MPRA

Munich Personal RePEc Archive

# Project Valuation Using fuzzy Real Options

Bacchini, Roberto Darío; Garcia-Fronti, Javier and Marquez, Ezequiel

University of Buenos Aires

01. December 2007

# VALUACIÓN DE UN PROYECTO DE INVERSIÓN UTILIZANDO OPCIONES REALES BORROSAS

**Darío Bacchini, Javier García-Fronti** y **Ezequiel Márquez**

*Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la Gestión*
*Facultad de Ciencias Económicas - Universidad de Buenos Aires*
Av. Córdoba 2122 – 2º Piso – Capital Federal, Argentina

Febrero 2007

**Resumen**

Entre las metodologías para evaluar proyectos de inversión en tecnología, una de las más utilizadas actualmente es la teoría de Opciones Reales, la cual permite evaluar las posibilidades de una empresa de flexibilizar la inversión de acuerdo a distintos escenarios. Esta teoría asume que el valor presente del beneficio neto futuro esperado es un valor cierto, lo cual es de difícil aplicación en contextos tecnológicos. Asimismo, en los casos donde se instala tecnología nueva, tampoco la estadística tradicional puede dar respuesta debido a la falta de historia previa. Carlsson y Fullér (2000) desarrollan un modelo que permite que el flujo de fondos futuro sea borroso (en particular trapezoidal) logrando así extender la teoría a "opciones reales borrosas". Este trabajo describe el modelo y lo aplica a un caso práctico, permitiendo contrastar los resultados con los modelos tradicionales de valuación de inversiones.

**Palabras Clave:** Inversión en Tecnología, Valuación de Opciones Reales, Números Borrosos.

**Agradecimientos:** Los autores agradecen el apoyo de la Universidad de Buenos Aires por medio del proyecto UBACyT E015, del programa PROPAI y del Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la Gestión Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires.

## INTRODUCCIÓN

Las técnicas tradicionales de evaluación de proyectos, "Valor actual neto" y "Tasa interna de retorno"[1], omiten un hecho fundamental que debe tenerse presente al momento de realizar una inversión: los Proyectos son dinámicos. Con esto queremos decir que las situaciones, las circunstancias o el ambiente en el cual se desarrolla un Proyecto van cambiando, y así una inversión rentable en un momento puede transformarse en deficitaria en otro. Para dar cuenta de esta característica fundamental de toda inversión surgen técnicas alternativas que están directamente asociadas a la administración o gestión del proyecto. Es decir, no debemos pensar solamente si es conveniente o no invertir, también debemos preguntarnos si es más conveniente esperar un tiempo y realizar la inversión en otro momento. A su vez, una vez en marcha el proyecto, podemos expandirlo si las cosas así lo ameritan, o bien achicarlo si los resultados no son tan buenos como esperábamos. En el peor de los casos, hay ocasiones en que un proyecto que esperamos que sea rentable resulta ser un fracaso, con lo cual la mejor alternativa podría ser abandonarlo y liquidar los activos destinados al mismo.

La metodología que contempla las características descritas en el párrafo anterior es conocida como Opciones Reales (Bacchini *et al.*,2006). Son oportunidades de tomar una decisión determinada en beneficio del resultado del proyecto y, por consiguiente, tienen un valor asociado. Al incluir el valor de estas oportunidades (diferir, abandonar, expandir), un proyecto que las técnicas tradicionales rechazarían puede convertirse en una buena elección a la hora de invertir. Copeland y Antikarov (2001:5) definen a las Opciones Reales como "un derecho, pero no una obligación, de tomar una acción a un determinado costo por un período predeterminado"**.**

Sin embargo, esta teoría presenta algunos problemas. Una de las variables principales en la valuación de una Opción Real es el valor presente de los flujos de fondos futuros de la inversión. Estos flujos de fondos son estimados, ya que no existe certeza respecto a su verdadero valor. Por lo tanto una mala estimación de dichos valores llevaría a tomar una mala decisión. En las inversiones en nuevas tecnologías este problema es aún más grave, ya que no existe información histórica, y por lo tanto no es aplicable la estadística clásica.

Carlsson y Fullér (2000) y Carlsson y Majlender (2005) introducen un nuevo enfoque basado en la matemática borrosa: las Opciones Reales Borrosas. Este trabajo utiliza el modelo de Opciones Reales

[1] Véase Bernardello *et al.* (2005).

Borrosas presentado en dichos trabajos para valuar una opción de inversión en tecnología. La aplicación de la matemática borrosa a las Opciones Reales permite representar los flujos de fondos futuros por medio de una distribución de posibilidades, y de esta forma captar la incertidumbre que estos presentan.

La estructura del trabajo es la siguiente. La siguiente sección describe la metodología utilizada para valuar una Opción Real desde el enfoque probabilístico. En la sección 2 se incorpora al modelo la matemática borrosa para reflejar la incertidumbre en los flujos de fondos de la inversión. Finalmente, en la sección 3 se desarrolla un ejemplo numérico de aplicación del método.

## 1. VALUACIÓN DE UNA OPCIÓN REAL PROBABILÍSTICA

La característica principal de las Opciones Reales es que permite valuar la flexibilidad de las inversiones y las decisiones gerenciales durante el desarrollo de la inversión. A lo largo de la vida de un proyecto de inversión la empresa tiene la posibilidad de tomar decisiones para adecuarse a las distintas situaciones que se presentan y de esta manera aumentar las ganancias esperadas de la inversión o reducir posibles pérdidas. Básicamente, la Teoría de Opciones Reales es una herramienta para valuar estas oportunidades, ampliando el análisis de los proyectos de inversión.

Este valor de la flexibilidad (que en algunos casos es más importante que el valor del proyecto en sí), es un valor agregado a los proyectos de inversión. La Teoría de Opciones Reales se utiliza para obtener este valor y de esta manera incrementar el valor que posee un proyecto de inversión. En otras palabras, una inversión tiene dos valores distintos: uno sin considerar las Opciones Reales y otro que incorpora el valor de las Opciones Reales. En este sentido, Benaroch (2001, 2002) diferencia entre dos conceptos de valor actual. Por un lado, denomina Valor Actual Neto pasivo al valor actual neto tradicional, es decir, al valor actual de los flujos de fondos futuros de la inversión menos su costo. Asimismo, denomina Valor Actual Neto activo al Valor Actual Neto pasivo más el valor que surge de las Opciones Reales que pueda contener el proyecto de inversión:

Para calcular el valor de las Opciones Reales, se utilizan las técnicas de valuación de Opciones Financieras debido a las similitudes existentes. Uno de las principales técnicas utilizadas en finanzas es la fórmula desarrollada por Black y Scholes (1973) para la valuación de opciones de compra. En el mismo año Merton (1973) extendió dicha fórmula para la valuación de activos que pagan dividendos[2],

$$C_0 = S_0 e^{-\delta T} N(d_1) - X e^{-rT} N(d_2)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

y donde

| | |
|---|---|
| $C_0$ | = valor de la opción de compra |
| $S_0$ | = precio del activo |
| $N(\ )$ | = función de distribución acumulada para una variable normal estandarizada |
| $X$ | = precio de ejercicio |
| $r$ | = tasa de interés anual libre de riesgo con capitalización continua |
| $T$ | = fecha de vencimiento de la opción |
| $\sigma$ | = desvío estándar |
| $\delta$ | = dividendos que paga el activo durante la vida de la opción |

Para la valuación de Opciones Reales, como primera aproximación, se utiliza esta misma fórmula pero cambiando algunas de las variables del modelo. La diferencia principal es que el activo que se está valuando es un activo real y no un activo financiero. Una de las características que debe presentar un proyecto de inversión para que se pueda aplicar esta teoría es que el mismo no sea "ahora o nunca", es decir que el proyecto se pueda realizar en cualquier momento del tiempo. Por lo tanto, la pregunta que se hace la empresa no sólo es si debe realizar la inversión o no, sino también cuándo realizarla, en qué escala, etc. La regla de decisión que surge a partir de esta teoría es que la empresa debe invertir si el valor actual neto de la inversión es lo suficientemente grande como para compensar el valor de la opción. Distintos modelos de valuación de Opciones Reales, así como el contexto en el cual son aplicados se puede encontrar en Dixit y Pindyck (1994).

Tomando el mismo modelo utilizado para valuar opciones financieras (Benaroch, 2001), (Benaroch, 2002), el precio de una opción real es:

$$VOR = S_0 e^{-\delta T} N(d_1) - X e^{-rT} N(d_2)$$

---

[2] Existen otros modelos para la valuación de opciones, pero la fórmula de Black y Scholes es una de las más utilizadas. Para una introducción a la teoría de valuación de opciones, véase Bachini et al. (2004) o Hull (2000).

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

y donde

| | |
|---|---|
| $VOR$ | = valor de la opción real |
| $S_0$ | = valor actual de los flujos de fondos esperados |
| $N(\ )$ | = es la función de distribución acumulada para una variable normal estandarizada |
| $X$ | = valor de los costos de la inversión |
| $r$ | = tasa de interés anual libre de riesgo con capitalización continua |
| $T$ | = fecha de vencimiento de la opción |
| $\sigma$ | = volatilidad de los flujos de fondos esperados |
| $\delta$ | = ingresos perdidos durante la duración de la opción |

Si bien las fórmulas de una y otra opción son similares, existe una diferencia sustancial en la aplicación de ambas opciones. Las opciones financieras pueden usarse libre e independientemente, mientras que las opciones reales se utilizan para tomar decisiones estratégicas dentro de la empresa, donde la decisión de tomar una opción debe considerar a la empresa como un todo.

## 2. VALUACIÓN DE UNA OPCIÓN REAL. ENFOQUE HÍBRIDO

En la fórmula para la valuación de opciones reales presentada en la sección anterior, el activo subyacente es el valor actual de los flujos de fondos esperados, mientras que el precio de ejercicio es el costo de la inversión. Éstos no son valores ciertos al momento de valuar la opción, son inciertos. Por esta razón, presentamos en esta sección un modelo que permite valuar una opción real aplicando la fórmula de Black y Scholes pero considerando que el valor actual de los flujos de fondos y el costo de la inversión son valores inciertos, utilizando números borrosos. Carlsson y Fullér (2000) y Carlsson y Majlender (2005) desarrollan un modelo que contempla la situación planteada. Siguiendo estos trabajos, se estima el valor actual de los flujos de fondos a partir de una distribución de posibilidad trapezoidal de la forma:

$$S_0 = (s_1, s_2, \alpha, \beta)$$

donde $[s_1, s_2]$ es el centro del número borroso $S_0$ y es el intervalo que contiene los valores más posibles del valor actual de los flujos de fondos, $(s_2+\beta)$ es el valor más alto que puede tomar el valor actual y $(s_1-\alpha)$ es el valor más chico del mismo. Asimismo, podemos estimar los costos esperados por medio de otra distribución de posibilidad trapezoidal de la forma:

$$X = (x_1, x_2, \alpha', \beta')$$

donde el intervalo $[x_1, x_2]$ contiene los valores más posibles del costo esperado, $(x_1+\beta')$ es el valor más alto que pueden tomar los costos y $(x_1-\alpha')$ es el menor valor para los mismos.

En este contexto, podemos utilizar la siguiente fórmula para calcular el valor de una opción real borrosa:

$$VORB = S_0 e^{-\delta T} N(d_1) - X e^{-rT} N(d_2),$$

donde,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{E(S_0)}{E(X)}\right) + \left(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$E(S_0)$ es el valor esperado del valor actual de los flujos de fondos futuros, $E(X)$ es el valor esperado de los costos y $\sigma \equiv \sigma(S_0)$ es la varianza del valor actual de los flujos de fondos esperados. A partir de las operaciones aritméticas para números borrosos trapezoidales podemos encontrar una expresión para el valor de una opción real borrosa:

$$\begin{gathered} VORB = (s_1, s_2, \alpha, \beta) e^{-\delta T} N(d_1) - (x_1, x_2, \alpha', \beta') e^{-rT} N(d_2) = \\ \big(s_1 e^{-\delta T} N(d_1) - x_2 e^{-rT} N(d_2), s_2 e^{-\delta T} N(d_1) - x_1 e^{-rT} N(d_2), \\ \alpha e^{-\delta T} N(d_1) + \beta' e^{-rT} N(d_2), \beta e^{-\delta T} N(d_1) + \alpha' e^{-rT} N(d_2)\big) \end{gathered}$$

El valor de una opción real en este contexto es un número borroso, en el cual los valores más posibles que puede tomar el valor de la opción se encuentran en el intervalo $\left[s_1 e^{-\delta T} N(d_1) - x_2 e^{-rT} N(d_2), s_2 e^{-\delta T} N(d_1) - x_1 e^{-rT} N(d_2)\right]$, el máximo valor que puede tomar la opción es $\left(\alpha e^{-\delta T} N(d_1) + \beta' e^{-rT} N(d_2)\right)$ mientras que el mínimo es $\left(\beta e^{-\delta T} N(d_1) + \alpha' e^{-rT} N(d_2)\right)$.

## 3. UNA APLICACIÓN PRÁCTICA

Supongamos una empresa que desea hacer una inversión para la renovación y el mantenimiento de un nuevo sistema informático, por un plazo de 10 años. Luego de un estudio de mercado, la empresa estima que la inversión generará ingresos que pueden ser representados por el siguiente número borroso:

$$S_0 = (\$600.000;\$900.000;\$250.000;\$250.000)$$

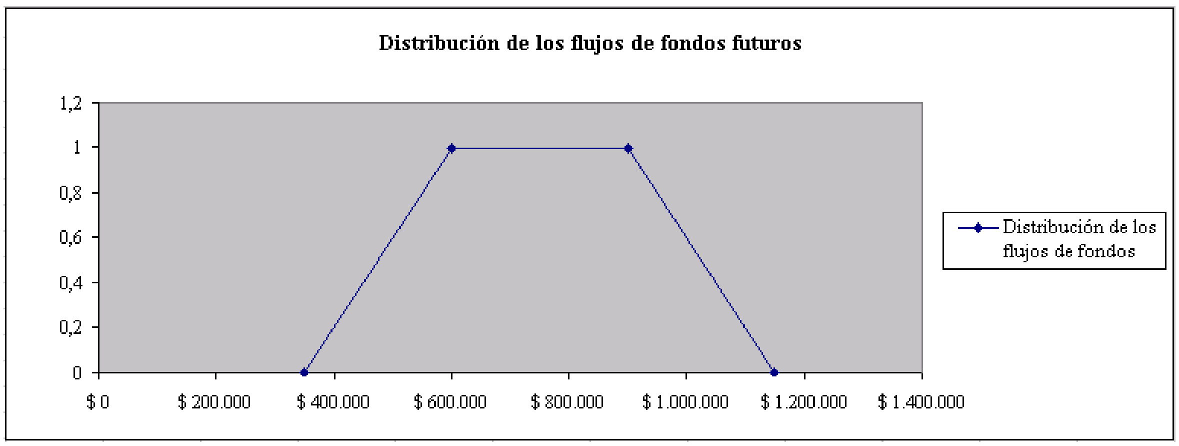


Figura 1: Distribución de posibilidades del valor actual de los flujos de fondos futuros.

A su vez, se cree que los costos de la misma pueden ser representados por otro número borroso:

$$X = (\$900.000;\$1.100.000;\$200.000;\$200.000)$$

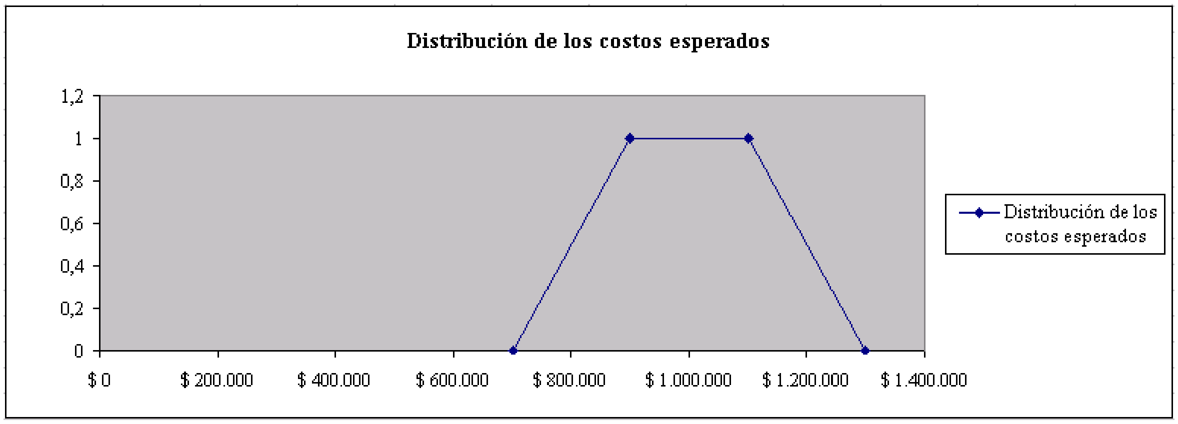


Figura 2: Distribución de posibilidades del valor actual de los costos esperados.

La empresa espera una tasa libre de riesgo del 4% anual, mientras que estima perder un 3% de los ingresos por diferir la inversión. Para obtener el valor de la opción necesitamos calcular previamente los valores esperados de los flujos de fondos y los costos, así como la varianza de los flujos de fondos:

$$E(S_0) = \frac{\$600.000 + \$900.000}{2} + \frac{\$250.000 - \$250.000}{6} = \$750.000$$

$$E(X) = \frac{\$900.000 + \$1.100.000}{2} + \frac{\$200.000 - \$200.000}{6} = \$1.000.000$$

$$\sigma(S_0) = \sqrt{\frac{(\$900.000 - \$600.000)^2}{4} + \frac{(\$900.000 - \$600.000)(\$250.000 + \$250.000)}{6} + \frac{(\$250.000 + \$250.000)^2}{24}}$$

$$\sigma(S_0) = \$240.658,82$$

El valor que vamos a utilizar para la fórmula de Black & Scholes es el porcentaje de la varianza sobre el valor esperado: $\sigma(S_0) = \frac{\$240.658,82}{\$750.000} = 0,3209$ .

Los cálculos los podemos realizar en una planilla de Excel de la siguiente manera:

**Parámetros de las distribuciones de posibilidades**

| Valor actual de los flujos de fondos | |
|---|---|
| s1 | $ 600.000 |
| s2 | $ 900.000 |
| $\alpha$ | $ 250.000 |
| $\beta$ | $ 250.000 |

| Valor actual de los costos esperados | |
|---|---|
| x1 | $ 900.000 |
| x2 | $ 1.100.000 |
| $\alpha'$ | $ 200.000 |
| $\beta'$ | $ 200.000 |

**Parámetros generales**

| | |
|---|---|
| T | 10 |
| r | 0,04 |
| $\delta$ | 0,03 |

**Valores esperados**

| | |
|---|---|
| E(S0) | $ 750.000 |
| E(X) | $ 1.000.000 |
| $\sigma$(S0) | 0,3209 |

**Resultados**

| Parámetros de la Opción Real Borrosa | |
|---|---|
| v1 | $ 98.252,37 |
| v2 | $ 270.232,98 |
| $\theta$ | $ 148.777,37 |
| $\phi$ | $ 148.777,37 |

| | |
|---|---|
| d1 | 0,322391437 |
| d2 | -0,692315234 |

| | |
|---|---|
| E(VORB) | $ 184.242,67 |
| $\sigma$(VORB) | 0,7601 |

Figura 3: Cálculo de los valores de la Opción Real Borrosa

El valor de la Opción Real es el número borroso:

$$VORB = (\$98.252,37; \$270.232,98; \$148.777,37; \$148.777,37)$$

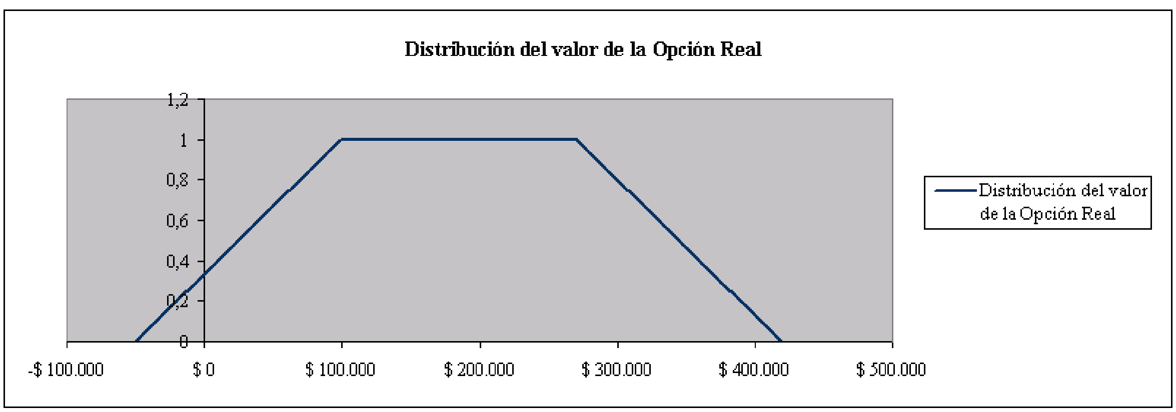


Figura 4: Distribución de posibilidades del valor de la Opción Real

De esta manera obtenemos un conjunto de valores posibles para la Opción Real, que amplían la capacidad de la empresa para tomar decisiones sobre la inversión que planea realizar.

## CONCLUSIONES

En el presente trabajo se introdujo un modelo de valuación de Opciones Reales Borrosas, basado en los modelos de Carlsson y Fullér (2000) y Carlsson y Majlender (2005). El modelo es una extensión del modelo clásico de valuación de Opciones Reales basado en la fórmula desarrollada por Black y Scholes (1973). Por medio de la incorporación de la matemática borrosa se extiende el modelo para dar cuenta de la incertidumbre[3]. De esta manera, el valor de la Opción Real es un número borroso, brindándole a la empresa una mejor herramienta de decisión, como se observa en la aplicación de la última sección del presente trabajo.

Dejamos pendiente para futuros trabajos el desarrollo de una fórmula de valuación de Opciones Reales Borrosas utilizando el modelo de Merton (1976). Esta extensión permitiría contemplar la ocurrencia de eventos extremos por medio de un proceso de Poisson, brindando un modelo más adecuado para valuar Opciones Reales en un contexto de riesgos extremos, propios de las economías emergentes.

[3] Las variables utilizadas en el modelo se representan por medio de números borrosos, que permiten captar la incertidumbre de dichas variables.

**Referencias:**


Bacchini, R. D.; Míguez, D. F.; García Fronti, J. I.; Rey, S. A. (2004) *Ingeniería Financiera. Futuros y Opciones utilizando Microsoft Excel.* Omicron System. Argentina.

Bacchini, D., García Fronti, J. y Márquez E. (2006), *Evaluación de Inversiones con Opciones Reales,* Omicron Editorial.

Bernardello, A. M.Casparri, Javier García Fronti, R. Gotelli y M. Rodriguez (2005) *Matemática financiera*, Omicron, Buenos Aires.

Benaroch, M. (2001). "Option-Based Management of Technology Investment Risk", *IEEE Transactions on Engineering Management*, 48 (2), pp. 428-444.

Benaroch, M. (2002). "Managing Information Technology Investment Risk: A Real Option Perspective", *Journal of Management Information Systems*, 19 (2), pp. 43-84.

Benaroch, M. and R. J. Kauffman (1999). "A Case for Using Real Options Pricing Analysis to Evaluate Information Technology Project Investments", *Information System Research*, 10 (1) (March 1999), pp. 70-86.

Black, F. and M. Scholes (1973). "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, 637-659.

Copeland, Tom y Antikarov, Vladimir ( 2001) *Real Options. A practitioner's guide*. Texere. USA.

Carlsson, C. and R. Fullér (2000) "On fuzzy real option valuation" Turku Centre for Computer Science Technical Report No 367. Finland.

Carlsson, C. and P. Majlender (2005) "On Fuzzy Real Option Valuation", working paper presented at the 9th Annual International Conference on Real Options - Paris, France

Dixit, A. K. and R. S. Pindyck (1994). "Investment under Uncertainty". Princeton, N.Y.: Princeton University Press.

Hull, J. C. (2000). *Options, Futures & Other Derivatives*. New York: Prentice-Hall. Fourth Edition

Merton, R. (1973). "Theory of rational option pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 141-183.

Merton, R. (1976). "Option pricing when underlying stock returns are discontinuous", *Journal of Financial Economics* 3, 125-144.