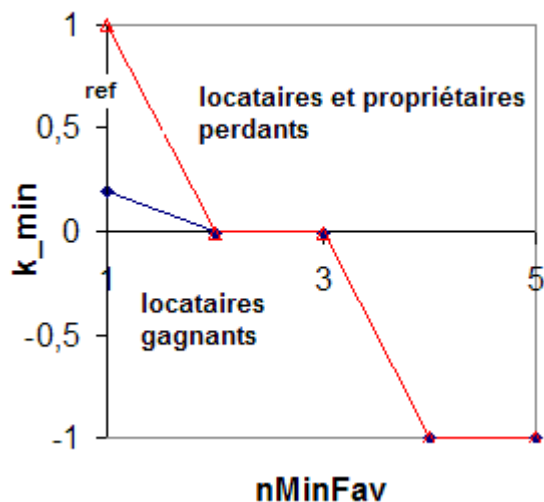
Jusqu'à deux offres favorables refusées (3rd bid N), la densité trouvée correspond à la densité optimale du modèle théorique. Toutefois au-delà, une partie des mouvements sollicités par les locataires échouent. Lorsque 11 offres favorables sont rejetées (12th bid N), la densité finale semble proche de la densité initiale homogène.

### 1.3.6.4 Schéma résumant les différents cas de figure

Ci-dessous un schéma de l'espace des paramètres résumant les différents cas de figure observés. Il y en a trois :

- la densité est optimale et la rente correspond à celle prévue par le modèle théorique : ceci constitue notre **référence**
- la densité est optimale, mais la rente finale est inférieure à celle prévue par le modèle théorique : dans ce cas les **locataires sont gagnants**
- la densité n'est pas optimale (au désavantage des locataires) et la rente est inférieure à celle prévue par le modèle (au désavantage des propriétaires). Les conditions de marchandage ont conduit à un certain nombre d'échecs. **Locataires et propriétaires sont perdants.**

Ce schéma est tracé en fonction du nombre minimal d'offres valables avant acceptation par le propriétaire ( $nMinFav$ ), et du niveau minimal d'offre par les locataires ( $k_{min}$ ). Le pas de surenchère est très fin ( $k=0,001$ ).



**Figure 52.** Différents cas de figures sont observés en fonction de du nombre minimal d'offres valables avant acceptation par le propriétaire ( $nMinFav$ ), et du niveau minimal d'offre par les locataires ( $k_{min}$ ).

### 1.3.7 Conclusion

Ce premier modèle individu-centré de simulation montre comment un processus simple de décisions individuelles peut mener à une densité globalement optimale, telle qu'elle est prévue par la théorie.

Après avoir vérifié la fidélité du modèle individu-centré au modèle théorique dans un cas simple où il était possible d'en connaître analytiquement la solution, nous avons simulé avec le modèle individu-centré des configurations plus compliquées avec deux ou plusieurs populations différentes dans la même ville.

Pour commencer nous avons étudié comment le coût de transport unitaire  $t$ , influence les densités respectives de deux populations de revenus différents en conduisant ou non à une ségrégation spatiale. Nous avons ensuite étudié dans le cas d'une ségrégation, l'influence de différentes configurations d'interactions plus réalistes, déterministes et aléatoires, et montré leur influence sur les densités obtenues.

Nous avons ensuite étudié comment la différence de coûts de transport pouvait mener à une ségrégation spatiale. Nous avons pu observer des densités concentriques suivant des coûts de transport unitaires décroissants. Des coûts de transports globalement plus faibles conduisent à l'étalement des populations et donc à une influence plus visible de leurs positions l'une sur l'autre. Inversement une différence plus marquée entre coûts de transport, conduit à une plus grande différence de distribution de la densité entre les deux populations, et semble réduire ainsi leur compétition pour le sol et la pression de l'une sur l'autre.

L'approche agent nous a donc permis de simuler et d'étudier des configurations plus complexes et réalistes que le modèle agrégé dont nous sommes partis, et d'affiner ainsi les résultats très généraux présentés dans le livre de Fujita et Thisse. En particulier nous avons étudié l'influence de coûts de transport hétérogènes sur la formation de la densité et de la rente dans la ville.

Dans le modèle précédent, les rentes dépendent seulement de la densité. Nous avons introduit un peu de réalisme en les faisant résulter d'interactions individuelles de marchandage entre propriétaires et locataires. Même si la densité optimale et les rentes prévues par la théorie continuent à pouvoir être atteintes, elles ne le sont plus dans tous les cas.

En particulier, les locataires parviennent parfois à obtenir des rentes inférieures à celles prévues par la théorie. Mais il peut aussi arriver que la dureté des marchandages conduise à des échecs de mouvements, frustrant finalement à la fois les locataires et les propriétaires.

## 1.4 Formation de densités et de rentes de firmes et d'employés

---

Dans les parties qui précèdent nous avons étudié comment la contrainte de l'interaction pouvait conduire à la formation endogène d'un centre, défini par un maximum des rentes, à surface de logement et densité fixées pour commencer, puis en les faisant varier.

Dans la partie qui suit nous étudions un modèle où cohabitent firmes et individus. Les firmes conservent des coûts de transports dépendant de leur distance aux autres firmes, alors que le coût de transport des individus dépend de leur distance à leur lieu de travail (firme).

Fujita et Thisse (2003) étudient la stabilité de configurations d'équilibre entre firmes et travailleurs. Toutefois leurs fonctions d'utilités n'ont plus de terme de préférence pour la surface. De plus ils supposent les surfaces louées identiques d'une firme à l'autre, et d'un travailleur à l'autre. Ceci limite les configurations possibles et rend difficile la conception d'un algorithme de convergence vers un tel équilibre, à partir d'états initiaux variés.

A fonction de coût de transport linéaire, ils observent trois types de configurations possibles, en fonction du rapport entre les coûts de transports unitaires des firmes et des travailleurs. Si le coût de transport des travailleurs est très élevé, ils logent près de la firme où ils travaillent. Lorsqu'il devient très faible, ils logent en périphérie et l'on observe une ségrégation spatiale entre firmes et travailleurs. Entre ces deux extrêmes la ville se compose à la fois de zones où l'on ne trouve que des firmes ou des travailleurs, et de zones mixtes.

Nous étudions un modèle légèrement différent de celui-là. D'une part parce que nous gardons un terme de préférence pour la surface dans le calcul de l'utilité, suivant le modèle précédemment étudié. D'autre part, nous observons des surfaces et des densités qui varient en fonction de la localité, ainsi que précédemment.

Nous retrouvons toutefois qualitativement des résultats similaires à ceux de Fujita et Thisse (2003) avec trois types de configurations plus ou moins intégrées (ou au contraire différenciées spatialement), en fonction du rapport entre les coûts de transport unitaires des firmes et des travailleurs.

Nos modèles de firmes et de travailleurs sont plus proches de ceux précédemment étudiés, que les configurations mixtes étudiés par Fujita et Thisse (2003). L'apport de cette partie est d'étudier un degré de complexité de plus.



## 1.4.1 Salaires homogènes et fixes

---

### 1.4.1.1 Modèle

Nous considérons une ville avec un nombre  $N_f$  de firmes, et  $N_I$  d'individus.  $L_f = N_I/N_f$  individus vont travailler dans chaque firme, dont ils reçoivent un salaire  $W$ . Nous supposons qu'un individu ne change pas de firme au cours de la simulation.

L'utilité des firmes s'exprime sous la forme :

$$U_f(x) = A(x) - s(x)R(x) - W * L_f + \beta \cdot \text{Log}(s(x))$$

Où

$A(x) = A - T(x) = A - \int \tau|x - y|n_{firmes}(y)dy$ , le coût de transport est le coût d'échange avec les autres firmes

$s(x)$  est la surface louée par la firme à la localisation  $x$ ,

$R(x)$  représente est la rente

$W$  est le salaire payé à un travailleur

$L_f$  est le nombre de salariés

$\beta$  est un paramètre de préférence pour la surface louée

Un individu est caractérisé par son lieu de résidence ( $x$ ) et le lieu où se situe la firme ( $x_f$ ) où il travaille. Son utilité s'écrit

$$U_i(x) = W - T(x) - s(x)R(x) + \alpha \cdot \text{Log}(s(x))$$

Où

$W$  est le revenu du travailleur

$T(x) = |x - x_f| t$  représente le coût du transport jusqu'au lieu de travail

$s(x)$  est la surface louée par l'individu

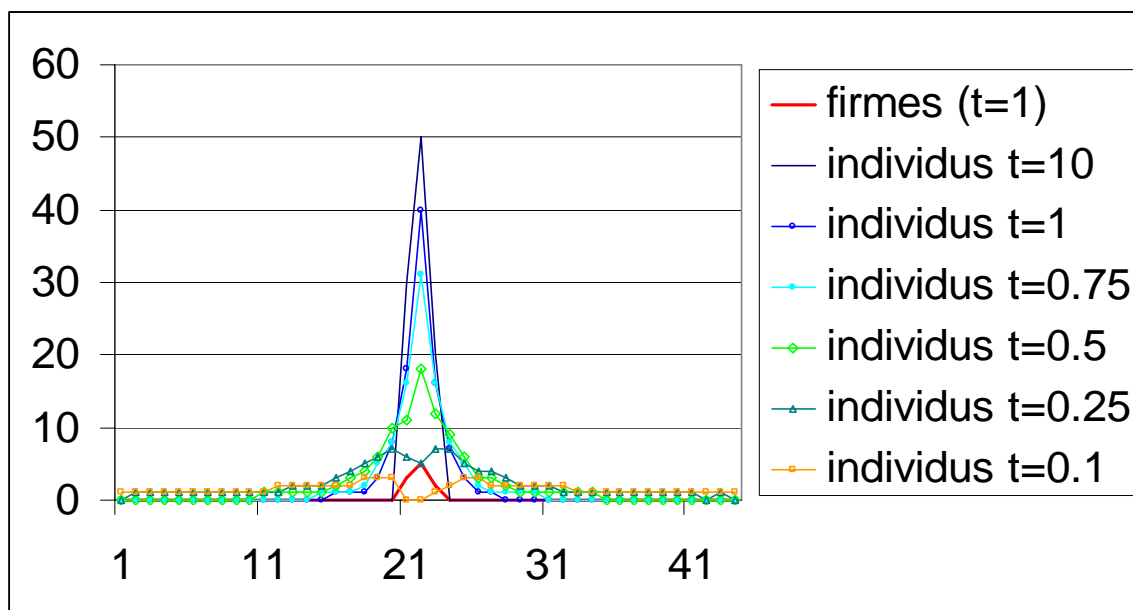
$R(x)$  est la rente

$\alpha$  est le paramètre de préférence pour la surface (supposé égal à  $\beta$  sauf mention du contraire)

Dans une première version nous supposons que les salaires sont identiques pour toutes les firmes et tous les travailleurs et que les firmes commencent par se positionner avant que les travailleurs ne choisissent leur lieu de résidence.

### 1.4.1.2 Influence du coût unitaire de transport des individus.

Afin de mieux comprendre l'influence du coût de transport unitaire des travailleurs sur les densités, nous considérons dix firmes et cent travailleurs. Nous fixons le coût de transport unitaire des firmes à 1 et nous observons les densités des firmes et des individus obtenues pour des coûts de transport unitaires des travailleurs allant de 10 à 0,1.

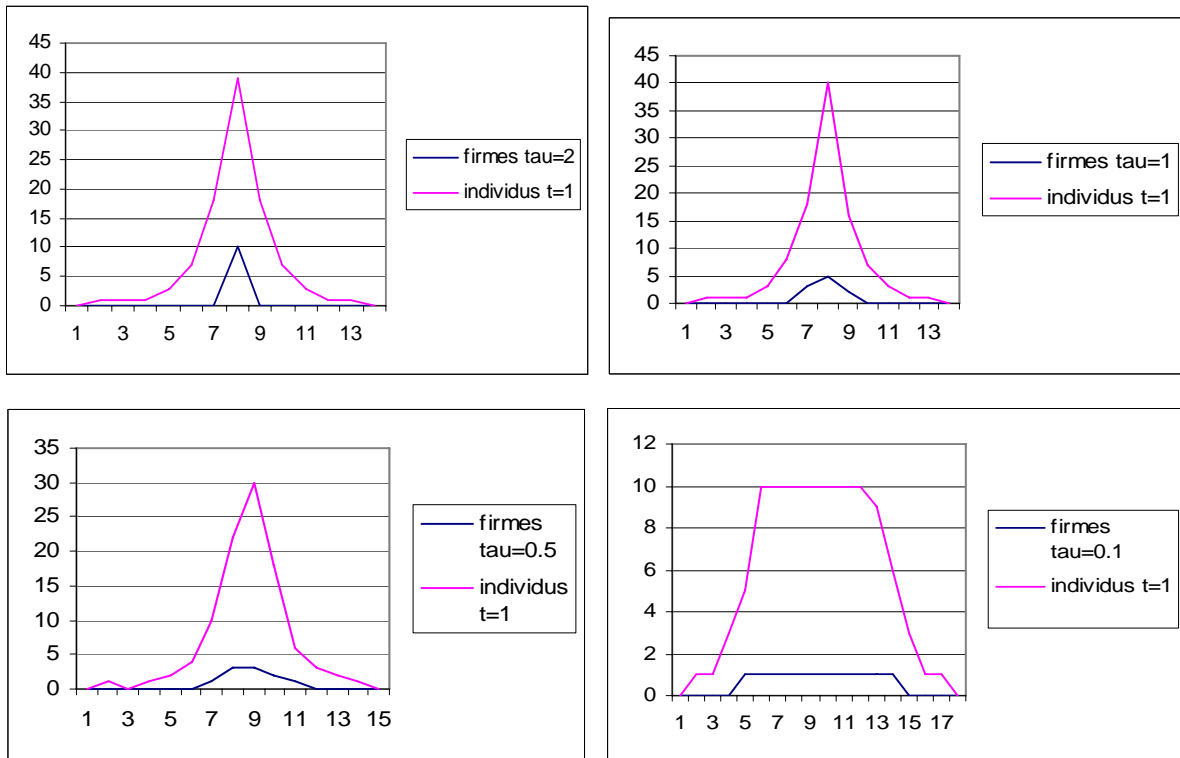


**Figure 53. Etude de la densité des travailleurs en fonction de leur coût de transport unitaire.**

Lorsque le coût unitaire de transport des individus est élevé, ils se concentrent au centre de la ville avec les firmes, quitte à se contenter d'une surface réduite (configuration complètement intégrée). Toutefois lorsque ce coût  $t$  diminue, une partie des individus se positionne en périphérie (configuration partiellement intégrée), jusqu'à quitter le centre pour des  $t$  très peu importants (ville monocentrique). Nous retrouvons ainsi trois catégories de configurations différentes suivant le facteur de proportionnalité entre les coûts de transports unitaires, de façon similaire aux trois catégories mentionnées par Fujita et Thisse dans le cadre d'un modèle firmes/travailleurs légèrement différent de celui que nous avons étudié (revenu hétérogène, surfaces fixes et différentes pour les firmes et les travailleurs).

#### 1.4.1.3 Influence du coût unitaire de transport des firmes

Lorsque le coût de transport unitaire  $\tau$  des firmes diminue, celles-ci s'étendent. Ceci affecte la position des travailleurs. Dans l'exemple ci-dessous nous pouvons voir l'évolution d'une configuration partiellement intégrée lorsque  $\tau$  décroît de 2 jusqu'à 0,1.

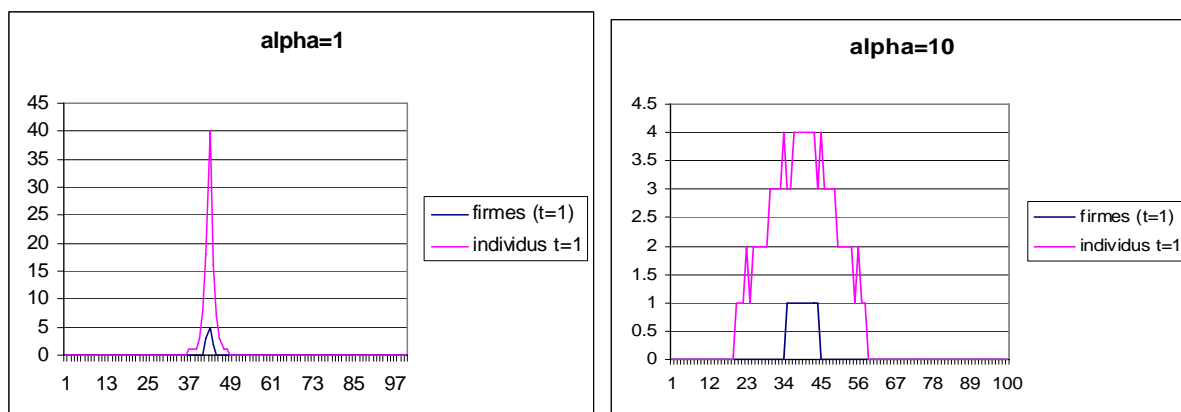


**Figure 54.** Influence du coût unitaire de transport des firmes  $\tau$  sur la densité des firmes et des travailleurs.

Plus  $\tau$  décroît, plus les firmes s'étendent (jusqu'à être une par localité). Ceci conduit la distribution des travailleurs à s'étendre aussi. Toutefois même si la configuration reste mixte (une partie des travailleurs habitent près de leur lieu de travail, alors qu'une partie est forcée de se déplacer d'une localité à l'autre), le lien entre les deux distributions change subtilement. Alors qu'au début, seule une minorité habitait près de leur lieu de travail (40% des travailleurs pour la firme la plus favorisée), elle croît à 80%, puis 100% des travailleurs pour la firme la plus centrale. Si on observe la distribution des travailleurs, elle partage de plus en plus de localités avec les firmes, et le nombre d'individus éloignés des firmes décroît.

#### 1.4.1.4 Influence de la valeur de $\alpha=\beta$

$\alpha$  et  $\beta$  caractérisent la préférence pour la surface. Jusqu'ici nous les avons considérées égales à 1 pour les firmes et les travailleurs. Ci-dessous nous avons tracé les densités pour des valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  de 1 et de 10.



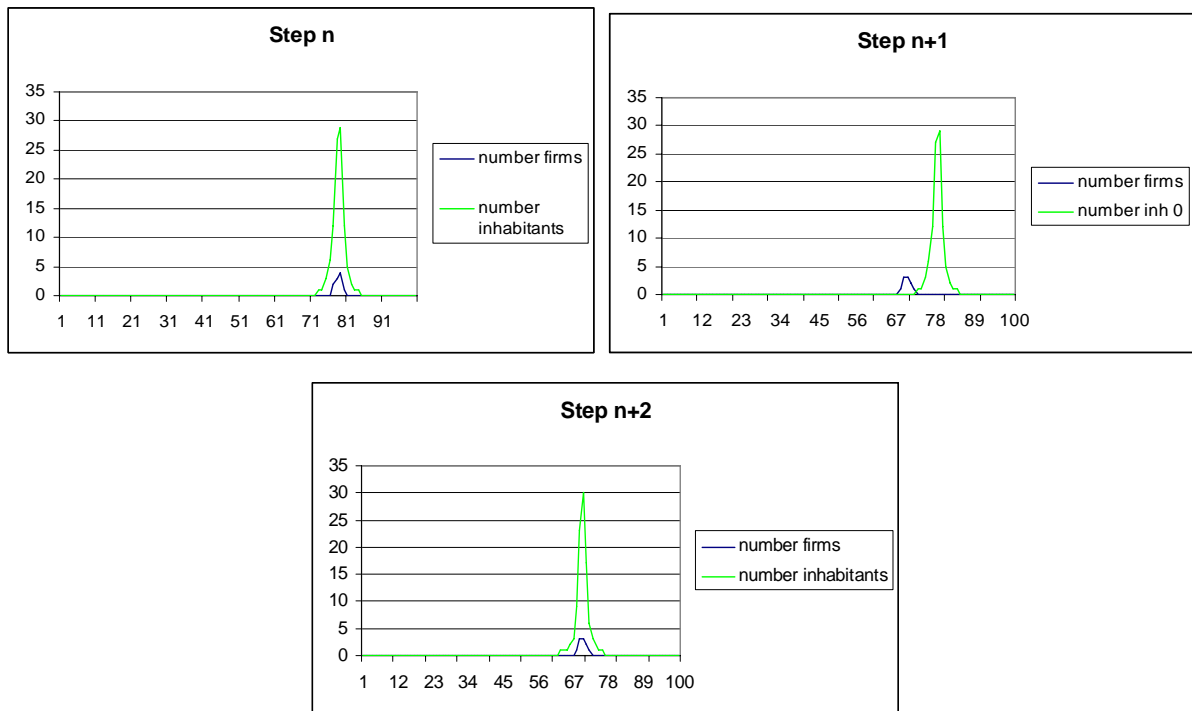
**Figure 55. Influence de  $\alpha = \beta$  sur les densités de firmes et de travailleurs.**

Nous pouvons voir que de façon prévisible, l'accroissement de  $\alpha$  et  $\beta$  qui caractérisent la préférence pour la surface par opposition à une rente faible, conduit à un étalement des firmes et des travailleurs.

#### 1.4.1.5 Différents ordres de mise à jour

Jusqu'à présent les firmes commençaient par se localiser avant que les travailleurs ne le fassent. Nous évaluons maintenant ce qui se passe lorsqu'on remet à jour alternativement les firmes et les travailleurs.

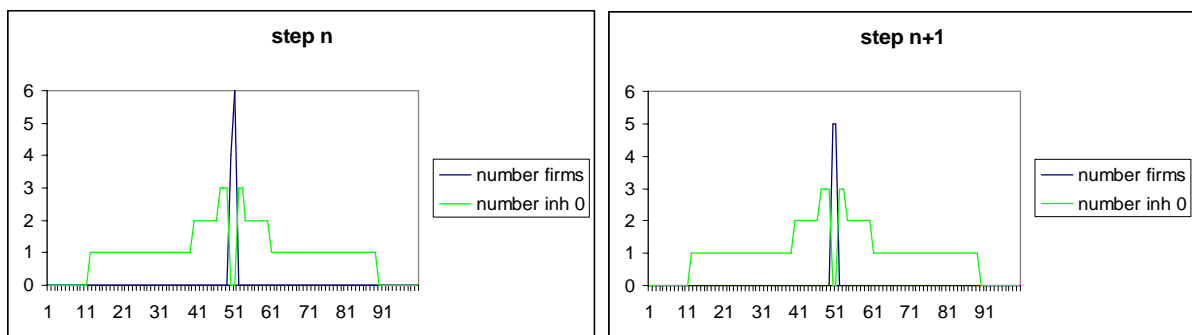
Plusieurs tests où le nombre de relocalisations de travailleurs entre deux changements de firmes est très élevé montrent l'absence de convergence. Ceci devient encore plus clair lorsqu'on fait alterner 10 relocalisations pour l'ensemble de chaque population (on peut supposer sous ces conditions que chaque population a le temps d'atteindre un état optimal considérant la position de l'autre).



**Figure 56. Dans certains cas la relocalisation alternée des firmes et des travailleurs ne permet pas la convergence vers un état stationnaire.**

Nous pouvons observer qu'ici les firmes 'fuient' les travailleurs, qui cherchent à les suivre. En effet les firmes n'ont pour objectif que de rester proches les unes des autres, et de profiter d'autant d'espace que possible. La présence des travailleurs réduit la surface allouée à chacun. C'est pourquoi les firmes ont tendance à s'éloigner des travailleurs, tout en restant groupées. De leur côté, les travailleurs, qui ont pour objectif d'être aussi proches que possible des firmes afin de diminuer leurs coûts de transport, les suivent lorsqu'elles changent de localisation.

Toutefois lorsque la différence de coût de transport est suffisante pour conduire à une différenciation spatiale des firmes et de travailleurs ( $\tau=1$ ,  $t=0.1$ ), on observe une stabilisation (même s'il subsiste de petits changements conduisant à un pseudo-cycle).



**Figure 57. Dans le cas d'une ségrégation spatiale concentrique des firmes et des travailleurs, on observe une stabilisation quelle que soit l'alternance des relocalisations.**

Cette stabilité est conservée lorsqu'on divise par dix ou cent le nombre de mises à jour entre les alternances, ou même qu'on fasse se succéder une firme/un travailleur.

## 1.4.2 Firmes et travailleurs avec des salaires variables

---

### 1.4.2.1 Modèle

Nous supposons à présent que les firmes ont la possibilité de reverser une partie de leur profit (égal à leur utilité  $U_f$ ). Elles ont la possibilité soit d'accroître leur budget de surface louée, soit de subventionner le transport ou le logement de leurs employés, soit de les reverser équitablement entre les travailleurs sous formes de primes. Nous introduisons de nouveaux paramètres.

$\pi_r$  : le profit de référence

$a$  : la proportion à être ajoutée au financement des locaux des firmes

$b$  : la proportion équitablement rajoutée aux salaires (primes)

$c$  : la proportion dédié à la diminution des coûts de transport des travailleurs (prime au kilomètre, suivant le montant disponible)

$d$  : la proportion allouée aux aides au logement pour les employés (leur permettant d'accroître leur budget logement)

A un instant  $t$  la firme  $f$  a donc un profit net :

$$\pi_f(t) - \pi_r = U_f(t) - \pi_r$$

Le nouveau budget logement de la firme devient

$$Y_f = Y_f^r + (\pi_f - \pi_r) \cdot a$$

Les salaires deviennent

$$W = W_r + \frac{(\pi_f - \pi_r) \cdot b}{L_f}$$

L'aide au kilomètre vaut

$$dt = \frac{(\pi_f - \pi_r) \cdot c}{D_f}$$

où  $D_f$  est la somme des distances parcourues par les travailleurs pour venir à la firme

$$D_f = \sum_{x \in \text{travailleurs}} |x - x_f|$$

Le nouveau budget logement des salariés devient

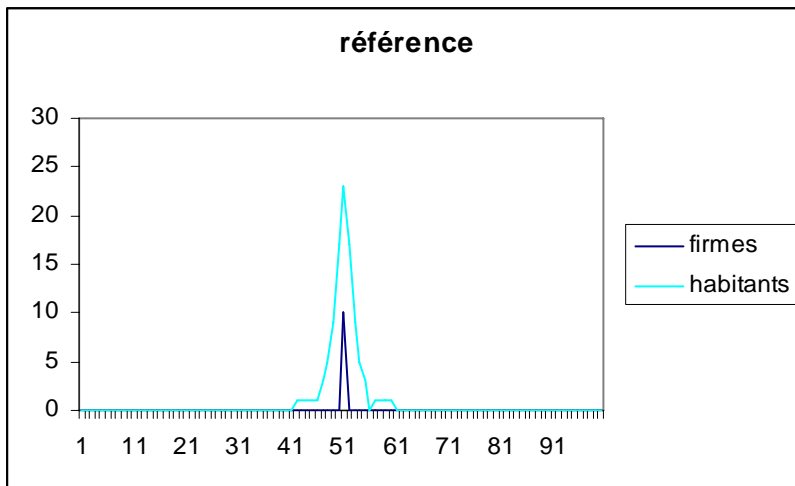
$$Y_h = Y_h^r + \frac{(\pi_f - \pi_r) \cdot d}{L_f}$$

Nous supposons de plus que le bilan et la réévaluation de ces sommes ne se fait qu'à chaque relocalisation.

Ici nous remettons à jour alternativement les firmes et les travailleurs, de façon qu'ils influent les uns sur les autres par leurs choix de localisation et l'effet sur les rentes.

### 1.4.2.2 Influence des différents paramètres

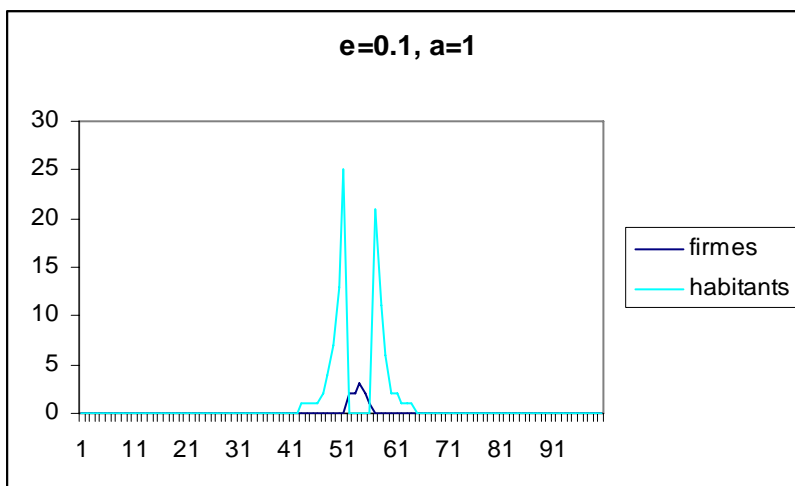
Nous partons d'une configuration mixte.



**Figure 58. Densités de référence des firmes et des habitants.**

a) Accroissement du financement des locaux des firmes ( $a > 0$ )

L'accroissement du budget logement des firmes conduit à une ségrégation spatiale. En effet les loyers payés par les firmes sont supérieurs à ce que sont prêts à payer les individus. Cette ségrégation permet aussi aux firmes de s'étendre ; leur distribution dépend uniquement des coûts de transports, sans la pression des travailleurs.



**Figure 59. L'accroissement du budget logement des firmes mène à une ségrégation spatiale.**

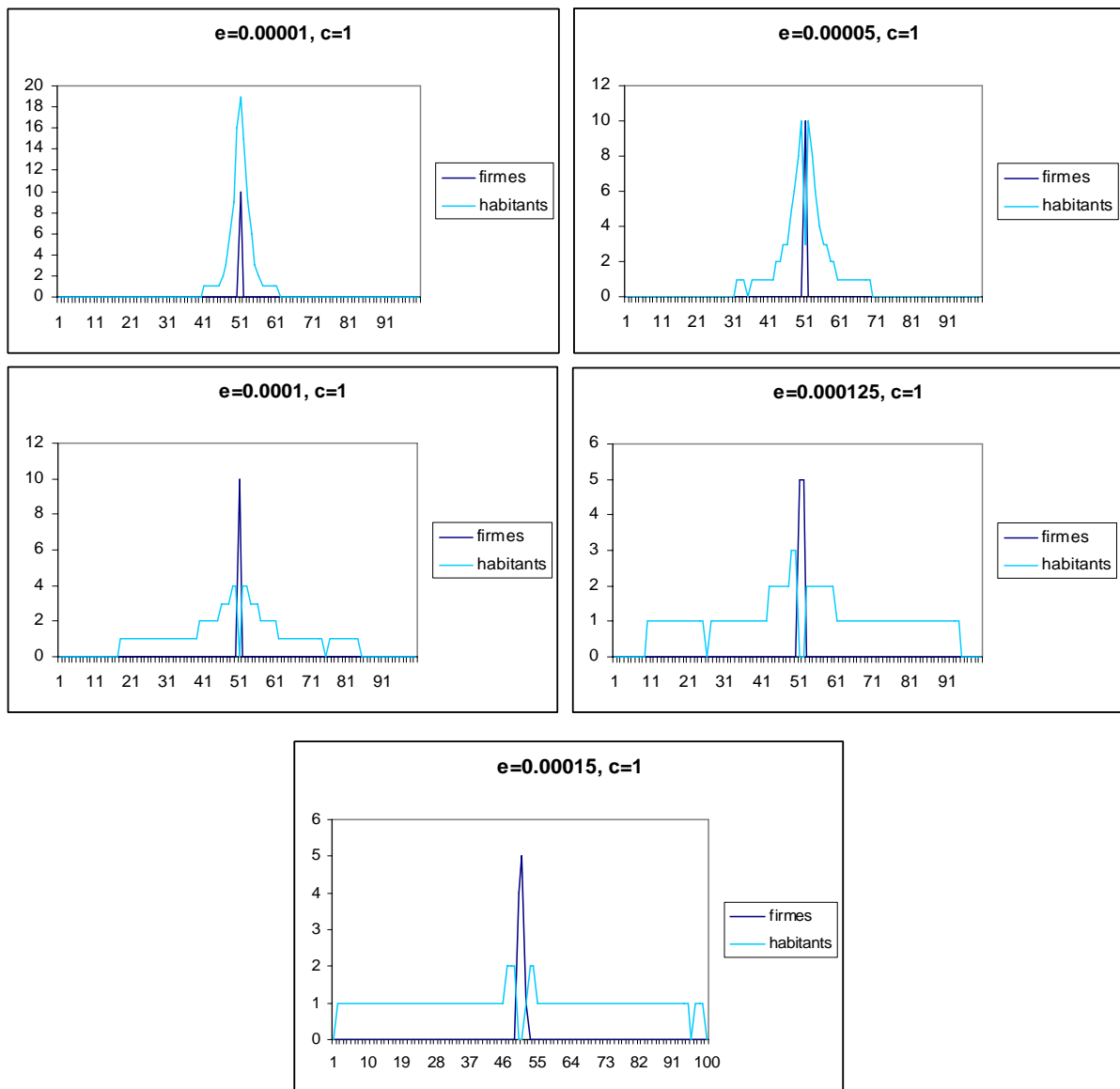
Cet effet dépend peu de la valeur du paramètre d'accroissement du budget.

b) Accroissement des salaires ( $b > 0$ )

En l'absence de choix explicite quant à l'utilisation du surplus de salaire, le seul effet observé est l'augmentation des utilités des individus.

c) Diminution des coûts de transport des salariés ( $c > 0$ )

Plus l'aide est importante, plus les travailleurs s'étendent en périphérie.

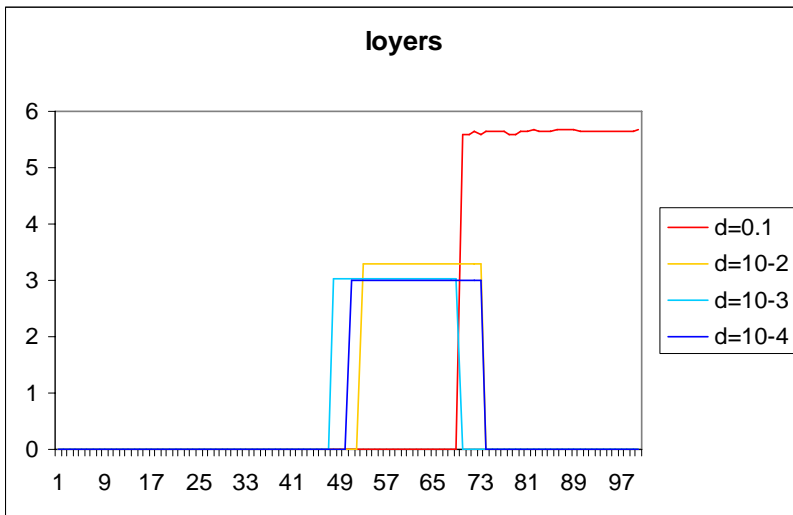


**Figure 60. L'accroissement de l'aide au transport favorise l'habitat en périphérie des travailleurs et par conséquent l'étalement des firmes.**

d) Accroissement du budget logement des salariés ( $d > 0$ )

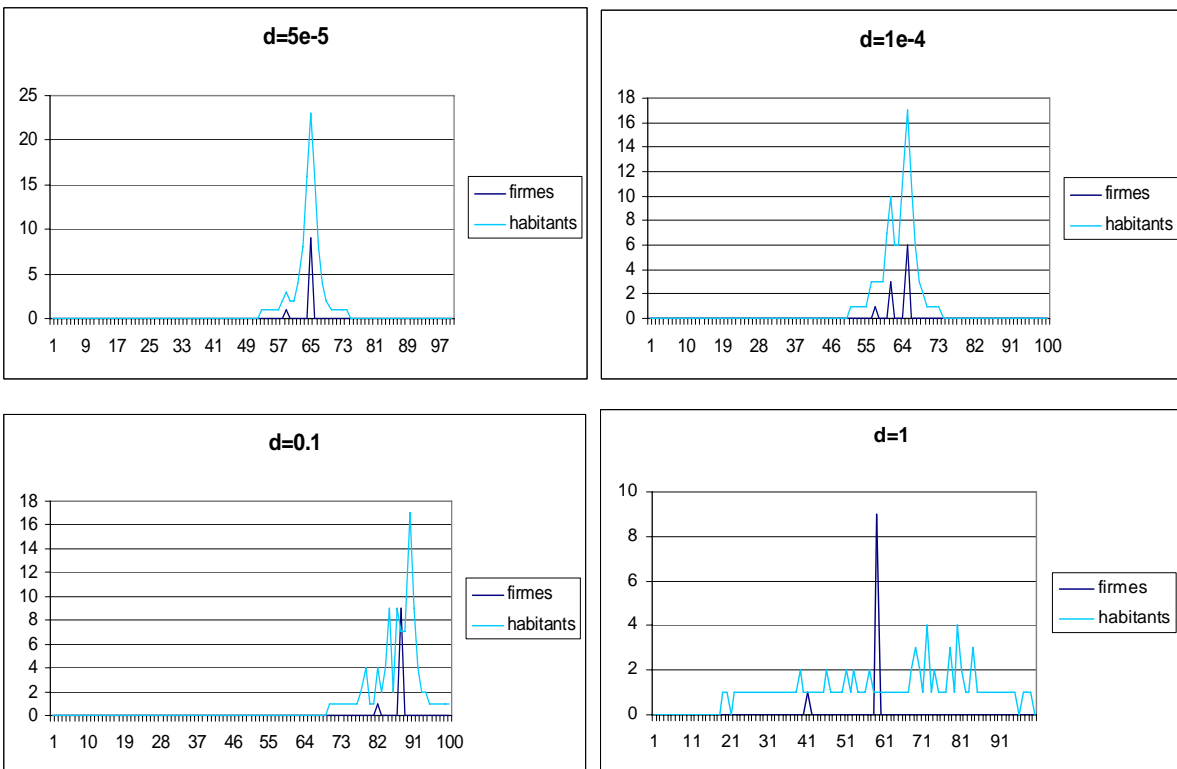
L'accroissement du budget logement des salariés, conduit à une augmentation générale des loyers.





**Figure 61. Loyers (sR) dans la ville en fonction du niveau de subventionnement du logement. L'accroissement des subventions conduit à une flambée des loyers.**

Cette augmentation du budget logement des individus favorise l'étalement de la ville vers des localités qui ne sont pas encore occupées et où les rentes sont moins élevées.



**Figure 62. Densités des firmes et des travailleurs dans la ville en fonction du niveau de subvention des logements. L'accroissement des subventions conduit à l'étalement des firmes et des travailleurs.**

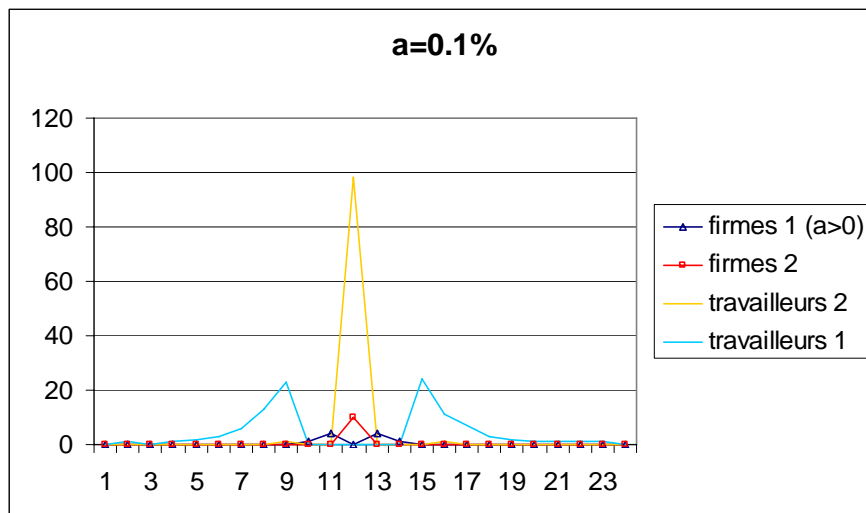
Cet étalement concerne les travailleurs, mais aussi les firmes, en raison de l'accroissement général des rentes. Ainsi les firmes sont amenées à former plusieurs centres, et éventuellement à quitter le centre géographique de la ville (pour d=0.1).

### 1.4.3 Deux types différents de firmes dans la ville

Dans la partie qui suit nous allons considérer des villes où coexistent plusieurs types de firmes, en termes de redistribution d'une partie de leurs profits. Pour commencer nous allons associer d'une part des firmes qui ne redistribuent rien de leur profit et d'autre part des firmes qui en redistribuent une partie sous différentes formes. Nous allons ensuite associer des firmes qui redistribuent une partie de leur profit sous des formes différentes.

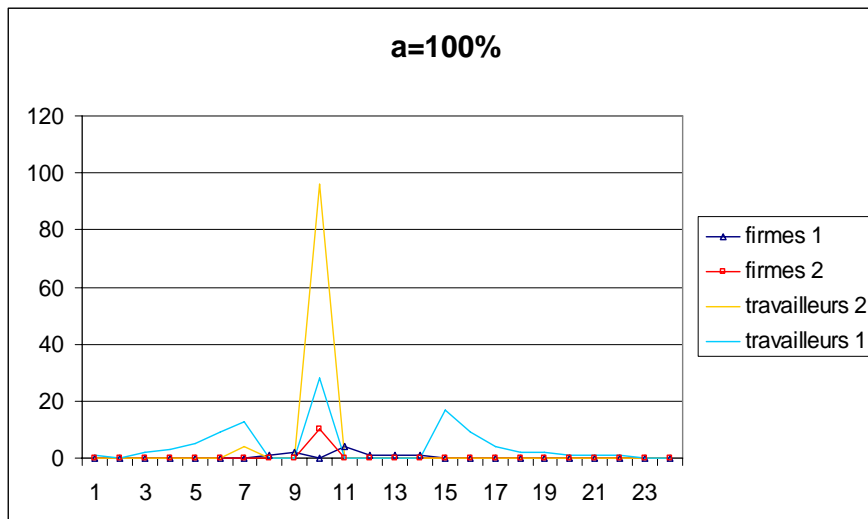
#### 1.4.3.1 Une des firmes accroît le financement de ses locaux

Lorsqu'une partie des firmes (de type 1) accroît le financement de ses locaux, elles font croître les loyers des localités qu'elles occupent, et où elles ne subissent dès lors plus la compétition ni des autres firmes, ni des travailleurs. Ces firmes peuvent occuper des locaux plus spacieux en dehors du centre. Leurs travailleurs se placent en périphérie. Ils ne subissent plus la concurrence des travailleurs de type 2. Inversement les autres firmes (de type 2) se concentrent au centre, ainsi que leurs travailleurs, auxquels l'implantation des firmes de type 1 interdit la proche couronne.



**Figure 63. Densité dans la ville pour deux types de firmes et leurs travailleurs lorsqu'une des deux firmes utilise une partie de son profit pour accroître le financement de ses locaux ( $a=0.1\%$ ).**

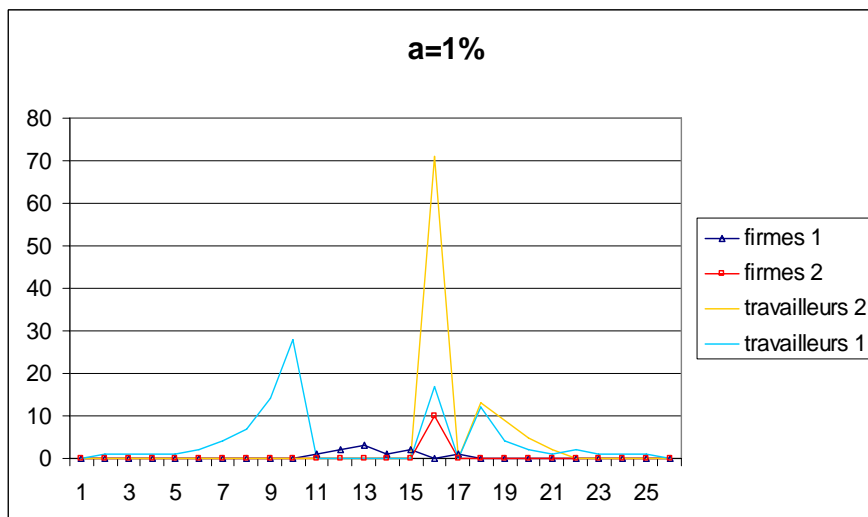
Plus le financement des locaux s'accroît, plus les firmes de type 1 s'étalent. En raison de l'accroissement des rentes qu'elles induisent, l'espace qu'elles occupent devient inaccessible pour les autres acteurs. Leur étalement affecte donc l'ensemble des densités.



**Figure 64. Densité dans la ville pour deux types de firmes et leurs travailleurs lorsqu'une des deux firmes utilise une partie de son profit pour accroître le financement de ses locaux. (a=100%)**

Nous pouvons ainsi observer qu'une partie des travailleurs de type 1 revient au centre de la ville pour être plus proches des firmes où ils travaillent. En effet la couronne des firmes repousse trop loin la périphérie qui leur serait financièrement accessible.

Dans les exemples précédents nous avons montré des configurations symétriques. Toutefois selon le hasard de l'ordre de relocalisation, des configurations asymétriques peuvent également émerger.



**Figure 65. Densité dans la ville pour deux types de firmes et leurs travailleurs lorsqu'une des deux firmes utilise une partie de son profit pour accroître le financement de ses locaux. Exemple d'une configuration asymétrique (a=1%).**

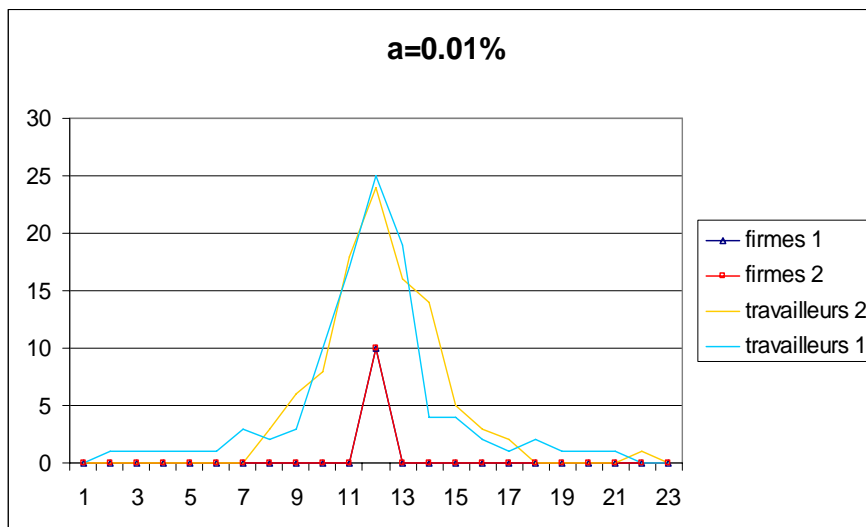
Dans le cas d'une configuration asymétrique des firmes, la concurrence pour l'espace entre les travailleurs des deux types diminue. Chaque type de travailleurs préfère le côté choisi par le type de firmes où ils travaillent. Ainsi les travailleurs de type 2 peuvent se localiser en partie à la périphérie et cessent d'être tous au centre.

Pour conclure nous pouvons observer pour ces configurations composites que non seulement les paramètres du modèle mais encore le hasard de l'ordre de relocalisation influence la configuration finalement obtenue.

#### 1.4.3.2 Une des firmes subventionne le transport de ses employés

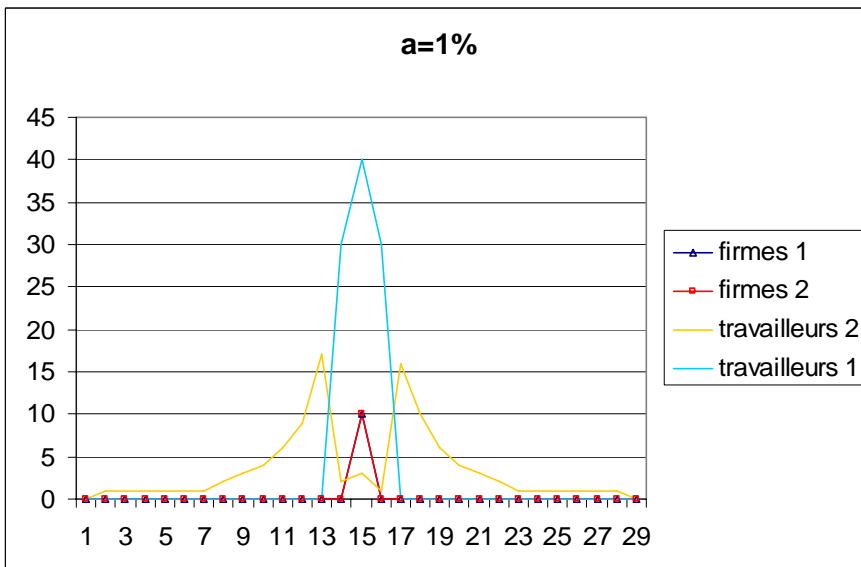
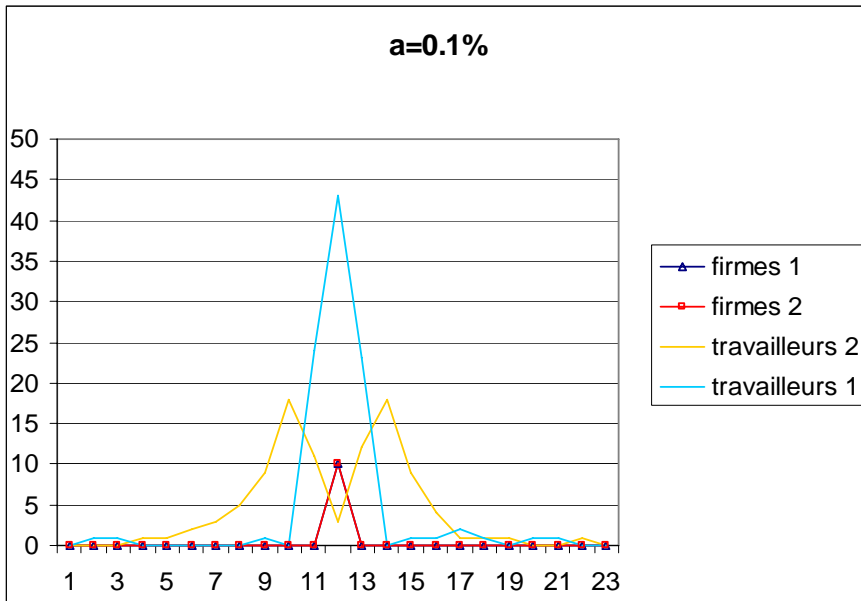
A présent les deux types de firmes se concentrent au centre pour minimiser leurs coûts d'interactions. Il apparaît que le niveau de subvention des firmes 2 à leurs employés n'affecte pas leur propre position dans la ville mais seulement celle de leurs employés.

Lorsque la subvention est négligeable les densités des travailleurs des deux types de firmes sont proches.



**Figure 66. Densités pour deux firmes, dont l'une subventionne faiblement le transport de ses travailleurs, et de leurs travailleurs.**

Toutefois lorsque la subvention pour le transport croît, les travailleurs de type 2 peuvent choisir la périphérie, où la surface par logement est plus grande en raison d'une demande moins forte (les travailleurs de type 1 préférant le centre).



**Figure 67. Densités dans la ville pour deux types de firmes et leurs travailleurs lorsqu'un des types (le type 2) de deux firmes subventionne le transport de ses travailleurs. L'accroissement des subventions favorise la localisation des travailleurs en périphérie.**

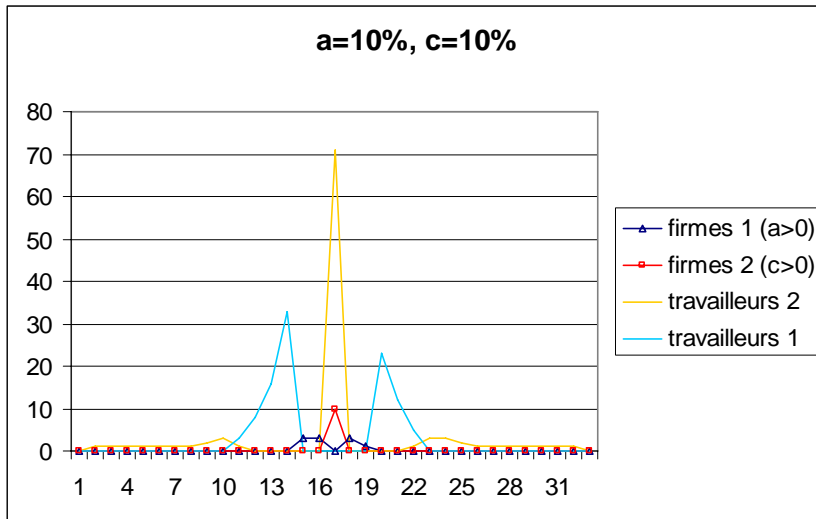
Plus les subventions au transport croissent et plus les travailleurs de type 2 peuvent s'étendre en périphérie et délaisser le centre. Ceci permet aussi aux travailleurs de type 1 d'occuper plus de localités au centre.

#### 1.4.4 L'une des firmes dépense plus pour ses locaux, l'autre subventionne le transport de ses travailleurs

Nous considérons à présent une ville avec deux types de firmes : l'un utilise une partie de son profit pour accroître le loyer qu'il est prêt à payer pour ses locaux, l'autre l'utilise pour subventionner le transport de ses employés.

#### 1.4.4.1 Apparition de plusieurs cercles concentriques

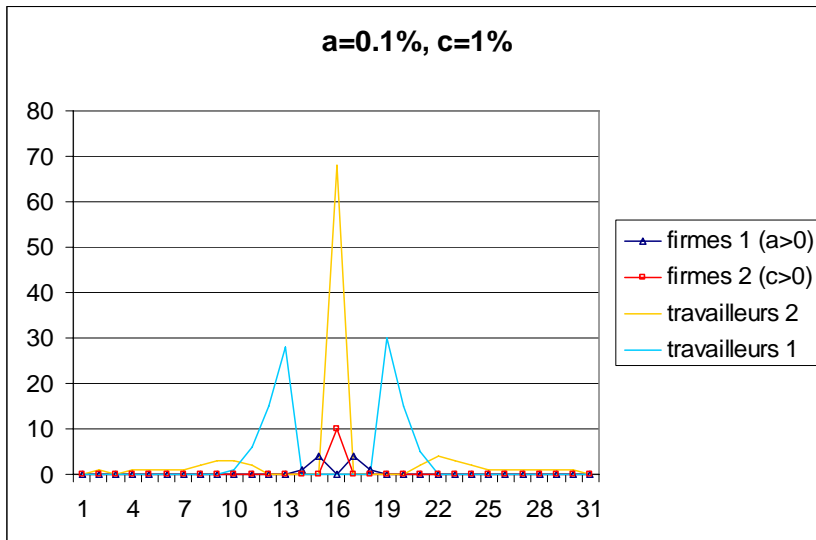
Nous observons une configuration semblable à celle obtenue en 1.4.3.1. Toutefois les subventions de transport pour les travailleurs 2 leur permettent à présent de gagner aussi la périphérie plus lointaine. Nous nous retrouvons ainsi avec quatre cercles concentriques qui sont de trois types : firmes (2) + travailleurs (2) au centre, puis firmes (1) seules, et enfin travailleurs (1 ou 2) seuls.



**Figure 68. Densités des firmes et travailleurs lorsque les profits sont utilisés pour les locaux des firmes (firmes 1) ou pour subventionner le transport des travailleurs (firmes 2).**

#### 1.4.4.2 L'accroissement relatif des subventions de transport favorise la localisation en périphérie

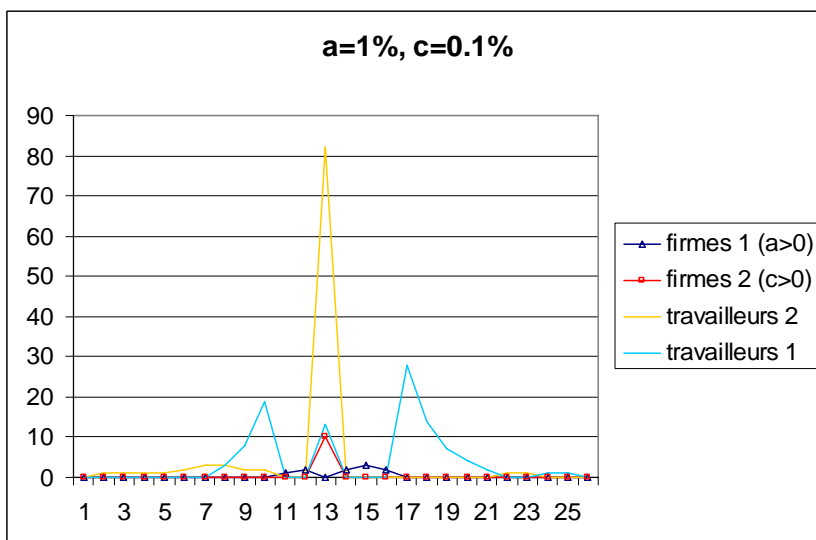
Nous observons à présent ce qui passe lorsque la part de profit utilisée pour subventionner les coûts de transport est supérieure à celle utilisée pour le financement des locaux.



**Figure 69.** Densités des firmes et travailleurs lorsque la part de profit utilisée pour subventionner les coûts de transport est supérieure à celle utilisée pour le financement des locaux.

*1.4.4.3 L'accroissement relatif du financement des locaux favorise la concentration des travailleurs*

Ici nous testons une part de profit plus grande pour le financement des locaux des firmes 1, que pour le subventionnement du transport des travailleurs 2.

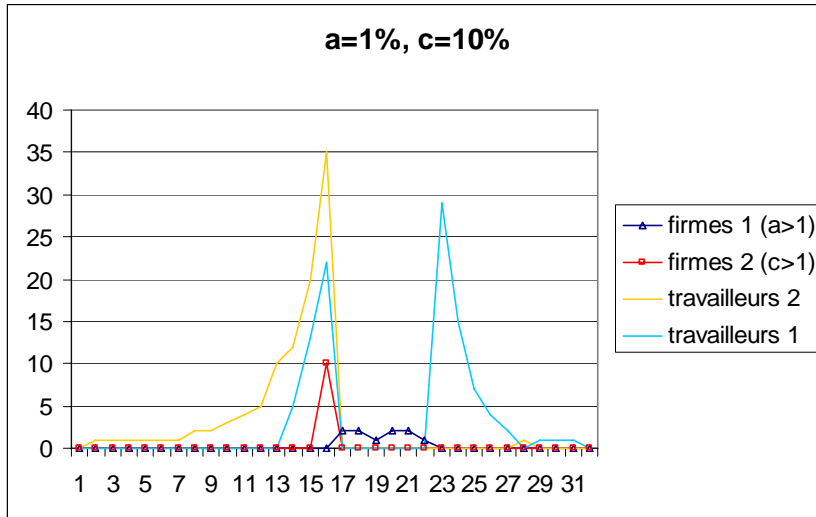


**Figure 70.** Accroissement relatif de la part de profit dédiée au financement des locaux des firmes de type 1.

Lorsque la part de leur profit utilisée par les firmes 1 pour le financement de leurs locaux dépasse les subventions des firmes 2 pour le transport de leurs travailleurs, l'accroissement de la couronne occupée (exclusivement) par les firmes 1 ramène les travailleurs 2 au centre, les coûts de transports rendant difficile le choix d'une périphérie devenue lointaine. De façon similaire le centre devient aussi plus attractif pour les travailleurs 1 dont la firme est proche du centre.

#### 1.4.4.4 Configuration asymétrique

Ici ainsi que précédemment, le hasard de l'ordre des remises à jour peut favoriser l'apparition d'une configuration asymétrique.



**Figure 71. Exemple d'une configuration asymétrique.**

La configuration asymétrique des firmes évite la formation d'un centre pour les travailleurs. En particulier si les travailleurs 1 continuent à former une couronne (asymétrique) autour de leurs firmes, les travailleurs 2 dont le transport est subventionné, préfèrent s'étendre d'un seul côté, où la demande est moins forte.

#### 1.4.5 Conclusion

La coexistence de firmes et de travailleurs conduit à des équilibres plus subtils où non seulement leurs liens d'interactions directes (salaires) mais aussi la concurrence pour l'espace, ainsi que l'ordre des relocalisations jouent sur la formation des densités.

Nous avons considéré différentes formes de redistribution du gain en profit des firmes provenant d'un rapprochement géographique facilitant leurs interactions. Nous avons notamment testé l'accroissement du poste budgétaire consacré au financement des locaux des firmes, le subventionnement des logements de leurs travailleurs ou de leurs coûts de transport.

Enfin nous avons cherché à comprendre la position relative dans la ville de firmes différant par leurs choix de redistribution de leur profit, et à comprendre la localisation de leurs travailleurs. Les choix de redistribution du profit affectent directement soit la rente, soit les choix de localisation des firmes et/ou des travailleurs et influencent dès lors fortement les densités observées de l'ensemble des firmes et des travailleurs.

Enfin nous avons pu observer que le hasard de l'ordre des relocalisations, en favorisant soit la symétrie, soit l'asymétrie des firmes pouvait conduire à des configurations très différentes.



## 1.5 Conclusion

---

Nous avons cherché à comprendre l'influence de différents niveaux de détail de modélisation de certains facteurs de formation de la rente et de la densité. Nous avons étudié en particulier le rôle des interactions entre individus, la différence de revenus et de coûts de transport.

L'approche agent a permis de mieux comprendre les modèles agrégés et de les étendre vers plus de réalisme. En particulier cette approche nous a permis d'étudier de façon plus fine l'influence des interactions et de coûts de transports hétérogènes sur les densités et les rentes.

Nos études successives nous ont permis une complexification progressive des configurations étudiées. Ceci nous a permis d'étudier séparément l'influence de chaque facteur d'influence et d'hétérogénéité sur l'équilibre obtenu et donc une qualification plus claire des facteurs d'influence qu'il est important de modéliser finement.

## 2 Modèle de ville avec propriétaires et locataires

---

L'enjeu est de créer un modèle de base qui permet de tester des hypothèses sur les villes, les agents et leurs interactions. Un certain nombre d'éléments font partie de tous ces modèles, d'une part les agents de base - les propriétaires, les locataires - et, bien sûr, l'environnement (bâtiments, logements, réseau routier..).

Dans une première section nous présentons le modèle générique. Dans les deux sections suivantes nous étudions les résultats de deux modèles particuliers, l'un dans lequel les emplois sont tous localisés au centre, l'autre appelé « modèle de sociabilité » où chaque individu va visiter tous les autres. Nous décrivons brièvement dans une section suivante la mise en œuvre du modèle générique. Enfin, nous terminons par une section consacrée aux perspectives pour la suite de ce travail.

### 2.1 Le modèle générique

---

Le modèle décrit ci-dessous comprend des propriétaires et des locataires homogènes mais l'application informatique laisse la possibilité de les complexifier progressivement. L'environnement bâti est, pour l'instant, une simple grille en deux dimensions. Dans le modèle actuel, chaque case est un logement et tous les logements sont identiques et de capacité un. Ces logements peuvent être occupés par des agents qui s'appellent des locataires, qui ne sont pas propriétaires de leurs logements.

Un certain nombre de locataires fixé à  $n_p$  quittent la ville à chaque itération. D'autres habitants potentiels arrivent et choisissent parmi les logements vides ceux dont l'utilité est maximale pour eux.

#### 2.1.1 Utilité

---

Dans la version actuelle, tous les locataires (réels ou potentiels) et les logements sont tous identiques. L'utilité d'un logement pour un locataire est donnée par,

$$U = R - X - T - L$$

où

R = Revenu (valeur par défaut = 1000)

X = Dépenses minimales autres que le transport et le logement (valeur par défaut = 200)

T = Coût de transport

L = Loyer.

Le choix du locataire est déterminé par cette utilité.

En ce qui concerne le coût de transport T, deux formes de déplacement quotidien des habitants ont été étudiées : premièrement, les seuls déplacements requis résultent du besoin d'aller du logement au centre de la ville pour travailler (section 2.2) ; deuxièmement, les

déplacements requis résultent du besoin d'aller visiter l'ensemble des habitants de la ville (section 2.3). Le coût de transport est toujours linéaire en distance kilométrique.

### 2.1.2 Mécanisme du modèle

---

A chaque itération

- Un certain nombre de locataires  $n_p$ , choisis au hasard, quittent la ville.
- Un certain nombre d'agents arrivent dans la ville : ces nouveaux arrivants choisissent parmi les logements disponibles. Ce nombre est égal à  $n_p+1$ , de manière à provoquer une concurrence pour les logements disponibles, afin d'enclencher un processus dynamique d'interaction conduisant *in fine* à une situation d'équilibre.
- Les propriétaires des logements vides ajustent les loyers en fonction de la demande.

Les nouveaux arrivants choisissent parmi les logements vides ceux dont l'utilité est supérieure à zéro. Ce choix est probabiliste, la probabilité de choisir un logement  $i$  étant donné par

$$P_i = \frac{e^{U_i/\theta}}{\sum_j e^{U_j/\theta}}$$

où  $\theta$  est un paramètre qui détermine la sensibilité des agents aux différences entre les utilités des logements disponibles.

Le mécanisme d'ajustement du loyer génère les loyers de manière endogène à partir de l'offre et la demande.

Dès qu'un locataire part, le propriétaire a la possibilité de changer son loyer. Ce loyer est décidé en considérant le nombre d'agents qui se sont montrés intéressés la dernière fois que le logement était libre. Nous imaginons que chaque agent qui s'intéresse à un logement laisse un « caillou » symbolique, et donc que chaque propriétaire dispose d'un nombre de cailloux, éventuellement nul, pour chaque logement.

Si un logement est vide et que personne ne s'y intéresse, le loyer diminue d'un certain facteur  $F$ .

$$l_{i+1} = l_i * F$$

où,

$l_i$  = loyer à l'itération  $i$ .

$F$  le pourcentage de réduction du loyer des logements vides non demandés.

Si seulement un agent s'est montré intéressé la dernière fois que le logement a été disponible sur le marché, le loyer reste inchangé.

Si plusieurs agents ont été intéressés, la formule suivante est utilisée:

$$l_{i+1} = l_i * (1 + C/D)$$

où

$l_i$  = loyer à l'itération  $i$ .

$C$  = le nombre de cailloux reçu pour ce logement

$D$  = le paramètre d'augmentation du loyer.

## 2.2 Un modèle d'emplois localisés au centre

---

Nous examinons d'abord un modèle où tous les emplois sont situés au centre et le coût de transport d'un agent est seulement le coût d'aller au centre pour travailler. Les loyers de l'équilibre dépendent donc seulement de la distance  $r$  au centre.

Le rayon de la ville est facilement calculé car il est égal à la distance au centre pour laquelle le coût de transport est égal au revenu, le loyer et l'utilité étant nuls.

A l'équilibre, les utilités pour tous les habitants doivent être constantes, sinon un habitant peut gagner en changeant de logement. En incluant le niveau de dépense minimale  $X$  pour chaque habitant dans la définition de leur utilité, cette constante est zéro.

$$U(r) = 0 \quad \forall r$$

Au bord de la ville, le loyer  $L(r_{\max}) = 0$ . Mais

$$U(r) = R - X - L(r) - T(r)$$

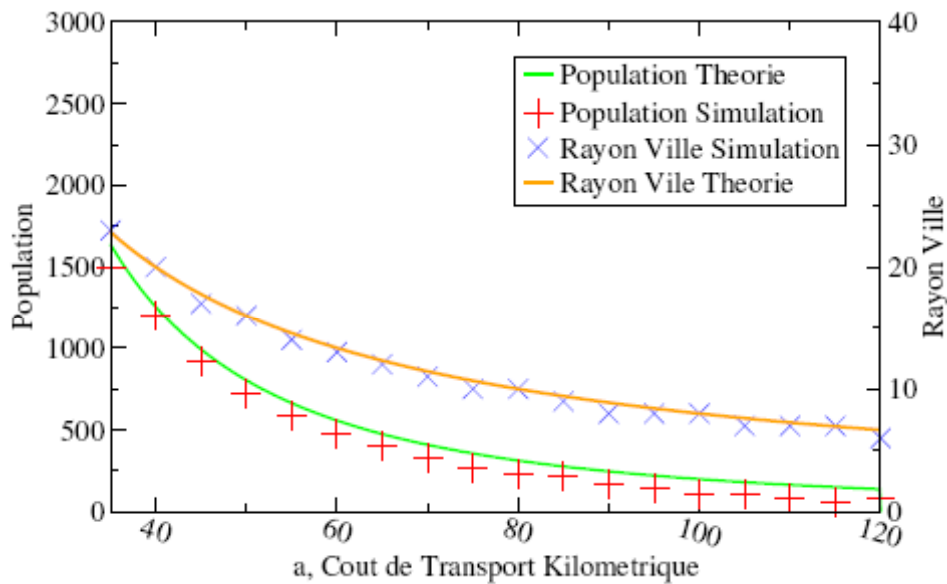
où,  $T(r) = a * r$  est le coût d'aller au centre,  $a$  étant le coût de transport kilométrique.

Donc au bord de la ville  $R - X = a * r_{\max}$

soit avec nos paramètres de défaut,

$$r_{\max} = \frac{800}{a}$$

La population de la ville est  $N = \pi * r_{\max}^2$



**Figure 72 : Comparaison entre la théorie et la simulation pour le rayon de la ville.**

Les paramètres pour la simulation ont été :  $R=1000$ ,  $X=200$ ,  $T = a*0.05$ ,  $n_p=20$ ,  $\theta = 10$ ,  $F=1$  et  $D=20$ .

Comme le montre la Figure 72, il y a un bon accord entre la théorie et la simulation pour le rayon de la ville. Cependant, l'équilibre que l'on atteint pour la population avec notre modèle dynamique ne correspond pas rigoureusement à celui du modèle statique. La taille de la ville est la même, mais la population est inférieure.

Pourquoi la population de l'équilibre dynamique reste inférieure à celle de l'équilibre statique ? Notre mécanisme d'ajustement des loyers par rapport à l'offre et la demande ne peut pas atteindre un équilibre des loyers sans nécessiter en permanence un certain nombre de logements vides à l'intérieur de la ville. Ceci est le cas parce que, si chaque logement était occupé dès qu'il était mis sur le marché, les loyers ne cesseraient d'augmenter, éloignant ainsi le système de l'équilibre. La nécessité d'un certain nombre de logements vides est d'ailleurs un effet pertinent quand on observe la réalité du marché du logement.

Les loyers individuels sont toujours en train de s'ajuster à la demande constatée, mais ces micro ajustements laisse la forme globale des loyers inchangée. Dans la Figure 73, nous voyons que le loyer descend linéairement avec la distance au centre.

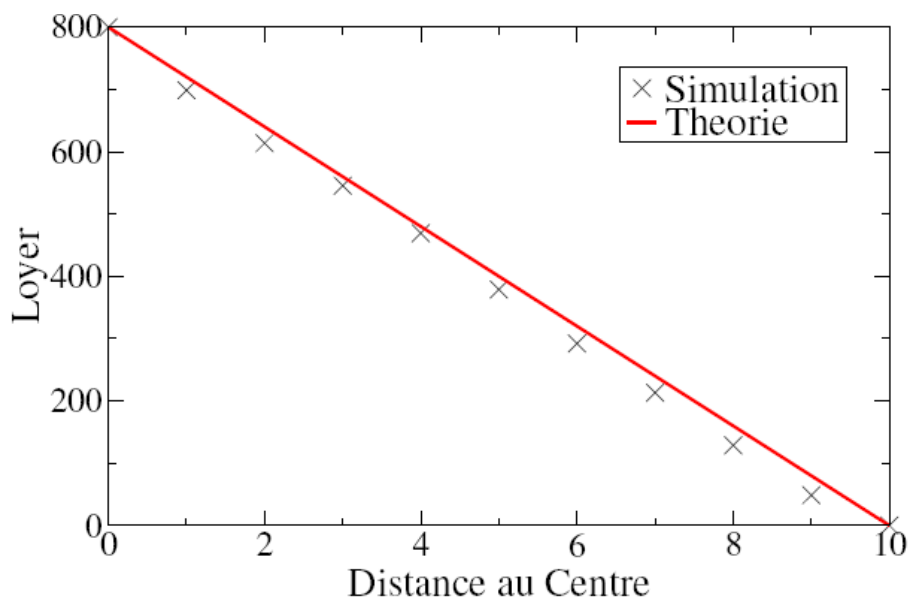


Figure 73 : Forme du loyer dans la ville. .

## 2.3 Un modèle de sociabilité

Dans le précédent modèle, le centre de la ville était considéré comme exogène avec les emplois au centre. Ici on essaye de faire émerger une ville dans un espace homogène. Cette agglomération va découler des gains liés à la proximité des individus les uns aux autres. Le coût de transport quotidien est ici le coût de transport pour visiter tous les autres habitants de la ville.

Nous avons établi l'existence d'un équilibre de population pour chaque jeu de paramètres mis dans le modèle : nous définissons cet équilibre comme la configuration où l'utilité est nulle ou presque, partout dans la ville. Hors de la ville les utilités sont négatives.

A partir de cet équilibre, la population restera constante ainsi que le loyer total demandé. En réalité il y aura toujours des micro ajustements dans les configurations des logements occupés, les loyers demandés et la population totale (cf. Figure 79).

La formule pour le changement du loyer total d'une itération  $i-1$  à la prochaine  $i$  est :

$$\Delta L = L_i - L_{i-1} = \sum_{j=1}^{n_p} l(j)_{i-1} * (C/D) - \sum_{j=1}^{n_v} l(j)_{i-1} * F$$

où,

$L_i$  = le loyer total à itération  $i$

$n_p$  = le nombre des locataires qui part à chaque itération

$n_v$  = le nombre des logements vide à la fin d'un itération

$D$  = le paramètre d'augmentation du loyer

$C$  = le nombre de cailloux

$l(j)$  = le loyer du logement  $j$

$$n_v = T_V - N + n_p - n_a \delta$$

où

$T_V$  = nombre de logements dans la ville

$N$  = la population au début de l'itération

$n_p$  = le nombre de locataires qui partent

$n_a$  = le nombre de locataires qui arrivent

et  $\delta$  est la fraction des arrivants qui trouvent un logement.

Donc quand  $\Delta L = 0$  et  $\bar{U} \approx 0$  la ville a atteint un équilibre. Dans sa conception actuelle, le modèle arrive à trouver un équilibre de population qui dépend des paramètres du modèle qui sont:

$T_V$  La taille maximale de la « ville »

$n_p$  Le nombre des agents qui partent à chaque itération

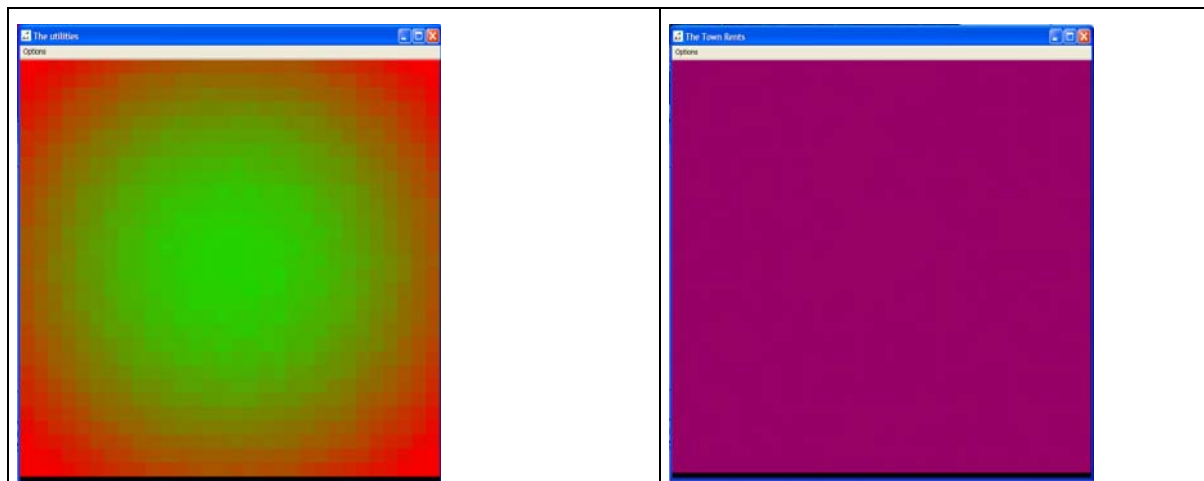
$F$  Le pourcentage de réduction du loyer des logements vides

$T$  Le coût de transport

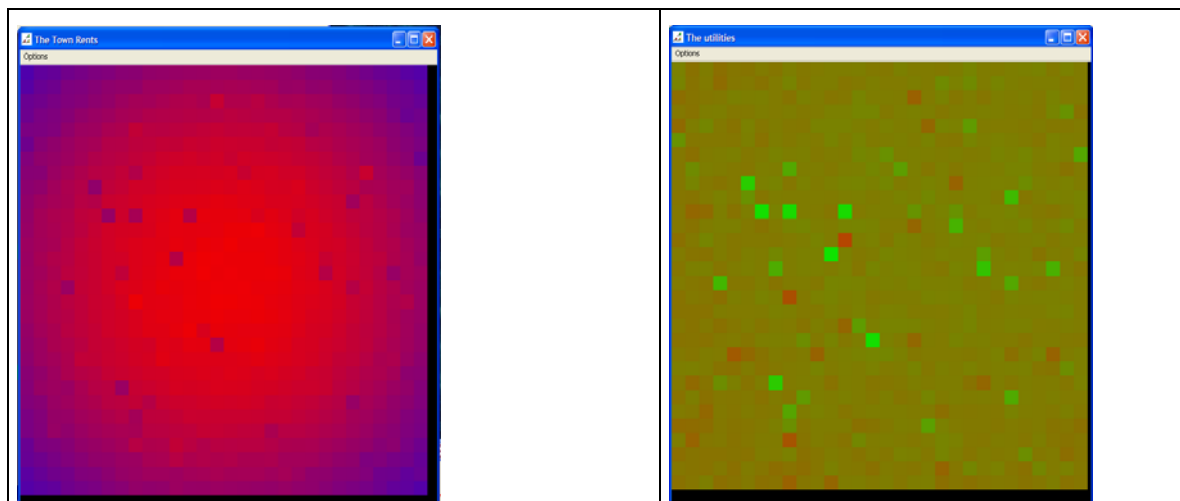
$D$  Le facteur d'augmentation du loyer

$\theta$  La sensibilité des agents aux différences d'utilité

La simulation commence avec des loyers homogènes et, au fur et à mesure que la simulation avance, la différence qui existe dans les coûts de transport entre le centre et la périphérie se traduit par une différence de loyer. De ce fait les utilités deviennent homogènes, ce qui constitue notre définition de l'équilibre (cf. Figure 74 et Figure 75).



**Figure 74 : (a) Utilités initiales pour une distribution des locataires au hasard. (b) Loyers initiaux.**



**Figure 75 : A l'équilibre (après 300 itérations), (a) Les utilités des logements (b) la distribution des loyers.**

Pour chaque jeu de paramètres il y a un équilibre pour la taille de la population autour de laquelle cette dernière oscille (cf. Figure 76). Regardons de plus près la condition d'équilibre,

$$\sum_{j=1}^{n_p} l_{i-1}(j) * (C / D) = \sum_{j=1}^{n_v} l_{i-1}(j) * F$$

Nous pouvons, en l'examinant, déterminer l'effet de l'ajustement d'un paramètre donné sur l'équilibre. En première approximation si  $n_p$  augmente il y a plus de termes à gauche et la valeur moyenne de  $C$  (le nombre des cailloux pour un logement) augmente. Pour retrouver l'équilibre il faut que la population baisse pour augmenter  $n_v$  qui est le nombre de logements vides pour lesquels le loyer diminue.

La compréhension des effets de tous les paramètres du modèle est notre sujet d'étude actuel.

Les paramètres pour la simulation ont été :  $R=1000$ ,  $X=200$ ,  $T = (\text{distance totale parcourue}) * 0.05$ ,  $T_V = 441$ ,  $n_p=20$  (par défaut),  $\theta = 10$ ,  $F=1$  et  $D=20$ . On présente les populations moyennes et le loyer moyen payés à l'équilibre pour une gamme de valeurs de populations initiales (cf. Figure 76) et de flux partant  $n_p$  (cf. Figure 77). Il est clair que les loyers et la population à l'équilibre ne dépendent pas de la population initiale.



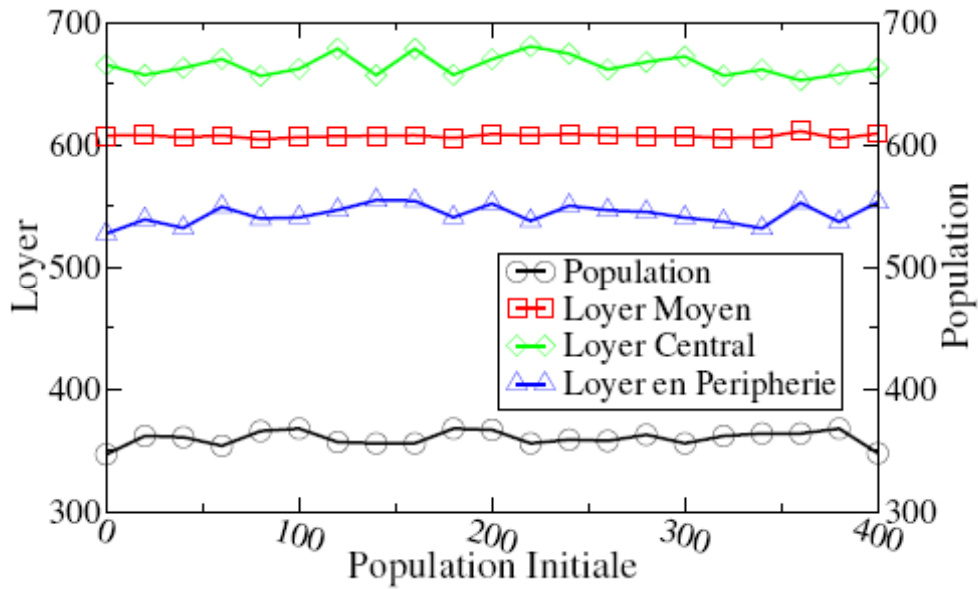


Figure 76 : Equilibre pour différentes valeurs de population initiale.

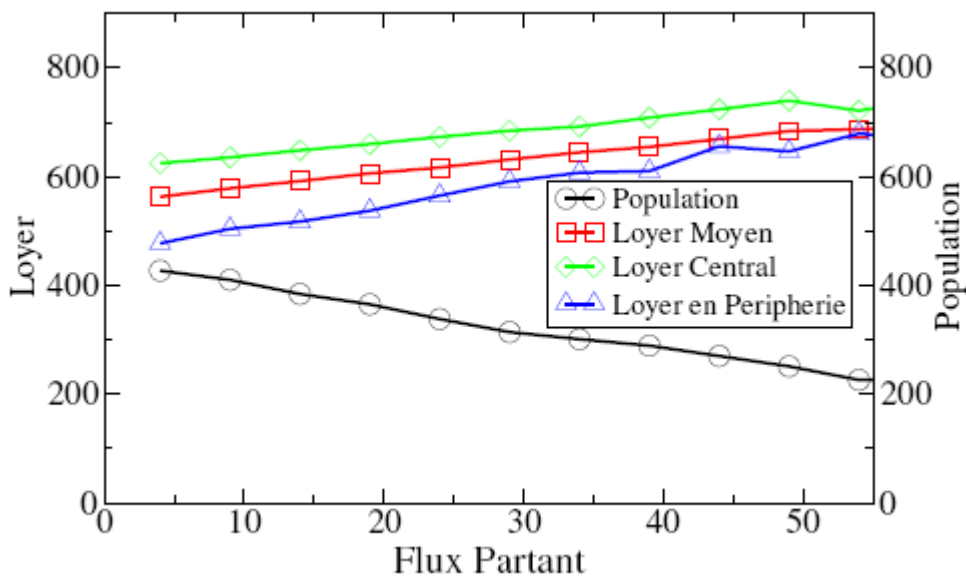


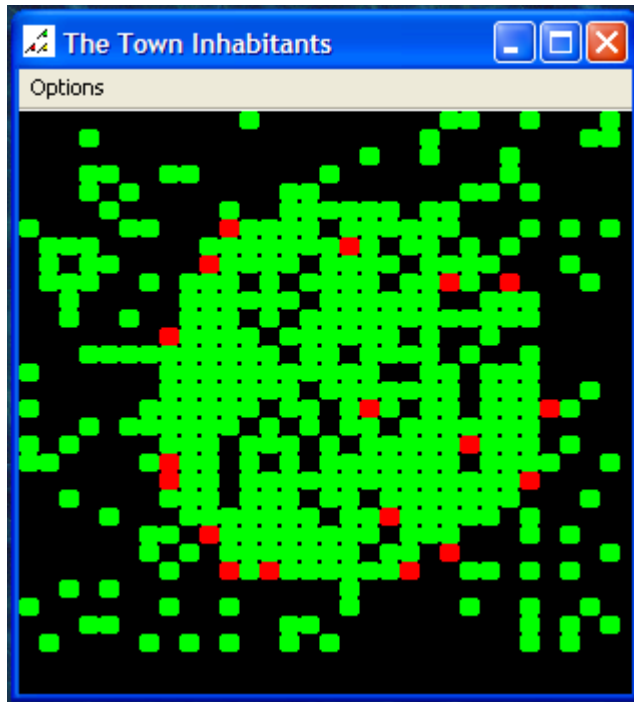
Figure 77 : Equilibre pour différents flux partant.

## 2.4 L'application informatique:

Afin de bien analyser le modèle, il faut non seulement que l'application informatique soit fidèle à la conception du modèle mais que les sorties soient configurées pour donner une compréhension profonde du modèle.

Ce modèle a été construit avec la plate-forme multi-agent « REPAST » qui est une bibliothèque en Java. Le modèle a plusieurs sorties graphiques qui aident à comprendre ses comportements. Il existe actuellement trois sorties en deux dimensions :

- une qui montre les logements occupés avec les nouveaux arrivants différenciés par couleurs (cf. Figure 78),
- un deuxième pour les loyers dans la « ville »,
- un troisième pour les utilités des logements.

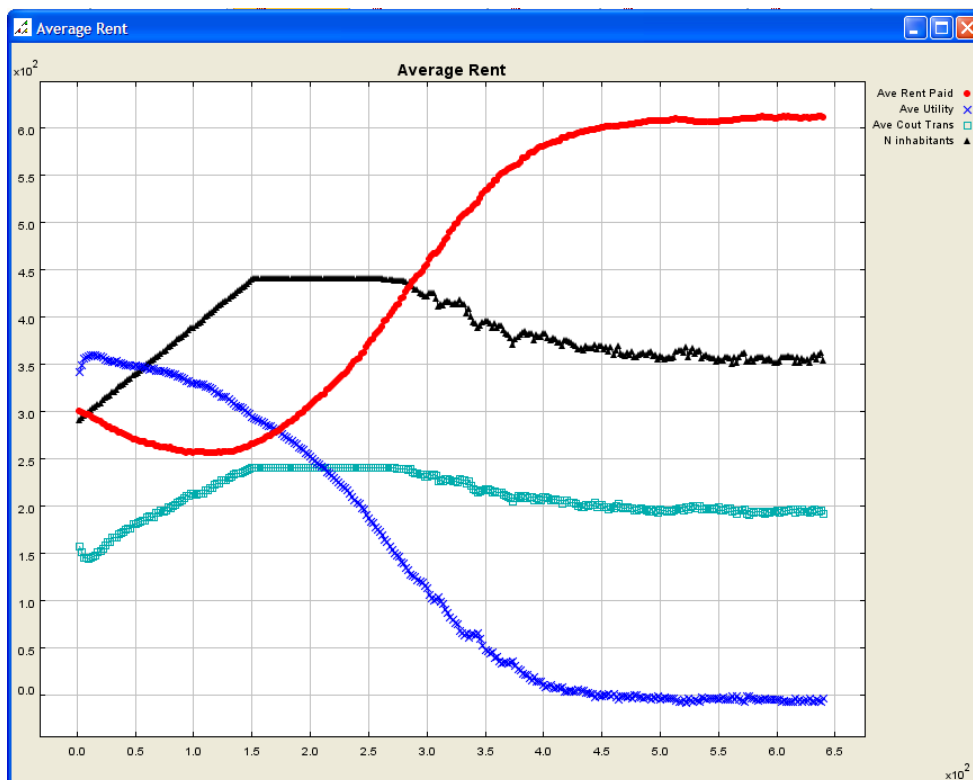


**Figure 78 : Image d'écran de la « ville ». Les logements occupés sont en vert les nouveaux arrivants sont rouges.**

En plus des sorties graphiques classiques, l'affichage de résultats agrégés intéressants a été créé, comme par exemple :

- la taille de la population,
- le loyer moyen,
- le coût total de transport,
- l'utilité moyenne,
- l'écart maximal de loyer/ utilité/ coût de transport.

Par exemple, la Figure 79 montre, au fil des itérations (en abscisse), les évolutions (en ordonnée) du loyer moyen, de l'utilité moyenne, du coût de transport moyen et de la population. Quand l'utilité moyenne arrive à zéro, le modèle a atteint un équilibre.



**Figure 79 : Image d'écran des valeurs moyennes**

Il est aussi commode de pouvoir suivre des logements individuels. On peut afficher pour des logements particuliers :

- les utilités,
- les coûts de transports,
- les loyers demandés.

Toutes les sorties sont remises à jour en temps réel pendant la simulation.

## 2.5 Perspectives

Nous avons créé un modèle d'équilibre entre loyers et coûts de transports. Le modèle actuel des loyers formés à partir de la demande des locataires est bien compris et robuste. Nous avons établi l'existence d'un équilibre de population pour chaque jeu de paramètres mis dans le modèle, et le modèle converge avec le modèle théorique dans le cas du modèle avec emplois localisés au centre.

Nous concevons le modèle actuel comme étant une base de prototypes potentiels, et sommes en train d'évaluer les pistes les plus prometteuses pour la suite.

Au niveau informatique, nous allons améliorer le programme en ajoutant des possibilités de complexifier le modèle. Ces travaux peuvent être conçus comme la création de modules inter-opérationnels qui seront disponibles pour la construction de prototypes. Ils peuvent contenir entre autres:

- des coûts de transports anisotropes,
- des densifications différenciées,

- des réseaux sociaux entre agents,
- des localisations d'emplois endogènes,
- des locataires partant en fonction de leur utilité,
- une hétérogénéité d'habitants en fonction des revenus ou des préférences pour l'espace.

## 3 Modèle individu-centré de la congestion routière

---

Les bouchons sont un phénomène important pour le transport en ville ; ils influent sur les choix modaux et à plus long terme sur la localisation des activités. Les premiers modèles de transport statiques ne permettaient pas de simuler le choix de l'heure de départ, qui représente un degré de liberté individuel important. Les modèles actuels le simulent d'une manière agrégée. Ces modèles de transport routier en ville, qui ne sont pas individu-centrés, souffrent de problèmes de stabilité. Il est très difficile de faire des prédictions ou des comparaisons avec la réalité à partir d'un modèle qui a des instabilités beaucoup plus grandes que celles qui sont observées. Nous avons exploré, avec un modèle simple, la possibilité de recourir à des simulations multi-agents pour nous affranchir de ces problèmes d'irréalisme et d'instabilité.

Nous étudions l'effet du choix de l'heure de départ sur la formation des bouchons, en tenant compte des coûts à la fois de trajet et de ne pas arriver à l'heure. Il s'agit d'un modèle simple avec une seule route mais qui peut servir comme une brique élémentaire pour l'étude d'un réseau. L'équilibre de Nash de ce modèle se définit comme la configuration où personne n'a intérêt changer son heure de départ. Les mécanismes de comportement qui peuvent mener à cet équilibre n'ont pas été abordés par les premières études et, au moins à la connaissance des auteurs, n'ont pas été étudiés par un modèle individu-centré. Le but de ce travail consiste à déterminer des comportements individuels réalistes qui puissent permettre d'atteindre cet équilibre global.

Il y a deux motivations importantes pour l'étude des dynamiques individuelles qui peuvent mener à cet équilibre. Premièrement, est-ce que l'équilibre analytique peut être reproduit par le modèle individu-centré ? Ceci est un test du réalisme du modèle analytique. Deuxièmement, est-ce que le modèle individu-centré peut être utilisé pour simuler des situations plus complexes pour lesquelles nous n'avons pas de solution analytique ?

Nous montrerons que le système évolue vers l'équilibre sous certaines conditions. Le comportement global du système change qualitativement quand les agents sont hétérogènes au lieu d'être homogènes.

Dans la première section, nous introduisons le modèle et présentons l'équilibre analytique. Dans la première partie de la deuxième section, nous discutons les résultats obtenus avec des agents homogènes et analysons les oscillations observées. Dans la deuxième partie, nous étudions l'influence de l'hétérogénéité. Nous présentons, avec l'aide d'un graphe, l'espace des paramètres qui mène à un macro comportement stable.

Enfin, en annexe, nous complétons le matériel des deux premières sections et discutons l'effet des seuils et réseaux sociaux.

### 3.1 Modèle et équilibre analytique

---

Dans ce modèle, un nombre fixe de gens doivent passer par la même route chaque matin pour se rendre à leur lieu de travail. Tout le monde veut arriver à la même heure que nous notons  $t^*$ . Les voyageurs ont comme seul choix celui de leur heure de départ.

Le phénomène de congestion est modélisé comme une file d'attente, qui se forme du fait de la capacité limitée de la route, représentée comme un goulot. Si le nombre de gens est  $N$  et la capacité du goulot (en voitures par unité de temps) est  $s$ , le temps minimal dans lequel tout le monde peut passer à travers le goulot d'étranglement est  $N/s$ .

Si le taux de départs devient plus grand que la capacité, une queue se formera. Cette queue se traduit par une augmentation de la durée du voyage, à laquelle on associe un coût. A cela s'ajoutent les coûts de déshorages, soit un coût pour arriver en avance et un coût pour arriver en retard. Ces coûts augmentent linéairement avec la durée de l'avance ou celle du retard.

Comme les coûts fixes ne changent pas la dynamique, nous faisons la simplification suivante : s'il n'y a pas de bouchon l'heure d'arrivée est prise égale à l'heure de départ. C'est à dire la durée de voyage constante est prise égale à zéro.

Nous définissons l'équilibre comme l'équilibre de Nash (appelé ici également « Equilibre de Vickrey ») où aucun usager ne peut diminuer son coût individuel en modifiant sa décision. Afin de dériver la fonction de taux de départ de l'équilibre, il faut d'abord discuter le calcul du bouchon et du coût.

### 3.1.1 Le bouchon

---

Afin de calculer la fonction de coût nous devons calculer la taille du bouchon à chaque instant. Ceci nous permet de calculer l'heure d'arrivée qui correspond à chaque heure de départ. Le calcul de la durée de trajet (le bouchon) introduit un effet de mémoire, parce qu'au temps  $t$  la taille du bouchon  $Q(t)$  dépend du nombre de gens qui sont déjà partis et de leurs heures de départ. La taille du bouchon rencontré par ceux qui partent à  $t$  est donnée par

$$Q(t) = \int_{t'=\tilde{t}}^t r(t') dt' - s(t - \tilde{t}) \quad (1.1)$$

$\tilde{t}$  est le dernier instant où il n'y avait pas de bouchon et  $r(t')$  est le taux de départs au temps  $t'$ .

Le premier terme de (1.1) est le nombre de gens qui ont rejoint le bouchon depuis son commencement, le deuxième terme est le nombre de gens qui ont quitté le bouchon depuis sa création.

Le temps de trajet pour une heure de départ  $t_d$  est donnée par

$$tt(t_d) = \frac{Q(t_d)}{s} \quad (1.2)$$

L'heure d'arrivée est donnée par  $t_a = t_d + tt(t_d)$

### 3.1.2 La fonction de coût

---

Le coût pour chaque heure de départ (discrète) est donné par l'addition des durées de trajet (le bouchon), d'avance et de retard, pondérées respectivement par la valeur du temps de trajet  $\alpha$ , la valeur du temps d'avance  $\beta$  et la valeur du temps de retard  $\gamma$ . Les données empiriques montrent que

$$\gamma > \alpha > \beta. \quad (1.3)$$

Il en résulte que le coût total d'arriver en retard augmente plus vite que le coût total d'arriver en avance.

La fonction de coût est,

$$C(t_d) = \alpha t t(t_d) + \beta \{t^* - (t_d + t t(t_d))\}^+ + \gamma \{(t_d + t t(t_d)) - t^*\}^+ \quad (1.4)$$

où  $\{a\}^+ = \max(0, a)$

### 3.1.3 Dérivation de l'équilibre

---

L'équilibre se définit par la condition que personne ne peut diminuer son coût en changeant son heure de départ, soit

$$\frac{dC(t_d)}{dt} = 0 \quad (1.5)$$

Quand l'équation (1.5) est appliquée à l'équation (1.4) nous trouvons pour ceux qui arrivent en avance

$$\frac{d t t(t_d)}{dt} = \frac{\beta}{\alpha - \beta} \quad (1.6)$$

et pour ceux qui arrivent en retard

$$\frac{d t t(t_d)}{dt} = \frac{-\gamma}{\alpha + \gamma} \quad (1.7)$$

De l'équation (1.1) nous déduisons :

$$\frac{dQ(t_d)}{dt} = r(t_d) - s \quad (1.8)$$

En outre, de (1.2) on déduit que

$$\frac{d t t(t_d)}{dt} = \frac{1}{s} \frac{dQ(t_d)}{dt}$$

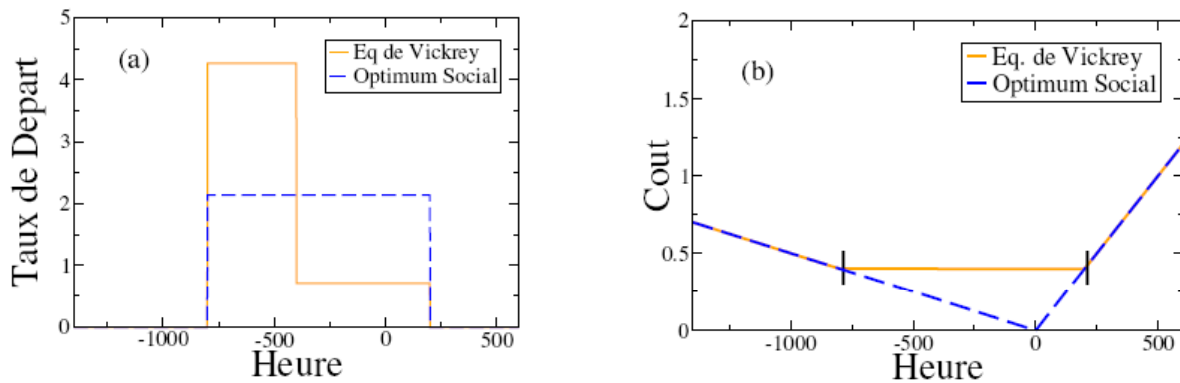
Il s'ensuit que les taux de départs sont, respectivement pour ceux qui arrivent en avance et en retard,

$$r_{tot}(t_d) = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} s \quad (1.9)$$

et

$$r_{tard}(t_d) = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} s \quad (1.10)$$

Le taux de départs de l'équilibre est tracé dans la Figure 80a. Y est ajouté le taux de départs de l'optimum social où il n'y a pas de congestion et la route est utilisée à sa pleine capacité. Nous voyons la fonction plate du coût à chaque heure pour l'équilibre dans la Figure 80b.



**Figure 80 :** (a) Graphe des taux de départ de l'équilibre et de l'optimum social (en tirets). La capacité du goulot d'étranglement est 2. Quand le taux de départ devient supérieur à 2 un bouchon se produit. (b) Fonctions du coût de l'équilibre et de l'optimum social où il n'y a pas de congestion. Les traits verticaux marquent le premier et le dernier à partir.

### 3.2 Modèle individu centré

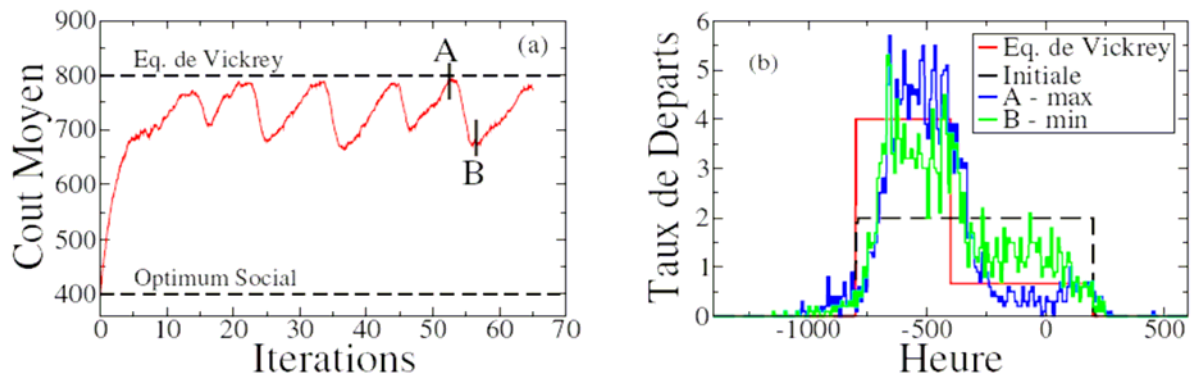
Dans ce modèle, chaque agent simulé représente un individu dont le comportement se réduit à une règle simple : réduire le coût total de son voyage. Un agent qui révise son heure de départ calcule le coût d'une heure de départ choisie au hasard ; il adopte cette nouvelle heure de départ si elle lui permet de réduire suffisamment son coût. A chaque itération, les agents ont une certaine probabilité, donnée par le taux de rafraîchissement, de réviser leur heure de départ.

Pour trouver l'équilibre de Vickrey à partir de l'optimum social, nous avons essayé la règle suivante. A chaque itération, nous choisissons une fraction d'agents qui recalculent leur heure de départ, choisie aussi au hasard. Ce choix est réaliste dans la mesure où il existe des inerties dans les comportements des agents.

Différentes règles d'évolution peuvent être imaginées. La nouvelle heure de départ est choisie à partir d'une distribution plate autour de la présente heure de départ. Tous les agents remis à jour pendant une itération calculent le coût de la nouvelle heure de départ, en supposant que tous les autres agents conservent leur heure de départ fixe. Comme certains agents changent d'heure de départ, les conditions de déplacements pour les autres agents sont changées à l'étape suivante.



### 3.2.1 Modèle avec agents homogènes



**Figure 81 : (a) Coût moyen pour 2000 agents homogènes avec 5% remise à jour à chaque itération. (b) Le taux de départs à A et B.**

Afin de bien comprendre les effets de chaque niveau de complexité que nous ajoutons au modèle, nous avons commencé avec le modèle le plus élémentaire possible. Nous voyons, dans la Figure 81<sup>1</sup> que le coût moyen<sup>2</sup> oscille en dessous la valeur de l'équilibre. L'amplitude de ces oscillations diminue quand le taux de rafraîchissement se réduit. La cause fondamentale des ces oscillations sont les externalités imposées par les décisions des agents sur les autres. La Figure 81b montre que la fonction de taux de départs au point A, marqué dans Figure 81a, prend plus l'allure de celle de l'équilibre que la fonction de taux de départs au point B, marqué aussi dans Figure 81a. Les agents ne payent pas le coût social de leurs décisions et donc le coût global augmente souvent quand les agents essayent de réduire leur propre coût (cf. Annexe A).

### 3.2.2 Modèle avec agents hétérogènes

En réalité, les agents ne sont pas homogènes, ils ont des façons différentes de raisonner et d'agir. Cela peut se traduire par des comportements hétérogènes des agents. Nous avons donc ajouté le postulat d'hétérogénéité des agents en introduisant des valeurs des coûts de déshorage différentes et des heures d'arrivées préférées différentes.

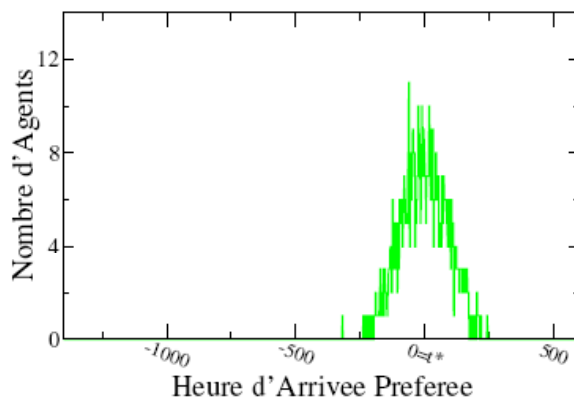
Pour une distribution lognormale des coûts de déshorages, le niveau de congestion se réduit mais l'instabilité est peu changée (cf. Annexe B pour plus de détails).

#### 3.2.2.1 Distribution des heures d'arrivées préférées

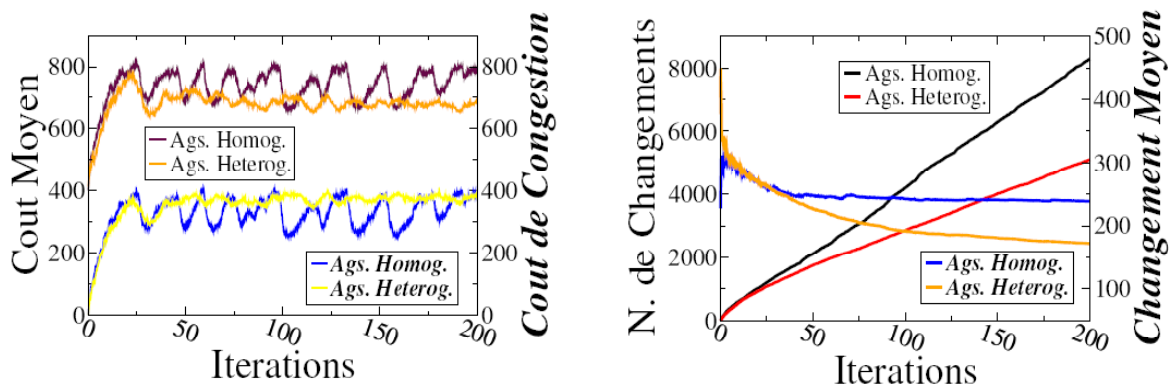
Il est clairement irréaliste que tout le monde veuille arriver à exactement la même heure. Afin de mieux modéliser cet aspect du système nous avons donné aux agents une heure d'arrivée préférée tirée au hasard, suivant une distribution gaussienne autour de  $t^*$  (cf. Figure 82).

<sup>1</sup> Dans les graphes où on trouve en abscisse les itérations, l'échelle est normalisée en fonction du taux de remise à jour, de telle façon qu'à une unité de l'échelle corresponde une remise à jour d'un nombre d'agents égal au nombre total d'agents.

<sup>2</sup> le coût moyen est la moyenne sur l'ensemble des agents du coût total de déplacement, incluant le coût de transport et les coûts de déshorages (cf. équation 1.4). Le coût de congestion moyen représente le coût de transport, soit  $\alpha t t_d$ .



**Figure 82 :** Distribution gaussienne, avec une variance de 100, des heures d'arrivées préférées de 2000 agents autour de  $t^* = 0$ . Le nombre d'agents est moyenné sur trois unités de temps.



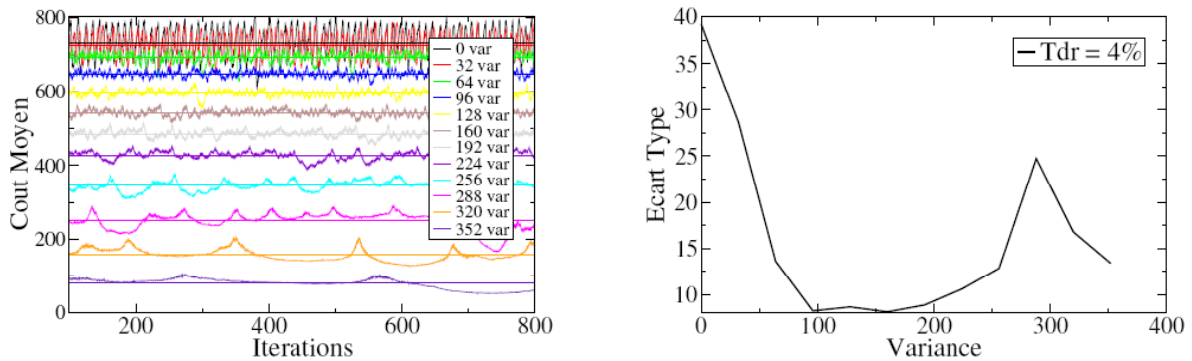
**Figure 83 :** (gauche) Les coûts moyens et les coûts de congestion pour des agents homogènes et pour des agents hétérogènes avec une distribution gaussienne, de variance 100, des heures d'arrivées préférées. (droite) Taille et fréquence des changements des heures de départ pour les agents homogènes et hétérogènes.

Que l'on observe le coût moyen ou le coût de congestion, on constate que la variabilité de ces coûts est très réduite par l'introduction de l'hétérogénéité dans les heures d'arrivées préférées (cf. Figure 83-gauche).

Il est clair que l'introduction des hétérogénéités diminue l'instabilité du modèle. Le niveau de congestion diminue aussi. Dans un système qui possède une distribution des heures d'arrivées préférées il y a moins de concurrence pour les meilleures heures d'arrivées. La Figure 83-droite montre que les agents hétérogènes changent leur heure de départ moins souvent et, quand ils le font, avec une amplitude moindre. Nous pouvons dire qu'ils trouvent des « niches » d'heures de départ qui leur conviennent. La tendance à partir toujours vers la même heure stabilise le système global.

### 3.2.2.2 Paramètres importants du modèle

Afin de pouvoir analyser la stabilité du modèle pour des paramètres particuliers, l'indicateur suivant a été choisi, à savoir l'écart type du coût moyen entre les itérations normalisées 100 et 800. Dans cet intervalle l'agent moyen a révisé son heure de départ 700 fois.

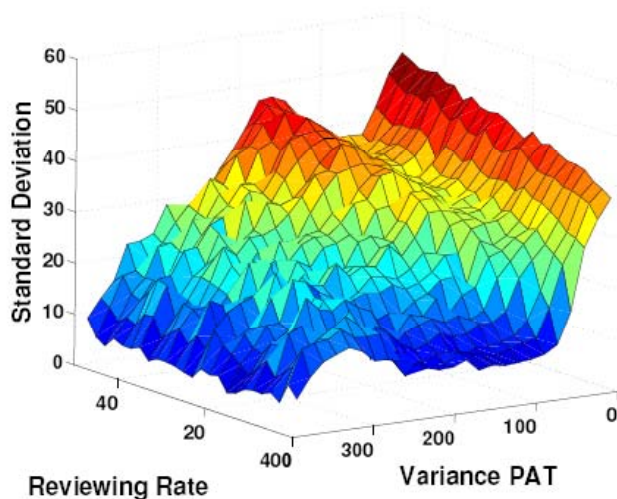


**Figure 84 :** (gauche) Le coût moyen pour une gamme des variances pour un taux de rafraîchissement de 4%. Les lignes droites de la même couleur sont la moyenne entre 100 et 800 itérations du coût moyen. (droite) La stabilité (écart type entre 100 et 800 itérations) contre la variance de la distribution des heures d'arrivées préférées.

Quand le taux de rafraîchissement augmente le système est moins stable. Le comportement vis-à-vis la variance de la distribution des heures d'arrivées préférées est plus complexe (cf. la figure 2.4-droite qui montre en ordonnée l'écart-type du coût moyen et en abscisse la variance de la distribution des heures d'arrivées préférées, ainsi que la figure 2.5).

Au début la stabilité croît quand la variance de la distribution des heures d'arrivées préférées augmente, comme on peut voir dans la figure (2.4-droite). En outre, la période des oscillations commence à croître beaucoup et peut atteindre un niveau 10 fois supérieur à celui des oscillations pour les agents homogènes (cf. figure 2.4-gauche). Quand la période commence à augmenter d'une manière significative, l'ampleur des oscillations augmente aussi et l'écart type du coût moyen devient plus grand.

La variance de la distribution des heures d'arrivées préférées pour laquelle cet effet d'augmentation de l'écart type du coût moyen est observé, varie avec le taux de rafraîchissement (cf. figure 2.5). Il semble que les deux pics dans la figure (2.4-droite) sont dus à des instabilités de nature différente : cette question reste à explorer d'une manière plus exhaustive. Enfin, la stabilité se remet à croître quand la variance est suffisamment grande (au-delà de 300) : en effet, la congestion devient alors négligeable.



**Figure 85 : La stabilité pour une gamme des variances et des taux de rafraîchissements. « Variance PAT » est la variance de la distribution des heures d'arrivée préférées, égale à zéro pour les agents homogènes. « Reviewing Rate » est le taux de rafraîchissement et « Standard Deviation » est l'écart type du coût moyen.**

### 3.3 Conclusion

---

Le but de ce travail était de trouver un modèle robuste et convergent d'un bouchon susceptible d'être intégré dans un réseau plus complexe et réaliste. Il est clair qu'il faut des éléments d'hétérogénéité pour que notre modèle soit convergent. Il reste aussi à voir si un réseau de routes donne suffisamment d'hétérogénéité pour stabiliser le modèle.

Le modèle d'un simple bouchon avec des agents homogènes contient des fortes instabilités à cause des interactions entre agents. Nous pensons que ces instabilités viennent de l'inégalité entre le bénéfice pour un agent qui change par rapport à l'impact de ce changement sur les autres.

Pour trouver un équilibre dynamique il est nécessaire de prendre en compte les hétérogénéités des agents. Nous avons trouvé un modèle qui converge quand il y a suffisamment d'hétérogénéité, sans faire disparaître la congestion que nous voulons étudier.

Pour un modèle opérationnel basé sur une telle règle, on doit prendre en compte les effets de paramètres importants comme le taux de rafraîchissement et le niveau d'hétérogénéité. Nous avons fait une étude de la stabilité du modèle exploratoire selon ces deux paramètres. Cette étude montre la possibilité d'utiliser une telle règle désagrégée des choix d'heure de départ dans un modèle opérationnel.

## 4 Couplage des modèles de trafic aux modèles de localisation

---

### 4.1 Objectifs

---

Cette partie du projet consiste à définir une interface logicielle (en anglais Application Programming Interface ou API) qui permette aux modèles de localisation et d'occupation du sol d'accéder de manière transparente aux performances de l'infrastructure de transport sans avoir à tenir compte de la complexité d'un modèle de transport complet. Idéalement, des scénarios de base (ex. Lyon en 2005 et à l'horizon 2010) sont préalablement établis et calculés pour le(s) modèle(s) de transport ; les résultats de ces simulations seraient ensuite accessibles sous forme de requêtes informatiques standardisées.

### 4.2 Travaux réalisés

---

Le problème présente deux facettes : d'une part la définition d'une série d'**indicateurs** pertinents communs aux modèles de transports, d'autre part la mise en place d'une **technologie** adéquate pour l'API. Notre démarche consiste à résoudre ces problèmes dans le cas de plusieurs projets particuliers « occupation du sol – transport » (LUT) auxquels nous collaborons actuellement et de généraliser ensuite. Trois de ces projets visent à appliquer le modèle URBANSIM aux villes de Lyon (SIMBAD - LET), Paris (SIMAURIF – Université de Cergy) et Zürich (IVT-ETHZ). Le projet MATSIM-T ([www.matsim.org](http://www.matsim.org)) vise, quant à lui, à développer un modèle d'activité multi-agents complet.

#### 4.2.1 Indicateurs

---

La définition d'indicateurs communs est délicate car chaque modèle possède ces propres spécificités. Par exemple, la définition d'un « coût de transport généralisé par mode » n'est pas universelle et dépendra de la capacité du modèle de transport à prendre en compte différents aspects tels que le temps d'accès au réseau (par exemple via un modèle de simulation du mode piéton), la présence de péage ou le temps de recherche d'une place de stationnement dans le cas d'un modèle de la voiture privée. Une autre difficulté réside dans la résolution temporelle de chaque modèle : les deux projets français utilisent, pour la simulation du mode voiture, METROPOLIS qui est un modèle dynamique et qui peut fournir des indicateurs désagrégés dans le temps. Le choix d'une résolution spatiale présente aussi une difficulté. En effet, la majorité des modèles de transport sont basés sur le concept de zones de trafic : les origines et les destinations des véhicules sont symbolisées par ces abstractions géographiques qui recouvrent généralement un quartier, une commune voire plus. Ce niveau d'agrégation n'est probablement pas totalement cohérent avec une analyse parcellaire de l'occupation du sol telle que proposée dans URBANSIM. Nous explorons la possibilité de fournir facultativement les indicateurs de transport au niveau parcellaire, en masquant la présence de zones aux modèles de localisation. Actuellement, les indicateurs communs qui

ont été retenus dans les trois projets sont des accessibilités « classiques » ventilées suivant le mode de transport, de zone à zone et agrégées sur une période horaire (période de pointe ou hors pic). Ces accessibilités sont toutefois difficilement manipulables par un concepteur de modèle de localisation qui préférera généralement disposer de grandeurs géo-codées (p.ex. temps de trajet de la position  $x_0, y_0$  à la position  $x_1, y_1$  en utilisant un mode donné).

A ce stade du projet ILOT, nous tâchons d'appliquer ces idées au cas particulier du projet SIMBAD. Nous disposons, pour la partie transport, d'un modèle dit « stratégique » développé par le LET qui présente les caractéristiques suivantes :

- Statique avec congestion période de pointe.
- Multi-modal.
- Voyageurs et fret.
- Agrégé spatialement sur quarante zones.

Parallèlement, nous avons débuté le développement de l'application de METROPOLIS à la ville de Lyon sur la base d'un réseau finement détaillé provenant de la base de données IGN « Géoroute ». A terme, les simulations de trafic sur ce réseau, qui contient a priori toute la voirie, devraient nous permettre de fournir des indicateurs d'accessibilité :

- Au niveau spatial de la parcelle.
- Ventilés suivant l'heure de la journée.

La modélisation retenue se présente comme suit : du point de vue externe de l'occupation du sol, les indicateurs de transport, par mode, sont fournis au niveau parcellaire ou zonal ainsi que suivant l'heure de la journée ou agrégé sur une période.

L'agrégation au niveau zonal pour un modèle détaillé sera réalisée en intégrant les accessibilités sur la couverture géographique correspondante. La désagrégation spatiale pour un modèle agrégé du type du modèle stratégique sera réalisée via un calcul de pseudo-accessibilité intra-zone. A l'étude, il y a également l'intégration d'un modèle de calcul d'accessibilités en transport en commun, également développé au LET sur la base d'un SIG (Système d'Information Géographique) très détaillé spatialement.

#### 4.2.2 Technologie

---

Le choix d'une technologie adéquate pour l'API dépend de plusieurs paramètres relatifs aux performances du système final ainsi qu'à sa complexité d'utilisation. Les résultats produits par un modèle de simulation de transport désagrégé dynamique et/ou à haute résolution spatiale dépasse largement la taille d'une feuille de tableur classique, qui peut suffire pour un modèle statique zonal. (La matrice des 40x40 accessibilités de zone à zone seront facilement stockées et indexées dans un seul fichier par exemple.) La solution actuellement retenue dans METROPOLIS consiste à stocker, pour chaque segment de demande (p.ex. motifs) et pour chaque tranche horaire, une matrice zonale d'accessibilités dans une base de données de type SQL. Cette solution ne peut pas être étendue au cas parcellaire vu la taille de la matrice. (Une application sur un contexte urbain requiert de l'ordre de  $10^5$  parcelles.) . Le système de requête de l'API proposé consiste à combiner une base de données de type SQL pour stocker les résultats désagrégés (p.ex. les temps de trajet sur les différents axes routiers en fonction du temps) à des modules de calcul performants réalisant « en ligne » l'agrégation spatiale ou temporelle correspondant aux requêtes (p.ex. l'accessibilité d'une zone donnée, ce qui implique des calculs de chemin le plus courts depuis cette zone vers toutes les autres). Du

point de vue de la mise en œuvre, le système sera distribué de façon à minimiser le calcul et les transferts entre les différents modules.

### 4.2.3 Implémentation

---

L'implémentation informatique de l'interface logicielle entre modèles de transport et modèles de localisation est encore en chantier. Nous avons réuni les considérations scientifiques et techniques dans un mémo (voir annexe en anglais) qui reprend les différents éléments évoqués lors des discussions avec nos partenaires. En particulier, nous envisageons également de collaborer avec la firme Geomod ([www.geomod.fr](http://www.geomod.fr)) pour réaliser une partie de cette interface logicielle, notamment pour permettre l'exploitation et l'analyse des résultats de ces modèles.



## 5 Les environnements possibles de développement

---

Nous avons cherché à choisir une plate-forme de développement multi-agent. Un premier tour des possibles nous a mené à nous focaliser sur RePast, l'une des plus connues et des plus utilisées, et MadKit, qui a été choisi pour le projet MIRO.

Dans une première partie, nous présentons succinctement les caractéristiques de ces deux plates-formes, ainsi que de trois autres envisagées. Dans une deuxième partie nous présentons un tableau comparatif de ces deux plates-formes au vu de nos objectifs de modélisation.

### 5.1 Madkit

---

(<http://www.madkit.org/>)

La particularité de Madkit est de proposer une description du modèle suivant le formalisme Agent Groupe Rôle : un agent appartient à un groupe où il peut jouer un rôle particulier.

*Description succincte des caractéristiques*

- Langages de programmation : Java, Scheme, Jess, BeanShell
- Possibilité de faire fonctionner un modèle en mode interface ou texte.
- Pas d'architecture prédéfinie pour les agents. Leur affichage est indépendant.
- Les agents peuvent être activés de façon synchrone ou asynchrone (threads - DEVS)
- L'architecture générale de MadKit est basée sur des noyaux qui ne fournissent que les fonctionnalités de base : échanges locaux de messages, gestion des groupes et des rôles, création et destruction des agents. Tous les autres fonctionnalités (messages distants, visualisation, contrôle des agents ...) sont réalisées par des agents.
- Il n'y a pas d'architecture agent standard. Des *plugins* peuvent être ajoutés à Madkit, qui permettent de programmer des agents avec différents types d'architecture.

*Points forts*

Madkit permet de simuler des **systèmes sociaux hiérarchisés**, complexes avec des interactions détaillées. Par exemple le fonctionnement d'un village impliquant des individus qui y jouent un rôle à la fois en tant qu'agriculteur ou éleveur, gestionnaire de la ressource en eau, gestionnaire des prêts aux agriculteurs...

*Faiblesses possibles*

Peu de fonctionnalités prévues. En particulier, il n'y a pas d'environnement spatial prédéfini.

Le passage de toute interaction entre agents par l'échange de messages peut être aussi un facteur de ralentissement de l'exécution.



## 5.2 Repast

---

### *Présentation des principales fonctionnalités*

(site internet : <http://repast.sourceforge.net/>)

- Documentation très complète (exemples de modèles dont le code source est disponible, mode d'emploi pour la création d'un premier modèle...)
- Orienté objet : java, C# : développement possible aussi dans d'autres langages
- Gestion d'évènements discrets : séquentiel et parallèle
- Nombreux outils de visualisation intégrés
- Modification interactive possible des paramètres du modèle en cours de simulation
- Différentes descriptions possibles de l'espace (grilles rectangulaires/hexagonales, 2D et 3D, ...)
- Tirages de Monte-Carlo
- Bibliothèques intégrées : algorithmes génétiques, réseaux de neurones, ...
- Outils de modélisation des systèmes dynamiques
- Outils de simulation des réseaux sociaux
- Outils permettant l'utilisation de données de systèmes d'information géographiques
- Windows, Mac OS, Linux...

### *Points forts*

Repast présente de nombreuses fonctionnalités, qui permettent de gagner du temps de programmation.

De plus, en raison de ses nombreuses fonctionnalités, Repast est utilisé par des scientifiques dans beaucoup de disciplines différentes. Il est donc constamment amélioré et complété.

## 5.3 Quelques autres environnements possibles

---

Trois autres environnements ont été passés en revue. Il s'agit de Moduleco, StarLogo / NetLogo et CORMAS.

### 5.3.1 Moduleco

---

(<http://www-eco.enst-bretagne.fr/~phan/moduleco/>)

Plateforme multi-agent pour la modélisation économique (qui intègre à présent les fonctionnalités MadKit).

#### *5.3.1.1 Description succincte*

Les agents sont représentés sur une grille (quelques types de voisinages réguliers sont prédéfinis) et sont en interaction – locale ou via un marché avec commissaire-priseur. L'environnement (espace géographique) est très basique.

### 5.3.1.2 Modèles types

Modèles de marché, Schelling, ... mais aussi ont été aussi appliqués : Sugarscape (cf. Epstein et Axtell), feu de forêt.

### 5.3.1.3 Points faibles

Les types d'interactions de base sont réguliers et ne prévoient pas l'hétérogénéité.

De plus, l'espace est très simple puisque les agents se situent dans une grille (un agent par case), ce qui semble rendre difficile des réseaux de transports hétérogènes de la ville.

## 5.3.2 StarLogo/NetLogo

---

(<http://ccl.northwestern.edu/netlogo/>)

Environnement de modélisation programmable. Langage de programmation spécifique.

### 5.3.2.1 Description formelle du monde

Ici encore la description formelle du monde est plutôt simple. Des agents téléguidés par un observateur sur des patches (environnement) où ils peuvent s'arrêter à plusieurs.

### 5.3.2.2 Applications types :

Agrégation de cellules, feu de forêt, trafic, recherche de nourriture par des termites.

Evolution d'une population par algorithme génétique.

### 5.3.2.3 Points faibles

Netlogo est plus stable que StarLogo, qui ne supporte pas de trop gros programmes. Ici encore, ni la gestion d'agents ou de liens d'interaction trop complexes, ni la simulation d'un espace géographique hétérogène avec des réseaux ne semblent avoir été prévus.

## 5.3.3 CORMAS

---

(<http://cormas.cirad.fr/>)

### 5.3.3.1 Formalisation du monde

Agents (2 types d'agents : spatialisés et communicants) sur une grille – interactions agents/environnement spatial.

### 5.3.3.2 Modèles types

Pâturage. Stratégie de déboisement. Mais aussi Marchés.

### 5.3.3.3 Points faibles

Description de l'espace sous forme d'une grille, modèles de taille limitée (moins de 5000 agents).

### 5.3.4 Conclusion

Tous ces environnements ont été conçus pour des communautés ciblées, des disciplines et des questions précises (économie, biologie des populations) qui sont différentes de celles que nous nous posons. En particulier, en ce qui concerne le type de modèle que nous aimerions développer, ces environnements présentent des faiblesses dans la description de l'espace (comment introduire facilement des réseaux de transport ?), et en particulier pour Moduleco et NetLogo, peu de fonctionnalités.

## 5.4 Synthèse de la comparaison entre Repast et Madkit

La comparaison point par point de MadKit et de RePast au regard des caractéristiques des modèles à construire est donnée dans le tableau suivant. Rappelons que les modèles que nous voulons construire décrivent des agents en interactions pour décider au mieux de leurs trajets en fonctions de contraintes temporelles, spatiales et interpersonnelles.

	Madkit	RePast	Modèle à construire
Description spatiale	Absente a priori	Prévus : - graphe - espace : grilles (carrées, hexagonales), raster (gis)	Interactions importantes entre choix humains et environnement spatial (influence à double sens)
Type des agents	Principalement social	Social et spatial	Agents pouvant interagir avec d'autres agents et s'intégrant dans un environnement spatial
Complexité des agents	Insertion dans un réseau social hiérarchisé. L'échange de messages nécessite certaine complexité de fonctionnement (à programmer).	A programmer selon modèle. Outils pour la simulation de réseaux d'interactions.	Prise de décision (temporelle, spatiale) en fonction des contraintes (temporelles, spatiales, relationnelles) ; la complexité peut concerner la prise de décision (et l'apprentissage) et l'insertion de l'agent dans la société (contraintes sur les déplacements, échanges, hiérarchie pouvant être évolutive...)
Interactions sociales	Tout par échange de messages.	Influence entre agents suit les modalités d'interactions entre objets, i.e. possibilité de définir	Les interactions entre agents peuvent concerner : - ajout de contraintes pour le choix de

		différents niveaux d'influence (seul échange d'information, ou affectation des variables d'état, etc...)	déplacement - information sur l'environnement
Hiérarchisation des interactions sociales	Agent appartenant à un/des groupes, où il peut endosser un/des rôles	A construire	Individu appartenant - à un foyer où il peut soit décider de l'organisation des trajets, soit ajouter des contraintes  - à un réseau d'interactions (et de partage de l'information)
Communauté	Surtout française ? Problème de taille critique.	Internationale. Taille critique a priori atteinte.	

## 5.5 Conclusion

---

Ces deux plateformes présentent chacune leurs avantages.

Le point fort de Madkit est de permettre la simulation de systèmes sociaux complexes. Ceci pourrait nous être utile dans une phase de modélisation avancée où les interactions sociales conditionnent les choix de trajets. Toutefois il présente peu d'outils pour la modélisation spatiale qui est au centre des problématiques transports-localisations.

Repast présente de nombreux points forts qui nous seraient utiles : notamment les facilités de visualisation et les fonctionnalités spatiales de base. Il dispose aussi d'outils pour la modélisation sociale, et la simulation de réseaux d'interactions. De plus, l'existence d'une communauté nombreuse est favorable à la maintenance de la plateforme et à sa survie ainsi qu'à celle des modèles développés.

Des développements complémentaires seront nécessaires dans les deux cas. Toutefois ils seraient plus importants avec Madkit. De plus, il paraît plus intéressant et original d'investir une réflexion et un développement supplémentaire sur le modèle d'interactions sociales que sur les fonctionnalités spatiales de base.

Ces différentes raisons nous ont amenés à choisir Repast.

## Conclusion

---

Nous avons cherché à comprendre l'influence de différents niveaux de détail de modélisation de certains facteurs de formation de la rente et de la densité. Nous avons étudié en particulier le rôle des interactions entre individus, et la différence de revenus et de coûts de transport, dans différentes configurations de modèles de formation de la rente et de la densité.

L'approche agent a permis de mieux comprendre les modèles agrégés de départ et de les étendre vers plus de pertinence. En particulier cette approche nous a permis d'étudier de façon plus fine l'influence des interactions et de coûts de transports hétérogènes sur les densités et les rentes.

Nos études successives nous ont permis une complexification progressive des configurations étudiées. Ceci nous a permis d'étudier séparément l'influence de chaque facteur d'hétérogénéité sur l'équilibre obtenu et donc une qualification plus claire des facteurs d'influence qu'il est important de modéliser finement.

Nous avons tout d'abord développé un modèle de formation de la rente, avec surfaces et densité de logement constantes, et testé pour la formation de la rente, différents processus de surenchère pour les loyers des logements. Nous avons ensuite étendu ce modèle dans plusieurs directions indépendantes : coût de transport vers un lieu de travail central, centres différants par le nombre de logements ou leur surface, différence de revenu et différence des coûts de transport unitaires entre deux populations.

Premièrement, nous avons pu observer comment au sein de deux populations fortement liées l'une à l'autre, un coût de transport plus élevé pouvait conduire les individus concernés à se concentrer au centre, en se séparant de l'autre population. Dans ce cas, les densités ne dépendent que de la différence de coût de transport.

Deuxièmement, lorsque les deux populations sont liées chacune plus à l'autre qu'à elle-même (comme peuvent l'être dans certains cas firmes et travailleurs), nous avons pu observer une ségrégation moins marquée, et dépendant du facteur entre les deux coûts de transport unitaires. Dans ce cas, la ségrégation diminue aussi avec le nombre de liens. On observe alors des configurations proches de centres secondaires autour des villes.

Ces modèles, bien que simples, permettent de montrer le rôle majeur que joue la différence de coûts de transport sur la ségrégation spatiale à l'intérieur de la ville. De plus ces études montrent l'influence des liens entre individus (outre la différence des coûts de transport) sur les formes de ségrégation observées.

Dans un deuxième modèle de formation de la rente, nous avons introduit des surfaces et des densités variables, et ajouté un terme de préférence pour la surface dans l'utilité. Ainsi, l'équilibre résulte d'un compromis des individus entre leurs coûts de transports et la surface de chaque logement.

Après avoir vérifié la fidélité du modèle individu-centré au modèle théorique, dans un cas simple où il était possible d'en connaître analytiquement la solution, nous avons simulé avec ce modèle des configurations plus compliquées, avec deux ou plusieurs populations différentes dans la même ville.

Pour commencer, nous avons étudié comment le coût de transport unitaire influence les densités respectives de deux populations de revenus différents, en conduisant ou non à une

ségrégation spatiale. Nous avons ensuite étudié dans le cas d'une ségrégation, l'influence de différentes configurations d'interactions déterministes et aléatoires, et montré leur influence sur les densités obtenues.

Nous avons ensuite étudié comment la différence de coûts de transport pouvait mener à une ségrégation spatiale. Nous avons pu observer des densités concentriques suivant des coûts de transport unitaires décroissants. Des coûts de transports globalement plus faibles conduisent à l'étalement des populations, et donc à une influence plus visible de leurs positions l'une sur l'autre. Inversement une différence plus marquée entre coûts de transport, conduit à une plus grande différence de distribution de la densité entre les deux populations, et semble réduire ainsi leur compétition pour le sol et la pression de l'une sur l'autre.

Dans le modèle précédent, les rentes dépendent seulement de la densité. Nous avons introduit un peu de réalisme en les faisant résulter d'interactions individuelles de marchandage entre propriétaires et locataires. Même si la densité optimale et les rentes prévues par la théorie continuent à pouvoir être atteintes, elles ne le sont plus dans tous les cas. En particulier, les locataires parviennent parfois à obtenir des rentes inférieures à celles prévues par la théorie. Mais il peut aussi arriver que la dureté des marchandages conduise à des échecs de mouvements, frustrant finalement à la fois les locataires et les propriétaires.

Dans un troisième modèle, nous avons étudié une cohabitation entre firmes et individus. Les firmes conservent des coûts de transports dépendant de leur distance aux autres firmes, alors que le coût de transport des individus dépend de leur distance à leur lieu de travail (firme).

La coexistence de firmes et de travailleurs conduit à des équilibres plus subtils, où non seulement leurs liens d'interactions directes (salaires), mais aussi la concurrence pour l'espace ainsi que l'ordre des relocalisations, jouent sur la formation des densités.

Nous avons considéré différentes formes de redistribution du profit des firmes provenant d'un rapprochement géographique facilitant leurs interactions. Nous avons notamment testé l'accroissement du poste budgétaire consacré au financement des locaux des firmes, le subventionnement des logements de leurs travailleurs ou de leurs coûts de transport. Les choix de redistribution du profit affectent directement soit la rente, soit les choix de localisation des firmes et/ou des travailleurs et influencent dès lors fortement les densités observées de l'ensemble des firmes et des travailleurs.

Enfin, nous avons pu observer que le hasard de l'ordre des relocalisations, en favorisant soit la symétrie, soit l'asymétrie des firmes pouvait conduire à des configurations très différentes.

L'approche agent nous a donc permis de simuler et d'étudier des configurations plus complexes et réalistes que le modèle agrégé dont nous sommes partis.

Avec le modèle de ville faisant interagir propriétaires et locataires, nous avons tout d'abord élaboré un modèle générique, qui a été ensuite étudié dans deux cas particuliers, l'un dans lequel les emplois sont tous localisés au centre, l'autre où chaque individu va visiter tous les autres.

Ce modèle de loyers formés à partir de la demande des locataires est bien compris et robuste. Nous avons établi l'existence d'un équilibre de population pour chaque jeu de paramètres, et le modèle converge avec le modèle théorique dans le cas du modèle avec emplois localisés au centre.

Nous concevons le modèle actuel comme étant une base de prototypes potentiels, et sommes en train d'évaluer les pistes les plus prometteuses pour la suite. Au niveau informatique, nous allons améliorer le programme en ajoutant des possibilités de complexifier le modèle.

En ce qui concerne la modélisation de la congestion, nous avons élaboré, dans un cas très simple réduit à un goulot, un modèle robuste, convergeant grâce à la prise en compte d'hétérogénéités entre agents. Il est possible d'utiliser une telle règle désagrégée dans un modèle opérationnel.

La tâche consacrée au couplage des modèles de trafic aux modèles de localisation, a consisté à définir une interface logicielle qui permette aux modèles de localisation et d'occupation du sol d'accéder de manière transparente aux performances de l'infrastructure de transport, sans avoir à tenir compte de la complexité d'un modèle de transport complet. Le cahier des charges informatique a été établi. La mise en œuvre informatique de l'interface logicielle entre modèles de transport et modèles de localisation est encore en chantier.

Nous avons cherché à choisir une plate-forme de développement multi-agent. Un premier tour des possibles nous a mené à nous focaliser sur RePast, l'une des plus connues et des plus utilisées, et MadKit, qui a été choisi pour le projet MIRO. Ces deux plates-formes présentent chacune leurs avantages. Cependant, parmi ses nombreux points forts, Repast dispose de fonctionnalités spatiales de base. Il nous paraît plus intéressant et original d'investir une réflexion et un développement supplémentaire sur le modèle d'interactions sociales que sur les fonctionnalités spatiales de base, ce qui nous amène à privilégier pour le moment Repast.

## Bibliographie

---

- Alberti, M. and Waddel, P. (2000) An integrated urban development and ecological simulation model, *Integrated Assessment*, 1, 215-227
- Arentze, T.A. and Timmermans, H.J.P. (2003) Modelling agglomeration forces in urban dynamics : a multi-agent system approach, *Proceedings of the CUPUM Conference*, Sandai, Japan
- ARNOTT R., DE PALMA A., LINDSEY R. (1993) A structural model of peak-period congestion : A traffic bottleneck with elastic demand. *The American Economic Review*, Vol.83, pp 161-179.
- DE PALMA A., MARCHAL F. (2002) Real cases Applications of the fully Dynamic METROPOLIS Tool-box: an Advocacy for Global Large-scale Mesoscopic Transportation Systems. *Networks and Spatial Economics*, Vol. 2, n°4, pp 347-369.
- Duranton, G, J.-F. Thisse (1996) La politique foncière dans une économie spatiale. *Revue Economique*, 47 (2) 227-262
- Echenique, M.H. (1977) An integrated land-use and transport model, *Transactions of the Martin Centre for Architectural and Urban Studies*, 2, 195-230
- FONTAN C., DE PALMA A. (2001) Choix modal et valeurs du temps en Ile-de-France, *Recherche Transports Sécurité*. n°71, pp 24-46.
- Fujita, M. et Thisse, J.-Fr. (2003) *Economie des villes et de la localisation*, ed. de Boek
- LEFEVRE C., LITINAS N., DE PALMA A., BEN-AKIVA M. (1983) Stochastic equilibrium model of peak period traffic congestion. *Transportation Science*, Vol. 17, pp 430-453.
- Miller, E.J., and Savini, P.(1998) The Integrated Land Use, Transportation, Environment (ILUTE) Modelling System : A Framework, *Proceedings 77th Annual Meeting of the Transportation Research Board*, Washington D.C.
- RAUX C., HERMENIER V., SIDKA M. (2003) *Simulation de la dynamique du système de déplacements urbains : une plate-forme de modélisation*. Rapport pour la DRAST (Ministère des Transports). p166
- Sanders, L. ; Pumain, D., Mathian, H., Guerin-Pace, F., Bura, S. (1997), SIMPOP : a multi-agent system for the study of urbanism, *Environment and Planning B*, 24, 287-305
- Timmermans, H. (2003) The Saga of Integrated Land use-transport modelling : how many more dreams before we wake up ?, 10th International Conference on Travel Behaviour Research, Lucerne 10-15 August 2003



Veldhuisen, K., Timmermans, H.J., Kapoen, L.L. (2000) Micro-simulation of activity-travel patterns and traffic flows : validation tests and an investigation of Monte Carlo error, *Transportation Research Record*, 1706, 126-135

VICKREY W. (1969) Congestion theory and transport investment. *The American Economic Review*, Vol. 59, pp 251-260.

Webster F.V., Bly P.H., Paulley N.J (Eds) (1988) *Urban Land-Use and Transport Interaction - policies and models - Report of the International Study Group on Land-use / Transport Interaction (ISGLUTI)*. Great Britain, Ipswich Book Ltd, 504 p.

White, R.W. and Engelen, G. (1997) Cellular automata as the basis of integrated dynamic regional modelling, *Environment and Planning B*, 24, 235-246

## Annexes. Au sujet du modèle de congestion

### Annexe A : Pourquoi y a-t-il des oscillations?

La raison profonde de cette instabilité est que le changement du coût d'un agent qui agit pour améliorer sa propre situation peut souvent engendrer un changement du coût collectif plus élevé. Quand un agent change d'une heure où il ne rencontre pas de bouchon à une heure où il le rencontre, il augmente la durée de trajet de tous ceux qui rejoignent le bouchon après lui. Si un agent s'enlève du bouchon le coût de ceux qui joignaient le bouchon après lui diminue.

La trajectoire du coût global dépend de l'évolution moyenne de l'heure de départ :

- L'effet sur la collectivité d'un agent qui part plus **tôt** pendant la durée du bouchon est d'ajouter de la congestion à ceux qui partent entre son ancienne et sa nouvelle heure de départ.
- L'effet sur la collectivité d'un agent qui part plus **tard** pendant la durée du bouchon est d'enlever de la congestion à ceux qui partent entre son ancienne et sa nouvelle heure de départ.

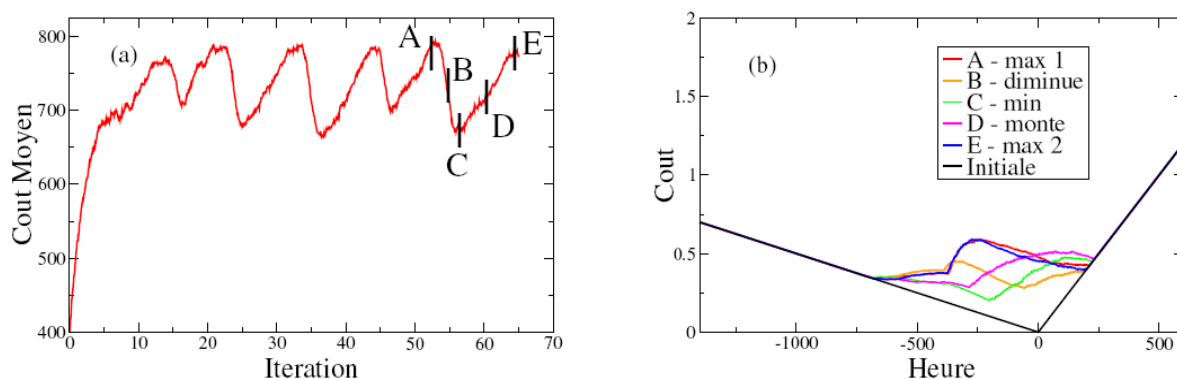


FIG. A.1 – (a) Coût moyen pour 2000 ags avec 5% remis à jour, les agents ont accepté le nouvelle heure de départ s'il était plus que 10% moins cher. (b) Fonctions du coût qui correspond à A - E. Ces fonctions indiquent le coût payerait par ceux qui partirait à chaque heure discrete.

Pour éclairer le mécanisme des oscillations, les fonctions du coût (qui sont les fonctions qui montrent le prix payer par ceux qui sont parti à une heure particulière) cinq points dans une période marqué dans la figure (A.1a) sont tracés dans la figure (A.2b).

- La première fonction du coût, la courbe rouge A, a une bosse au milieu et correspond au premier maximum dans la figure (A.1a). Le taux de départs à chaque heure est tracé dans la figure (A.2a). On voit que le taux de départs approche l'équilibre analytique.
- La courbe orange, dans la figure (A.1b) est la fonction du coût au point B dans la figure (A.1a). Le coût moyen est en train de diminuer parce que, en moyenne, les gens partent plus tard, comme on le verra au point suivant.
- Les courbes vertes correspondent au minimum du coût moyen (point C dans la figure A.1a)). Le changement des taux de départs entre le maximum (A) et le minimum (C) du

coût moyen est tracé dans la figure (A.2b). On voit clairement que la tendance générale est de partir plus tard entre ces deux points. Grâce à la figure (A.2a) on comprend que le taux de départs au point C, la courbe verte, est plus proche de l'optimum social. Le taux de départs des maxima (A et E) dépasse la capacité par une marge plus large que celle du minimum (C), générant plus de congestion.

- Au point D dans la figure (A.1a), le coût moyen augmente encore. Une comparaison des courbes orange et rose (figure(A.1b)) montre qu'il y a une asymétrie dans l'évolution du coût et donc aussi des taux de départs lors de la diminution ou l'augmentation du coût moyen.
- Un maximum du coût moyen est encore atteint à point E qui correspond aux courbes bleues dans figures (A.1b) et A.2a). Ces courbes se confondent avec les courbes rouges du point A, le maximum au début du cycle. Dans la figure (A.2b) on voit que le changement dans le taux de départs est en gros l'inverse de celle observée pendant la première demi période.

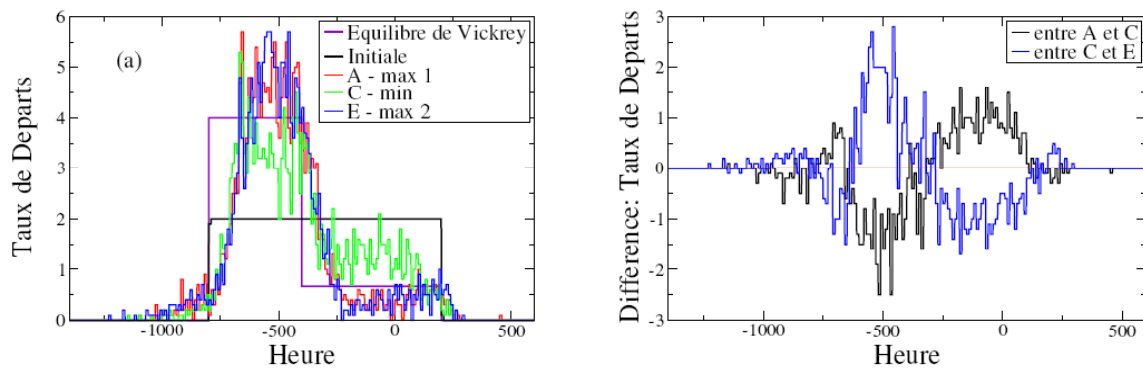


FIG. A.2 – (a) Taux de départs à les maximums (A et E) et la minimum (C) dans figure (A.1a). Graphe (b) Les changements dans les taux de départs entre le maximum (A) et le minimum (C) et entre (C) et le deuxième maximum (E). On voit que entre A et C les gens partent en moyen plus tard et que entre C et E ils ont la tendance de partir plus tôt.

## Annexe B : Distribution des coûts de déshorag

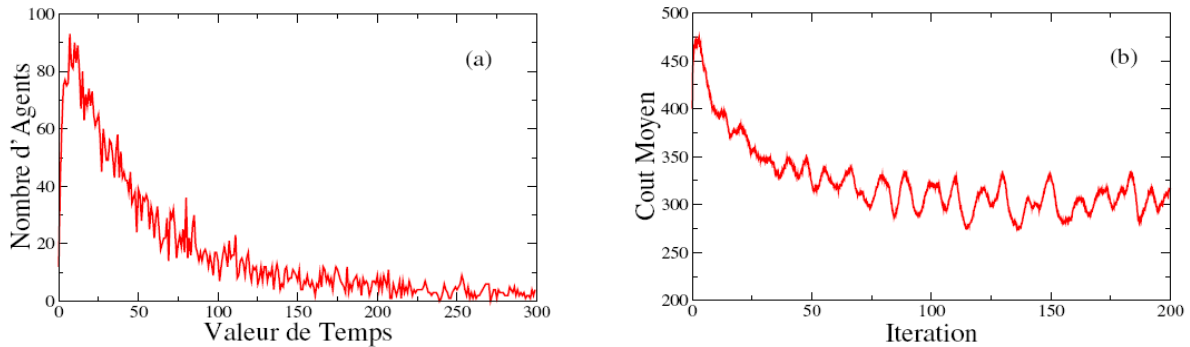


FIG. B.1 – (a) Graphe de nombre d’agents pour chaque valeur de temps pour 6000 agents. Les valeurs de temps sont distribuées selon une fonction “lognormale” avec  $\sigma = 1,775$  et  $m = 2,423$ . (b) L’évolution du coût moyen pour 6000 agents avec la distribution des valeurs de temps de figure (B.1).

Plusieurs études qui ont examiné les coûts de déshoragés des voyageurs urbains ont observé que ces valeurs suivent une distribution lognormale \cite (4),(5). Une étude réalisé à Lyon (5) a montré que cette distribution était bien décrite par les paramètres  $m=2,423$ (moyenne) et  $\sigma=1,775$ (écart-type). Les valeurs des temps, traduit par les coûts de déshoragés  $\beta$  et  $\gamma$ , des 6000 agents ont été tirées au hasard suivant une telle distribution, figure (B.1a).

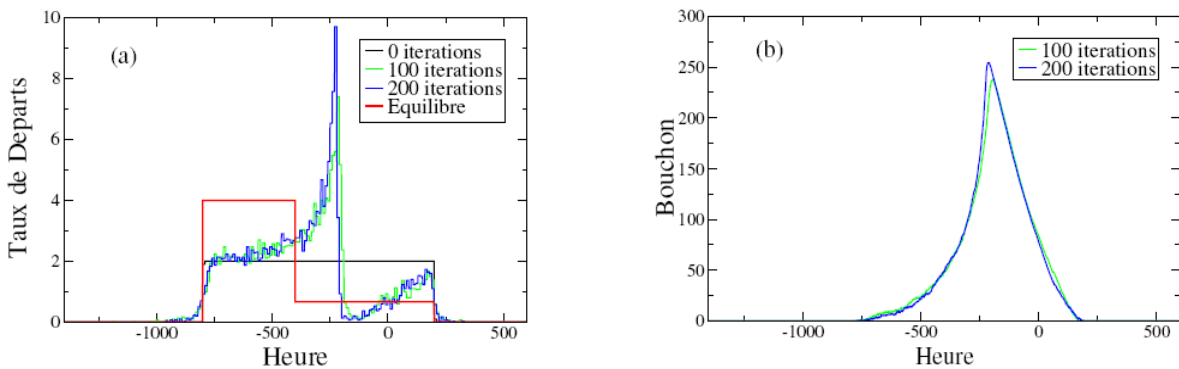


FIG. B.2 – (a) Taux de Départ initiaux et aux itérations normalisée 100 et 200 . (b) La taille du bouchon (en temps) à 100 et 200 itérations normalisés.

Nous voyons dans une simulation où les heures de départs des agents sont réparties sur l’optimum social que le coût moyen diminue car ceux qui ont une haute valeur de temps arrivent plus vers  $t^*$  et ceux qui n’ont pas une haute valeur de temps évitent le bouchon, figure (B.1b). Il y a encore des oscillations qui sont d’une taille un peu plus petite de celles que nous avons vu pour les agents homogènes, la figure (2.1a). Dans la figure (B.2a) nous voyons un pic vers le temps -250 dans le taux de départs, qui correspond aux agents avec un haut coût de déshorag qui sont prêt à subir de congestion pour arriver à l’heure. La figure (B.2b) montre que le temps passé dans le bouchon par ceux qui partent vers -250 est à peu près 250 donc ces gens arrivent à un temps proche de  $t^* = 0$ .

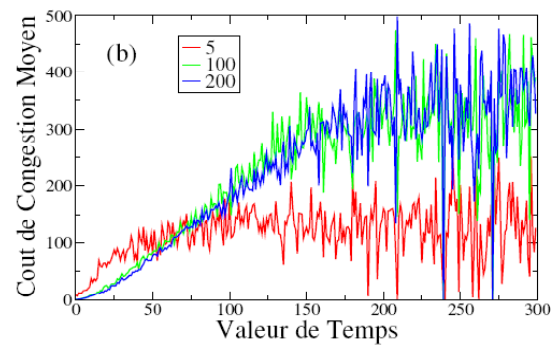
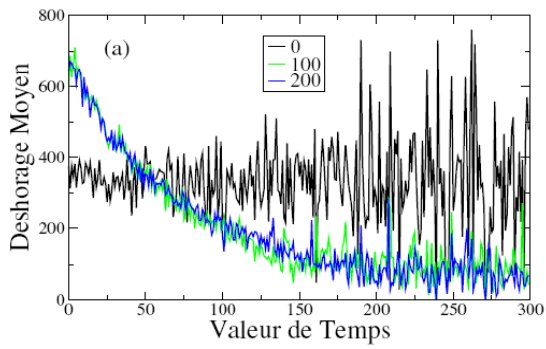


FIG. B.3 – (a) Avance ou retard absolu moyenné pour chaque valeur de temps pour la configuration initiale et à 100 et 200 itérations normalisée (b) Le coût de congestion moyen pour chaque valeur de temps.

Pour tester cette hypothèse, les deux graphes de la figure (B.3) ont été tracés. Le premier montre qu'en général ceux qui ont un haut coût de déshorage arrivent vers l'heure désirée mais l'heure d'arrivée des autres s'éloigne de  $t^*$ . Il est clair dans le deuxième graphe (B.3b) que ceux qui ont des hauts coûts de déshorage subissent plus de congestion.

### Annexe C : Seuils

Des simulations ont été faites pour des seuils de 5%, 10% et 20%, la figure (D.1). La nouvelle heure de départ a été acceptée seulement s'il a été au moins X% moins cher que le coût actuel. Pour chaque seuil le coût moyen a oscillé avec une période qui diminue quand le seuil augmente. Il est évidemment impossible d'arriver l'équilibre de Vickrey avec un seuil mais il est probable qu'il rend le modèle plus réaliste.

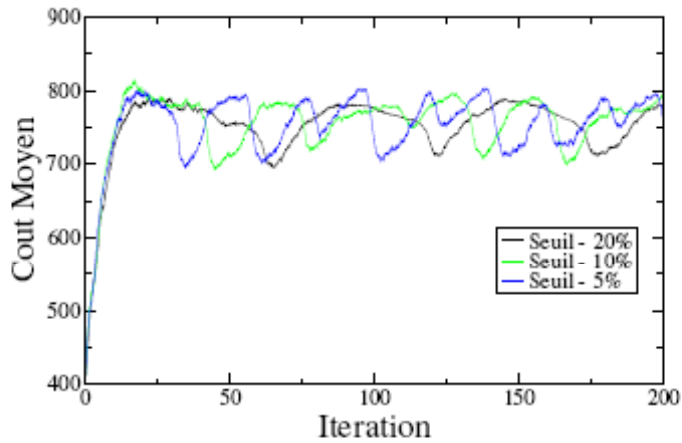


FIG. C.1 – Les coûts moyens pour 2000 agents avec 5% remis à jour à chaque itération avec seuils de 5%, 10% et 20%. Il est clair de cette graphie et la figure (??) que la période des oscillations augment avec le seuil.

## Annexe D : Réseaux sociaux

Un avantage des simulations multi-agents est qu'elles permettent de prendre en compte naturellement une caractéristique importante du système, à savoir l'influence des réseaux sociaux pour la diffusion de l'information. Dans toutes les simulations qui ont été faites le réseau de voisins a été généré au début et est resté constant. L'évolution de tels réseaux sera une avance importante sur ce modèle simple qui donne un aperçu qualitatif sur ses effets.

### *Agents Homogènes avec Voisins*

A chaque agent est attribué un réseau social, les agents ont en moyenne un certain nombre de voisins auxquels ils communiquent leurs coûts et heures de départs.

Après qu'un agent qui est remis à jour a essayé une nouvelle heure de départ il demande à ces voisins combien ils ont payé l'itération précédente. Si un voisin a payé moins qu'il n'a payé lui-même (ou qu'il croit qu'il va payer parce qu'il vient de changer son heure de départ par le mécanisme normal) l'agent préfère cette heure de départ.

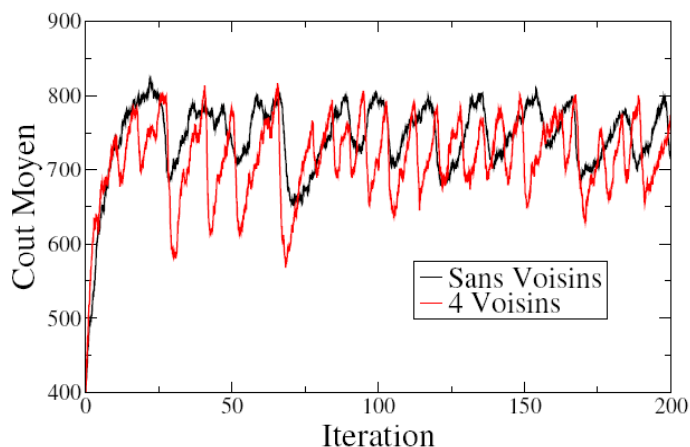


FIG. D.1 – Evolution des coûts moyens avec quatre voisins en moyenne et sans voisins. Dans ces simulations il y avait 500 agents donc 5% étaient remis à jour à chaque itération et il n'y avait pas de seuil pour choisir l'heure de départ essayé ou l'heure de départ d'un voisin.

Dans la figure (C.1) on voit que l'accroissement du nombre des voisins augmente la vitesse d'évolution du coût moyen et l'amplitude des oscillations. Il est raisonnable de supposer que dans un réseau de transport une meilleure répartition du trafic peut-être accomplie si les gens sont mieux informés de la situation actuelle. Dans ce modèle les contraintes physiques sont trop fortes, il n'y a simplement pas la capacité nécessaire pour éviter la congestion. Il existe une concurrence entre les agents pour les heures de départ les moins coûteuses, dès qu'il y a des inégalités, il y a des opportunités aussi. Une meilleure connaissance (à la part) des agents augmente l'intensité de cette concurrence mais ne peut pas résoudre le problème fondamental. Un système où tout le monde connaît tout oscille beaucoup plus et on se ramène au problème initial et aux simulations de Marchal et De Palma (6). L'effet d'une meilleure information dans un réseau serait un approfondissement intéressant.

### *Effet d'un seuil pour les voisins*

Il est probable que les modèles plus réalistes sont ceux où l'amélioration du coût doit franchir un certain seuil pour justifier le changement de l'heure de départ. Les agents ne devraient pas être infiniment sensibles aux changements du coût. La figure (C.2a) montre l'évolution des coûts moyens pour des agents qui ont un seuil pour prendre l'heure de départ de leurs voisins

et pour des agents qui n'en ont pas. Sur la figure (C.2b) il est clair que le seuil diminue beaucoup la probabilité de changer d'heure de départ. Cette diminution ne change pas l'évolution globale.

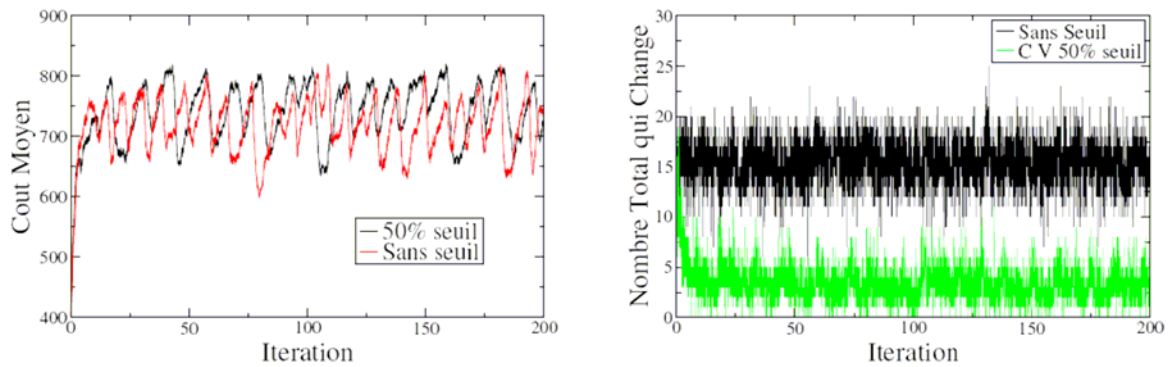


FIG. D.2 – (a) Les coûts moyens pour 500 agents, qui ont en moyenne 2 voisins, qui acceptent l'heure de départ de leurs voisins s'il est moins cher en rouge et s'il est au moins 50% moins cher en noir. Le système global évolue moins vite quand il y a un seuil. (b) Le nombre d'agents qui changent leur heure de départ lors d'une itération, soit parce qu'ils ont essayé eux-même une nouvelle heure de départ soit à cause d'un voisin, .



## Annexe. Spécifications du couplage des modèles de trafic aux modèles de localisation

---

# Specifications for the coupling of transportation and location choice models

Fabrice Marchal

October 2006

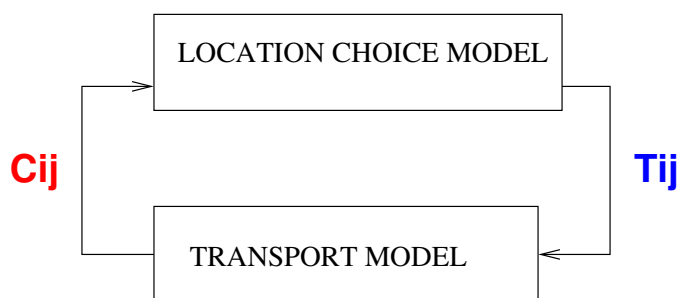
## 1 Introduction

The coupling of transportation and location choice models is sought in various research projects that study the interactions between transportation systems, land-use patterns and the demand for travel. Typically, the performances of the transportation system impact the decision of the users concerning mobility (e.g. time of usage and route decisions) and the location of their activities (e.g. residential choice) through generalized travel costs  $C_{ij}$  (see Figure 1). The decisions of the users in term of trips  $T_{ij}$  affect conversely the performances of the transportation system because of the presence of congestion. In various applications and models, the different pieces of this architecture are designed, studied and calibrated separately. Indeed, it is often suitable to decouple models that can ignore the network structure of transportation from those who have to deal explicitly with it.

This document focuses essentially on the specifications of the performances of transportation systems or *indicators* or so-called MOEs (Measures Of Effectiveness). It proposes the definition of an API (Application Programming Interface) to interface location choice models with existing transportation models. The API is proposed in pseudo-code since the choice of a common language (namely Java or Python) is still an open question. Potential usages of the provision of MOEs through a standardized API are, among others:

- prototyping and development of activity-based models (e.g. scheduling, destination choice) and location choice models (e.g. housing market),
- coupling with land-use models (e.g. Opus and its predecessor UrbanSim),

Figure 1: Land-use and transport interaction



- sensitivity analysis concerning the type of transportation model (i.e. MATSIM-T, METROPO-LIS or VISUM in our current scope),
- dissemination of the results of transportation models through GIS and other visualisation systems.

## 2 Queries

The API is basically the definition of a system of queries to retrieve MOEs from the transportation system. The queries are sent to a database system that stores consistently the information about the transportation systems and its various components (e.g. which modes are available on which portion of the network). Whether it is an *actual* DBMS that manages the database is an open implementation issue (see Section 6). Let `TSYSDBH` denote the handle to the transportation system database. `TSYSDBH` is properly set up to include information about network, travel modes, scenarios, available methods and results, etc.

In its general form, a query looks like:

```
MOE_PAIR = TSYSDBH.GETMOE( MOE_TYPE, SPATIAL_ENTITY, TIME, METHOD, PARAMETERS)
```

where

- `MOE_TYPE`: the measurement (e.g. travel time),
- `SPATIAL_ENTITY`: the geometric object to which data are assigned (e.g. a given path),
- `TIME`: the time of the day,
- `METHOD`: the method by which the measurement was computed (e.g. Dijkstra shortest path),
- `PARAMETERS`: needed by the method (e.g. link weights),
- `MOE_PAIR`: a pair consisting of the returned value of the MOE and an optional geometric object (e.g. shortest path).

It is often required to compute a given MOE for instance for all the zones of a given network, therefore it is usually much more efficient to perform packets of similar queries:

```
MOE_PAIRS = TSYSDBH.GETMOES( MOE_TYPE, SPATIAL_ENTITIES, TIME, METHOD, PARAMETERS)
```

where

- `SPATIAL_ENTITIES` is a collection of geometric objects of the same type (zones, nodes, links, etc.),
- `MOE_PAIRS` are the returned values of the MOE and optional geometric objects associated to the collection (i.e. in the same order or with a key/pair hash table).

Note: in most case optional geometric objects are not returned except for shortest path computations.

### 3 Spatial entities

Six types of spatial or geometric objects are considered:

- POINTS defined as 2D coordinates,
- traffic analysis ZONES (TAZ),
- intersections or NODES,
- road sections or LINKS,
- PATHS defined as lists of successive links,
- REGIONS defined as 2D polygons.

Aggregation/disaggregation operators need to be defined in a standard way since all the methods do not share necessarily the same geometric representations.

Example 1: shortest travel time from POINT A to POINT B based on a classical zone-based assignment: access and egress travel times for POINT  $\Leftrightarrow$  ZONE transfers have to be interpolated.

Example 2: shortest travel time from ZONE A to ZONE B based on a MATSIM-T simulation: travel times for journeys between zones A and B have to be aggregated.

### 4 MOEs / Indicators

The basic list of indicators (MOE\_TYPE) provided through the API consists of:

- distance,
- travel time,
- vehicle flow,
- generalized travel cost,
- logsum,
- accessibility.

Travel time, distance and traffic flow are easily defined while the rest are ambiguous indicators whose definition also depend on the method of computation. Methods are defined by the available assignment procedures applied to the scenario.

*Distance* is computed using euclidean distance, free-flow shortest path (FFSP) or congested shortest path (CGSP) for available assignments. Note that link penalties can be parametrized (see).

*Travel time* is computed with FFSP or CGSP for available assignments.

*Vehicle flow* is based on available assignments.

*Generalized travel cost* is based on available assignments. It is assumed that travel demand information is available to compute segment-based MOEs (e.g. travel costs for segmented by value of time).

*Logsum* values are assumed to be consistent and computed for the travel choices that are actually modeled in the available assignment procedures. This implies generally that TSYSDBH points to a

scenario with several transport modes available. It is also assumed that travel demand information is available to compute segment-based MOEs (e.g. logsum for *n-vehicle* households as required by UrbanSim).

*Accessibility* values are computed for available assignments and depend on the relevant travel demand data (e.g. Koenig formulation).

## 5 Methods

The available methods will largely depend on the availability of interfaces to exploit the results from various assignments techniques (i.e. MATSIM-T, METROPOLIS or VISUM in the scope of this work).

For FFSP and CGSP computations, the procedure can be parametrized to allow for customizable link-penalties. For the time being, we assume that node-penalties are coded as link-transfer penalties (e.g. waiting and boarding times in PT). Time-dependent link penalties  $\pi(t)$  are parametrized as follows:

$$\pi = \alpha\tau(t) + \beta d + p(t)$$

where the variables are

$\tau(t)$ : time-dependent travel time [hr],

$d$ : distance or length of the link [km]

$p(t)$ : time-dependent toll [\$],

and the method parameters are

$\alpha$ : monetary value of time [\$/hr],

$\beta$ : monetary value of distance [\$/km].

Other methods than FFSHP, CGSP may be worthwhile to be considered such as simplest path computation (e.g. for way-finding applications).

## 6 Implementation issues

The definitions above are relatively loose. The benefit of a common API largely depends here on its ability to hide the complexity of the underlying computation methods and assignment procedures. Several implementation issues are reviewed below.

### 6.1 Database Management Systems (DBMS)

In principle TSYSDBH should point to a live structure in RAM (e.g. MATSIM-T router) or to a wrapper around a filed-based DBMS such as PostGis. It remains to be investigated if a common platform can be used to store the raw data (i.e. MySQL, PostGIS or file-based XML). However, a network-able DBMS is probably a good solution to maintain at least the meta-data information concerning the scenarios and the location of raw data.

## 6.2 MATSIM-T

The *router* part of MATSIM-T is already acting somehow as a provider of MOEs to the strategic modules. The setup of a `TSYSDBH` for a MATSIM-T scenario would include:

- reading the network,
- reading the simulation events from the last iteration,
- computing link-based aggregate values (e.g.  $\tau(t)$ ).

## 6.3 METROPOLIS

Assignment results are currently stored in a MySQL database. A Java wrapper allows to compute and retrieve some of the MOEs listed above. It could be extended to allow for various sources of data from other assignment methods.

## 6.4 VISUM

Attributes from VISUM databases can be exported in the ASCII file formats *.net* and *.dmd* which are open.

## 6.5 Pedestrian mode

With the increasing availability of high-resolution networks, it could be feasible to have an explicit computation of walking distance for pedestrian mode. This would allow to complement zone-based models by computing realistic access/egress times to PT.

## 6.6 Performances

For location choice and activity-based models, efficient and fast routing methods are required. This is less of an issue for the coupling with land-use models and analysis tools. Therefore, depending on the application, `TSYSDBH` might have to keep a substantial amount of redundant information available (as opposed to computations on-the-fly). In particular, it might be useful to define consistent *travel time surfaces* (TTS) as parametrized approximation of travel time measurements.

## 6.7 UrbanSim and Opus

UrbanSim version 4 and Opus are zone-based for the description of the transportation system while much of their architecture is parcel-based. The availability of high-resolution networks should allow for the computation of parcel-based accessibilities, provided that these are computed on-the-fly instead of storing them in a database. This implies the addition of intra-zonal travel modeling in the case of zone-based assignment models (e.g. walking to/from the PT system).

# Table des matières

---

<b>INTRODUCTION.....</b>	<b>1</b>
<b>1 MODÈLE DE DENSITÉ ET DE RENTE URBAINE .....</b>	<b>3</b>
<b>1.1 Introduction .....</b>	<b>3</b>
<b>1.2 Formation de la densité et de la rente avec surfaces et densité constantes .....</b>	<b>5</b>
1.2.1 Principe des modèles .....	5
1.2.2 Un modèle simple de formation de la ville .....	6
1.2.2.1 Particularités du modèle étudié .....	6
1.2.2.2 Résultats .....	6
1.2.2.3 Conclusion.....	8
1.2.3 Choix du processus de surenchère .....	9
1.2.3.1 Particularités des modèles étudiés.....	9
1.2.3.2 Deux types de résultats.....	9
1.2.3.3 Modèle à surenchère de type a (proportionnelle à la différence d'utilité).....	10
1.2.3.4 Modèle à surenchère de type b (proportionnelle à la rente) .....	13
1.2.3.5 Conclusion.....	14
1.2.4 Processus symétriques d'accroissement/diminution de la rente .....	14
1.2.5 Introduction aux études .....	16
1.2.6 Coût de transport vers un lieu de travail central.....	16
1.2.6.1 Particularités du modèle étudié .....	16
1.2.6.2 Résultats : valeurs de paramètres conduisant à un équilibre.....	16
1.2.7 Simulation d'un centre (à surface et/ou capacités différentes) .....	18
1.2.7.1 Particularités du modèle étudié .....	18
1.2.7.2 Plus la surface au centre est réduite, plus la rente par unité de surface au centre devient grande.....	19
1.2.7.3 La capacité au centre ne joue pas sur les rentes finales.....	20
1.2.7.4 Conclusion de cette étude.....	21
1.2.8 Influence de la différence de revenu .....	21
1.2.8.1 Particularités du modèle étudié .....	21
1.2.8.2 La différence de revenu ne conduit pas toujours à une différenciation spatiale.....	21
1.2.8.3 Conclusion de cette étude.....	22
1.2.9 Influence de la différence de coût de transport .....	22

1.2.9.1	<i>Particularité de l'étude</i>	22
1.2.9.2	<i>La différence de coût de transport conduit à une ségrégation spatiale..</i>	23
1.2.9.3	<i>Influence des liens entre individus sur la configuration finale</i>	23
1.2.9.4	<i>Conclusion de ces études</i>	27
<b>1.3</b>	<b>Formation de la densité et de la rente avec surfaces et densités variables.....</b>	<b>28</b>
1.3.1	Principe du modèle	28
1.3.1.1	<i>Modèle théorique</i>	28
1.3.1.2	<i>Modèle de simulation</i>	30
1.3.2	Le modèle individu-centré retrouve la densité optimale théorique	32
1.3.3	Influence du coût unitaire de transport sur la localisation de deux populations différent par leurs revenus	33
1.3.4	Influence des liens sur la localisation de deux populations différent par leurs revenus	37
1.3.4.1	<i>Lien à tous</i>	37
1.3.4.2	<i>Liens à l'intérieur de chaque population</i>	38
1.3.4.3	<i>Liens seulement vers l'autre population</i>	38
1.3.4.4	<i>Liens aléatoires vers une partie de la population</i>	39
1.3.4.5	<i>Conclusion de cette étude</i>	41
1.3.5	Populations avec des coûts de transport différents	41
1.3.5.1	<i>Influence de la valeur des coûts de transport pour deux populations</i>	41
1.3.5.2	<i>Plusieurs populations avec des coûts de transport différents</i>	43
1.3.5.3	<i>Conclusion</i>	46
1.3.6	Formation de la densité et de la rente suivant un processus de marchandage	46
1.3.6.1	<i>Description du modèle</i>	47
1.3.6.2	<i>Premier résultat : les paramètres de marchandage déterminent les rentes finales</i>	48
1.3.6.3	<i>Deuxième résultat : les paramètres de marchandage déterminent aussi les densités finales</i>	50
1.3.6.4	<i>Schéma résumant les différents cas de figure</i>	50
1.3.7	Conclusion	51
<b>1.4</b>	<b>Formation de densités et de rentes de firmes et d'employés .....</b>	<b>52</b>
1.4.1	Salaires homogènes et fixes	53
1.4.1.1	<i>Modèle</i>	53
1.4.1.2	<i>Influence du coût unitaire de transport des individus</i>	53
1.4.1.3	<i>Influence du coût unitaire de transport des firmes</i>	54
1.4.1.4	<i>Influence de la valeur de <math>\alpha=\beta</math></i>	55



1.4.1.5	<i>Différents ordres de mise à jour</i> .....	56
1.4.2	Firmes et travailleurs avec des salaires variables.....	58
1.4.2.1	<i>Modèle</i> .....	58
1.4.2.2	<i>Influence des différents paramètres</i> .....	59
1.4.3	Deux types différents de firmes dans la ville .....	62
1.4.3.1	<i>Une des firmes accroît le financement de ses locaux</i> .....	62
1.4.3.2	<i>Une des firmes subventionne le transport de ses employés</i> .....	64
1.4.4	L'une des firmes dépense plus pour ses locaux, l'autre subventionne le transport de ses travailleurs .....	65
1.4.4.1	<i>Apparition de plusieurs cercles concentriques</i> .....	66
1.4.4.2	<i>L'accroissement relatif des subventions de transport favorise la localisation en périphérie</i> .....	66
1.4.4.3	<i>L'accroissement relatif du financement des locaux favorise la concentration des travailleurs</i> .....	67
1.4.4.4	<i>Configuration asymétrique</i> .....	68
1.4.5	Conclusion.....	68
<b>1.5</b>	<b>Conclusion</b> .....	<b>69</b>
<b>2</b>	<b>MODÈLE DE VILLE AVEC PROPRIÉTAIRES ET LOCATAIRES</b> .....	<b>70</b>
<b>2.1</b>	<b>Le modèle générique</b> .....	<b>70</b>
2.1.1	Utilité.....	70
2.1.2	Mécanisme du modèle.....	71
<b>2.2</b>	<b>Un modèle d'emplois localisés au centre</b> .....	<b>72</b>
<b>2.3</b>	<b>Un modèle de sociabilité</b> .....	<b>74</b>
<b>2.4</b>	<b>L'application informatique:</b> .....	<b>77</b>
<b>2.5</b>	<b>Perspectives</b> .....	<b>79</b>
<b>3</b>	<b>MODÈLE INDIVIDU-CENTRÉ DE LA CONGESTION ROUTIÈRE</b> .....	<b>81</b>
<b>3.1</b>	<b>Modèle et équilibre analytique</b> .....	<b>81</b>
3.1.1	Le bouchon.....	82
3.1.2	La fonction de coût.....	82
3.1.3	Dérivation de l'équilibre .....	83
<b>3.2</b>	<b>Modèle individu centré</b> .....	<b>84</b>
3.2.1	Modèle avec agents homogènes .....	85
3.2.2	Modèle avec agents hétérogènes .....	85
3.2.2.1	<i>Distribution des heures d'arrivées préférées</i> .....	85
3.2.2.2	<i>Paramètres importants du modèle</i> .....	87
<b>3.3</b>	<b>Conclusion</b> .....	<b>88</b>

<b>4</b>	<b>COUPLAGE DES MODÈLES DE TRAFIC AUX MODÈLES DE LOCALISATION.....</b>	<b>89</b>
<b>4.1</b>	<b>Objectifs .....</b>	<b>89</b>
<b>4.2</b>	<b>Travaux réalisés.....</b>	<b>89</b>
4.2.1	Indicateurs .....	89
4.2.2	Technologie.....	90
4.2.3	Implémentation.....	91
<b>5</b>	<b>LES ENVIRONNEMENTS POSSIBLES DE DÉVELOPPEMENT .....</b>	<b>92</b>
<b>5.1</b>	<b>Madkit .....</b>	<b>92</b>
<b>5.2</b>	<b>Repast .....</b>	<b>93</b>
<b>5.3</b>	<b>Quelques autres environnements possibles.....</b>	<b>93</b>
5.3.1	Moduleco.....	93
5.3.1.1	<i>Description succincte.....</i>	<i>93</i>
5.3.1.2	<i>Modèles types.....</i>	<i>94</i>
5.3.1.3	<i>Points faibles.....</i>	<i>94</i>
5.3.2	StarLogo/NetLogo.....	94
5.3.2.1	<i>Description formelle du monde.....</i>	<i>94</i>
5.3.2.2	Applications types :.....	94
5.3.2.3	Points faibles.....	94
5.3.3	CORMAS.....	94
5.3.3.1	<i>Formalisation du monde.....</i>	<i>94</i>
5.3.3.2	Modèles types.....	94
5.3.3.3	<i>Points faibles.....</i>	<i>94</i>
5.3.4	Conclusion.....	95
<b>5.4</b>	<b>Synthèse de la comparaison entre Repast et Madkit .....</b>	<b>95</b>
<b>5.5</b>	<b>Conclusion.....</b>	<b>96</b>
	<b>CONCLUSION.....</b>	<b>97</b>
	<b>BIBLIOGRAPHIE.....</b>	<b>100</b>
	<b>ANNEXES. AU SUJET DU MODÈLE DE CONGESTION .....</b>	<b>102</b>
	<b>ANNEXE. SPÉCIFICATIONS DU COUPLAGE DES MODÈLES DE TRAFIC AUX MODÈLES DE LOCALISATION .....</b>	<b>109</b>