Friedrich-Schiller-Universität Jena

Dynamische Bestellmengenplanung für verderbliche Luxusgüter

Lutz Häselbarth und Armin Scholl

13/2003

Arbeits- und Diskussionspapiere der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der Friedrich-Schiller-Universität Jena

ISSN 1611-1311

Herausgeber:

Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät
Friedrich-Schiller-Universität Jena
Carl-Zeiß-Str. 3, 07743 Jena

www.wiwi.uni-jena.de

Schriftleitung:

Prof. Dr. Hans-Walter Lorenz
h.w.lorenz@wiwi.uni-jena.de

Prof. Dr. Armin Scholl
a.scholl@wiwi.uni-jena.de

Dynamische Bestellmengenplanung für verderbliche Luxusgüter

Lutz Häselbarth

Friedrich-Schiller-Universität Jena, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften,
Carl-Zeiß-Straße 3, D-07743 Jena, L.Haeselbarth@wiwi.uni-jena.de

Armin Scholl

Friedrich-Schiller-Universität Jena, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften,
Carl-Zeiß-Straße 3, D-07743 Jena, A.Scholl@wiwi.uni-jena.de

Zusammenfassung:

In dieser Fallstudie wird ein bekanntes Grundproblem der Beschaffungslogistik, nämlich das dynamische Bestellmengenproblem nach Wagner und Whitin (WWP), um praxisrelevante Aspekte wie dynamische Einstandspreise, Lagerkapazitäts- und Haltbarkeitsbeschränkungen sowie Schwund bzw. Verderblichkeit von Waren erweitert. Ein praxisnaher Fall aus der Lebensmittelindustrie dient zur anschaulichen Erläuterung der beschriebenen Problemvariante.

Anschließend wird einerseits das mathematische Modell für das WWP um die zusätzlichen Aspekte erweitert, andererseits werden bestehende Lösungsverfahren für das WWP (Kürzeste-Wege-Ansatz und Silver-Meal-Heuristik) im Hinblick auf ihre Anwendbarkeit für das modifizierte Problem untersucht. Insbesondere werden Bedingungen formuliert, unter denen die sogenannte Regenerationseigenschaft (Bestellung nur bei leerem Lager) gilt, so dass die Verfahren in leicht modifizierter Form anwendbar bleiben. Mit Hilfe dieser Verfahren wird eine Lösung für die Daten des zugrundeliegenden praxisnahen Falls ermittelt.

Schlüsselworte:

Bestellmengenplanung – Fallstudie – dynamisches Entscheidungsproblem – mathematische Modellierung – Lösungsverfahren

1. Fallbeschreibung

Wir betrachten den realistischen Fall von Feinkost-Hummel, der unter anderem die besondere Hummerart „Edellobster“ im Angebot hat. Hummel möchte diese hochpreisige Delikatesse nur in den Monaten Mai (Monat 1) bis Oktober (Monat T = 6) in seinen Filialgeschäften anbieten, da sie nur bei Fang in dieser Jahreszeit ihr begehrtes zartes Fleisch besitzt. Da Hummer lebend zu „lagern“ sind und ihr Fleisch dabei zäh werden kann (vgl. *Massholder*, 2003), dürfen sie maximal 2 Monate in Hummels Meerwasserbecken verbleiben, bevor sie an die Filialen zu liefern sind (**maximale Lagerdauer** H = 2).

Hummel hat einen Rahmenvertrag mit dem US-Hummerexporteur LobsterCargo aus Maine, der eine Lieferung der vereinbarten Mengen zu festgesetzten Terminen (jeweils zu Monatsbeginn) vorsieht. Bereits im April werden konkrete Liefervereinbarungen vollständig für die gesamte Saison ausgehandelt:

- Zunächst wird ein Basispreis ausgehandelt, der in jedem Monat – abhängig von der zu erwartenden Marktnachfrage – mit unterschiedlich hohen Zuschlägen versehen wird. Dadurch kennt Hummel die **Stück-Einkaufspreise** p_t (in €) der Monate t = 1,...,T.
- Hummel hat langjährige Erfahrungen mit „Edellobster“ und kann sehr genau einschätzen, welche **Gesamtbedarfe** b_t (in Stück) in seinen Filialen pro Monat entstehen.
- Auch die **Lagerhaltungskosten** (für Kapitalbindung, Haltung in frischem Meerwasser, medizinische Versorgung, logistische Zusatztätigkeiten) sind gut abschätzbar. Wegen der im Hochsommer steigenden Kosten zur Kühlung des Meerwasserbeckens ist der Lagerhaltungskostensatz c_t (in € pro Stück und Monat) abhängig vom Lagermonat t. Das Becken fasst maximal G = 550 Hummer. Aufgrund langer Erfahrung weiß Hummel, dass nach einmonatiger Lagerung noch ein Anteil von $\alpha_1 = 0{,}95$ der Tiere lebt. Werden (überlebende) Tiere einen zweiten Monat gelagert, so bleibt davon ein Anteil von $\alpha_2 = 0{,}9$ am Leben. Auch für während t verendende Tiere fällt der volle Kostensatz c_t an.
- Jede Bestellung bei LobsterCargo verursacht **fixe Bestellkosten** f_t (in €) für Abwicklung der Bestellung, Fang der Hummer, Verpackung, Fracht, Untersuchung der Tiere bei Empfang und Einlagerung. Weil LobsterCargo Rabatte des Luftfrachtunternehmens an Hummel weitergibt, gelten für jeden Monat individuelle Bestellkosten.

Feinkost-Hummel muss anhand der in Tab. 1 zusammengestellten Daten entscheiden, in welchen Monaten t er eine **Bestellung** aufgibt und wie viel er jeweils bestellt (**Bestellmenge** q_t). Sein Ziel besteht bei Erfüllung sämtlicher Bedarfsmengen darin, die **Ge-**

t	1	2	3	4	5	6
b_t	205	323	342	228	304	171
p_t	22	23	20	19	24	23
f_t	1000	1200	1100	900	1200	1100
c_t	2	4	5	3	1	1

Tab. 1: Daten zur Vertragsgestaltung

samtkosten zu **minimieren**. Zu beachten ist, dass die Lieferung an die Filialen jeweils am Monatsbeginn (in Bestellperioden direkt nach Eintreffen der Ware aus Maine) erfolgt.

2. Modellierung der Entscheidungssituation

Im vorliegenden Fall handelt es sich um ein **Bestellmengenproblem**. Die grundlegende Schwierigkeit besteht darin, dass sich bei der Bestellung von Vorprodukten oder Handelswaren bei einem Lieferanten ein Tradeoff (gegenläufige Entwicklung) zwischen fixen Bestellkosten und variablen Lagerhaltungskosten in Abhängigkeit von der Höhe der Bestellmenge(n) ergibt. Wird in jeder Periode t nur der Bedarf b_t bestellt, entstehen keinerlei Lagerhaltungskosten (Verbrauch bzw. Weitertransport zu Periodenbeginn), jedoch jeweils fixe Bestellkosten. Umgekehrt ergeben sich bei einer gemeinsamen Bestellung für mehrere Perioden Lagerhaltungskosten, die mit der **Bestellreichweite** (Anzahl bedarfsmäßig abgedeckter Perioden) zunehmen, jedoch fixe Kosten nur in der Bestellperiode.

In der betriebswirtschaftlichen Lehrbuchliteratur werden verschiedene Bestellmengen- und analoge Losgrößenprobleme behandelt (zu einer Übersicht vgl. *Domschke/Scholl/Voß,* 1997, Kap. 3). Eines der am häufigsten dargestellten Grundprobleme ist das **Wagner-Whitin-Problem (WWP)**, das auf folgenden Annahmen beruht (*Domschke/Scholl/Voß*, 1997, Kap. 3.3.1, *Domschke/Scholl,* 2003, Kap. 4.3.3, *Tempelmeier*, 2003, Kap. D.3.2):

- fester Planungshorizont, bestehend aus T gleich langen Perioden (z.B. Monaten)
- Disposition eines Gutes bzw. einer Menge logistisch homogener Güter
- der Bedarf $b_t > 0$ muss zu Beginn der Periode t=1,...,T befriedigt werden, unmittelbar nachdem (in einer Bestellperiode) die Lieferung der Bestellmenge q_t eingegangen ist
- keine Kapazitätsbeschränkungen für Lieferung und Lagerung
- fixe Bestellkosten $f_t > 0$ und lineare Lagerhaltungskosten $c_t > 0$ für t=1,...,T
- keine Berücksichtigung von Einkaufspreisen

Das WWP lässt sich als Optimierungsmodell mit folgenden **Variablen** formulieren:

q_t **Bestellmenge** in Periode t = 1,...,T; Vektor $\mathbf{q} = (q_1,...,q_T)$ definiert **Bestellpolitik**

z_t **Bestellindikator** für Periode t = 1,...,T mit $z_t = \begin{cases} 1 & \text{falls in Periode t bestellt wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

L_t **Lagerbestand** während der Periode t = 0,...,T

Zumeist wird davon ausgegangen, dass das Lager zu Beginn von Periode 1 (d.h. während einer gedachten Periode 0) und am Ende des Planungshorizonts (in Periode T) leer ist. Dies ist typisch für Saisonartikel (wie den Edellobster), im Kontext einer kontinuierlichen Planung im Zeitablauf jedoch ggf. zu modifizieren (*Scholl/Häselbarth*, 2003).

Bezeichnet $B_t^\tau = \sum_{i=t}^{\tau} b_i$ den kumulierten Bedarf von Periode t bis Periode $\tau \in [t,T]$, so erhalten wir folgende Formulierung des WWP als binäres lineares Optimierungsmodell:

Minimiere $K(\mathbf{z},\mathbf{L},\mathbf{q}) = \sum_{t=1}^{T} (f_t \cdot z_t + c_t \cdot L_t)$ (1)

unter den Nebenbedingungen

$L_t = L_{t-1} + q_t - b_t$ für t = 1,...,T (2)

$q_t \le B_t^T \cdot z_t$ für t = 1,...,T (3)

$L_t \ge 0, \quad q_t \ge 0, \quad z_t \in \{0,1\}$ für t = 1,...,T (4)

$L_0 = L_T = 0$ (5)

Die Zielfunktion (1) beschreibt die Minimierung der Summe aus gesamten Bestell- und Lagerhaltungskosten im Planungshorizont. Die **Lagerbilanzgleichungen** (2) drücken aus, dass sich der Lagerbestand am Ende einer Periode t aus dem Bestand der Vorperiode zuzüglich der Bestellmenge q_t abzüglich des Bedarfs b_t ergibt. (3) erlaubt nur in solchen Perioden positive Bestellmengen, in denen z_t den Wert 1 besitzt und somit die bestellfixen Kosten in der Zielfunktion berücksichtigt werden. Als maximale Bestellmenge wird der kumulierte Bedarf B_t^T bis zum Ende des Planungshorizonts zugelassen (wegen $L_T = 0$). Die Bedingungen (4) und (5) begrenzen die Variablen gemäß obiger Ausführungen.

Frage 1: Obwohl das in Lehrbüchern beschriebene WWP weit gehend dem Entscheidungsproblem von Feinkost-Hummel entspricht, sind dort weitere Bedingungen und Einflussgrößen vorhanden. Wie lässt sich obiges Modell entsprechend erweitern? Zu beachten ist, dass sich aufgrund der reellwertigen (durchschnittlichen) Mortalitätsraten α_h (h= 1,...,H) nicht-ganzzahlige Bestell- und Lagermengen ergeben können. Wegen der relativ großen Bedarfe soll dieser Aspekt im Modell vernachlässigt werden und erst bei der vertraglichen Festlegung der Bestellpolitik durch Aufrunden der Bestellmengen eingehen!

Antwort zu Frage 1: Gegenüber dem WWP sind zusätzlich die begrenzte Lagerfähigkeit (maximale Haltbarkeit H = 2) und die Mortalität der Hummer im Meerwasserbecken, die Einkaufspreise p_t und die begrenzte Lagerkapazität des Beckens (maximal G = 550 Hummer) zu berücksichtigen. Eine von mehreren Möglichkeiten zur Modellmodifikation basiert auf der Idee, die Hummer nach ihrem **Lageralter** h (Anzahl bisheriger Lagerperioden) zu unterscheiden. Diese Unterscheidung ist wegen der zunehmenden Mortalität bei steigendem Lageralter notwendig. Wir verwenden folgende zusätzliche Variablen:

L_{th} Bestand an Hummern des Lageralters $h=0,\dots,\overline{H}(t)$ zu Beginn von Periode t = 1,...,T

a_{th} Anzahl an Hummern des Lageralters $h=0,\dots,\overline{H}(t)$, die zur (teilweisen) Deckung des Bedarfs b_t in Periode t verwendet werden (direkt vor Erfassung des Lagerbestands L_{th})

Zu beachten ist, dass sich das maximale Alter zu Beginn von Periode t lagernder Hummer einerseits durch die begrenzte Lagerdauer H, andererseits durch das zu Saisonbeginn leere Lager (und damit das Lagern seit höchstens t–1 Perioden) zu $\overline{H}(t) = \min\{H, t-1\}$ ergibt. Ebenso ist für in Periode t bestellte Hummer wegen $L_T = 0$ und des auf H Perioden begrenzten Lageralters als späteste Verbrauchsperiode $\overline{T}(t) = \min\{T, t+H\}$ zu beachten.

Wegen der Mortalität ist bei einer Bestellung in Periode t, die den Bedarf b_τ einer Periode $\tau \in [t+1, \overline{T}(t)]$ abdecken soll, anstelle von b_τ die Menge $\tilde{b}_t^\tau = b_\tau / \prod_{j=1}^{\tau-t} \alpha_j$ mitzubestellen, da in den τ–t Lagerperioden (Lageralter j=1,...,τ–t) jeweils nur der Anteil α_j überlebt. Die kumulierten Bedarfsmengen sind ebenfalls zu modifizieren: $\tilde{B}_t^\tau = b_t + \sum_{i=t+1}^{\tau} \tilde{b}_t^i$. Tab. 2 gibt die (z.T. nichtganzzahligen) Werte für Hummels Problem an; mit H markierte Felder liegen jenseits der spätesten Verbrauchsperioden $\overline{T}(t)$.

$\tilde{B}_t^\tau$	τ=1	τ=2	τ=3	τ=4	τ=5	τ=6
t=1	205	545	945	H	H	H
t=2	–	323	683	949,7	H	H
t=3	–	–	342	582	937,6	H
t=4	–	–	–	228	548	748
t=5	–	–	–	–	304	484
t=6	–	–	–	–	–	171

Tab. 2: Modifizierte kumulierte Bedarfe

Das veränderte Modell lautet wie folgt:

Minimiere $\tilde{K}(\mathbf{z}, \mathbf{L}, \mathbf{q}, \mathbf{a}) = \sum_{t=1}^{T} (f_t \cdot z_t + c_t \cdot L_t + p_t \cdot q_t)$ (6)

unter den Nebenbedingungen (4) sowie

$q_t \leq \tilde{B}_t^{\overline{T}(t)} \cdot z_t$	für t = 1,...,T	(7)
$L_{tH} = 0$	für t = H+1,...,T	(8)
$L_{t0} = q_t - a_{t0}$	für t = 1,...,T	(9)
$L_{th} = \alpha_h \cdot L_{t-1,h-1} - a_{th}$	für t = 2,...,T, h = 1,...,$\overline{H}(t)$	(10)
$\sum_{h=0}^{\overline{H}(t)} a_{th} = b_t$	für t = 1,...,T	(11)
$L_t = \sum_{h=0}^{\overline{H}(t)} L_{th}$	für t = 1, ..., T	(12)
$L_t \leq G$	für t = 1,...,T–1	(13)
$L_{th} \geq 0$, $a_{th} \geq 0$	für t = 1,...,T, h = 0,...,$\overline{H}(t)$	(14)
$L_T = 0$		(15)

In der Zielfunktion (6) ist die Summe der mit den Preisen p_t bewerteten Bestellmengen q_t zu addieren. Bei der Bestimmung der Lagerhaltungskosten wird gemäß Fallbeschreibung unterstellt, dass auch für die während Periode t sterbenden Hummer volle Lagerhaltungskosten zu zahlen sind, da L_t den Bestand zum Zeitpunkt der Einlagerung am Beginn von t bezeichnet.

Die Bedingungen (7) ergeben sich aus (3) unter Beachtung der spätesten Verbrauchsperioden $\overline{T}(t)$. Die maximale Lagerfähigkeit wird durch (8) berücksichtigt, da Hummer mit Lageralter H nicht weiter gelagert werden dürfen. Die Lagerbilanzgleichungen (2) werden durch die Bedingungen (9) - (11) repräsentiert. Durch eine Bestellung treffen frische Hummer ein, die gemäß (9) mit Lagerhalter h=0 eingelagert werden, sofern sie nicht zur Bedarfsbefriedigung dienen. Bereits lagernde Hummer werden in (10) erfasst: Von den in einer Vorperiode t–1 lagernden Hummern eines Alters h–1 überlebt ein Anteil α_h. Der nicht zur Bedarfsdeckung benötigte Rest lagert in Periode t und weist nun Alter h auf. Durch (11) wird garantiert, dass der Bedarf jeder Periode vollständig gedeckt wird. Der Bestand in t ergibt sich gemäß (12) als Gesamtmenge aller in t lagernden Hummer verschiedenen Alters. Die beschränkte Beckenkapazität wird durch (13) abgebildet. Die Variablen für Lager- und Verbrauchsmengen werden in (14) auf nichtnegative Werte beschränkt, (15) leert das Lager am Ende des Horizonts.

Frage 2: Die von Hummel beauftragte Unternehmensberatung schlägt vor, die Bestellpolitik $\mathbf{q}$ = (525, 19, 342, 748, 0, 0) zu verwenden. Wie ist diese im Hinblick auf Zulässigkeit und Optimalität zu beurteilen?

Antwort zu Frage 2: Die Bestellpolitik $\mathbf{q}$ = (525, 19, 342, 748, 0, 0) ist **zulässig**, da sich alle Bedarfe zeitgerecht erfüllen lassen und keine der weiteren Restriktionen (Haltbarkeit, Lagerkapazitätsbeschränkung) verletzt werden. Die Bestellmenge q_1 setzt sich zusammen aus $b_1 = 205$ Stück für Periode 1 und 320 Stück für Periode 2, die am Beginn von Periode 1 eingelagert werden. Davon überleben $\alpha_1 \cdot 320 = 304$ Hummer, die zusammen mit $q_2 = 19$ den Bedarf $b_2 = 323$ decken. In t=3 wird $b_3 = 342$ bestellt, in t=4 der kumulierte Bedarf $\tilde{B}_4^6 = b_4 + b_5/\alpha_1 + b_6/(\alpha_1 \cdot \alpha_2) = 748$ bis einschließlich Periode 6. Die maximale Lagerdauer wird nicht verletzt, da der Bedarf b_6 gerade für die erlaubten H = 2 Perioden lagert, bevor er zu Beginn von Periode 6 verbraucht wird. Die maximal lagernde Menge von 748 – 228 = 520 Stück (bei Einlagerung in Periode 4) überschreitet nicht die Lagerkapazität G = 550.

Die Bestellpolitik ist **nicht optimal**, da man durch Erhöhung von q_2 um 304 Stück bei gleichzeitiger Senkung von q_1 um 320 Stück die Gesamtkosten verringern kann. Neben einer Ersparnis von 640 € an Lagerhaltungskosten für diese 320 Hummer in Periode 1 ergibt sich ein Preisvorteil von $320 \cdot 22 - 304 \cdot 23 = 48$ €. Zusätzliche Bestellkosten entstehen nicht, da ohnehin in t=2 bestellt wird (außerdem bliebe 16 Hummern das Verenden erspart). Umgekehrt könnte man die Bestellung in Periode 2 vermeiden, wenn man q_1 um 19/0,95 = 20 Stück erhöhen würde. Dadurch entfielen die Bestellkosten $f_2 = 1200$ €, denen nur eine Erhöhung der Einstandskosten um $20 \cdot 22 - 19 \cdot 23 = 3$ € und der Lagerkosten in Höhe von $20 \cdot 2 = 40$ € entgegenstünden.

Frage 3: Welche allgemeine Bedingung kann man für eine optimale Bestellpolitik des WWP formulieren, die für jede Periode t einen Zusammenhang zwischen Lagerbestand (am Ende von t–1) und Bestellmenge herstellt? Gilt diese Bedingung auch bei Hummels Problem?

Antwort zu Frage 3: Als allgemeine **Optimalitätsbedingung** gilt für das WWP die **Regenerationseigenschaft** (vgl. *Domschke/Scholl/Voß*, 1997, Kap. 3.3.1.2, *Klein/Scholl*, 2004, Kap. 4.1.2). Sie besagt, dass in einer optimalen Politik eine Bestellung immer nur dann vorgenommen wird, wenn das Lager leer ist, d.h. es gilt $q_t \cdot L_{t-1} = 0$ für t = 1,...,T. Somit wird in Periode t entweder nichts bestellt (bei $L_{t-1} > 0$) oder es werden die Bedarfe mehrerer aufeinanderfolgender Perioden ab t vollständig abgedeckt, d.h. es gilt $q_t = 0$ oder $q_t = B_t^\tau$ mit $t \le \tau \le T$.

Dies lässt sich wie folgt begründen: Bei positiven bestellfixen Kosten und Lagerhaltungskosten lohnt es sich nicht, einen Bedarf b_t in verschiedenen Perioden zu bestellen, da Bestellkosten in der letzten betroffenen Periode ohnehin und Lagerhaltungskosten bei (teilweiser) Bestellung in einer früheren Periode zusätzlich auftreten.

Betrachtet man alle Problemerweiterungen (Mortalität, beschränkte Lagerkapazität und -dauer, Einstandspreise) einzeln, so gilt jeweils die Regenerationseigenschaft (vgl. *Domschke/Scholl/Voß,* 1997, Kap. 3.3.1.4). Kombiniert man jedoch diese Erweiterungen wie bei Hummels Problem, so ergeben sich zwei Ausnahmen:

Ausnahme 1 betrifft die Kombination aus zeitlich schwankenden Preisen und beschränkter Lagerkapazität. In diesem Fall kann sich eine Vorverlagerung einer Bestellmenge kostenmäßig lohnen, dies wegen der beschränkten Lagerkapazität jedoch nicht vollständig möglich sein:

Ohne Lagerbeschränkungen besteht in einer Bestellperiode t – unabhängig von der Höhe der Fixkosten – der Anreiz, den Bedarf für Periode $\tau > t$ mitzubestellen, wenn die **Spekulationsbedingung** (16) gilt (vgl. *Schenk*, 1991, S. 66 ff., sowie *Domschke/Scholl/Voß*, 1997, S. 130).

$$p_\tau \cdot b_\tau - p_t \cdot \tilde{b}_t^\tau > \sum_{i=t}^{\tau-1} c_i \cdot b_\tau \Big/ \prod_{k=i+1-t}^{\tau-t} \alpha_k \tag{16}$$

Die linke Seite von (16) steht für die Differenz der Einstandskosten bei Bestellung in τ bzw. t. Dabei ist zu beachten, dass in τ nur die Menge b_τ und in t die erhöhte Menge $\tilde{b}_t^\tau$ zu kaufen wäre. Bei der Bestimmung der Lagerhaltungskosten auf der rechten Seite der Ungleichung ist zu berücksichtigen, dass sich die in den Perioden i = t,...,τ–1 lagernden Mengen bis zur Deckung des Bedarfs b_τ in jeder weiteren Periode gemäß der Überlebensrate α_k verringern. Die dabei noch zu durchlaufenden Altersstufen k ergeben sich aus dem Zeitabstand der restlichen Lagerperioden (i bis τ–1) zur Bestellperiode t. Ausgehend von einer zulässigen Politik mit Bestellungen in t und τ, ergibt sich bei Gelten von (16) eine Kostenreduktion bei Vorverlagerung der kompletten Bestellung von τ nach t.

Ist aufgrund der Lagerkapazitätsbeschränkung eine vollständige Vorverlagerung der bisherigen Bestellung in τ nicht möglich, so könnte nur ein Teil davon in t mitbestellt werden, so dass die Regenerationseigenschaft verletzt würde.

Bei Hummel tritt Ausnahme 1 nicht auf: Nur für t=4 und τ=5 mit b_5=304 und $\tilde{b}_4^5 = b_5 / \alpha_1 = 320$ gilt wegen 24·304 – 19·320 = 1216 > 960 = 3·304 / 0,95 die Spekulationsbedingung (16), jedoch reicht die Lagerkapazität (G = 550) für die Einlagerung der in t=4 mitbestellten 320 Stück aus.

Ausnahme 2 betrifft die Kombination aus Spekulationsmöglichkeit und begrenzter Lagerdauer. Wir verzichten auf eine vollständige Betrachtung aller denkbaren Fälle und erläutern das Problem an dem Extremfall, dass (16) für alle Periodenpaare τ > t gilt. Nun ist es optimal, alle Bedarfe frühestmöglich zu bestellen und einzulagern. Gehen wir z.B. von T=4 und H=2 (sowie hinreichend großem G) aus, so würde die optimale Bestellpolitik $\mathbf{q}^* = (\tilde{B}_1^3, \tilde{b}_2^4, 0, 0)$ lauten, da der Bedarf von Periode 4 wegen der beschränkten Lagerdauer frühestens in Periode 2 bestellt werden kann. Zu Beginn von Periode 2 ist die Regenerationseigenschaft offensichtlich verletzt.

Ausnahme 2 tritt bei Feinkost-Hummel ebenfalls nicht auf, da die Spekulationsbedingung (16) nur für t=4 und τ=5 gilt (s. oben) und dabei die beschränkte Haltbarkeit keine Rolle spielt. Da keine der Ausnahmen auftritt, gilt bei Hummels Problem die Regenerationseigenschaft.

3. Ermittlung einer optimalen Bestellpolitik

Das WWP ist aufgrund der bei Frage 2 gesuchten Regenerationseigenschaft durch Bestimmung eines kürzesten Weges in einem geeignet definierten Graphen einfach zu lösen; zu diesem und noch effizienteren Verfahren vgl. *Domschke/Scholl/Voß* (1997, Kap. 3.3.1.2).

Das WWP lässt sich durch einen **Graphen** der in Abb. 1 dargestellten Art beschreiben. Er enthält für jede Periode t = 1,...,T sowie für eine fiktive Abschlussperiode T+1 genau einen Knoten. Außerdem beinhaltet er Pfeile (t,τ+1) für alle Knotenpaare t und τ+1 mit $t \le \tau \le T$. Ein Pfeil (t,t+1) repräsentiert die Entscheidung in Periode t, nur für Periode t selbst zu bestellen (Bestellreichweite 1), d.h. $q_t = b_t$ zu wählen. Allgemein steht ein Pfeil (t,τ+1) für die Bestellmenge $q_t = B_t^\tau$, d.h. für eine Bestellreichweite $\tau - t + 1$. Die von einer solchen Bestellung verursachten Bestell- und Lagerhaltungskosten lassen sich wie folgt berechnen und als Bewertung für den Pfeil (t,τ+1) verwenden:

$$k_{t,\tau+1} = f_t + \sum_{i=t}^{\tau-1} c_i \cdot B_{i+1}^{\tau} \qquad \text{für } t = 1,...,T;\ \tau = t,...,T \tag{17}$$

Bei der Berechnung der Lagerkosten wird berücksichtigt, dass in Periode $i = t,...,\tau-1$ die für die jeweils folgenden Perioden mitbestellten Bedarfsmengen gelagert werden müssen.

Die (bzw. eine) optimale Bestellpolitik erhält man durch Bestimmung eines **kürzesten Weges** von Knoten 1 zu Knoten T+1, wenn man die Pfeilbewertungen nicht als Kosten, sondern als Entfernungen auffasst. Dies lässt sich aufgrund der besonderen Struktur des Graphen durch ein stufenweises Vorgehen recht einfach bewältigen, bei dessen Beschreibung K(t) die Summe der Pfeilbewertungen eines kürzesten Weges vom Knoten 1 zum Knoten t (bzw. die minimalen Kosten einer Bestellpolitik für den Planungshorizont [1,t]) bezeichnet:

Setze $K(1) = 0$, und führe für die übrigen Knoten $t = 2,...,T+1$ die folgende Berechnung durch:

$$K(t) = \min\{K(i) + k_{it} \mid i = 1,...,t-1\}$$

Merkt man sich bei jeder Minimumbestimmung denjenigen Vorgängerknoten Vg(j), der den Wert von K(t) determiniert hat, so kann man anschließend die optimale Politik vom Knoten T+1 bis zum Knoten 1 rückwärts schreitend ermitteln.

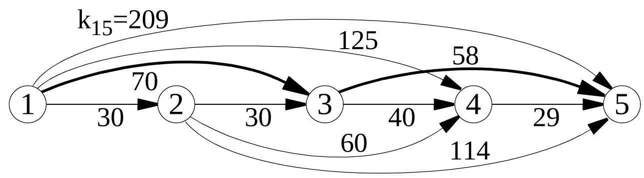

Abb. 1: Wagner-Whitin-Graph

Beispiel: Wir betrachten eine Ausprägung des WWP mit T = 4 Perioden und den in Tab. 3 angegebenen weiteren Daten. Der zugehörige Graph ist in Abb. 1 dargestellt. Seine Pfeilbewertungen sind in Tab. 4 enthalten; einige Berechnungsbeispiele folgen:

Per. t	1	2	3	4
b_t	7	8	5	6
f_t	30	30	40	29
c_t	5	6	3	(1)

Tab. 3: Daten des WWP

$k_{13} = f_1 + c_1 \cdot b_2 = 30 + 5 \cdot 8 = 70$

$k_{14} = f_1 + c_1 \cdot (b_2 + b_3) + c_2 \cdot b_3$ bzw.

$k_{14} = k_{13} + (c_1 + c_2) \cdot b_3 = 125$

$k_{15} = k_{14} + (c_1 + c_2 + c_3) \cdot b_4 = 209$

$k_{t,\tau+1}$	τ=1	τ=2	τ=3	τ=4
t=1	30	70	125	209
t=2	–	30	60	114
t=3	–	–	40	58
t=4	–	–	–	29

Tab. 4: Pfeilbewertungen

Wird also z.B. in Periode t=1 mit einer Reichweite von 4 Perioden bestellt (Pfeil (1,5)), so entstehen die Kosten k_{14} einer Bestellung mit Reichweite 3 zuzüglich den Kosten der Lagerung des Bedarfs b_4 in den Perioden 1 bis 3.

Bei der Bestimmung des kürzesten Weges ergibt sich (mit K(1) = 0):

$K(2) = K(1) + k_{12} = 30$, $Vg(2) = 1$; $K(3) = \min\{70, 30+30\} = 60$, $Vg(3) = 2$

$K(4) = \min\{125, 30+60, 60+40\} = 90$, $Vg(4) = 2$

$K(5) = \min\{209, 30+114, 60+58, 90+29\} = 118$, $Vg(5) = 3$

Die optimale Politik bestellt in den Perioden Vg(5) = 3, Vg(3) = 2 und Vg(2) = 1 und lautet daher $\mathbf{q}^* = (b_1 = 7, b_2 = 8, b_3 + b_4 = 11, 0)$ mit Gesamtkosten in Höhe von K(5) = 118 GE.

Frage 4: Wie lässt sich das Problem von Feinkost-Hummel mit Hilfe des Kürzeste-Wege-Ansatzes lösen? Sind alle gegenüber dem WWP zusätzlichen Aspekte einbeziehbar?

Lösung zu Frage 4: Hummels Problem lässt sich vollständig mit Hilfe des Kürzeste-Wege-Ansatzes lösen, da die Regenerationseigenschaft gilt (vgl. Antwort zu Frage 3).

Die Haltbarkeitsbeschränkung führt schlicht dazu, dass sämtliche Pfeile $(t,\tau+1)$ aus dem Graphen zu löschen (bzw. mit sehr hohen Kosten zu belegen sind), für die $\tau - t > H$ gilt, da in Periode t eingelagerte Hummer spätestens in Periode t+H an die Filialen verschickt werden müssen. Somit ist bei Bestellung in t (spätestens) am Ende von t+H das Lager leer und es muss (spätestens) in t+H+1 die nächste Bestellung aufgegeben werden.

Die Mortalität der gelagerten Hummer führt ebenso wie die Einkaufspreise zur Modifikation der Pfeilbewertungen (bei Vernachlässigkeit der Ganzzahligkeit gemäß Frage 1):

$$\tilde{k}_{t,\tau+1} = f_t + p_t \cdot \tilde{B}_t^{\tau} + \sum_{i=t}^{\tau-1} c_i \cdot \sum_{j=i+1}^{\tau} b_j \Big/ \prod_{k=i+1-t}^{j-t} \alpha_k \qquad \text{für } t = 1,...,T;\ \tau = t,...,\overline{T}(t) \quad (18)$$

Die Logik zur Berechnung der in jeder Periode $i = t,...,\tau-1$ lagernden Mengen wird in der Antwort zu Frage 3 erläutert.

Die Beschränkung der Lagerkapazität führt – ebenso wie die beschränkte Lagerdauer – zur Eliminierung von Pfeilen. So sind sämtliche Pfeile $(t,\tau+1)$ zu entfernen, für die $\tilde{B}_t^{\tau} - b_t > G$ gilt, da bei Bestellung von $q_t = \tilde{B}_t^{\tau}$ in Periode t der kumulierte Bedarf $\tilde{B}_t^{\tau} - b_t$ der Folgeperioden einzulagern wäre. Gemäß Regenerationseigenschaft muss daher bei Bestellung in t (spätestens) in Periode τ wieder bestellt werden.

$\tilde{k}_{t,\tau+1}$	τ=1	τ=2	τ=3	τ=4	τ=5	τ=6
t=1	5510	13670	G	G, H	G, H	G, H
t=2	–	8629	18349	G	G, H	G, H
t=3	–	–	7940	13940	G	G, H
t=4	–	–	–	5232	12272	16862
t=5	–	–	–	–	8496	12996
t=6	–	–	–	–	–	5033

Tab. 5: Pfeilbewertungen für Hummels Problem

Für Hummels Problem ergeben sich die Pfeilbewertungen in Tab. 5. Pfeile mit Markierung H und/oder G sind bezüglich der maximalen Lagerdauer und/oder -kapazität unzulässig. Als optimale Bestellpolitik erhält man $\mathbf{q}^* = (545, 0, 342, 748, 0, 0)$. Die Gesamtkosten $\tilde{K}(\mathbf{q}^*) = 38.472$ € berechnen sich gemäß (6) unter Berücksichtigung von $\mathbf{z}^* = (1, 0, 1, 1, 0, 0)$ und $\mathbf{L}^* = (340, 0, 0, 520, 190, 0)$.

4. Silver-Meal-Heuristik

Obwohl das WWP leicht lösbar ist, wurde eine Reihe heuristischer Verfahren entwickelt. Diese erhalten ihre Bedeutung v.a. durch ihre Verbreitung in der betrieblichen Praxis und die Notwendigkeit der Planung im Zeitablauf (vgl. *Stadtler*, 2000, sowie *Scholl/Häselbarth*, 2003).

Wie verschiedene andere Heuristiken für das WWP beginnt auch die **Silver-Meal-Heuristik** mit der Bildung der Bestellmenge q_1 in Periode 1, die zunächst nur den Bedarf b_1 abdeckt. Anschließend wird die Bestellreichweite so lange jeweils um 1 erhöht, d.h. q_1 um weitere Periodenbedarfe $b_2,..., b_\tau$ ergänzt, bis für Periode τ ein Abbruchkriterium erfüllt ist. In der nächsten Iteration wird für Periode τ+1 eine zweite Bestellmenge gebildet, die ebenso sukzessive bis zum Eintreten des Abbruchkriteriums erweitert wird. Es folgen weitere Iterationen, bis eine Bestellmenge den Bedarf b_T beinhaltet. Zur Silver-Meal-Heuristik sowie ähnlichen Verfahren vgl. *Domschke*/*Scholl/Voß* (1997, Kap. 3.3.1.3) oder *Tempelmeier* (2003, Kap. D.3.2.2.2).

Das **Abbruchkriterium** basiert auf $\overline{K}_{t\tau} := k_{t,\tau+1} / (\tau - t + 1)$, den durchschnittlichen Kosten pro Periode, die entstehen, wenn zum Zeitpunkt t ein Los $q_t = B_t^\tau$ zur Deckung des Bedarfs bis zur Periode τ aufgelegt wird. Das Abbruchkriterium besteht nun darin, die Erweiterung einer Bestellmenge q_t zu beenden, sobald sich durch Hinzunahme der Bedarfsmenge $b_{\tau+1}$ die durchschnittlichen Kosten der Bestellung pro Periode erhöhen würden; d.h. falls $\overline{K}_{t,\tau+1} > \overline{K}_{t\tau}$ gilt.

Beispiel: Für das Problem in Tab. 3 erhalten wir mit Hilfe von Tab. 4 folgenden Lösungsgang:

It. 1: $q_1 = b_1 = 7$, $\overline{K}_{11} := 30$
$q_1 = b_1 + b_2 = 15$, $\overline{K}_{12} := 70/2 = 35 > \overline{K}_{11} \Rightarrow q_1 := 7$

It. 2: $q_2 = b_2 = 8$, $\overline{K}_{22} := 30$
$q_2 = b_2 + b_3 = 13$, $\overline{K}_{23} := 60/2 = 30 = \overline{K}_{22}$
$q_2 = b_2 + b_3 + b_4 = 19$, $\overline{K}_{24} := 114/3 = 38 > \overline{K}_{23} \Rightarrow q_2 := 13, q_3 := 0$

It. 3: $q_4 = b_4 = 6$, $\overline{K}_{44} := 29$, Abbruch $\Rightarrow q_4 := 6$

Die Bestellpolitik $\mathbf{q}$ = (7, 13, 0, 6) verursacht Kosten von 119 GE und ist nicht optimal (vgl. Lösung in Abschnitt 3).

Frage 5: Welche Modifikationen sollten an der Silver-Meal-Heuristik vorgenommen werden, damit sie auf Hummels Problem anwendbar ist? Welche Lösung würde sich ergeben?

Antwort zu Frage 5: Die Modifikationen sind sehr ähnlich wie beim Kürzeste-Wege-Ansatz: Bei der Berechnung der $\overline{K}_{t\tau}$ sind die modifizierten Kosten $\tilde{k}_{t,\tau+1}$ gemäß (18) zu verwenden. Die maximale Lagerdauer H und -kapazität G beschränken die Reichweite des jeweils zu bildenden Loses gemäß Tab. 5. Als Bestellpolitik ergibt sich **q** = (205, 323, 582, 0, 484, 0) mit Gesamtkosten K(**q**) = 41.075 €. Gegenüber der optimalen Politik ergeben sich um 6,8% höhere Kosten.

Im Gegensatz zum Kürzeste-Wege-Ansatz in Abschnitt 3 ließe sich die Silver-Meal-Heuristik auch bei Nichtgelten der Regenerationseigenschaft (vgl. Frage 3) leicht entsprechend anpassen.

Literatur

Domschke, W., A. Scholl, Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre - Eine Einführung aus entscheidungsorientierter Sicht, 2. Aufl., Berlin 2003.

Domschke, W., A. Scholl, S. Voß, Produktionsplanung - Ablauforganisatorische Aspekte, 2. Aufl., Berlin 1997.

Klein, R., A. Scholl, Betriebswirtschaftliche Planungs- und Entscheidungstechniken, München 2004.

Massholder, F., Lebensmittel-Lexikon, Stichwort Hummer, in: www.lebensmittellexikon.de, 2003.

Schenk, H.Y., Entscheidungshorizonte im deterministischen dynamischen Lagerhaltungsmodell, Heidelberg 1991.

Scholl, A., L. Häselbarth, Bestellmengenplanung im zeitlich offenen Entscheidungsfeld, Jenaer Schriften zur Wirtschaftswissenschaft 16/2003, FSU Jena.

Stadtler, H., Improved rolling schedules for the dynamic single-level lot-sizing problem, in: Management Science, Vol. 46 (2000), S. 318-326.

Tempelmeier, H., Material-Logistik - Modelle und Algorithmen für die Produktionsplanung und -steuerung und das Supply Chain Management, 5. Aufl., Berlin 2003.

Jenaer Schriften zur Wirtschaftswissenschaft

2003

1/2003 Wolfgang Kürsten: Synergetische Merger, Co-Insurance und Shareholder Value, oder: Wer profitiert von "wertschaffenden" Fusionen?

2/2003 Roland Helm, Laura Manthey, Armin Scholl und Michael Steiner: Empirical Evaluation of Preference Elicitation Techniques from Marketing and Decision Analysis.

3/2003 Wolfgang Kürsten: Grenzen und Reformbedarfe der Sicherheitsäquivalentmethode in der (traditionellen) Unternehmensbewertung. Erwiderung auf die Anmerkungen von Ralf Diedrich und Jörg Wiese in der ZfbF. Erschienen in: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung 55, S. 306 – 314.

4/2003 Uwe Cantner und Holger Graf: Cooperation and Specialization in German Technology Regions.

5/2003 Jens J. Krüger: On the Dynamics of the U.S. Manufacturing Productivity Distribution.

6/2003 Uwe Cantner, Dirk Fornahl und Holger Graf: Innovationssystem und Gründungsgeschehen in Jena. Erste Erkenntnisse einer Unternehmensbefragung.

7/2003 Peter Kischka: Faktorzuweisungen im Rubin-Modell.

8/2003 Roland Helm, Reinhard Meckl, Manfred Strohmayer und Antje Bernau: Die Wissens-Scorecard als Basis eines anwendungsorientierten Ansatzes des Wissensmanagement.

9/2003 Jens J. Krüger: Productivity Dynamics Beyond-the-Mean in U.S. Manufacturing Industries - An Application of Quantile Regression.

10/2003 Reinhard Meckl, Antje Bernau und Roland Helm: Wissensmanagement und Kundenbeziehungen in internationalen Dienstleistungsunternehmen.

11/2003 Colette Friedrich und Simone Martin: Leiharbeitnehmer und Stammarbeitnehmer als Konkurrenten in Turnieren?

12/2003 Colette Friedrich und Simone Martin: Effizienzwirkungen - Ein Vergleich des Einsatzes von Leih- und Stammarbeitnehmern.

13/2003 Lutz Häselbarth und Armin Scholl: Dynamische Bestellmengenplanung für verderbliche Luxusgüter.

14/2003 Armin Scholl, Robert Klein und Lutz Häselbarth: Planung im Spannungsfeld zwischen Informationsdynamik und zeitlichen Interdependenzen.

15/2003 Roland Helm, Antje Mark und Lars-Johann Fischer: Qualitätskontrolle und Qualitätssignale in der Wirtschaftsprüfung – Eine empirische Evaluierung des Nutzens für Mandanten.

16/2003 Armin Scholl und Lutz Häselbarth: Bestellmengenplanung im zeitlich offenen Entscheidungsfeld.

17/2003 Roland Helm and Martin Kloyer: Controlling Contractual Exchange Risks in R&D-Interfirm-Cooperation: An Empirical Study.

18/2003 Reinhard Haupt und Sandra Peterlein: Hochschule und Hochtechnologie: Jenaer Forschungspartnerschaften im Spiegel der Patentstatistik.

19/2003 Roland Helm und Rudolf C. Meiler: Intangible Ressourcen, strategische Ziele und Management interner Wissenspotenziale.