

# Resolución del problema cinemático inverso en un robot SCARA mediante grupos de Assur

A. Noriega González, A. García Martínez, M. Muñiz Calvente

Dpto. de Construcción e Ingeniería de Fabricación, Universidad de Oviedo  
noriegaalvaro@uniovi.es

---

*Este artículo presenta una nueva formulación para la resolución de la cinemática inversa de un robot SCARA mediante grupos de Assur. Dicha formulación minimiza el tiempo de resolución del problema cinemático y permite definir, de manera inequívoca, el modo de trabajo del robot en cualquier instante de la simulación. También permite identificar posibles configuraciones singulares del problema inverso. Debido a las características comentadas, esta formulación está especialmente indicada para utilizarse en algoritmos automáticos de planificación de trayectorias en entornos cambiantes donde se deban evitar colisiones.*

---

## 1. INTRODUCCIÓN

Los grupos de Assur son bien conocidos en cinemática. Sin embargo su uso en cinemática computacional no está muy extendido y casi siempre está centrado en el problema de la posición, siendo los problemas de la velocidad y la aceleración escasamente tratados en la bibliografía conocida [1]. Además, sus formulaciones cinemáticas suelen estar restringidas a mecanismos planos.

En el caso de la robótica, su utilización ha estado centrada, casi siempre, en el análisis directo de desplazamientos [2,3,4] con el fin de estudiar la movilidad del robot o manipulador, siendo la resolución de la cinemática directa e inversa muy poco habitual [5,6].

La resolución de la cinemática directa e inversa tiene gran interés para la planificación de trayectorias, sobre todo, cuando se trata de conseguir trayectorias libres de configuraciones singulares del robot. Por dicha razón, en este campo hay multitud de trabajos y enfoques.

Una variante interesante del problema de planificación de trayectorias es el caso donde hay que planificar la trayectoria de un robot para pasar por una serie de puntos de control móviles a la vez que se evitan colisiones con otros cuerpos móviles dentro del espacio de trabajo del robot [7]. Los algoritmos que resuelven este problema en cada instante del movimiento necesitan probar y valorar muchas posibles trayectorias. Para que este proceso sea lo más rápido posible, se necesita que la simulación cinemática inversa de cada trayectoria probada por el algoritmo tarde el menor tiempo posible. Una vez resuelto el problema de la posición en cada instante de la simulación cinemática inversa, se debe analizar si dicha posición constituye una configuración singular del problema directo donde se perdería el control del robot.

En este artículo se presentará una formulación para la cinemática inversa de un robot SCARA basada en grupos de Assur. Dicha formulación se derivará de la mostrada en [8] y buscará minimizar el tiempo necesario para resolver el problema cinemático e identificar configuraciones singulares del robot. Para ello, se describirá en primer lugar la cinemática del grupo de Assur RRR y, a continuación, la del robot SCARA.

## 2. CINEMÁTICA DEL GRUPO RRR

El grupo de Assur formado por dos eslabones y tres pares de revolución se suele denominar RRR y es de uso muy común en cinemática plana. El esquema de dicho grupo con sus dos modos de ensamblaje posibles se puede ver en la figura 1.

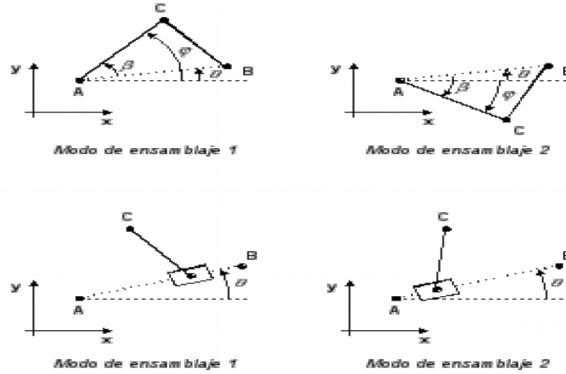


Figura 1. Modos de ensamblaje del grupo RRR

La resolución de la cinemática del grupo RRR consiste en calcular la posición del punto C ( $x_C$  e  $y_C$ ), su velocidad ( $\dot{x}_C$  e  $\dot{y}_C$ ) y su aceleración ( $\ddot{x}_C$  e  $\ddot{y}_C$ ) así como el ángulo formado por el eslabón AC con el semieje X positivo ( $\varphi$ ) y sus dos primeras derivadas temporales ( $\dot{\varphi}$  y  $\ddot{\varphi}$ ) a partir de la posición, velocidad y aceleración de los puntos A ( $x_A, y_A, \dot{x}_A, \dot{y}_A, \ddot{x}_A$  e  $\ddot{y}_A$ ) y B ( $x_B, y_B, \dot{x}_B, \dot{y}_B, \ddot{x}_B$  e  $\ddot{y}_B$ ), las longitudes  $l_{AC}$  y  $l_{BC}$  y el modo de ensamblaje deseado.

En primer lugar, se debe calcular el ángulo  $\theta$  que forma el segmento AB con el semieje X positivo así como sus dos primeras derivadas temporales ( $\dot{\theta}$  y  $\ddot{\theta}$ ). Para ello se utilizará la función cuyo diagrama de flujo y casos se muestran en la figura 2. También se debe calcular la distancia  $l_{AB}$  y sus dos primeras derivadas temporales ( $\dot{l}_{AB}$  y  $\ddot{l}_{AB}$ ) con la función cuyo diagrama de flujo y casos se muestran en la figura 3.

Entradas: posición  $\rightarrow [x \ y]$ , velocidad  $\rightarrow [\dot{x} \ \dot{y}]$  y aceleración  $\rightarrow [\ddot{x} \ \ddot{y}]$

$$\text{Si } x < 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } 0 \leq y \rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \\ \text{Si no} \rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi \end{array} \right\} \text{ y } \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{\dot{y} \cdot x - y \cdot \dot{x}}{x^2} \\ \ddot{\theta} = \frac{(\ddot{y} \cdot x - y \cdot \ddot{x}) \cdot (x^2 + y^2) - (\dot{y} \cdot x - y \cdot \dot{x}) \cdot 2 \cdot (x \cdot \dot{x} + y \cdot \dot{y})}{(x^2 + y^2)^2} \end{array} \right.$$

$$\text{Si } x = 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } y < 0 \rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}, \quad \dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{y}, \quad \ddot{\theta} = \frac{\ddot{x} \cdot y - \dot{x} \cdot \dot{y}}{y^2} \\ \text{Si } y = 0 \rightarrow \text{vector nulo} \\ \text{Si } 0 < y \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\theta} = -\frac{\dot{x}}{y}, \quad \ddot{\theta} = \frac{\dot{x} \cdot \dot{y} - \ddot{x} \cdot y}{y^2} \end{array} \right.$$

$$\text{Si } 0 < x \rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad \dot{\theta} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{\dot{y} \cdot x - y \cdot \dot{x}}{x^2} \text{ y } \ddot{\theta} = \frac{(\ddot{y} \cdot x - y \cdot \ddot{x}) \cdot (x^2 + y^2) - (\dot{y} \cdot x - y \cdot \dot{x}) \cdot 2 \cdot (x \cdot \dot{x} + y \cdot \dot{y})}{(x^2 + y^2)^2}$$

Figura 2. Cálculo del ángulo respecto al semieje X formado por un vector y sus derivadas temporales

Entradas: Punto A posición  $\rightarrow [x_A \ y_A]$  , velocidad  $\rightarrow [\dot{x}_A \ \dot{y}_A]$  y aceleración  $\rightarrow [\ddot{x}_A \ \ddot{y}_A]$   
 Punto B posición  $\rightarrow [x_B \ y_B]$  , velocidad  $\rightarrow [\dot{x}_B \ \dot{y}_B]$  y aceleración  $\rightarrow [\ddot{x}_B \ \ddot{y}_B]$

$$l = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$\text{Si } l \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} \dot{l} = \frac{(x_B - x_A) \cdot (\dot{x}_B - \dot{x}_A) + (y_B - y_A) \cdot (\dot{y}_B - \dot{y}_A)}{l} \\ \ddot{l} = \frac{\left( (\dot{x}_B - \dot{x}_A)^2 + (x_B - x_A) \cdot (\ddot{x}_B - \ddot{x}_A) + (\dot{y}_B - \dot{y}_A)^2 + (y_B - y_A) \cdot (\ddot{y}_B - \ddot{y}_A) \right) \cdot l - \left( (x_B - x_A) \cdot (\dot{x}_B - \dot{x}_A) + (y_B - y_A) \cdot (\dot{y}_B - \dot{y}_A) \right) \cdot \dot{l}}{l^2} \end{array} \right.$$

Si  $l = 0 \rightarrow \dot{l}$  y  $\ddot{l}$  no existen

Figura 3. Cálculo de la distancia entre dos puntos A y B y sus derivadas temporales

A continuación, se puede plantear el teorema del coseno en el triángulo ABC y despejar el ángulo  $\beta$ , obteniendo la ecuación 1. Si se deriva la ecuación 1 respecto al tiempo dos veces, se obtienen las ecuaciones 2 y 3. Las ecuaciones 4 y 5 muestran las expresiones que definen  $A$  y  $B$  así como sus derivadas temporales.

$$\beta = \arccos\left(\frac{A}{B}\right) \quad (1)$$

$$\dot{\beta} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{A}{B}\right)^2}} \times \frac{\dot{A} \times B - A \dot{B}}{B^2} \quad (2)$$

$$\ddot{\beta} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{A}{B}\right)^2}} \times \left[ \frac{1}{1 - \left(\frac{A}{B}\right)^2} \times \frac{A}{B} \left( \frac{\dot{A} \times B - A \dot{B}}{B^2} \right)^2 + \frac{\left( \ddot{A} \times B - A \ddot{B} \right) B^2 - 2 \left( \dot{A} \times B - A \dot{B} \right) \times B \dot{B}}{B^4} \right] \quad (3)$$

$$A = l_{AC}^2 + l_{AB}^2 - l_{BC}^2 \quad \dot{A} = 2 \mathcal{A}_{AB} \dot{\mathcal{X}}_{AB} \quad \ddot{A} = 2 \left( \dot{\mathcal{X}}_{AB}^2 + l_{AB} \ddot{l}_{AB} \right) \quad (4)$$

$$B = 2 \mathcal{A}_{AC} \mathcal{X}_{AB} \quad \dot{B} = 2 \mathcal{A}_{AC} \dot{l}_{AB} \quad \ddot{B} = 2 \mathcal{A}_{AC} \ddot{l}_{AB} \quad (5)$$

Para que la ecuación 2 sea válida, hay que asegurar que  $A/B \in [-1, 1]$ . Si esto no se cumple, el grupo RRR no se puede montar. Si  $A/B \in (-1, 1)$ , se pueden calcular la posición, velocidad y aceleración del punto C a partir de las del punto A con las ecuaciones 6, 7 y 8 respectivamente.

$$\begin{aligned} x_C &= x_A + l_{AC} \times \cos(\varphi) \\ y_C &= y_A + l_{AC} \times \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_C &= \dot{x}_A - l_{AC} \times \sin(\varphi) \dot{\varphi} \\ \dot{y}_C &= \dot{y}_A + l_{AC} \times \cos(\varphi) \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_C &= \ddot{x}_A - l_{AC} \left( \cos(\varphi) \ddot{\varphi}^2 - \sin(\varphi) \ddot{\varphi} \right) \\ \ddot{y}_C &= \ddot{y}_A + l_{AC} \left( -\sin(\varphi) \ddot{\varphi}^2 + \cos(\varphi) \ddot{\varphi} \right)\end{aligned}\quad (8)$$

La expresión del ángulo  $\varphi$  y sus derivadas temporales depende del modo de ensamblaje. Para el modo de ensamblaje 1, se usarán las expresiones de la ecuación 9 y para el modo de ensamblaje 2, las de la ecuación 10.

$$\varphi = \theta + \beta \quad \dot{\varphi} = \dot{\theta} + \dot{\beta} \quad \ddot{\varphi} = \ddot{\theta} + \ddot{\beta} \quad (9)$$

$$\varphi = \theta - \beta \quad \dot{\varphi} = \dot{\theta} - \dot{\beta} \quad \ddot{\varphi} = \ddot{\theta} - \ddot{\beta} \quad (10)$$

Si  $A/B = 1$ , los puntos A, B y C están alineados y se puede calcular la posición del punto C a partir de la del punto A con la ecuación 6 teniendo en cuenta que  $\beta = 0$ . Si  $A/B = -1$ , los puntos A, B y C también están alineados y se puede calcular la posición del punto C con la ecuación 6 teniendo en cuenta que  $\beta = \pi$ . Sin embargo, en estos dos últimos casos,  $\dot{\beta}$  y  $\ddot{\beta}$  no están definidas ya que se anula el denominador de las ecuaciones 2 y 3. De hecho, ambas soluciones corresponden a una configuración singular del grupo RRR. Existe un caso adicional donde la diada se puede montar pero la posición del punto C está indefinida debido a que el grupo RRR se encuentra en una configuración singular con incremento de movilidad [9]. Este caso ocurre cuando los puntos A y B coinciden y las longitudes  $l_{AC}$  y  $l_{BC}$  también coinciden.

El conocimiento de si el grupo RRR se encuentra en alguno de estos tres últimos casos permite identificar las configuraciones singulares del grupo y evitar errores y bloqueos durante la simulación cinemática inversa del robot SCARA.

Se ha programado en Matlab® la cinemática del grupo RRR con la modelización mostrada en este artículo así como en coordenadas relativas y coordenadas naturales [10]. En el caso de las coordenadas relativas, el código se ha implementado de manera que también permite la elección previa del modo de ensamblaje. En el caso de las coordenadas naturales, se genera la aproximación inicial de la posición, añadiendo a la solución obtenida con la nueva modelización, un vector de números aleatorios generados según una distribución de Gauss de media cero. Además, como en el caso de las coordenadas naturales no se puede asegurar la convergencia a la misma solución, se repite la resolución de la cinemática con una nueva aproximación inicial de la solución generada como se ha indicado más arriba hasta que se obtiene la misma solución que con las otras dos modelizaciones.

El proceso descrito se repite 100 veces midiendo en cada repetición el tiempo que se tarda en resolver la cinemática del grupo con cada una de las 3 modelizaciones. En la figura 4 se muestran los resultados obtenidos.

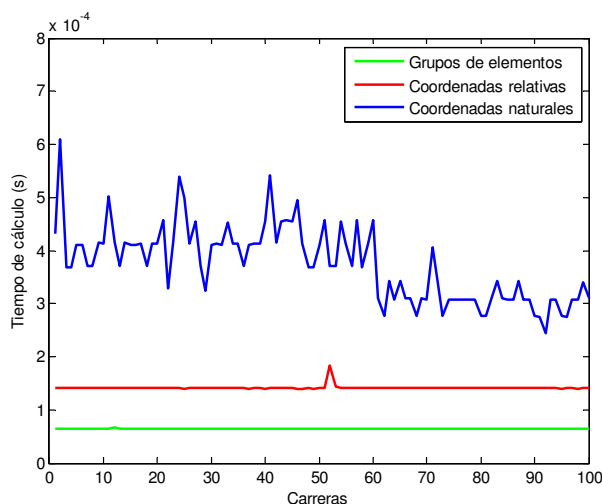


Figura 4. Comparativa de tiempo de resolución de las tres modelizaciones del grupo RRR

El tiempo empleado para la resolución de la cinemática del grupo RRR con la nueva formulación es, aproximadamente, un 17% del empleado cuando ese mismo grupo se modeliza en coordenadas naturales y un 45% del empleado con las coordenadas relativas. Se puede observar, además, que la modelización propuesta en este artículo y la obtenida con una modelización similar en coordenadas relativas no muestran casi variabilidad de tiempos mientras que el tiempo de resolución de la cinemática modelizada en coordenadas naturales depende de la aproximación inicial.

### 3. CINEMÁTICA INVERSA DEL ROBOT SCARA

Para formular la cinemática inversa del robot SCARA, se definirá el sistema de referencia que se puede ver en la Figura 5.

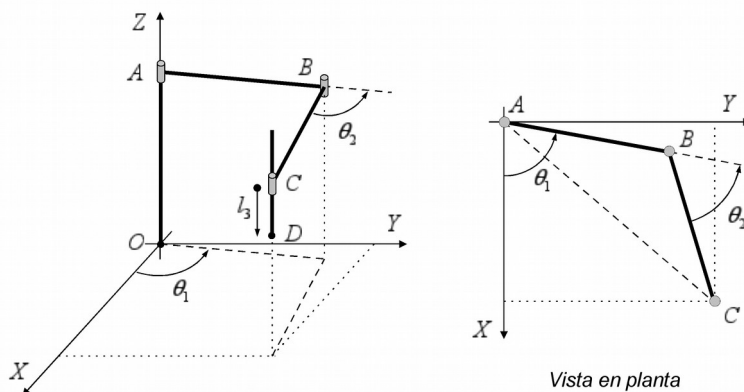


Figura 5. Esquema del robot SCARA

Para realizar la modelización se considera que se conocen las longitudes  $l_{OA}$ ,  $l_{AB}$  y  $l_{BC}$  así como el modo de ensamblaje deseado para el robot. Como se va a resolver la cinemática inversa, se dispondrá de la posición  $(x_D, y_D, z_D)$ , velocidad  $(\dot{x}_D, \dot{y}_D, \dot{z}_D)$  y aceleración  $(\ddot{x}_D, \ddot{y}_D, \ddot{z}_D)$  del punto D del robot SCARA y se desea calcular, en cada instante temporal, el ángulo  $\theta_1$  y sus derivadas temporales  $(\dot{\theta}_1$  y  $\ddot{\theta}_1)$ , el ángulo  $\theta_2$  y sus derivadas temporales  $(\dot{\theta}_2$  y  $\ddot{\theta}_2)$  y la distancia  $l_3$  y sus derivadas temporales  $(\dot{l}_3$  y  $\ddot{l}_3)$ .

Las coordenadas del punto O y sus derivadas temporales son nulas por estar situado en el origen y ser un punto fijo tal y como se muestra en la ecuación 11.

$$\begin{aligned}x_O &= y_O = z_O = 0 \\ \dot{x}_O &= \dot{y}_O = \dot{z}_O = 0 \\ \ddot{x}_O &= \ddot{y}_O = \ddot{z}_O = 0\end{aligned}\tag{11}$$

Las coordenadas del punto A también son constantes y su expresión se muestra en la ecuación 12.

$$\begin{aligned}x_A &= x_O & y_A &= y_O & z_A &= z_O + l_{OA} \\ \dot{x}_A &= \dot{y}_A = \dot{z}_A &= 0 \\ \ddot{x}_A &= \ddot{y}_A = \ddot{z}_A &= 0\end{aligned}\tag{12}$$

Las coordenadas del punto C se obtienen a partir de las de los puntos A y D y su expresión se muestra en la ecuación 13.

$$\begin{aligned}x_C &= x_D & y_C &= y_D & z_C &= z_A \\ \dot{x}_C &= \dot{x}_D & \dot{y}_C &= \dot{y}_D & \dot{z}_C &= 0 \\ \ddot{x}_C &= \ddot{x}_D & \ddot{y}_C &= \ddot{y}_D & \ddot{z}_C &= 0\end{aligned}\tag{13}$$

Entonces, los valores de  $l_3$ ,  $\dot{l}_3$  y  $\ddot{l}_3$  se pueden calcular directamente como se muestra en la ecuación 14.

$$\begin{aligned}l_3 &= z_A - z_D \\ \dot{l}_3 &= -\dot{z}_D \\ \ddot{l}_3 &= -\ddot{z}_D\end{aligned}\tag{14}$$

Para obtener la posición del punto B, se tiene en cuenta que A, B y C están contenidos en un mismo plano paralelo al XOY donde  $z_B = z_A$ . Además, dicho plano no varía su coordenada Z por lo que  $\dot{z}_B = \ddot{z}_B = 0$ . Si se proyectan los eslabones AB y BC sobre el plano XOY tal y como se muestra en la vista en planta de la figura 5, se puede apreciar que se forma un grupo RRR en el cual se conocen la posición, velocidad y aceleración de los puntos A y C. Si se aplica la formulación mostrada en el apartado 2, se puede calcular la posición ( $x_B$  e  $y_B$ ), velocidad ( $\dot{x}_B$  e  $\dot{y}_B$ ) y aceleración ( $\ddot{x}_B$  e  $\ddot{y}_B$ ) del punto B. Además, también se obtiene directamente el ángulo  $\theta_1$  y sus derivadas temporales ( $\dot{\theta}_1$  y  $\ddot{\theta}_1$ ).

Una vez conocidas la posición, velocidad y aceleración en X e Y de los puntos A y B, se puede calcular el ángulo  $\theta_{BC}$  y sus dos primeras derivadas ( $\dot{\theta}_{BC}$  y  $\ddot{\theta}_{BC}$ ) respecto del tiempo con la función mostrada en la figura 3. Finalmente, el valor del ángulo  $\theta_2$  y sus derivadas temporales ( $\dot{\theta}_2$  y  $\ddot{\theta}_2$ ) puede calcularse según se muestra en la ecuación 15.

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \theta_1 - \theta_{BC} \\ \dot{\theta}_2 &= \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_{BC} \\ \ddot{\theta}_2 &= \ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_{BC} \end{aligned} \tag{15}$$

Esta formulación será válida para cualquier configuración del robot dentro de su espacio de trabajo. Si se intenta aplicar a un punto fuera de su espacio de trabajo, el algoritmo que resuelve la cinemática del grupo ABC indicará dicha situación. Lo mismo se puede aplicar a la localización de configuraciones singulares con incremento de movilidad del robot.

El tiempo de resolución de la cinemática completa del robot es muy parecido al del grupo RRR ya que solo se añaden operaciones de asignación de variables, 5 operaciones de adición/sustracción y una llamada a la función de la figura 3.

#### 4. EJEMPLO

Se desea obtener la evolución en el tiempo de los 3 GDL de un robot SCARA con  $l_{OA} = 150$  mm,  $l_{AB} = 80$  mm y  $l_{BC} = 50$  mm mientras el extremo D del robot describe la trayectoria espiral indicada en la ecuación 16 manteniendo siempre el mismo modo de ensamblaje.

$$\begin{aligned} x_D &= 100 + 20 \times \sin\left(\frac{\pi}{2} \times t\right) \\ y_D &= -20 \times \cos\left(\frac{\pi}{2} \times t\right) \\ z_D &= 50 + 10 \times t \end{aligned} \quad t \in [0, 8] \text{ s} \tag{16}$$

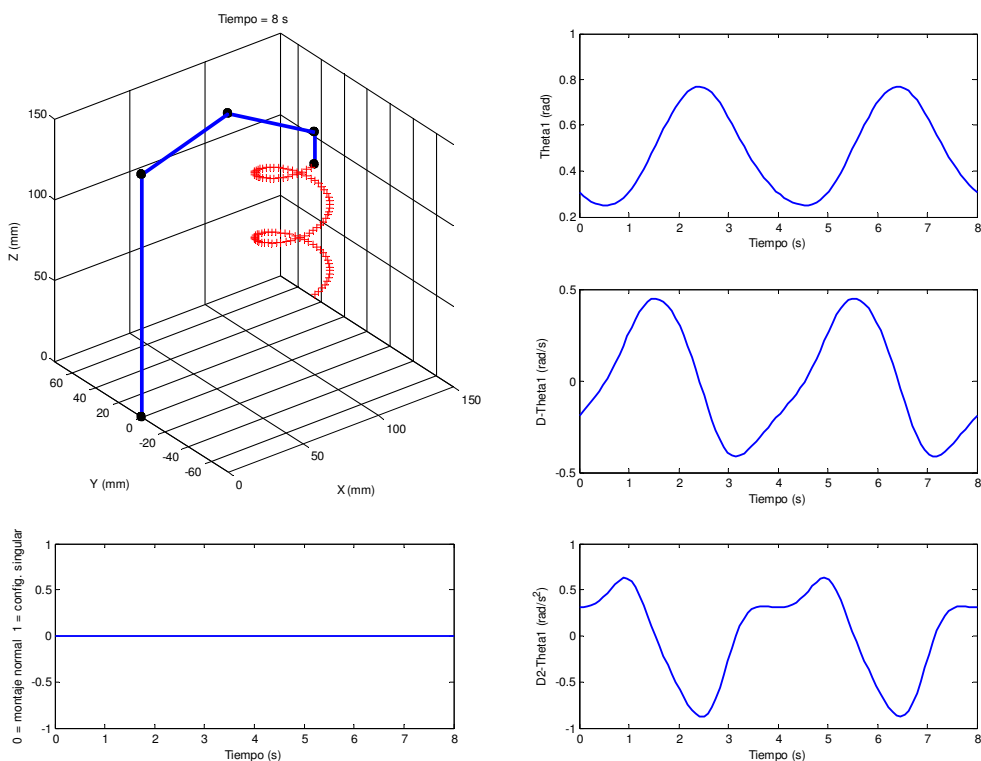


Figura 6. Simulación del robot SCARA

En la figura 6 se representa el robot en el instante final de la simulación así como la evolución temporal del  $\theta_1$ ,  $\dot{\theta}_1$  y  $\ddot{\theta}_1$ . También se representa un indicador de si se han producido configuraciones singulares del grupo RRR durante la simulación.

## 5. CONCLUSIONES

Se ha presentado una nueva formulación para resolver la cinemática (posición, velocidad y aceleración) del grupo de Assur RRR que presenta una eficiencia computacional muy elevada comparada con otras formulaciones muy conocidas como pueden ser las coordenadas relativas o las naturales. A partir de esta formulación cinemática del grupo RRR, se ha formulado la cinemática inversa de un robot SCARA. Dicha formulación permite definir de manera inequívoca el modo de trabajo del robot en cualquier instante de la simulación y, debido a su gran eficiencia, está especialmente indicada para utilizarse en algoritmos automáticos de planificación de trayectorias en entornos cambiantes donde se deban evitar colisiones.

En este artículo se ha escogido un robot serie muy conocido (el robot SCARA) para desarrollar un ejemplo de utilización de esta nueva formulación pero su mayor potencial está en el análisis de robots y manipuladores paralelos ya que su formulación con grupos de Assur es muy flexible, sencilla y eficiente. Además, también permite la identificación y clasificación de las configuraciones singulares del problema directo que puedan surgir durante la simulación.

## 6. REFERENCIAS

- [1] P. Fanghella, C. Galletti, *A modular method for computational kinematics*, En: *Computational Kinematics*, Kluwer, (1993).
- [2] S. Mitsi, K.D. Bouzakis, G. Mansour, I. Popescu, *A method for forward displacement analysis of 3-RRP and 3-PRP planar parallel manipulators*, *Romanian Review Precision Mechanics, Optics and Mechatronics*, 39 (2011), 137-140.
- [3] Z. Ni, Q. Liao, S. Wei, *New research of forward displacement analysis of 6-link Assur group*, 2nd International Conference on Information Science and Engineering, Hangzhou, China, (2010).
- [4] X. Kong, C.M. Gosselin, *Forward displacement analysis of third-class analytic 3-RPR planar parallel manipulators*, *Mech. Mach. Theory*, 36-9 (2001), 1009-1018.
- [5] P. Fanghella, C. Galletti, *Kinematics of robot mechanisms with closed actuating loops*, *International Journal of Robotics Research*, 9-6 (1990), 19-24.
- [6] H. Simas, R. Guenther, D.F.M. Da Cruz, D. Martins, *A new method to solve robot inverse kinematics using Assur virtual chains*, *Robotica*, 27-7 (2009), 1017-1026.
- [7] J. Lenarčič, P. Wenger, *Advances in robot kinematics: analysis and design*, Springer, (2008).
- [8] A. Noriega, M. Cadenas, R. Fernández, *Position problem in Assur's groups with revolute pairs*, 4th EUCOMES, Santander, España, (2012).
- [9] D. Zlatanov, R.G. Fenton, B. Benhabib, *Identification and classification of the singular configurations of mechanisms*, *Mech. Mach. Theory* 33 (1998), 743-760.
- [10] J. García de Jalón, E. Bayo, *Kinematic and dynamic simulation of multibody systems. The real-time challenge*, Springer-Verlag, (1994).