Jenaer Schriften zur Wirtschaftswissenschaft

Faktorzuweisungen im Rubin-Modell

Peter Kischka

7/2003

Arbeits- und Diskussionspapiere der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der Friedrich-Schiller-Universität Jena

ISSN 1611-1311

Herausgeber:

Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät
Friedrich-Schiller-Universität Jena
Carl-Zeiß-Str. 3, 07743 Jena

www.wiwi.uni-jena.de

Schriftleitung:

Prof. Dr. Hans-Walter Lorenz
h.w.lorenz@wiwi.uni-jena.de

Prof. Dr. Armin Scholl
a.scholl@wiwi.uni-jena.de

Faktorzuweisungen im Rubin-Modell

von

Peter Kischka

Friedrich-Schiller-Universität Jena
März 2003

Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät, Carl-Zeiß-Str. 3, D-07743 Jena
Tel. +49 3641 94 33 00, Fax: +49 3641 94 33 02, E-Mail: P.Kischka@wiwi.uni-jena.de

Zusammenfassung:

Unabhängigkeit des Behandlungsfaktors von den potentiellen Antwortvariablen ist Kernstück des sogenannten Rubin-Modells zur Bestimmung kausaler Effekte. In der Literatur werden unterschiedliche Formulierungen dieser Unabhängigkeitsbedingung verwendet. In der vorliegenden Arbeit wird ein auf einem Produktraum beruhender Ansatz vorgestellt, der eine allgemeine Formulierung der Bedingung erlaubt und insbesondere die Bedeutung konstanter Zuweisungswahrscheinlichkeiten für die Identifizierung kausaler Effekte zeigt.

Stichworte: Rubin-Modell, kausale Effekte, Identifizierbarkeit

1. Einführung

Donald Rubin hat mit der 1974 veröffentlichten Arbeit "Estimating Causal Effects of Treatments in Randomized and Nonrandomized Studies" ([Rubin, 1974]) eine Entwicklung in Gang gesetzt, die insbesondere seit den 90er Jahren weitere Verbreitung und inzwischen auch Eingang in die Lehrbuchliteratur gefunden hat (s. z. B. [Wooldridge, 2002]). Wesentlich dazu beigetragen haben verschiedene Arbeiten von Paul Holland, der 1986 zum ersten Mal den Begriff Rubin-Modell verwendete ([Holland, 1986]). Im folgenden soll zunächst (Abschnitt 2) der Ansatz von Rubin in der von Holland ([Holland, 1986], [Holland, 1988]) geprägten Form kurz dargestellt werden.
Entscheidend für die Anwendung des Rubin-Modells sind Unabhängigkeitsannahmen (ignorability) bezgl. der Zuweisung eines Faktors mit den Werten 0 oder 1 und den Werten von potentiellen Antwortvariablen Y_0, Y_1. Diese Unabhängigkeitsannahme wird z . T. für die zugrundeliegende Population der betrachteten Merkmalsträger ([Holland, 1986], [Holland/Rubin, 1988], [Wooldridge, 2002]) z. T. für den Zuweisungsmechanismus selbst ([Rubin, 1990], Rubin [2002]) formuliert. In der vorliegenden Arbeit werden beide Aspekte miteinander verknüpft. Dies führt in Abschnitt 3 zur Einführung eines Produktraumes, in dem simultan die von Holland betrachtete – auf der Population definierte – Variable, die eine gegebene Faktorzuweisung beschreibt, als auch die Zuweisungsmechanismen für die einzelnen Merkmalsträger selbst betrachtet werden. Diese Konstruktion über einen Produktraum mag auf den ersten Blick artifiziell erscheinen, sie erlaubt jedoch eine explizite Beurteilung des Zuweisungsmechanismus, insbesondere der Bedeutung konstanter Zuweisungswahrscheinlichkeiten (Abschnitt 4) und der Möglichkeit bei zufälliger Zuweisung kausale Effekte zu identifizieren (Abschnitt 5). Die Verwendung des Produktraumes erlaubt die formale Trennung der zwei zugrundeliegenden stochastischen Vorgänge: Zuweisung des Faktors und Auswahl eines Merkmalsträgers.
Im abschließenden Abschnitt 6 wird auf die Möglichkeit eingegangen, kausale Effekte als Schätzwerte eines erwartungstreuen Schätzers zu betrachten.
In einer weiteren Arbeit ([Kischka, 2003]) wird der hier vorgestellte Ansatz auf geschichtete Populationen und auf den Fall, dass das auf der Produktmenge definierte Maß nicht das Produktmaß ist, erweitert.

2. Das einfache Rubin-Modell

Sei $U = \{u_1, \ldots, u_N\}$ die zugrundeliegende Population. O.B.d.A. sei X eine dichotome Variable mit den Werten 0 oder 1:

$$(2.1) \qquad X : U \to \{0,1\}$$

$X(u_j)$ gibt an, ob beim Merkmalsträger u_j die Ausprägung des Faktors X (treatment) $x = 0$ oder $x = 1$ vorliegt $(1 \leq j \leq N)$. Die Ergebnisvariable Y (response) gibt an, welches Ergebnis bei den Merkmalsträgern – in Abhängigkeit von der jeweiligen Faktorausprägung – beobachtet wird.

(2.2) $Y: U \rightarrow IR$

Liegen Beobachtungen für alle Merkmalsträger vor, so sind die Ausprägungen von (X, Y) vollständig gegeben:

$$(x_j, y_j) \qquad (1 \le j \le N).$$

Im Mittelpunkt des Rubin-Modells stehen zwei (da X als dichotom angenommen wurde) weitere Variablen Y_0, Y_1, deren Ausprägungen nicht vollständig beobachtbar sind.

(2.3) $Y_x : U \rightarrow IR \quad (x = 0 , 1)$

Die potentielle (kontrafaktische) Variable Y_x ist eine Ergebnisvariable, deren Werte sich durch die Intervention (Manipulation) X = x (x = 0,1) ergeben. Der Zusammenhang zwischen der beobachtbaren Variablen Y aus (2.2) und den Variablen aus (2.3) wird durch folgende Annahme hergestellt:

(2.4a) $x_j = 0 \;\Rightarrow\; Y_0(u_j) = Y(u_j) \qquad (1 \le j \le N)$

(2.4b) $x_j = 1 \;\Rightarrow\; Y_1(u_j) = Y(u_j) \qquad (1 \le j \le N)$

Diese lassen sich zusammenfassen zu

(2.5) $Y_{X(u_j)}(u_j) = Y(u_j) \quad (1 \le j \le N)$

Die Intervention ändert nicht das Ergebnis, das sich ohne Intervention einstellt, falls diese mit der beobachteten Behandlung übereinstimmt. Annahme (2.5) stellt eine Invarianzeigenschaft der Intervention dar; es ist kennzeichnend für die auf Interventionen beruhenden Kausalitätsanalysen, dass derartige Invarianzeigenschaften gefordert werden.

Das sogenannte Fundamentalproblem kausaler Inferenz ([Holland, 1986, S. 947]) besteht darin, dass der individuelle kausale Effekt von Behandlung x = 1 gegenüber x = 0

(2.6) $Y_1(u_i) - Y_0(u_i)$

i. a. nicht beobachtet werden kann, da u_i entweder $x_i = 1$ oder $x_i = 0$ aufweist. Aus dem gleichen Grund lässt sich auch der durchschnittliche kausale Effekte für die gesamte Population nicht beobachten:

(2.7) $$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_1(u_i) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_0(u_i)$$

Ohne zusätzliche Annahmen können daher auf Intervention beruhende kausale Effekte nicht berechnet werden.

Eine erste Annahme, die es erlaubt, den individuellen kausalen Effekt (2.6) zu berechnen, ist die Annahme der Homogenität:

(2.8) $\quad Y_x(u_j) = Y_x(u_i) \qquad 1 \le i, j \le N, x = 0, 1$

Wenn alle Merkmalsträger identisch auf die Intervention reagieren, ist der individuelle kausale Effekt aus (2.6) eine Konstante und z. B. gegeben durch

$$Y_1(u_1) - Y_0(u_2)$$

Wegen (2.5) ist dieser Effekt berechenbar, falls jeweils mindestens ein Merkmalsträger mit x = 0 bzw. x = 1 beobachtet wird. Die Homogenitätsannahme in der Form (2.8) ist sehr stark und im Bereich der Wirtschaftswissenschaften nicht plausibel. Eine zweite Annahme, die die Berechnung individueller kausaler Effekte erlaubt, beruht auf zeitlicher Stabilität und 'kausaler Transienz' (vgl. [Holland, 1986], S. 948): Der Merkmalsträger u_j wird zuerst mit x = 0 behandelt, der Wert $Y_0(u_j)$ wird gemessen; anschließend fällt der Merkmalsträger wieder in seinen Ursprungszustand zurück und kann mit x = 1 behandelt werden. Außerhalb der Naturwissenschaften erscheint diese Annahme jedoch ausgeschlossen.

Eine weitere Annahme, die im Mittelpunkt der nachfolgenden Ausführungen steht, beruht auf stochastischer Unabhängigkeit. Für ihre Darstellung ist es notwendig, die bereits eingeführten Variablen als Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (U, A, P_2), A Menge aller Teilmengen von U und $P_2(u_j) = {}^1\!/_N \quad (1 \le j \le N)$ zu betrachten. (Die Bezeichnung P_2 wird im Zusammenhang mit Abschnitt 3 verständlich.)

Die Verteilung der Zufallsvariablen X, Y, Y_x ist dann als relativer Anteil der Merkmalsträger mit der entsprechenden Ausprägung gegeben. Dem durchschnittlichen kausalen Effekt (2.7) entspricht die Differenz der Erwartungswerte $E(Y_1) - E(Y_0)$. Hinreichend für die Möglichkeit (2.7) zu berechnen, ist die zuweilen 'ignorability' genannte Annahme (vgl. [Holland/Rubin, 1988]):

(2.9) $\quad$ X und Y_i sind stochastisch unabhängig (i = 0, 1)

Da Y_0, Y_1 kontrafaktische Variablen sind, kann (2.9) nicht verifiziert werden. Wird X jedoch mittels eines Zufallsmechanismus, z. B. durch Münzwurf, festgelegt, so kann man bei hinreichend großem N davon ausgehen, dass X und Y_x *(*x = 0,1*)* zumindest approximativ unabhängig sind (vgl. [Holland, 1988], S. 479). Gilt (2.9), so kann die Verteilung von Y_x aus den Daten bestimmt werden, denn es gilt mit (2.5):

(2.10) $\quad P(Y_x = y) = P(Y_x = y \mid X = x) = P(Y = y \mid X = x) \qquad (x = 0,1)$

Damit kann der durchschnittliche bzw. erwartete kausale Effekt (2.7) berechnet (identifiziert) werden, da der letzte Ausdruck aus den beobachtbaren Daten (x_j, y_j) abgeleitet werden kann.

3. Explizite Berücksichtigung der Faktorzuweisung

Die Bedingung (2.9) ist eine Forderung an die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen X und Y_0 (bzw. Y_1), die beide auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (U, A, P_2) definiert sind, sie bezieht sich also auf die vorliegende Verteilung des Faktors in der Population. Die Art und Weise der Faktorzuweisung wird dabei nicht berücksichtigt.

Seien Q_j Zufallsvariable, die die Faktorzuweisung für Merkmalsträger u_j beschreiben ($1 \le j \le N$). Die Q_j seien alle auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, E, P_1) definiert.

(3.1) $\quad Q = (Q_1, \ldots Q_N) : \Omega \to \{0,1\}^N$

(3.2) $\quad Q_j : \Omega \to \{0,1\}$

Die N-dimensionale Zufallsvariable Q gibt die Faktorzuweisungen für alle N Merkmalsträger in der Reihenfolge 1, … , N an.

Beispiel 1
Liegt ein Bernoulli-Design für die Faktorzuweisung vor, so wird für jeden Merkmalsträger u_j z. B. mittels eines Münzwurfs über die Faktorzuweisung entschieden. Identifiziert man die Seiten mit 0 oder 1, so erhält man

$$\Omega = \{0,1\}^N, \; P_1(\omega) = P_1(\omega_1, \ldots, \omega_N) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^N$$

$$Q_j : \Omega \to \{0,1\}$$
$$\omega \to \omega_j$$

Es gilt: $P_1(Q_j = 1) = \tfrac{1}{2} \qquad (1 \le j \le N)$

$P_1(Q = ((x_1, \ldots x_N)) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^N$ für $(x_1, \ldots x_N) \in \{0,1\}^N$

(Q_j ist die j-te Projektion der Identität Q)

Beispiel 2
Liegt eine einfache Stichprobe vom Umfang n vor, so wird eine n-elementige Teilmenge so ausgewählt, dass alle n-elementigen Teilmengen die gleiche Wahrscheinlichkeit aufweisen, ausgewählt zu werden.

Ω = Menge der n-elementigen Teilmengen von U

$$P_1(\omega) = \frac{1}{\binom{N}{n}} \qquad (\omega \in \Omega)$$

Die Elemente in der ausgewählten n-elementigen Teilmenge werden mit dem Faktor behandelt:

$Q_j : \Omega \to \{0,1\}$

mit $Q_j(\omega) = 1$ genau dann, wenn $u_j \in \omega$.

Es gilt:

$$P_1(Q_j = 1) = \frac{n}{N} \qquad (1 \le j \le N)$$

$$P_1(Q = ((x_1,\ldots,x_N)) = \frac{1}{\binom{N}{n}} \quad \text{für } (x_1,\ldots,x_N) \in \{0,1\}^N \text{ mit } \sum_{i=1}^{N} x_i = n$$

Beispiel 3

Wie in Beispiel 1 sei $\Omega = \{0,1\}^N$ und Q_j die j-te Projektion (1 ≤ j ≤ N). Sei $U = \{u_1,\ldots,u_k, u_{k+1},\ldots,u_N\}$. Für $\{u_1,\ldots,u_k\}$ und $\{u_{k+1},\ldots,u_N\}$ liegen unterschiedliche Bernoulli-Designs vor:

$$P_1(Q_j = 1) = \alpha \qquad (1 \le j \le k)$$

$$P_1(Q_j = 1) = \beta \qquad (k+1 \le j \le N)$$

$$P_1(Q = (x_1,\ldots,x_N)) = \alpha^{n_1} \cdot (1-\alpha)^{k-n_1} \cdot \beta^{n_2} \cdot (1-\beta)^{N-k-n_2}$$

$$\text{mit} \quad n_1 = \sum_{i=1}^{k} x_i, \quad n_2 = \sum_{i=k+1}^{N} x_i$$

Im Rubin-Modell mit expliziter Einbeziehung des Zuweisungsmechanismus sind zwei stochastische Vorgänge zu unterscheiden:

a) X, Y, Y_0, Y_1 sind Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (U, A, P_2)

b) Q_j (1 ≤ j ≤ N), Q sind Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitstraum (Ω, E, P_1)

Das Produkt der beiden Wahrscheinlichkeitsräume

(3.3) $(\Omega \times U, E \otimes A, P_1 \otimes P_2)$

ist gegeben durch

(3.4) $\Omega \times U = \{(\omega, u) \mid \omega \in \Omega, u \in U\}$

(3.5) $E \otimes A =$ Menge aller Teilmengen von $\Omega \times U$

(3.6) $P_1 \otimes P_2 \; ((\omega, u)) = P_1(\omega) \cdot P_2(u)$

Im folgenden bezeichne P das Produkt von P_1 und P_2: $P((\omega,u)) = P_1(\omega)\cdot P_2(u)$. P beschreibt also die Wahrscheinlichkeit, dass die Faktorzuweisung durch ω bestimmt wird und dass der Merkmalsträger u ausgewählt wird. Die beiden stochastischen Vorgänge sind unabhängig voneinander. Die Zufallsvariablen X, Y, Y_0, Y_1, Q_j, Q lassen sich als Variablen auf dem Produktraum auffassen, z. B.:

$$X(u) = X'(\omega,u) \qquad \text{für alle } \omega \in \Omega$$
$$Q_j(\omega) = Q_j'(\omega,u) \qquad \text{für alle } u \in U.$$

Um die Notation einfach zu halten, wird im folgenden X, Q_j etc. verwendet, auch wenn diese Variablen als auf dem Produktraum definiert angesehen werden.

Da Y_i nur von u_j, Q_j nur von ω abhängen, gilt

(3.7) $P(Y_i = y, Q_j = k) = P(Y_i = y)\cdot P(Q_j = k)$
für i, k = 0,1 und $1 \le j \le N$

In der Terminologie von [Rubin, 1990], [Rubin, 2002] sind Q und Y_i (i = 0, 1) unkonfundiert; insbesondere gilt die dortige Definition von ignorability.

Im folgenden werden zwei weitere, nicht trivial auf dem Produktraum definierte Variablen betrachtet

(3.8) $\tilde{X}: \quad \Omega \times U \to \{0,1\}$
$\qquad (\omega,u) \to Q_u(\omega)$

(3.9) $\tilde{Y}: \quad \Omega \times U \to IR$
$\qquad (\omega,u) \to Y_{Q_u(\omega)}(u)$

$P(\tilde{X}=1)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Merkmalsträger mit dem Faktor behandelt ist, falls alle möglichen Ergebnisse ω gemäß P_1 auftreten. $P(\tilde{X}=1)$ hängt von beiden oben beschriebenen Zufallsvorgängen ab. $P(\tilde{X}=1)$ entspricht inhaltlich dem 'propensity score', falls keine Kovariaten berücksichtigt werden (vgl. [Rosenbaum, 2002], S. 297). Die Definition über den Produktraum (3.3) ermöglicht Verallgemeinerungen (vgl. [Kischka, 2003]). Dagegen ist $P(X=1)$ (vgl. 2.1) die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Merkmalsträger mit dem Faktor behandelt ist, falls eine bestimmte Faktorzuweisung $\underline{x} = (\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_N)$ für alle Merkmalsträger vorliegt. Analog ist $P(\tilde{Y}=y)$ die Wahrscheinlichkeit, bei der Antwortvariablen den Wert y zu beobachten. Hier geht wieder, in Analogie zu (2.5), die Annahme ein, dass die beobachteten Werte, wenn die Faktorzuweisung $Q_u(\omega)$ vorliegt, mit dem Wert der manipulierten Variablen $Y_{Q_u(\omega)}$ übereinstimmt.

4. Konstante Zuweisungswahrscheinlichkeiten

Die Bedingung (2.9) ist für die Identifizierbarkeit kausaler Effekte (vgl. Abschnitt 5) von entscheidender Bedeutung. In der Literatur wird häufig davon gesprochen, dass (2.9) erfüllt ist, falls der Faktor zufällig den Merkmalsträgern zugeordnet wird (vgl. z. B. [Wooldridge, 2002], S. 604 ff). Die Zuordnungsvorschriften in den Beispielen 1, 2, 3 des vorangegangenen Abschnitts waren für den einzelnen Merkmalsträger jeweils zufällig; entscheidend für die Bedingung (2.9) ist die Konstanz von $P_1(Q_j = 1)$ $(1 \le j \le N)$, d. h. nur die Beispiele 1 und 2 kommen in Frage. Darüber hinaus ist (2.9) eine Forderung an Variablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (U, A, P_2) bei gegebenen $(x_1, \dots, x_N) \in \{0,1\}^N$; es ist klar, dass immer Zuweisungen $(x_1, \dots, x_N)$ existieren, so dass (2.9) nicht erfüllt ist (vgl. Beispiel 6). Dagegen wird im folgenden gezeigt, dass $\tilde{X}$ und Y_0 (bzw. Y_1) immer stochastisch unabhängig sind, falls $P(Q_i = 1)$ konstant ist.
Im folgenden wird stets vom Produktraum (3.3) ausgegangen.

Lemma 1:
Sei $P(Q_j = 1) = c \quad (1 \le j \le N)$. Dann gilt $P(\tilde{X} = 1) = c$.

Beweis:

Sei $C_j := \{\omega \mid \omega \in \Omega, Q_j(\omega) = 1\} \quad (1 \le j \le N)$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
P(\tilde{X} = 1) &= P(\{(\omega, u_j) \mid u_j \in U, \omega \in \Omega, Q_j(\omega) = 1\}) \\
&= \sum_{j=1}^{N} P(\{(\omega, u_j) \mid \omega \in \Omega, Q_j(\omega) = 1\}) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \sum_{\omega \in C_j} P((\omega, u_j)) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \sum_{\omega \in C_j} P_1(\omega) \cdot P_2(u_j) \\
&= \sum_{j=1}^{N} P_2(u_j) \sum_{\omega \in C_j} P_1(\omega) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} \cdot P(Q_j = 1) \\
&= N \cdot \frac{1}{N} \cdot c .
\end{aligned}
$$

Satz 1:
Sei $P(Q_j = 1) = c \quad (1 \le j \le N)$. Dann sind $\tilde{X}$ und Y_0 (bzw. Y_1) stochastisch unabhängig.

Beweis:

Sei $B_y = \{u_j \mid u_j \in U, Y_0(u_j) = y\}, \quad C_j := \{\omega \mid \omega \in \Omega, Q_j(\omega) = 1\} \qquad (1 \le j \le N)$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
P(Y_0 = y, \tilde{X} = 1) &= \sum_{u_j \in B_y} P\left(\left\{(\omega, u_j) \mid Q_j(\omega) = 1\right\}\right) \\
&= \sum_{u_j \in B_y} \sum_{\omega \in C_j} P((\omega, u_j)) \\
&= \sum_{u_j \in B_y} P_2(u_j) \cdot c \\
&= (N \cdot P(Y_0 = y)) \cdot \frac{1}{N} \cdot c \\
&= P(Y_0 = y) \cdot P(\tilde{X} = 1) \quad (\text{vgl. Lemma 1})
\end{aligned}$$

Analog verläuft der Beweis für Y_1.

Beispiel 4
Es gelte $P(Y_0 = y) = 2/5$, $P(Y_0 = y') = 3/5$. Der Zuweisungsmechanismus sei eine einfache Stichprobe vom Umfang 3 aus einer Population mit N = 10 Merkmalsträgern. Dann gilt $P(Q_j = 1) = 0{,}3 \quad (1 \le j \le 10)$.

$P(Y_0 = y, \tilde{X} = 1)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei dieser Faktorzuweisung ein zufällig ausgewählter Merkmalsträger mit dem Faktor behandelt ist und ohne Behandlung den Wert y aufweisen würde.

Es gilt: $\quad P(Y_0 = y, \tilde{X} = 1) = 0{,}12 = P(Y_0 = y) \cdot P(\tilde{X} = 1)$

Beispiel 5
Ist $P(Q_j = 1)$ nicht konstant, so liegt i. a. keine Unabhängigkeit zwischen $\tilde{X}$ und Y_i vor.

Sei N = 2 und es gelte $P(Q_1 = 1) = 0{,}9$, $P(Q_2 = 1) = 0{,}2$ sowie $Y_0(u_1) = y \ne y' = Y_0(u_2)$.
Sind Q_1 und Q_2 unabhängig, so gilt:

$$\begin{aligned}
P(\tilde{X} = 1) &= P(Q_1 = 1, Q_2 = 1) \cdot P(u_1) + P(Q_1 = 1, Q_2 = 1) \cdot P(u_2) \\
&+ P(Q_1 = 1, Q_2 = 0) \cdot P(u_1) + P(Q_1 = 0, Q_2 = 1) \cdot P(u_2) \\
&= 0{,}18 + 0{,}18 + 0{,}72 + 0{,}02) \cdot 0{,}5 = 0{,}55
\end{aligned}$$

$P(\tilde{X} = 1, Y_0 = y) = 0{,}45 \quad , \quad P(Y_0 = y) = 0{,}5 \quad .$

Die in Satz 1 bewiesene Unabhängigkeit ist nicht mit der Bedingung (2.9) zu verwechseln. Die Verteilung von $\tilde{X}$ hängt vom Zuweisungsmechanismus, beschrieben durch P_1, und von der Zufallsauswahl eines Merkmalsträgers, beschrieben durch P_2, ab. Die Verteilung der Variablen X aus (2.9) bezieht sich auf eine gegebene Faktorzuweisung $(x_1, \dots, x_N)$. Auswirkungen von Satz 1 auf (2.9) werden im folgenden Abschnitt untersucht.

5. Identifizierbarkeit

Identifizierbarkeit des durchschnittlichen kausalen Effekts $E(Y_1) - E(Y_0)$, d. h. der Effekt kann aus den beobachtbaren Daten bestimmt werden, folgt aus der Gültigkeit der Bedingung (2.9). Zum anderen kann der kausale Effekt als Erwartungswert eines erwartungstreuen, auf der Faktorzuweisung Q beruhenden Schätzers bestimmt werden. Diese beiden Vorgehensweisen werden in diesem und dem folgenden Abschnitt beschrieben und miteinander verglichen.

Sei $\underline{x} = (\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_N)$ eine gegebene Faktorzuweisung und sei X die auf U definierte Zufallsvariable (vgl. (2.1)) mit

$$(5.1) \qquad P(X=1) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \underline{x}_i$$

Der Zusammenhang zwischen dem so definierten X und $\tilde{X}$ aus (3.8) ist durch folgendes Lemma gegeben:

Lemma 2:
Sei X durch (5.1) gegeben. Dann gilt
$P(X=k) = P(\tilde{X}=k \mid Q=\underline{x}) \quad (k=0,1)$
und
$P(Y_i = y, X=k) = P(Y_i = y, \tilde{X}=k \mid Q=\underline{x}) \quad (i,k=0,1 \text{ und } y \in IR)$

Beweis:

Seien $C_{\underline{x}} = \{\omega \mid \omega \in \Omega, Q(\omega) = \underline{x}\}$
$D_\omega = \{j \mid Q_j(\omega) = 0\}$

$$\begin{aligned} P(\tilde{X}=0, Q=\underline{x}) &= P(\{(\omega, u_j) \mid u_j \in U, Q(\omega)=\underline{x}, \quad Q_j(\omega)=0\}) \\ &= \sum_{\omega \in C_{\underline{x}}} P_1(\omega) \cdot \sum_{j \in D_\omega} P_2(u_j) \end{aligned}$$

Da $\sum_{j \in D_\omega} P_2(u_j) = \frac{1}{N}\left(N - \sum_{i=1}^{N} \underline{x}_i\right)$ für $\omega \in C_{\underline{x}}$ gilt,

$$P(\tilde{X}=0 \mid Q=\underline{x}) = 1 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\underline{x}_i = P(X=0).$$

Analog lässt sich die zweite Aussage beweisen.

Die Bedingung (2.9) kann daher im Rahmen des in Abschnitt 3 eingeführten Produktraumes geschrieben werden als

$$(5.2) \qquad P(Y_i = y, \tilde{X}=k \mid Q=\underline{x}) = P(Y_i = y) \cdot P(\tilde{X}=k \mid Q=\underline{x}) \qquad (i,k=0,1, \;\; y \in IR)$$

Dabei wurde die Unabhängigkeit von Y_i und Q (vgl. (3.7)) ausgenutzt.

Satz 2:
Unter der Bedingung (5.2) ist der kausale Effekt $E(Y_1) - E(Y_0)$ identifizierbar.
Beweis:

$$
\begin{aligned}
E(Y_1) &= \sum_y y P(Y_1 = y) \\
&= \sum_y y \cdot \frac{P(Y_1 = y, \tilde{X} = 1 \mid Q = \underline{x})}{P(\tilde{X} = 1 \mid Q = \underline{x})} && \text{(vgl. 5.2)} \\
&= \sum_y y \cdot \frac{P(Y_1 = y, X = 1)}{P(X = 1)} && \text{(vgl. Lemma 2)} \\
&= \sum_y y \cdot P(Y_1 = y \mid X = 1)
\end{aligned}
$$

Eine analoge Umformung gilt für $E(Y_0)$.

Bedingung (5.2) ist in nicht trivialen Fällen niemals für alle $\underline{x} \in \{0,1\}^N$ erfüllt, auch wenn die Faktorzuweisung durch Münzwurf oder andere vollständig randomisierte Zuweisungsmechanismen erfolgt. Z. B. ist (5.2) verletzt für $\underline{x}$ mit $\underline{x}_j = 0$ genau dann, wenn $Y_0(u_j) = y$, denn dann gilt:

$$P(Y_0 = y, \tilde{X} = 1 \mid Q = \underline{x}) = 0$$

$$P(Y_0 = y) > 0, P(\tilde{X} = 1 \mid Q = \underline{x}) > 0.$$

Der folgende Satz gibt ein hinreichendes, intuitiv naheliegendes Kriterium für die Gültigkeit von (5.2).

Satz 3
Es gelte $P(Q_j = 1) = c \quad (1 \le j \le N)$. Sei $\underline{x} \in \{0,1\}^N$ mit

(5.3) $\quad P(\tilde{X} = k \mid Q = \underline{x}) = P(\tilde{X} = k) \quad (k = 0,1)$

(5.4) $\quad P(\tilde{X} = k \mid Y_i = y, Q = \underline{x}) = P(\tilde{X} = k \mid Y_i = y) \quad (i, k = 0,1 \text{ und } y \in IR)$

Dann gilt die Beziehung (5.2).

Beweis:
Für i, k = 0,1 gilt:

$$
\begin{aligned}
& P(Y_i = y, \tilde{X} = k \mid Q = \underline{x}) \\
= \; & P(\tilde{X} = k, Q = \underline{x} \mid Y_i = y) \cdot \frac{P(Y_i = y)}{P(Q = \underline{x})} \\
= \; & P(\tilde{X} = k \mid Y_i = y) \cdot P(Q = \underline{x} \mid Y_i = y) \cdot \frac{P(Y_i = y)}{P(Q = \underline{x})} \quad \text{(nach Vor. (5.4))}
\end{aligned}
$$

$= \quad P(\tilde{X} = k \mid Y_i = y) \cdot P(Y_i = y \mid Q = \underline{x})$

$= \quad P(\tilde{X} = k) \cdot P(Y_i = y \mid Q = \underline{x})$ (vgl. Satz 1)

$= \quad P(\tilde{X} = k \mid Q = \underline{x}) \cdot P(Y_i = y \mid Q = \underline{x})$ (nach Vor. (5.3))

Korollar 1:
Es gelte $P(Q_j = 1) = c \quad (1 \le j \le N)$. Sei $\underline{x} \in \{0,1\}^N$ und sei X durch (5.1) gegeben. Sei

(5.5) $\quad P(\tilde{X} = k) = P(X = k) \quad (k = 0,1)$

(5.6) $\quad P(\tilde{X} = k \mid Y_i = y) = P(X = k \mid Y_i = y) \quad (k = 0,1 \text{ und } y \in IR)$

Dann gilt die Beziehung (5.2).

Beweis:
(5.3) und (5.5) sind nach Lemma 2 äquivalent. Ebenso folgt aus Lemma 2:

$$P(\tilde{X} = k \mid Y_i = y, Q = \underline{x}) =$$
$$= \frac{P(Y_i = y, \tilde{X} = k \mid Q = \underline{x})}{P(Y_i = y)} =$$
$$= \quad P(X = k \mid Y_i = y)$$

Daher sind auch (5.4) und (5.6) äquivalent.

Aus Satz 3 bzw. aus Korollar 1 folgt, dass unter $P(Q_j = 1) = c$ der kausale Effekt identifizierbar ist, falls die Verteilungen von $\tilde{X}$ und X bzw. von $(\tilde{X}, Y_i)$ und (X, Y_i) übereinstimmen.

Beispiel 6
Sei N = 3 und es gelte

j	1	2	3
$Y_0(u_j)$	y	y'	y'
$Y_1(u_j)$	y'	y	y'

Der Auswahlmechanismus sei eine einfache Stichprobe vom Umfang 2 (2 ausgewählte Merkmalsträger werden mit dem Faktor behandelt). Dann gilt z. B.:

$$P(Y_0 = y, \tilde{X} = 1) = 2/9$$
$$P(Y_0 = y, \tilde{X} = 1 \mid Q = (1,0,1)) = 1/9$$

Nach Satz 1 sind Y_0 und $\tilde{X}$ unabhängig; dagegen gilt

$$P(Y_0 = y) = 1/3, \quad P(\tilde{X} = 1 \mid Q = (1,0,1)) = 2/3.$$

Daher ist die Beziehung (5.2) für $\underline{x} = (1,0,1)$ nicht erfüllt. Es lässt sich zeigen, dass (5.2) für kein $\underline{x} \in \{0,1\}^3$ mit $0 < \sum_{i=1}^{3} \underline{x}_i < 3$ erfüllt ist.

Betrachtet man eine 'Verdreifachung' der Population mit

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$Y_0(u_j)$	y	y'	y'	y	y'	y'	y	y'	y'
$Y_1(u_j)$	y'	y	y'	y'	y	y'	y'	y	y'

so gilt mit $\underline{x} = (1\,0\,1\,0\,1\,1\,1\,1\,0)$:

$$P(Y_i = y, \tilde{X} = k \mid Q = \underline{x}) = P(Y_i = y)P(\tilde{X} = k \mid Q = \underline{x}) \qquad (i,k = 0,1)\ .$$

In Beispiel 6 ist die Unabhängigkeit Folge der Annahme, dass alle möglichen Faktorzuweisungen (bei einer einfachen Stichprobe vom Umfang 2) einmal auftreten. Allgemeiner folgt aus dem Gesetz der großen Zahlen, dass mit wachsendem Umfang der Population und einer zufälligen Zuweisung des Faktors die Wahrscheinlichkeit sinkt, ein $\underline{x}$ zu erhalten, für das (5.2) nicht gilt. Voraussetzung hierfür ist natürlich die Annahme eines Produktmaßes, d. h. die Annahme, dass die Faktorzuweisung unabhängig ist von der Auswahl eines Merkmalsträgers.

6. Erwartungstreue Schätzer

Beispiel 7
Sei Q eine einfache Stichprobe vom Umfang n (vgl. Beispiel 2). Seien
$y_{0j} := Y_0(u_j),\ y_{1j} := Y_1(u_j) \quad (1 \le j \le N)$.

Dann gilt:

$$E\left(\sum_{j=1}^{N} y_{1j} Q_j\right) = \frac{n}{N}\sum_{j=1}^{N} y_{1j}$$

$$E\left(\sum_{j=1}^{N} y_{0j}(1-Q_j)\right) = \frac{N-n}{N}\sum_{j=1}^{N} y_{0j}$$

Damit ist die Statistik

$$(6.1) \qquad \omega \to \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N} y_{1j} Q_j(\omega) - \frac{1}{N-n}\sum_{j=1}^{N} y_{0j}(1-Q_j(\omega))$$

eine erwartungstreue Schätzfunktion zum Schätzen des kausalen Effekts

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_{1j} - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_{0j}$$

(vgl. auch [Rosenbaum, 2002], S. 46)

Verwendet man die Schätzfunktion (6.1) und ist $\underline{x} = Q(\underline{\omega})$ die beobachtete Aufteilung des Faktors auf die N Merkmalsträger, so ist der geschätzte kausale Effekt gegeben durch

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N} y_{1j}\,\underline{x}_j - \frac{1}{N-n}\sum_{j=1}^{N} y_{0j}(1-\underline{x}_j)$$

Das ist derselbe Schätzwert, der sich ergibt, wenn man für X aus (5.1) die Bedingung (2.9) annimmt, denn dann gilt:

$$P(Y_1 = y) = P(Y_1 = y \mid X = 1) = \frac{1}{n}\cdot \sum_{j: y_{1j}=y} \underline{x}_j$$

$$P(Y_0 = y) = P(Y_0 = y \mid X = 0) = \frac{1}{N-n}\cdot \sum_{j: y_{0j}=y} (1-\underline{x}_j)$$

und damit

$$E(Y_1) = \sum_y y\, P(Y_1 = y) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N} y_{1j}\underline{x}_j$$

$$E(Y_0) = \sum_y y\, P(Y_0 = y) = \frac{1}{N-n}\sum_{j=1}^{N} y_{0j}(1-\underline{x}_j)\,.$$

Die Erwartungstreue der Zufallsvariablen (6.1) besagt: Würde man immer wieder Stichproben vom Umfang n aus den Merkmalsträgern ziehen (und wären diese jeweils im gleichen Ausgangszustand), so wäre der Mittelwert der realisierten Statistiken gleich dem wahren kausalen Effekt. Ebenso wie in Abschnitt 5 beruht die Aussagekraft des Schätzers (6.1) auf asymptotischen Überlegungen. In Abschnitt 5 kann jedoch der kausale Effekt bestimmt werden, wenn ein geeignetes $\underline{x}$ vorliegt; die Asymptotik kommt ins Spiel, da die Wahrscheinlichkeit 'ungeeigneter' $\underline{x}$ für wachsende N gegen 0 konvergiert.

Erwartungstreue für Schätzer der Form (6.1) liegt auch für N = 2, n = 1 vor, ist also eine sehr schwache Anforderung. Sie liegt nicht nur in der Situation von Beispiel 7 vor; insbesondere ist die Forderung nach konstanten Zuweisungswahrscheinlichkeiten, die in den Abschnitten 5, 6 gemacht wurde, hierfür nicht notwendig. Der nachfolgende Satz beruht auf einer einfachen Modifikation des sogenannten π-Schätzers in der Stichprobentheorie (vgl. [Särndal et al., 1992], S. 42 f).

Satz 4:
Für $y_{ij} := Y_i(u_j)$ $(i = 0{,}1\,, 1 \le j \le N)$ und $\pi_j = P(Q_j = 1)$ mit $0 < \pi_j < 1$ $(1 \le j \le N)$ gilt:

$$\frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{y_{1j}}{\pi_j}Q_j - \sum_{j=1}^{N}\frac{y_{0j}}{1-\pi_j}(1-Q_j)\right)$$

ist erwartungstreue Schätzfunktion für den kausalen Effekt.

Beweis:

$$E\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{y_{1j}}{\pi_j}Q_j\right)=\sum_{j=1}^{N}\frac{y_{1j}}{\pi_j}E(Q_j)=\sum_{j=1}^{N}y_{1j}$$

$$E\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{y_{0j}}{1-\pi_j}(1-Q_j)\right)=\sum_{j=1}^{N}\frac{y_{0j}}{1-\pi_j}E(1-Q_j)=\sum_{j=1}^{N}y_{0j}$$

Anmerkung:

Auch in der Situation von Satz 4 folgt, falls (2.9) erfüllt ist, dass der kausale Effekt identifizierbar ist. Eine Übereinstimmung der Schätzwerte entsprechend Beispiel 7, die sich zum einen aus der einmaligen Verwendung der erwartungstreuen Schätzfunktion aus Satz (4) zum anderen aus der Annahme (2.9) ergeben, ist i. a. nicht gegeben.

Literatur

Holland, P. W.: Statistics and Causal Inference, Journal of the American Statistical Association, 1986, 945 – 970

Holland, P. W., Rubin, D. B.: Causal Inference in Retrospective Studies, Evaluation Review, 1988, 203 – 231

Holland, P. W.: Causal Inference, Path Analysis and Recursive Structural Equation Models, in: C. Clogg (ed.), Sociological Methodology, 1988, 449 – 484

Kischka, P.: Faktorzuweisungen im Rubin-Modell II, in Vorbereitung

Rubin, D. B.: Formal Modes of Statistical Inference for Causal Effects, Journal of Statistical Planning and Inference, 1990, 279 – 292

Rubin, D. B.: Estimating Causal Effects of Treatments in Randomized and Nonrandomized Studies, Journal of Educational Psychology, 1974, 688 – 701

Rubin, D. B.: Basic Concepts of Statistical Inference for Causal Effects in Experiments and Observational Studies, Course material in Quantitative Reasoning 33, Harvard University, 2002

Rosenbaum, P. R.: Observational Studies (2nd Edition), New York et al., 2002

Särndal, C.-E.Swensson, B., Wretman, J.: Model Assisted Survey Sampling, New York et al., 1992

Wooldridge, J. M.: Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data, Cambridge/London, 2002

Jenaer Schriften zur Wirtschaftswissenschaft

2003

1/2003 Wolfgang Kürsten: Synergetische Merger, Co-Insurance und Shareholder Value, oder: Wer profitiert von "wertschaffenden" Fusionen?

2/2003 Roland Helm, Laura Manthey, Armin Scholl und Michael Steiner: Empirical Evaluation of Preference Elicitation Techniques from Marketing and Decision Analysis.

3/2003 Wolfgang Kürsten: Grenzen und Reformbedarfe der Sicherheitsäquivalentmethode in der (traditionellen) Unternehmensbewertung. Erwiderung auf die Anmerkungen von Ralf Diedrich und Jörg Wiese in der ZfbF.

4/2003 Uwe Cantner, Holger Graf: Cooperation and Specialization in German Technology Regions.

5/2003 Jens J. Krüger: On the Dynamics of the U.S. Manufacturing Productivity Distribution.

6/2003 Uwe Cantner, Dirk Fornahl und Holger Graf: Innovationssystem und Gründungsgeschehen in Jena. Erste Erkenntnisse einer Unternehmensbefragung.

7/2003 Peter Kischka: Faktorzuweisungen im Rubin-Modell.

2002

Die Schriftenreihe war bis 2002 in Reihe A "Betriebswirtschaftslehre" und Reihe B "Volkswirtschaftslehre" unterteilt.

Reihe A:

1/2002 Dorothea Alewell und Petra Koller: Die Sicherung von Humankapitalinvestitionen über Rückzahlungsklauseln – Ergebnisse einer empirischen Untersuchung. *Erschienen in: Mitteilungen aus der Arbeitsmarkt- und Berufsforschung 1/2002, S. 107-122.*

2/2002 Dorothea Alewell und Petra Koller: Der Einsatz und die Bewertung von Rückzahlungsklauseln für Weiterbildungsmaßnahmen durch Unternehmen - Ergebnisse einer empirischen Untersuchung. *Erscheint in: Zeitschrift für Personalforschung 2003*

3/2002 Martin Kloyer: Begrenzung des Opportunismus in FuE-Lieferbeziehungen - Eine empirische Untersuchung.

4/2002 Martin Kloyer: Patentierungsstrategien: Bestimmung des Anspruchsumfangs.

5/2002 Armin Scholl und Lutz Häselbarth: Zielgerichtete Koordination mit Hilfe der Dantzig-Wolfe-Dekomposition - Eine betriebswirtschaftliche Fallstudie. *Erscheint in: WISU - das Wirtschaftsstudium 32 (2003).*

Reihe B:

1/2002 Markus Pasche: Heterogeneous Behavioral Rules in the Oligopolistic Case.

2/2002 Markus Pasche: Playing Fair: Rationality and Norm-guided Behavior in Games.

3/2002 Uwe Cantner und Jens J. Krüger: Geroski's Stylized Facts and Mobility in Large German Manufacturing Firms.
