View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by Repositorio Institucional de la Universidad de Oviedo

Sobre los cuaterniones, álgebras de Lie, y matrices de Pauli.

Teoría básica y aplicaciones físicas.

Víctor Rodríguez Bouza, Doble Grado Física-Matemáticas.

Métodos Matemáticos I. Curso 2012-2013.

Índice

CONTENIDO **PÁGINA**

1. Introducción.

Fig. 1 ***(fuente: ver nota al pie).*** *Sir* William Rowan Hamilton.

[1] *Sir* **William Rowan Hamilton** (1805-1865, Dublín; ver figura 1) fue un físico-matemático irlandés que hizo grandes aportaciones a los campos de la mecánica, óptica y astronomía. Sin entrar mucho en detalles, tanto de su biografía como de éstas, destacan el hamiltoniano, que dio lugar a la mecánica hamiltoniana (también empleado en mecánica cuántica), la ecuación de Hamilton-Jacobi, el teorema de Cayley-Hamilton o los caminos hamiltonianos. Debido a todas estas investigaciones, Hamilton fue nombrado caballero por el *Lord Lieutenant of Ireland* (el <<delegado>>) de Su Majestad en 1835, más tarde, en 1837, se le ofreció la presidencia de Real Academia Irlandesa (*Royal Irish Academy)* y la membresía de la Academia de Ciencias de San Petersburgo (actual Academia de Ciencias Rusa). Finalmente, la Academia Nacional de Ciencias de los Estados Unidos (*National Academy of Sciences*), le nombró asociado extranjero en 1864.

Allá por 1840, Hamilton se encontraba enfrascado en la búsqueda de algún modo de **extender los números complejos**, que eran representables en un plano, **a dimensiones superiores**. Primero intentó buscar algún modo de ubicarlos en el espacio (en tres dimensiones), pero le fue imposible. Sin embargo, cuando lo intentó con cuatro lo consiguió, bautizando a su descubrimiento con el nombre de **cuaterniones**.

Según la anécdota, Hamilton estaba paseando un 16 de octubre de 1843 por el Canal Real de Dublín con su esposa cuando, de repente, le llegó la inspiración. Una <<idea feliz>> para describir la estructura de los cuaterniones. Ante el temor de que se le pudiese olvidar, inscribió la providencial identidad en una piedra del puente Broom. Hoy en día no se conserva la misma, pero una placa conmemorativa

Fig. 2 (fuente: Wikipedia, ver bibliografía). Placa conmemorativa del descubrimiento de Hamilton. Se aprecia la identidad $\boldsymbol{i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1}$.

[1] <http://1.bp.blogspot.com/_KpqQ9rqe9aQ/TFI8NgxVpXI/AAAAAAAAGjU/P9NSP4NOdX4/s1600/hamilton.jpg>.

recuerda ese momento (ver figura 2).

Pese a que prácticamente todo el mérito de su descubrimiento se lo llevó *Sir* Hamilton, un doctor francés-sefardí en matemáticas, **Benjamín Olinde Rodrígues**, ya había publicado un trabajo en grupos de transformación en 1840 que indicaba, inequívocamente, a un descubrimiento de los cuaterniones: sólo le faltaba el nombre.

Alejándonos de la controversia, parece obvio que los cuaterniones serían el utensilio perfecto para describir nuestro universo: cuatro dimensiones, asociamos una al tiempo y las otras tres al espacio y ya tenemos el espacio-tiempo en el que nos movemos y vivimos. Sin embargo, un análisis más detallado de los mismos nos mostrará que poseen características que hacen incompatible su aplicación *directa* al universo. Pese a todo, su descubrimiento y ulterior examen han permitido desarrollar números allende los cuaterniones y álgebras nuevas que se utilizan actualmente en mecánica cuántica. Por ejemplo, se pueden "elaborar" álgebras de Lie a partir de grupos cuyos elementos sean los cuaterniones, pero, ¿qué es un álgebra de Lie?

Fig. 3 *(fuente: Wikipedia, ver bibliografía).* Marius Sophus Lie. Nótese que la pronunciación correcta es *li*, no el inglés *lai* o el español *lie*.

Marius Sophus Lie (1842-1899, ver figura 3) fue un matemático noruego cuya principal aportación a la ciencia fue el álgebra que se extrae de la linearización de los grupos continuos de transformación (conocidos como **grupos de Lie**, ver más adelante). Por sus contribuciones, Marius Lie fue nombrado miembro honorario de la Sociedad Matemática de Londres (*London Mathematical Society*) en 1878, miembro extranjero de la *Royal Society of London* en 1895 y, al igual que Hamilton, asociado extranjero de la *National Academy of Sciences*).

Volviendo con su trabajo, la linearización de los grupos de Lie, así como sus generadores infinitesimales son la base de un álgebra conocida como **álgebra de Lie**. Un análisis del álgebra de Lie que provenga de un grupo de Lie $\mathcal{G}$ permite, conociendo las constantes de estructura (ver más adelante), determinar la estructura local de $\mathcal{G}$ en una región abierta N de $\mathcal{G}$. He ahí parte del atractivo de este álgebra, del que se cree que todavía no se han explotado todos los atractivos que puede tener para la Física. Una aplicación de todo esto son las matrices de Pauli, que no son sino una base vectorial del álgebra de Lie formada a partir del grupo especial unitario de simetría $SU(2)$.

Las **matrices de Pauli** deben su nombre al Nobel físico Wolfang Ernst Pauli (1900, Viena-1958, Zúrich), cuya principal aportación científica fue su Principio de Exclusión (además de considerarse entre los padres fundadores de la física cuántica). Estas peculiares matrices son utilizadas como operadores para explicar el spin de partículas subatómicas. Inicialmente, sólo servían para el spin $\frac{1}{2}$, pero generalizándolas pueden usarse para spines superiores. Las matrices de Pauli, además de estar vinculadas con el álgebra de Lie por lo ya dicho, tienen un vínculo con los cuaterniones, pues el grupo $SU(2)$, del que son base, es isomórfico al álgebra real de cuaterniones.

2. Los cuaterniones.

2.1. DEFINICIÓN.

Decimos que q es un **número cuaternión** si es de la forma:

$$q = a + bi + cj + dk \tag{1}$$

$$\text{donde } a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

El **conjunto** que los engloba, $\mathbb{H}$ o $\boldsymbol{H}$, simbolizado así en honor a Hamilton, se define como:

$$\boldsymbol{H} = \mathbb{H} = \{q = a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$$

Si tenemos en cuenta que de $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ se extrae:

$$ij = -ji = k \,; jk = -kj = i \,; ki = -ik = j,$$

también se puede representar como una ampliación de los números complejos:

$$\boldsymbol{H} = \mathbb{H} = \{(a + bi) + (c + di)j : a + bi, c + di \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^2.$$

La **representación vectorial** de cualquier cuaternión se puede hacer considerando a $\{1, i, j, k\}$ como "base" y definiendo cualquier cuaternión como el producto interno de un vector $\vec{x} = (a, b, c, d)$ por el vector de las bases. A veces se puede apartar el elemento a, considerando entonces este otro vector: $\vec{x} = (a, \vec{a}) = (a, b, c, d)$.

La **representación matricial** puede hacerse, al menos, de dos formas distintas. La primera es usando matrices complejas de $2x2$

$$q = \begin{pmatrix} a - di & -b + ci \\ b + ci & a + di \end{pmatrix},$$

donde se puede verificar que

$$|q|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \,.$$

Esta identidad también se verifica para los cuaterniones definidos como en (1).

La otra manera de representación matricial es usando matrices reales de $4x4$:

$$q = \begin{pmatrix} a & -b & d & -c \\ b & a & -c & -d \\ -d & c & a & -b \\ c & d & b & a \end{pmatrix}.$$

También se verifica en este caso que $|q|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Al igual que en los números complejos, en los cuaterniones podemos definir el concepto de **cuaternión conjugado** como:

$$\bar{q} = q^{*} = a - bi - cj - dk$$

Y, también, podemos definir la **norma** de los cuaterniones como:

$$\|q\| = \sqrt{qq^{*}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

2.2. ARITMÉTICA.

Análogamente a la suma de números complejos, definimos la **suma** de dos números cuaterniones

$$q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k \tag{2}$$

$$q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k \tag{3}$$

como:

$$q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k.$$

El **producto** se hace componente a componente y se puede obtener fácilmente que es igual a:

$$q_1 \cdot q_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2)i +$$

$$+(a_1 c_2 - b_1 c_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2)j + (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2)k$$

Recordemos que, también: $q^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Es posible definir la **división** en los cuaterniones, ya que, salvo que $q = 0$, es decir, que $a = b = c = d = 0$, ningún q se puede anular.

También se define la **exponenciación**, de manera muy análoga a la de los números complejos. Se puede demostrar que:

$$e^{q} = e^{a+bi+cj+dk} = e^{a}(\cos\sqrt{b^2 + c^2 + d^2} + \frac{\sin\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}})$$

2.3. ÁLGEBRA.

Los cuaterniones, en general, satisfacen casi todas las propiedades usuales del álgebra común, a excepción de una (bastante importante): la conmutativa del producto de cuaterniones. Para los siguientes apartados, se considerarán los cuaterniones genéricos definidos en (2) y (3), (q_3 se define como q_1 y q_2) dentro de $\mathbb{H}$.

- Propiedades de la **suma**:
  - Ley interna: $\forall\, q_1, q_2 \in \mathbb{H} : (q_1 + q_2) \in \mathbb{H}$.
  - Conmutativa: $q_1 + q_2 = q_2 + q_1$.
  - Asociativa: $q_1 + (q_2 + q_3) = (q_1 + q_2) + q_3$.
  - Elemento neutro: $q_1 + 0 = 0 + q_1 = q_1$.

Concluimos con esto que $(\mathbb{H}, +)$ es un **grupo conmutativo** (o abeliano).

- Propiedades del **producto**:
  - Ley interna: $\forall\, q_1, q_2 \in \mathbb{H} : (q_1 \cdot q_2) \in \mathbb{H}$.
  - Asociativa: $q_1 \cdot (q_2 \cdot q_3) = (q_1 \cdot q_2) \cdot q_3$.
  - Elemento neutro: $q_1 \cdot 1 = 1 \cdot q_1 = q_1$.
  - Elemento inverso: $\forall\, q_1 \neq 0 :\ q_1 \cdot q_1^{-1} = q_1^{-1} \cdot q_1 = 1$.
  - Distributiva del producto respecto de la suma: $q_1 \cdot (q_2 + q_3) = q_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot q_3$.
  - **No** cumple la propiedad conmutativa.

Podemos decir que $(\mathbb{H}, \cdot)$ es un **grupo no conmutativo** (o no abeliano).

En conjunto, decimos que la terna $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ constituye un **anillo no conmutativo** (o no abeliano) **y con elemento neutro**. La prueba más básica de que el producto de cuaterniones no es conmutativo viene directamente de la identidad de Hamilton. Se extrae fácilmente las <<subidentidades>> ya citadas:

$$ij = -ji = k\,;\, jk = -kj = i\,;\, ki = -ik = j$$

Se puede generalizar este anillo a un tipo de cuerpo peculiar: un **cuerpo no conmutativo en la multiplicación**, desde el que saltar a un **espacio vectorial** sobre $\mathbb{R}$ 4-dimensional (las cuatro dimensiones corresponden a la parte real y las tres no reales), considerando como vectores a cualquier cuaternión $\boldsymbol{q} = a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k} = (a, b, c, d)$. Nótese que este espacio vectorial es distinto a los comunes, pues está hecho sobre un cuerpo no conmutativo en lo que respecta al producto.

- Condiciones para **espacio vectorial** de…
  - …los vectores:
    - $\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{q}_2 + \boldsymbol{q}_1$.
    - $\boldsymbol{q}_1 + (\boldsymbol{q}_2 + \boldsymbol{q}_3) = (\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2) + \boldsymbol{q}_3$.

- …el producto por escalares (sean $u, o \in \mathbb{R}$):
  - $(u + o)\boldsymbol{q}_1 = u\boldsymbol{q}_1 + o\boldsymbol{q}_1$.
  - $u(\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2) = u\boldsymbol{q}_1 + u\boldsymbol{q}_2$.
  - $u(o\boldsymbol{q}_1) = (uo)\boldsymbol{q}_1$.
  - $1\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{q}_1$.

Con todo esto, podemos confirmar este “espacio vectorial” peculiar.

Las propiedades de los cuaterniones nos hacen posible definir un **módulo** (**izquierdo** o **derecho**) sobre un anillo cualquiera (en nuestro caso, los el anillo real con las propiedades de suma y producto). Esto es, un grupo abeliano (en nuestro caso $(\mathbb{H}, +)$) tal que se cumplen las últimas propiedades enunciadas como “condiciones para espacio vectorial de el producto por escalares” (**multiplicando** los escalares **bien por la izquierda** o **bien por la derecha**).

Ésta última definición nos permite avanzar hasta nuestra última (¿estamos seguros?) parada: el **álgebra de división asociativa**. Este tipo peculiar de álgebra es un módulo en el que se permite la multiplicación de vectores distributiva y asociativamente (pero no es necesario que sea de forma conmutativa), además de su división (salvo que el vector por el que se divida sea nulo).

Retomemos ahora la idea que se soltó en la introducción: los cuaterniones no pueden ser aplicados *directamente* al universo. ¿Por qué? Podríamos pensar en el espacio-tiempo, pero se da la circunstancia de que la identidad $qq^* = q^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ no es la que debería de ser según Einstein y su Teoría de la Relatividad (sin entrar en detalles). Hay otro motivo más general por lo que los cuaterniones, tal como han sido descritos, sirven de poco, y es que no existe una definición de analiticidad u holomorficidad para funciones como existe para los números complejos, lo cual reduce el potencial de $\mathbb{H}$ considerablemente.

Bueno, entonces, ¿son inservibles? Por supuesto que no. Dos meses después de haber recibido una carta de Hamilton explicándole su descubrimiento de los cuaterniones en 1843, **John Graves**, jurista y matemático irlandés, anunció el descubrimiento de un tipo de cuaternión <<doble>>: el **octonión**. Los octoniones fueron redescubiertos en 1845 por Arthur Cayley, y a veces son llamados <<números de Cayley>>. Estos números hipercomplejos también forman un álgebra de división, aunque **no es asociativa**. Esta propiedad se pierde al pasar de los cuaterniones a los octoniones.

Cabe preguntarse, ahora que estamos ampliando, más si cabe, los números complejos, si podemos hacerlo indefinidamente. Por hacerlo, se puede: <<definir por definir>>. Sin embargo, lo que caracteriza a un tipo de números no es sino sus propiedades: conmutativa, asociativa, etc.. Un resultado algebraico de Hurwitz de 1898 demostró que la identidad cuaterniónica (y octoniónica) $qq^* = q^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, que está ligada a la facultad de división, no es válida para dimensiones distintas de $1, 2, 4, 8$. Como consecuencia, **no se puede construir álgebras de división si no es sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$** (el último representa a los octoniones).

Bueno, pero si seguimos insistiendo, aún podemos hacernos una pregunta más: ¿no se podrían construir álgebras en dimensiones superiores a las citadas… que no fueran de división? La respuesta a esta pregunta es sí, y no son álgebras para nada desdeñables, ¡al contrario! William Kingdon Clifford (1845-1879) fue el artífice de un álgebra que lleva su nombre: el **álgebra de Clifford**, que tiene importantes aplicaciones en la física moderna. Éste álgebra brota, por un lado, de los cuaterniones hamiltonianos y, por otro, de los álgebras de Hermann Grassmann, matemático y lingüista alemán. Comentaremos estas álgebras levemente en la siguiente sección de aplicaciones.

2.4. APLICACIONES DE LOS CUATERNIONES.

Dos ejemplos, relacionados además entre sí, de los números cuaterniones son las **matrices de Pauli** y (no exactamente es una aplicación o ejemplo, pero se utilizan en ellos) **el álgebra de Lie**. Ambos serán tratados en apartados distintos, pues el trabajo versa más concretamente sobre ellos.

Otras aplicaciones concretas de los cuaterniones son las siguientes.

- Los cuaterniones como **rotaciones y orientaciones en el espacio**.

Los cuaterniones, cuyo número general se puede expresar como

$$q = a + bi + cj + dk,$$

pueden emplearse para representar rotaciones en el espacio tridimensional. Recordemos que éstos poseen cuatro dimensiones, por lo que tendremos que anular la parte exclusivamente real: $a = 0$. Se puede demostrar entonces, que, teniendo un vector de posición $\boldsymbol{q} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\mathbf{k}$, un vector unitario del mismo $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ y un ángulo cualquiera θ, la rotación alrededor del eje $(0, \boldsymbol{u})$ de un ángulo θ que hace $\boldsymbol{q} \to \boldsymbol{q}'$ ($\boldsymbol{q}' = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k}$) es:

$\boldsymbol{q}' = \boldsymbol{h}\boldsymbol{q}\boldsymbol{h}^*$, donde $\boldsymbol{h} = \cos\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{u}\sin\frac{\theta}{2}$ y $\boldsymbol{h}^*$ designa al conjugado de $\boldsymbol{h}$.

Para un eje cualquiera, hacemos la traslación $\boldsymbol{q_2} = \boldsymbol{q_1} - \boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{q}'_2 = \boldsymbol{q}'_1 + \boldsymbol{c}$, tal que:

$$\boldsymbol{q}' = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{c})\boldsymbol{h}^* + \boldsymbol{c}$$

Esta ecuación es la equivalente a $z' = (z - c)e^{i\theta} + c$ en el plano complejo (nótese que son rotaciones y traslaciones).

El uso de los cuaterniones de este modo aparece en campos como la computación, la navegación, la robótica, la mecánica orbital de satélites y los gráficos por ordenador. Por ejemplo, los cuaterniones representan en el último caso la orientación de un objeto en el espacio tridimensional.

- **Álgebras de Clifford**.

Una peculiaridad de la geometría de cuaterniones es que un giro de un objeto tridimensional respecto a un eje dos veces un valor de π, que equivaldría, recordando el plano complejo, a <<multiplicar ese objeto>> por i^2, manteniendo el resto de dimensiones <<inalteradas>> nos devuelve el opuesto del objeto, pues $i^2 = -1$. Esta curiosidad es lo que se denomina un espinor.

Un **espinor** u objeto espinorial se define, *llanamente*, como un objeto que se transforma en su negativo u opuesto cuando sufre una rotación completa de 2π.

Ésta peculiaridad de los espinores se puede generalizar a dimensiones mayores, aunque debemos tener en cuenta que los <<ejes>> no son de dimensión uno a partir de 3 dimensiones. Para generalizar, se consideran elementos más simples: reflexiones o inversiones de ejes. Estas reflexiones básicas se denominan por $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots \gamma_n$, tal que γ_i invierte el i-ésimo eje, conservando el resto (n significa el número de dimensiones con el que estamos trabajando). Para los objetos espinoriales, como hemos visto, se ha de verificar además que:

$$\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = \cdots = \gamma_n^2 = -1$$

Se puede demostrar que las rotaciones de π radianes vienen dadas por las identidades secundarias:

$$\gamma_p \gamma_q = -\gamma_q \gamma_p, \forall\, p \neq q.$$

Y también se obtiene que la dimensión total del **álgebra de Clifford** es 2^n, siendo el elemento general una combinación de todos esos elementos "base". También se obtiene que son un **anillo con identidad, pero sin división**.

Este álgebra tiene aplicaciones para explicar el estado de un electrón, pues éste es una cantidad espinorial. La definición formal de objeto espinorial es muy confusa y se suele utilizar una aproximación más matemática que física, involucrando aquí a las álgebras de Clifford.

- **Álgebras de Grassmann.**

Explicada el álgebra de Clifford, ahora nos falta el **álgebra de Grassmann** (ver figura 4). Ésta no es sino una *relajación* o ampliación de las de Clifford: la diferencia entre ambas radica en que el álgebra de Grassmann no “requiere” de la definición de perpendicularidad. Dicho de otro modo más formal, y sin entrar en detalles, el álgebra de Clifford requiere que haya una **métrica**. El álgebra de Grassmann, no. Además, se verifica que, para los generadores básicos $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots \eta_n$ (equivalentes a los gamma del álgebra de Clifford):

$\eta_1^2 = \eta_2^2 = \eta_3^2 = \cdots = \eta_n^2 = 0$

Y, también:

Fig. 4 ***(fuente: Wikipedia, ver bibliografía).*** Herman Grassmann (o Graßmann).

$$\eta_p \eta_q = -\eta_q \eta_p.$$

Las álgebras de Grassmann son muy útiles para describir elementos geométricos básicos de dimensión finita arbitraria.

3. Grupos y álgebra de Lie.

3.1. Grupos de Lie.

Antes de que podamos entrar en conceptos como álgebra de Lie, debemos de saber qué es un grupo de Lie. Primero, recordemos que un conjunto de elementos $G = \{a, b, c, \dots\}$ junto con una operación binaria aleatoria · , tal que:

$$\begin{array}{ccc} \cdot : G\, x\, G & \longrightarrow & G \\ (a, b) & \longmapsto & c = a \cdot b \end{array}$$

Y que cumple las propiedades de ley interna, asociatividad, elemento neutro y elemento inverso es lo que llamamos un **grupo**. Ahora, podemos concretar más y definir un **grupo de Lie**. Un grupo de Lie es una variedad diferenciable en el que las operaciones de grupo son funciones diferenciables o analíticas (según corresponda).

Los propios reales, con la adición, son un grupo de Lie mismamente, aunque tienen interés particular otros distintos grupos, como por ejemplo, los grupos derivados del **grupo general lineal** $GL(n, -)$ (también se puede ver escrito como $Gl(n, -)$), donde en vez de $-$ podemos poner $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$. El grupo general lineal es aquel formado por matrices $n\, x\, n$ invertibles hechas de elementos de $-$.

Una característica importante en estos contextos, y sobre todo para las aplicaciones físicas de los grupos citados es la **métrica**. Una función métrica f de un espacio vectorial V se define como un *mapeado* de un par de vectores de ese espacio en un número. Dicho número pertenece al campo (o cuerpo) F que está asociado al propio espacio vectorial (según la definición del mismo). Es decir:

$$(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}) = f; \qquad \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \in V, f \in F.$$

Este mapeado debe cumplir esta condición:

$$(\boldsymbol{v_1}, a\boldsymbol{v_2} + b\boldsymbol{v_3}) = a(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}) + b(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_3}) \tag{4}$$

Y una de las siguientes:

$$(a\boldsymbol{v_1} + b\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}) = (\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_3})a + (\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3})b \tag{5}$$

$$(a\boldsymbol{v_1} + b\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}) = (\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_3})a^* + (\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3})b^* \tag{6}$$

Si la métrica cumple (4) y (5) se dice que es una **métrica bilinear.** Si, por el contrario, cumple (4) y (6), se dice que es una **métrica sesquilinear**. También se pueden clasificar por simétricas o antisimétricas: **simétricas** son aquellas tal que $f_{ij} = f_{ji}$ si

$(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}) = (\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_1})$ y **antisimétricas** las que verifican que $f_{ij} = -f_{ji}$ y lo correspondiente. Incluso a veces se exige que la métrica sea definida positiva.

Existe un teorema que afirma que el subconjunto de transformaciones de una base de un espacio vectorial V_n que preservan la estructura matemática de las funciones métricas forman un subgrupo de $GL(n, -)$. Este resultado nos permite clasificar los subgrupos recién citados en:

- Los grupos que preservan métricas **bilineares** y **simétricas** se llaman **ortogonales**. Se representan como $O(n, -)$ (donde, como antes, $-$ es sustituible por $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$).

- Los grupos que preservan métricas **bilineares** y **antisimétricas** se llaman **simplécticos**. Se representan por $Sp(n, -)$. Aquí el teorema no es válido para $\mathbb{H}$, pues las matrices de cuaterniones que pertenecen a $GL(n, -)$. Sin embargo, sí es válido para los cuaterniones expresados como matrices $2\ x\ 2$ de números complejos.

- Los grupos que preservan métricas **sesquilineares** y **simétricas** se llaman **unitarios**. Se representan por $U(n, -)$.

De la clasificación anterior se pueden extraer distintas conclusiones, a modo de corolarios. Nosotros nos quedaremos con una **aplicación de los cuaterniones** aquí: son isomórficos (sin entrar en formalismos, una relación es isomórfica cuando los dos términos de la misma tienen la misma *estructura*) a varios subgrupos citados. Podemos establecer las siguientes identificaciones:

$$\begin{aligned} Sl(n,q) &= SU^*(2n) \\ U(n,q) &= USp(2n) \\ Sp(n,q) &= USp(2n) \\ O(n,q) &= SO^*(2n) \end{aligned}$$

No hemos descrito algunos subgrupos de las identidades, y sólo definiremos uno. El subgrupo $SU(n, \mathbb{C})$, también llamado **grupo especial unitario**, proviene de la intersección de los grupos que, además de preservar la métrica, preservan los volúmenes y son unitarios (el resto de subgrupos no definidos también provienen de intersecciones). El $2n$ viene de que hacemos la aproximación de las matrices cuaterniónicas por unas matrices $2\ x\ 2$ complejas.

El grupo especial unitario $SU(n, \mathbb{C})$ nos dará de qué hablar en el siguiente apartado, donde desarrollaremos el álgebra de Lie, además de a la hora de tocar las matrices de Pauli.

3.2. ÁLGEBRA DE LIE.

Tras haber hecho esta introducción estamos en condiciones de definir un álgebra de Lie.

Un álgebra de Lie es un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ en el que se define una operación binaria interna llamada **corchete de Lie**:

$$\begin{array}{lcl} [\,,]: \mathfrak{g}\ x\ \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ (x,y) & \longmapsto & [x,y] = xy - yx \end{array}$$

Que verifica la propiedad antisimétrica:

$$[x,y] = -[y,x]$$

Y la llamada identidad de Jacobi:

$$\big[x,[y,z]\big] + \big[y,[z,x]\big] + \big[z,[x,y]\big] = 0$$

3.3. APLICACIONES DEL ÁLGEBRA DE LIE.

Vale, ¿y de qué nos sirve esto? Pues una de las características ya adelantadas en la introducción es que las álgebras de Lie permiten, conociendo las constantes de estructura, **determinar la estructura local** de $\mathcal{G}$ (grupo sobre el que *montamos* el álgebra) en una región abierta N de $\mathcal{G}$. Las constantes de estructura son aquellas que verifican que:

$$[\boldsymbol{E_a}, \boldsymbol{E_b}] = \gamma_{ab}^{\chi} \boldsymbol{E_\chi},$$

donde $\boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{E_2}, \dots, \boldsymbol{E_n}$ es la base del grupo $\mathcal{G}$. Se forman los n^3 conmutadores que son esos corchetes de Lie con los elementos de la base, y, a la vez, se compone cada elemento de la base de esos n^3conmutadores. En conclusión, tenemos n^3 constantes de estructura.

Partiendo de un elemento $\boldsymbol{A}$ del grupo de Lie, se puede demostrar que es factible construir un grupo finito a través de la exponenciación $e^{\boldsymbol{A}}$. Ese grupo finito se puede representar como una "zona" local de $\boldsymbol{A}$ en la variedad que es el grupo $\mathcal{G}$, permitiendo su análisis.

Sucede a menudo que las matrices del álgebra de Lie resultan más **sencillas** y **fáciles de manejar** que las del grupo de Lie, por lo que la transformación de la misma es una poderosa herramienta para muchos físicos, sobre todo cuánticos. Además, también suele ocurrir que los elementos del álgebra pueden tener **significados** directos **como magnitudes físicas** (por ejemplo, un momento angular). El estudio en el grupo finito puede decirnos cosas de lo que ocurre con esa magnitud.

Otro uso, que hemos ido avanzando a lo largo del documento, es el de relacionar $\mathbb{H}$, los cuaterniones, con el subgrupo de Lie $SU(n,\mathbb{H})$ y del que extraeremos las matrices de Pauli.

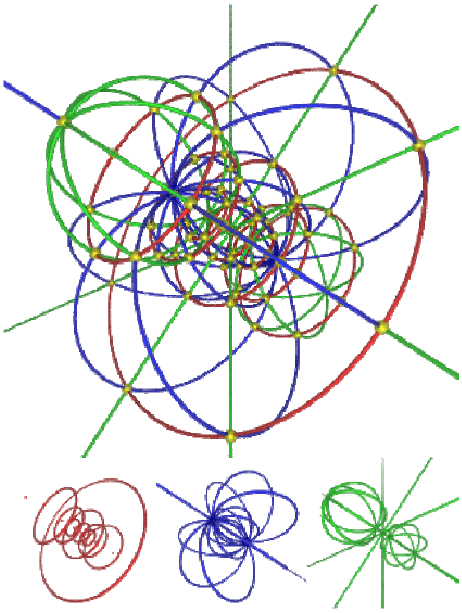

Fig. 5 *(fuente: Wikipedia, ver bibliografía).* Proyección estereográfica de la 3-esfera centrada en el origen. Al pertenecer a $\mathbb{R}^4$, no existe una representación en 3 dimensiones, aunque su nombre pueda conducir a pensarlo.

Para no confundir, no pondremos la demostración (pero existe) de que los cuaterniones[2] de módulo unidad son un isomorfismo de las matrices de orden $2\,x\,2$ complejas que representan a $SU(2,\mathbb{C})$.

Un análisis de la geometría cuaterniónica con el módulo de éstos la unidad, desvela que existen en una 3-esfera (ver figura 5). Se puede comprobar que todas las esferas S^n son **simplemente conexas** si $n > 1$. Esto quiere decir que una línea cerrada (o contorno) presente en dicha variedad se puede cerrar o colapsar siempre a un punto. Cuando $n = 1$, se da el caso del toro T^1, que es **múltiplemente conexo** (que es lo contrario). Como estos cuaterniones son isomórficos a $SU(2,\mathbb{C})$, $SU(2,\mathbb{C})$ es también simplemente conexo.

Si nos pasamos a las álgebras de Lie de los cuaterniones y a las álgebras de Lie de $SU(2,\mathbb{C})$ (que es $\mathfrak{su}(2)$) vemos que siguen siendo isomórficos, y se puede demostrar que también son isomórficas al álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$. Ésta proviene del grupo de Lie $SO(3)$, que es ciertamente *peculiar*. A este grupo (y a su isomórfico, $O(3)$) físicamente se les puede asociar el significado de las rotaciones infinitesimales de dimensión 3. Y no sólo eso, pues se puede vincular también con las componentes del momento angular en mecánica cuántica, lo cual tiene que ver con las **matrices de Pauli**, que se considerarán en el apartado siguiente.

[2] Más formalmente, el grupo $Sl(1,\mathbb{H})$.

4. Matrices de Pauli.

Cuando los físicos cuánticos se vieron ante la tarea de explicar el giro de un electrón, llegaron a la conclusión de que, como hemos visto, las componentes del momento angular cuántico remiten a un álgebra de Lie. Concretamente, al álgebra de Lie de $\mathfrak{so}(3)$ (que equivale a la de $\mathfrak{o}(3)$). Como $SO(3)$ no es abeliano, no todos los elementos de su álgebra de Lie conmutan, lo que origina unas determinadas reglas de conmutación para este momento angular. Estas reglas, sin entrar en detalles, deben atenerse a unos determinados requisitos que exige moverse en el mundo cuántico (verificarse en un espacio de Hilbert $\boldsymbol{H}$, es decir, en un espacio que sea completo respecto a la norma de cualquier vector definida a partir de un producto escalar).

Teniendo en cuenta que $\mathfrak{so}(3)$ es isomórfico a $\mathfrak{su}(2)$, una base de $\mathfrak{su}(2)$ también lo será para $\mathfrak{so}(3)$. La base vectorial de $\mathfrak{su}(2)$ son las siguientes matrices:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Que son más conocidas como **matrices de Pauli**, σ_i.

Aplicándolas a las componentes del momento angular, se puede obtener que éstas son:

$$\boldsymbol{L_1} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{L_2} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{L_3} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Además, tras esos "requisitos" de los que hablábamos antes, se halla un espinor[3] $\boldsymbol{\psi_A} = \{\boldsymbol{\psi_0(x)}, \boldsymbol{\psi_1(x)}\}$, que puede tomar dos valores: 1 o 0, sí o no, etc..

A fin de simplificar las cosas, se suele considerar que $\hbar = 1$, lo que facilita la visión del siguiente razonamiento.

Retomando la explicación del espín (o del momento angular intrínseco), la función $\boldsymbol{\psi_A}$ sirve para describir una partícula de spin $\frac{1}{2}$. Se puede generalizar para espines superiores, teniendo en cuenta que el espín siempre es un múltiplo entero no negativo de $\frac{1}{2}$ (que proviene de $j = \frac{1}{2}n, n \geq 0$). Entonces tendríamos un *tensor-espín* $\boldsymbol{\psi_{AB\ldots F}}$, simétrico en sus n índices. Nótese que este objeto sólo es espinorial de verdad cuando n es impar[3].

[3] Ver página 10.

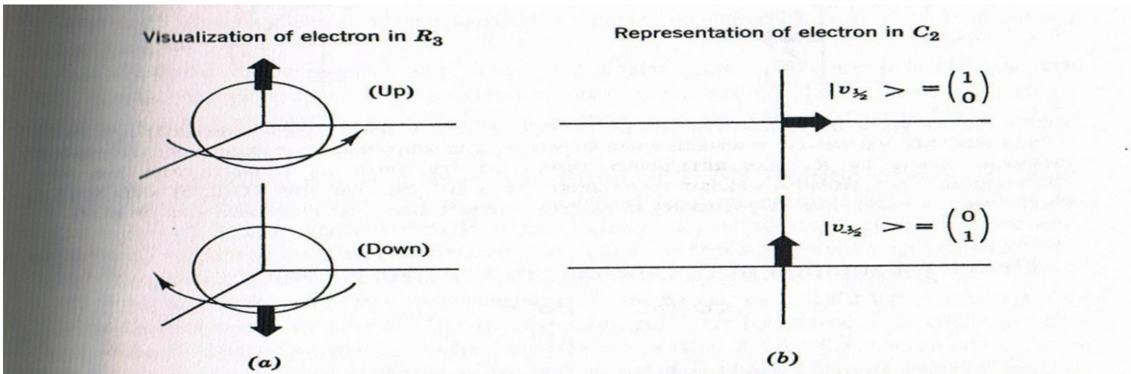

FIG. 5.10 WHEN THE ELECTRON IS IN A "SPIN UP" STATE, WE VISUALIZE IT AS IT APPEARS IN (*a*) (up) AND REPRESENT IT IN A COMPLEX TWO-DIMENSIONAL SPACE C_2, AS SHOWN IN (*b*). IN THE "SPIN DOWN" STATE, THE ELECTRON IS IMAGINED AS IN (*a*) (DOWN) IN A REAL THREE-DIMENSIONAL SPACE. SINCE THE SPIN UP AND DOWN STATES ARE ORTHOGONAL, IT IS REPRESENTED AS IN (*b*).

Fig. 6 ***(fuente: R. Gilmore, <<Lie Groups,…>>, ver bibliografía).*** Representación del electrón en $\mathbb{R}^3$ y su correspondiente en $\mathbb{C}^2$, con la simplificación que se observa.

La ecuación del espín general $j = \frac{1}{2}n, n \geq 0$ proviene del llamado operador de Casimir para $SO(3)$, que no es sino:

$$\boldsymbol{J}^2 = \boldsymbol{L}_1^2 + \boldsymbol{L}_2^2 + \boldsymbol{L}_3^2$$

De donde $j(j+1)$ es autovalor. A la hora de definir exactamente los estados cuánticos de giro, se toma $\boldsymbol{J}$ y, por lo normal y arbitrariamente, $\boldsymbol{L}_3$; siendo $j(j+1)$ el autovalor de $\boldsymbol{J}$ y m el de $\boldsymbol{L}_3$. Tomando $j \geq 0$ y $-j \leq m \leq j$, se puede demostrar que los $2j + 1 = n + 1$ distintos valores de m corresponden a las componentes de $\boldsymbol{\psi}_{AB\ldots F}$, quedando éste definido.

5. Bibliografía.

- R. Penrose (4ª ed., 2007). *"El camino a la realidad"* (*"The Road to Reality"*). Editorial DEBATE, ISBN: 978-84-8306-681-2.

- R. Gilmore (2002). *"Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications"*. Dover Publications, Inc., ISBN: 0-486-44529-1.

- Indefinidos autores (08,09-12-2012). *"Wikipedia, la enciclopedia libre"* (*"Wikipedia, the Free Encyclopedia"*), <http://es.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Portada> (<http://www.wikipedia.org/>).

- M. A. Rodríguez (2007, 09-12-2012). *"Álgebras de Lie"*, < http://jacobi.fis.ucm.es/marodriguez/notas_clase/Lie.pdf>. Departamento de Física Teórica II, Universidad Complutense de Madrid.