CHWILOWA STOPA PROCENTOWA

(RePEc:sla:eakjkl:104PL 11-I-1998)

Andrzej Karpio
andy@alpha.uwb.edu.pl

Edward W. Piotrowski
ep@alpha.uwb.edu.pl

Wstęp

Wydaje się, że podstawowe mierniki zmiany kapitału ciągle pozostają obarczone istotnym brakiem pojęciowej precyzji, co powinno skutkować rewizją obowiązujących sformułowań. Niniejsza praca wprowadza definicję chwilowej stopy procentowej, która zdaniem autorów dużo lepiej, niż dotychczas znane wielkości, opisuje zależność kapitału od czasu. Nie ma znaczenia, czy zmiana ta wynika z inflacji, z inwestycji, czy też spowodowana jest jakąkolwiek inną formą działalności ekonomicznej. Autorzy na przykładach pokazują, jak z wprowadzonego pojęcia, wynikają dobrze znane z praktyki i literatury niektóre sposoby oprocentowania kapitałów. Warto jednak zdać sobie sprawę z faktu, że zastosowania chwilowej stopy procentowej są dużo szersze. W szczególności może ona służyć do opisu działalności kredytowej banku, wyceny papierów wartościowych, rachunku rent, różnych problemów matematyki ubezpieczeniowej. Zadaniem tej pracy jest przede wszystkim zdefiniowanie tytułowej wielkości i krótkie zilustrowanie jak ona działa w zastosowaniach. Udało się niżej pokazać, że problem kapitalizacji z góry i z dołu może być traktowany jednolicie i równoprawnie, bez uciekania się do, w opinii autorów, nieprzekonywujących zabiegów matematycznych towarzyszących definiowaniu kapitalizacji z góry. Pozostaje nam wyrazić nadzieję, że zaprezentowane pojęcia, zarówno chwilowej stopy procentowej, jak i innych wielkości wprowadzonych w tekście, spotkają się z zainteresowaniem, co niewątpliwie będzie impulsem do dalszych badań nad ich znaczeniem i zastosowaniami.

1. Chwilowa stopa procentowa

W celu opisania zmiany wartości pieniądza w czasie wynikającej z poczynionych inwestycji rozważmy następujący model. Niech t oznacza ustaloną chwilę czasu, $b(t)$ niech będzie stopą procentową uzyskiwaną w jednostce czasu liczonej od chwili początkowej t, $k(t)$ oznaczać będzie wartość inwestycji realizowanej według stopy procentowej $b(t)$. Zgodnie z powszechnie przyjętą definicją stopy zwrotu z inwestycji, $b(t)$ spełnia równanie:

$$b(t) = \frac{\Delta k(t)}{\Delta t \cdot k(t)}$$

gdzie $\Delta k(t) = k(t+\Delta t) - k(t)$ jest przyrostem kapitału od chwili t do chwili $t+\Delta t$ lub dla czasów przeszłych $\Delta k(t) = k(t) - k(t-\Delta t)$ (do tej niejednoznaczności jeszcze powrócimy). Bez względu na to, czy rozważamy pierwszy, czy drugi przyrost, jako definicję chwilowej stopy procentowej przyjmijmy granicę powyższego wyrażenia przy $\Delta t \to 0$ (przy założeniu, że granica istnieje). Wynik nie zależy od dokonanego wyboru i prowadzi do równania różniczkowego:

$$\frac{dk(t)}{dt} = b(t)k(t)$$

Jeżeli znana jest chwilowa stopa procentowa i początkowa wartość kapitału k_0 w chwili t_0, to rozwiązaniem powyższego równania jest chwilowa wartość kapitału:

$$k(t) = k_0 e^{\int_{t_0}^{t} b(\tau)d\tau}$$

Otrzymane równanie dopuszcza uogólnienia np. do postaci niejednorodnej:

$$\frac{dk(t)}{dt} = b(t)k(t) - F(t)$$

Dodatkowa funkcja $F(t)$ może opisywać czynniki zmniejszające osiągany zwrot z kapitału, na przykład poprzez opodatkowanie zysków kapitałowych.

Warto w tym miejscu zauważyć, że otrzymane jednorodne równanie różniczkowe na kapitał $k(t)$, przy zadanej wartości początkowej kapitału $k_0 = k(t_0)$, jest równoważne równaniu całkowemu:

$$k(t) = k_0 + \int_{t_0}^{t} b(\tau)k(\tau)d\tau$$

Równanie to wyraża chwilową wartość kapitału *k(t)* jako sumę jego początkowej wartości i zysku, czyli przyrostu kapitału osiąganego w chwilach wcześniejszych $t_0 < \tau < t$. Zysk, wyrażający się całką: $k(t) - k_0 = \int_{t_0}^{t} b(\tau)k(\tau)d\tau$, zdeterminowany jest chwilową stopą procentową *b(t)*, która go kształtuje.

W tym miejscu wprowadzimy dwie definicje użyteczne w dalszych rozważaniach.

1. wyrażenie $U(t_0, t) = e^{\int_{t_0}^{t} b(\tau)d\tau}$ nazywać będziemy **czynnikiem zmiany kapitału** w przedziale czasowym $<t_0, t>$.
2. w oparciu o chwilową stopę procentową zdefiniujemy **przedziałową stopę zwrotu (przedziałową stopę procentową)** jako wielkość: $r_{t_0, t} = \int_{t_0}^{t} b(\tau)d\tau$.

Z samej definicji oraz przyjętej koncepcji wynika, że stopa zwrotu z poczynionych inwestycji jest nierozerwalnie związana ze skończonym odcinkiem czasu. W ustalonej chwili można jedynie mówić o chwilowej stopie zwrotu, a to co potocznie rozumie się przez stopę zwrotu, u nas nazywaną stopą przedziałową, jest efektem kumulacji chwilowych stóp procentowych. Osiągnięcie korzyści lub strat z jakiejkolwiek inwestycji wymaga skończonego, chociaż niekiedy bardzo krótkiego, odcinka czasu. Fakt ten znajduje swoje odzwierciedlenie w przyjętej definicji przedziałowej stopy zwrotu (stopy procentowej). W zależności od kontekstu będziemy w dalszej części używać zamiennie terminów przedziałowa stopa procentowa i przedziałowa stopa zwrotu. Warto w tym miejscu zwrócić uwagę na to, że chwilowa stopa procentowa *b(t)* zależy od wyboru jednostki czasu (jej wymiarem jest 1/jednostka czasu), jest bowiem ważne, czy mówimy o stopie procentowej w skali miesiąca, roku czy kilku lat. Natomiast przedziałowa stopa procentowa już od jednostki czasu nie zależy (jest wielkością bezwymiarową), na jej wartość wpływ ma jedynie długość trwania inwestycji.

Czynnik zmiany kapitału ma następujące własności wynikające wprost z jego definicji:

a) $U(t_0,t_1)\cdot U(t_1,t_2)=U(t_0,t_2)$

b) $U(t_1,t_2)=\dfrac{k(t_2)}{k(t_1)}$

Druga własność może być traktowana jako definicja czynnika zmiany kapitału uzasadniając jego nazwę. Interpretujemy go jako czynnik, o jaki wzrasta kapitał k od chwili t_1 do chwili t_2. Własność multiplikatywności a) jest w tym kontekście oczywista. Co więcej, własność ta pozwala uwzględniać pośrednie wartości jakie przyjmował kapitał; w punkcie a) chwila pośrednia jest zupełnie dowolna i wyrażenie to w prosty sposób uogólnia się na dowolny ciąg chwil pośrednich pomiędzy t_0 i t_2.

Analogiczne własności przedziałowej stopy zwrotu są następujące:

a) $r_{t_0,t_1}+r_{t_1,t_2}=r_{t_0,t_2}$

b) $r_{t_1,t_2}=ln\dfrac{k(t_2)}{k(t_1)}$

Przedziałowa stopa zwrotu ma własność addytywności, co z jednej strony jest konsekwencją definicji, a z drugiej nadaje głęboki sens ekonomiczny temu pojęciu. Żaden inny parametr tego typu jak stopa procentowa z góry lub dołu itp. własności tej nie posiada. Stopa zwrotu ma bowiem wyrażać względny (w stosunku do kapitału początkowego) przyrost zysku. Dla kolejnych przedziałów czasowych wartość końcowa kapitału staje się wartością początkową przedziału następnego. W rezultacie zysk sumaryczny powinien być sumą zysków pośrednich. Własność tą ma zdefiniowana przez nas miara zysku czyli przedziałowa stopa procentowa. Stopa zwrotu z inwestycji liczona w tradycyjny sposób: $\dfrac{\Delta k}{k}=\dfrac{k(t_2)-k(t_0)}{k(t_0)}$ w żaden sposób nie uwzględnia tego, że w chwili pośredniej t_1 wartość kapitału była równa $k(t_1)$. Co więcej, własność addytywności jest warunkiem koniecznym, zapewniającym możliwość prawidłowego dodawania stóp zwrotu generowanych przez niezależne źródła zmiany kwoty kapitału.

Pomiar zmian kapitału przedziałową stopą procentową, zamiast standardowym procentem, ma sporo zalet, i tak między innymi stopa ta jest miarą nieograniczoną, mogącą przybierać dowolne wartości ze zbioru liczb rzeczywistych. Własność ta ustrzega choćby przed głoszeniem poglądów w rodzaju: „warto inwestować, bowiem można zyskać dowolnie dużo, a stracić jedynie 100%”.

Związek pomiędzy przedziałową stopą zwrotu, a stopą liczoną tradycyjnie wynika z rozwinięcia w szereg słusznego dla małych wartości $\frac{\Delta k}{k}$:

$$r_{t_0,t_2} = ln(1+\frac{\Delta k}{k}) \approx \frac{\Delta k}{k}$$

Związek pomiędzy czynnikiem zmiany kapitału i przedziałową stopą zwrotu jest następujący:

$$r_{t_1,t_2} = lnU(t_1,t_2)$$

Pozwala on obliczyć jedną z wielkości przy znajomości drugiej.

Wprowadzone pojęcia, użyteczność i ogólny charakter proponowanego modelu ilustrują poniższe przykłady.

Przykład 1 - kapitalizacja złożona z dołu.

Niech chwilowa stopa procentowa przyjmuje wartość stałą $b(t) = r = const$, jest ona wówczas równa przedziałowej stopie zwrotu obliczanej w dowolnie wybranej jednostce czasu np. jednego miesiąca. Korzystając z przyjętej definicji przedziałowej stopy zwrotu, w wybranej jednostce czasu zachodzi związek:

$$r_{t,t+1} = \int_{t}^{t+1} r d\tau = r$$

Jeżeli czas inwestycji jest równy n pełnych miesięcy oraz ułamkową część α ($0 \leq \alpha \leq 1$) miesiąca $n+1$ to wartość kapitału k_0 po okresie inwestycji osiągnie następującą wartość (przyjmujemy, że $t_0 = 0$):

$$k(n+\alpha) = k_0 e^{\int_0^{n+\alpha} r dt} = k_0 e^{r(n+\alpha)}$$

Rozwijając otrzymane wyrażenie w szereg przy realistycznym założeniu, że r jest dużo mniejsze od jedności i pozostawiając jedynie wyrazy liniowe względem stopy procentowej r, uzyskujemy:

$$k(n+\alpha) \approx k_0(1+r)^n(1+\alpha r)$$

Jest to powszechnie wykorzystywany wzór na wartość zainwestowanego kapitału k_0 po n pełnych okresach odsetkowych i okresie ułamkowym α przy założeniu, że kapitalizacja odsetek jest z dołu, jest złożona (odsetki są reinwestowane) i okres kapitalizacji odsetek pokrywa się z okresem stopy procentowej. Warto w tym miejscu rozwiać pojawiającą się wątpliwość. Łatwo w powyższej procedurze rachunkowej dostrzec pewną niejednoznaczność. Można bowiem zapytać, czy nie należało zastosować rozwinięcia np. w postaci: $(e^r)^{n+\alpha} \approx (1+r)^{n+\alpha} = (1+r)^n(1+r)^\alpha$? Takie przybliżenie jest niezgodne z definicją stopy procentowej r, ostatni czynnik mówi bowiem o tym, że r jest stopą procentową w okresie ułamkowym α, a przedostatni, że w okresie równym przyjętej jednostce czasu, różnej od α, sprzeczność ta dowodzi niepoprawności takiego przybliżenia. Podobnie inna możliwość, a mianowicie: $e^{r(n+\alpha)} \approx 1+(n+\alpha)r$ jest nie do przyjęcia, gdyż $(n+\alpha)r$ na ogół nie jest liczbą małą, a więc błąd może być kolosalny, stawiający pod znakiem zapytania sens takiego przybliżenia. Wydaje się, że poprzednio zastosowany algorytm przybliżenia jest jedynym zgodnym z przyjętą definicją stopy procentowej i dającym rozsądną dokładność.

Dodatkowe uproszczenie, polegające na tym, że czas inwestycji kończy się na n pełnych okresach, prowadzi do powszechnie wykorzystywanego wzoru:

$$k(n) = k_0(1+r)^n$$

Przykład 2 - kapitalizacja prosta z dołu.

Rozważmy sytuację, w której założenia dotyczące stopy procentowej są takie same jak poprzednio, ale nie ma kapitalizacji odsetek, czyli mamy do czynienia z kapitalizacją prostą. Różnica będzie polegała na tym, że w każdym okresie odsetkowym (nadal zgodnym z okresem stopy procentowej) wyjściowa kwota inwestycji nie będzie powiększana o odsetki, czyli będzie stała i równa k_0. W szczególności wartość odsetek w dowolnym *i*-tym okresie odsetkowym jest równa:

$$k_0 e^{\int_i^{i+1} r dt} - k_0 = k_0 e^r - k_0$$

i jest jednakowa dla każdego innego okresu odsetkowego. Po $n + \alpha$ okresach całkowita wartość uzyskana z zainwestowanego kapitału wyniesie:

$$k(n+\alpha) = (k_0 e^r - k_0) + (k_0 e^r - k_0) + \cdots + (k_0 e^r - k_0) + k_0 e^{r\alpha} = k_0 n e^r - n k_0 + k_0 e^{r\alpha}$$

Składnik $k_0 e^{r\alpha}$ uwzględnia zainwestowaną kwotę k_0 oraz odsetki za niepełny okres odsetkowy. Podobnie jak poprzednio rozwijając eksponens w szereg i urywając go na wyrazach liniowych otrzymujemy:

$$k(n+\alpha) = k_0 [1 + (n+\alpha) r]$$

co jest zgodne z standardowym wyrażeniem na kwotę kapitału otrzymaną w wyniku kapitalizacji prostej z dołu i okresie odsetkowym zgodnym z okresem stopy procentowej.

Przykład 3 - aproksymacja równaniem różnicowym.

Realna sytuacja zmusza nas często do wyznaczania wartości osiąganego kapitału w dyskretnych chwilach czasu. Z matematycznego punktu widzenia polega to na zastąpieniu równania różniczkowego równaniem różnicowym. Zapiszmy je w postaci:

$$\Delta k(t) = b(t) k(t) \Delta t$$

Dla uproszczenia przyjmujemy, że cały okres inwestycji podzielony jest na N okresów o jednakowej długości równej: $\Delta t = \frac{t - t_0}{N}$. Dyskretne chwile czasu, w których wyznaczamy wartości kapitału, są wówczas równe: $t_n = t_0 + n\Delta t$, gdzie $n = 0, 1, ... N$. Wprowadźmy dodatkowo oznaczenia: $k(n)=k(t_n)$ oraz $b(n)=b(t_n)$. Przyrosty kapitału mogą być liczone dwoma sposobami wspomnianymi na początku rozdziału. W zależności od przyjętego sposobu otrzymujemy różne rozwiązania.

1. historyczna stopa procentowa (kapitalizacja z dołu): $\Delta k(t)=k(t+\Delta t)-k(t)$

W tym przypadku równanie różnicowe brane w dyskretnych chwilach czasu, zdefiniowanych powyżej, prowadzi do równania rekurencyjnego:

$$k(n+1)-k(n)=b(n)k(n)\Delta t$$

Jego rozwiązanie ma postać:

$$k(n+1)=k_0\prod_{j=0}^{n}(1+b(j)\Delta t)$$

Przyjęta terminologia pochodzi stąd, że w każdym odcinku czasu od t_j do t_{j+1} chwilową stopę procentową $b(t)$ traktujemy jako stałą i równą jej wartości w początkowej chwili czasu t_j, a więc przybliżamy ją wartością przeszłą, historyczną. Przy tym założeniu przedziałowa stopa procentowa ma wartość:

$$\underline{r}_{j,j+1}=\int_{t_j}^{t_{j+1}}b(j)d\tau=b(j)\Delta t$$

W związku z powyższym otrzymane rozwiązanie przybiera postać:

$$k(n+1)=k_0\prod_{j=0}^{n}(1+\underline{r}_{j,j+1})$$

Jeżeli wybrane odstępy czasu są równe okresom stopy procentowej i przyjmujemy je jako wartości jednostkowe, to wprowadzone wielkości $\underline{r}_{j,j+1}$ mają szczególnie prostą interpretację stóp procentowych w poszczególnych okresach. Jeśli te ostatnie są sobie równe w każdym okresie, to otrzymane wyrażenie upraszcza się i daje:

$$k(n+1)=k_0(1+\underline{r}_{0,1})^{n+1}$$

co odpowiada kapitalizacji złożonej, zgodnej z dołu

2. prognozowana stopa procentowa (kapitalizacja z góry): $\Delta k(t) = k(t) - k(t-\Delta t)$

Przypadek ten prowadzi do równania rekurencyjnego:

$$k(n+1)-k(n)=b(n+1)k(n+1)\Delta t$$

Rozwiązanie przybiera postać:

$$k(n+1)=k_0\prod_{j=0}^{n}\frac{1}{1-b(j+1)\Delta t}$$

W odróżnieniu od poprzedniego przypadku, tym razem chwilowa stopa procentowa jest aproksymowana swoją wartością na końcu przedziału czasowego (stąd nazwa - prognozowana stopa procentowa). Przedziałowa stopa procentowa przybiera wówczas wartość:

$$\bar{r}_{j,j+1}=\int_{t_j}^{t_{j+1}}b(j+1)d\tau=b(j+1)\Delta t$$

Rozwiązanie równania rekurencyjnego przedstawia się w postaci:

$$k(n+1)=k_0\prod_{j=0}^{n}\frac{1}{1-\bar{r}_{j,j+1}}$$

Interpretacja $\bar{r}_{j,j+1}$ dla odcinków czasowych równych okresowi stopy procentowej jest analogiczna do poprzedniej. Jeśli dodatkowo stopy procentowe w każdym okresie są jednakowe, to otrzymujemy:

$$k(n+1)=\frac{k_0}{(1-\overline{r}_{0,1})^{n+1}}$$

co odpowiada kapitalizacji złożonej, zgodnej z góry.

2. Górna i dolna stopa procentowa

Ostatni przykład można traktować jako szczególny przypadek sytuacji ogólniejszej z praktycznego punktu widzenia, chociaż nadal szczególny w ramach sformułowanego tutaj modelu stóp procentowych. W praktyce wyznaczamy bowiem wartości kapitału w dyskretnych chwilach czasu, niekiedy przypadkowych. Uwzględnienie takiej sytuacji prowadzi do zastąpienia równania różniczkowego na chwilową wartość kapitału, ogólnym równaniem różnicowym. Ponieważ takie zastąpienie nie jest jednoznaczne (co już było widoczne w przykładzie 3) wprowadzamy dwie definicje:

1. **Dolną stopą procentową** (**stopą procentową z dołu**) nazywać będziemy wielkość $\underline{r}_{t_0,t_1}$ zdefiniowaną równaniem:

$$k(t_1)-k(t_0)=\underline{r}_{t_0,t_1}k(t_0) \text{ lub } \underline{r}_{t_0,t_1}=\frac{k(t_1)-k(t_0)}{k(t_0)}$$

Wprost z definicji wynika jej związek z czynnikiem zmiany kapitału:

$$\underline{r}_{t_0,t_1}=U(t_0,t_1)-1$$

2. **Górną stopę procentową** (**stopę procentową z góry**) $\overline{r}_{t_0,t_1}$ definiujemy związkiem:

$$k(t_1)-k(t_0)=\overline{r}_{t_0,t_1}k(t_1) \text{ lub } \overline{r}_{t_0,t_1}=\frac{k(t_1)-k(t_0)}{k(t_1)}$$

Związek górnej stopy procentowej z czynnikiem zmiany kapitału wyraża równanie:

$$\bar{r}_{t_0,t_1} = 1 - U^{-1}(t_0,t_1)$$

Wprowadzone wielkości są względem siebie niejako odwrotne, zachodzi bowiem tożsamość:

$$(1+\underline{r}_{t_0,t_1})(1-\bar{r}_{t_0,t_1}) = 1$$

będąca prostą konsekwencją przyjętych definicji. Pozwala ona wyrazić jedną ze stóp poprzez drugą, otrzymując dobrze znane związki:

$$\underline{r}_{t_0,t_1} = \frac{\bar{r}_{t_0,t_1}}{1-\bar{r}_{t_0,t_1}} \quad \text{oraz} \quad \bar{r}_{t_0,t_1} = \frac{\underline{r}_{t_0,t_1}}{1+\underline{r}_{t_0,t_1}}$$

Wybierzmy dowolny ciąg chwil czasu, w których wyznaczamy wartości kapitału: $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, jego wartość w chwili t_{n+1} będzie spełniała, w zależności od przyjętego modelu, jedno z dwóch równań różnicowych:

1. Równanie na kapitalizację z dołu:

$$k(t_{n+1}) - k(t_n) = \underline{r}_{t_n,t_{n+1}} k(t_n)$$

2. Równanie na kapitalizację z góry:

$$k(t_{n+1}) - k(t_n) = \bar{r}_{t_n,t_{n+1}} k(t_{n+1})$$

Rozwiązania powyższych równań, przy zadanej wartości początkowej kapitału $k(t_0)$, zadane są odpowiednio związkami:

ad1) $k(t_{n+1}) = k(t_0)\prod_{j=0}^{j=n}(1+\underline{r}_{t_j,t_{j+1}})$

ad2) $k(t_{n+1}) = k(t_0)\prod_{j=0}^{j=n}(1-\bar{r}_{t_j,t_{j+1}})^{-1}$

Podane wyrażenia pozwalają znaleźć wartość kapitału w dowolnych dyskretnych chwilach czasu znając dolne i górne stopy procentowe. Te ostatnie wyznaczane są poprzez zmiany wartości kapitału w dowolnych odstępach czasu. Nie są tutaj potrzebne założenia o równych lub różnych okresach odsetkowych, czy też o zgodności lub nie zgodności okresów odsetkowych z okresami stóp procentowych.

Wydaje się, że w kontekście powyższych rozważań czynnik wzrostu kapitału $U(t_0,t_1)=(1-\bar{r}_{t_0,t_1})^{-1}$ pojawia się w sposób dużo bardziej naturalny niż przedstawianie go jako sumy szeregu geometrycznego $1+\bar{r}_{t_0,t_1}+\bar{r}^{2}_{t_0,t_1}+\cdots$, jak to się często czyni w literaturze. Jest on bowiem w naszym przypadku konsekwencją nie tylko przyjętych założeń, ale przede wszystkim nieco ogólniejszej koncepcji prezentowanej w niniejszej pracy. W szczególności nie wymaga spełnienia warunku na zbieżność nieskończonego szeregu geometrycznego.

Otrzymane wyżej związki są na tyle uniwersalne, że uwzględniają wszystkie przypadki wymagające powyższych szczegółowych założeń. W szczególnym przypadku otrzymać można sytuację opisaną w przykładzie 3. Wystarczy założyć równomierne odstępy czasu pomiędzy kolejnymi chwilami, w których wyznaczamy wartości kapitału oraz rozwinąć w szereg otrzymane związki na górną i dolną stopę procentową pozostawiając jedynie wyrazy liniowe. Szczegóły rachunkowe są następujące:

1. dla historycznej stopy procentowej na każdym odcinku czasowym chwilową stopę procentową przybliżaliśmy jej wartością początkową, wówczas otrzymujemy:

$$\underline{r}_{t_j,t_{j+1}}=e^{\int_{t_0+j\Delta t}^{t_0+(j+1)\Delta t} b(j)d\tau}-1=e^{b(j)\Delta t}-1\approx b(j)\Delta t=\underline{r}_{j,j+1}$$

przy założeniu, że $b(j)\Delta t$ jest dużo mniejsze od jedności.

2. analogicznie dla prognozowanej stopy procentowej:

$$\bar{r}_{t_j,t_{j+1}}=e^{\int_{t_0+j\Delta t}^{t_0+(j+1)\Delta t} b(j+1)d\tau}-1=e^{b(j+1)\Delta t}-1\approx b(j+1)\Delta t=\bar{r}_{j,j+1}$$

gdzie $b(j)\Delta t$ jest nadal dużo mniejsze od jedności.

Przykład liczbowy

W celu zilustrowania wprowadzonych pojęć rozważmy na zakończenie przykład, w którym zakładamy, że chwilowa stopa procentowa będzie liniową funkcja czasu: $b(t) = \alpha \cdot t$. Dla ustalenia uwagi interesować nas będziemy 3 - letni horyzont czasowy, a jednostką czasu niech będzie jeden rok. Poziom stóp procentowych, a więc i tempo przyrostu kapitału, zdeterminowane będą wartością współczynnika α, nich będzie on równy $0{,}05\ rok^{-2}$. Przy takich założeniach przedziałowa stopa procentowa oraz czynnik wzrostu kapitału w okresie od chwili t_0 do t wyrażają się wzorami:

$$r_{t_0,t} = \frac{\alpha}{2}(t^2 - t_0^2) \quad U(t_0,t) = e^{r_{t_0,t}} = e^{\frac{\alpha}{2}(t^2 - t_0^2)}$$

Widać, że wzrost stopy procentowej jest kwadratową funkcją czasu, sytuacja taka może zdarzyć się np. w sytuacji galopującej inflacji, za którą podążają stopy procentowe. Niech początkową wartością zainwestowanego kapitału będzie 100 jednostek (np. złotych). Wówczas wartości chwilowej stopy procentowej i wartości kapitału w kolejnych latach, jak i przedziałowe stopy procentowe, czynniki zmiany kapitału oraz dolne i górne stopy procentowe w kolejnych, rocznych przedziałach czasu podaje tabela:

<table>
<tr><th></th><th colspan="3">$t_0 = 0$</th><th colspan="3">$t_1 = 1$ rok</th><th colspan="3">$t_2 = 2$ lata</th><th colspan="3">$t_3 = 3$ lata</th></tr>
<tr><td>$b(t)$</td><td colspan="3">0,00</td><td colspan="3">0,05 rok^{-1}</td><td colspan="3">0,10 rok^{-1}</td><td colspan="3">0,15 rok^{-1}</td></tr>
<tr><td>$k(t)$</td><td colspan="3">100,00</td><td colspan="3">102,53</td><td colspan="3">110,52</td><td colspan="3">125,23</td></tr>
<tr><td>$U(t_i, t_j)$</td><td colspan="4">$U(0,1)$ = 1,0253</td><td colspan="4">$U(1,2)$ = 1,0779</td><td colspan="4">$U(2,3)$ = 1,1331</td></tr>
<tr><td>r_{t_i,t_j}</td><td colspan="4">$r_{0,1}$ = 0,025 (2,5%)</td><td colspan="4">$r_{1,2}$ = 0,075 (7,5%)</td><td colspan="4">$r_{2,3}$ = 0,125 (12,5%)</td></tr>
<tr><td>$\underline{r}_{t_i,t_j}$</td><td colspan="4">$\underline{r}_{0,1}$ = 0,0253 (2,53%)</td><td colspan="4">$\underline{r}_{1,2}$ = 0,0779 (7,79%)</td><td colspan="4">$\underline{r}_{2,3}$ = 0,1331 (13,31%)</td></tr>
<tr><td>$\bar{r}_{t_i,t_j}$</td><td colspan="4">$\bar{r}_{0,1}$ = 0,0247 (2,47%)</td><td colspan="4">$\bar{r}_{1,2}$ = 0,0723 (7,23%)</td><td colspan="4">$\bar{r}_{2,3}$ = 0,1175 (11,75%)</td></tr>
</table>

Uwzględnione w tabeli dane pozwalają obliczyć inne mierniki zmiany kapitału, po skorzystaniu z ich własności omówionych w tekście, np. chwilowa stopa procentowa w ciągu dwóch lat inwestycji ma wartość:

$$r_{0,2} = r_{0,1} + r_{1,2} = 0{,}1\ (10\%)$$

natomiast w ciągu trzech lat:

$$r_{0,3} = r_{0,2} + r_{2,3} = 0{,}225\ (22{,}5\%).$$

Czynnik zmiany kapitału, wykorzystywany np. do obliczania dolnej i górnej stopy procentowej, można uzyskać z warunku multiplikatywności, a mianowicie:

$$U(0,2) = U(0,1)U(1,2) = 1,1052$$

a stąd dolna i górna stopa procentowa mają wartości:

$$\underline{r}_{0,2} = U(0,2) - 1 = 0,1052\ (10,52\%)$$

oraz

$$\overline{r}_{0,2} = 1 - U(0,2)^{-1} = 0,0952\ (9,52\%).$$

Porównanie przedziałowej stopy procentowej ze stopą górną i dolną pozwala zauważyć, że zachodzi nierówność: $\overline{r}_{t_i,t_j} < r_{t_i,t_j} < \underline{r}_{t_i,t_j}$. Nie jest to oczywiście przypadek, dowód wynika wprost z definicji, co więcej, równość pomiędzy tymi stopami zachodzi tylko wówczas, gdy są one równe zeru. Konsekwencją tej nierówności jest fakt, że w stosunku do przedziałowej stopy procentowej, naliczanie oprocentowania według stopy górnej prowadzi do niedoszacowania należnego kapitału, natomiast według stopy dolnej - do przeszacowania.

Uwagi końcowe

Zdajemy sobie sprawę, że zaprezentowana praca, służąc zastosowaniom praktycznym, powinna zawierać więcej ilustracji liczbowych. Ograniczyliśmy się tylko do jednego przykładu uważając, że nie są one w tym przypadku najważniejsze. Dużo bardziej zależy nam na tym, aby przekonać czytelnika, że proces zmiany wartości kapitałów (pieniądza) w czasie jest procesem ciągłym, nie zależy od tego, w jakim dniu, i o której godzinie nalicza się np. odsetki. Od tych parametrów zależy jedynie chwilowa, właśnie wtedy wyznaczana, wartość kapitału, a proces jego zmiany zachodzi w sposób ciągły. Przytoczone przykłady pokazują, że stosowane w praktyce założenia, np. równych okresów odsetkowych i okresów stóp procentowych nie są potrzebne, jeśli przyjąć założenie o ciągłej zależności kapitału (pieniądza) od czasu. Formuły jakie stosuje się w praktyce można otrzymać jako pewne przybliżenia wzorów ścisłych, nawiasem mówiąc nie jedyne, zależne bowiem od założeń modelu przybliżonego.

Pojęcie chwilowej stopy procentowej pozwala precyzyjnie odnieść się do przybliżonych technik obrazowania zmian kapitału, takich jak omówione: kapitalizacja prosta i złożona, historyczna, czy prognozowana stopa procentowa. Jest ono równocześnie skuteczne w ścisłym podejściu do pomiaru zmiany kapitału za pomocą górnej i dolnej stopy procentowej, których zawikłane własności algebraiczne są bezpośrednią konsekwencją ich związków z przedziałową stopą zwrotu.

LITERATURA

1. M. Dobija, E. Smaga - „Podstawy matematyki finansowej i ubezpieczeniowej”, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa - Kraków 1996r.
2. A. Karpio, E. W. Piotrowski - „Odsetki zamiast pseudoodsetek”, Penetrator - Wiadomości Gospodarcze, 1995r. Nr 11/59.
3. E. W. Piotrowski - „O logarytmie”, Penetrator - Wiadomości Gospodarcze, 1995r Nr 12/60
4. E. F. Brigham - „Fundamentals of Financial Management” The Dryden Press 1989.