UN MODELO PARA LA DETERMINACION DE CENTROS COMERCIALES EN ESPAÑA

Amado Peiró y Ezequiel Uriel*

WP-EC 91-04

* A. Peiró: Universitat de Valencia.
E. Uriel: Universitat de Valencia e IVIE.

Editor: **Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas, S.A.**
Primera Edición Septiembre 1991.
ISBN: 84-7890-606-1
Depósito Legal: V-3096-1991
Impreso por KEY, S.A., Valencia.
Cardenal Benlloch, 69, 46021-Valencia.
Impreso en España.

UN MODELO PARA LA DETERMINACION DE CENTROS COMERCIALES EN ESPAÑA

A. Peiró y E. Uriel

RESUMEN

En este trabajo se expone detalladamente el modelo MCI de Nakanishi y Cooper (1974), señalándose algunas limitaciones que presenta. Posteriormente se aplica dicho modelo a cuatro zonas de la geografía española para la determinación de las areas comerciales.

ABSTRACT

This paper shows the MCI model of Nakanishi and Cooper (1974) in detail, pointing out some of its limitations. Subsequently it applies this model to four zones of the Spanish geography to determinate the commercial areas.

1. INTRODUCCION

En el presente trabajo se aborda la especificación y estimación de un modelo de atracción comercial, para distintas zonas de la geografía española. El origen de la elaboración de este modelo se enmarca en la tarea de revisión y actualización del atlas comercial español, llevada a cabo durante el año 1988. Así, una buena parte de los datos utilizados proceden de una encuesta postal dirigida a los municipios, cuya finalidad era determinar las áreas comerciales vigentes, al efecto de configurar dicho atlas.

En arreglo a los objetivos señalados, en el epígrafe 2 se realiza una breve exposición panorámica de los enfoques alternativos que se han seguido por diferentes autores, al objeto de delimitar el área potencial a la que se extiende un "centro comercial", pudiéndose interpretar esta última expresión en un sentido amplio como una ciudad, o como un conjunto de establecimientos o un establecimiento particular. A continuación, y ya en el epígrafe 3, se efectúa una exposición del modelo Nakanishi y Cooper (1974), ya que por su generalidad y enfoque es el más adecuado a nuestro caso. Una ventaja adicional de este modelo es su especificación econométrica, ya que permite llegar a un método de estimación de sorprendete simplicidad, si tenemos en cuenta la complejidad del planteamiento inicial. Para cerrar este epígrafe, se señalan algunas limitaciones, que pueden ser importantes, que se presentan en la especificación de este tipo de modelos.

Finalmente, el epígrafe 4 está dedicado a la formulaciones concretas del modelo para las zonas de Arévalo-Avila, Briviesca-Brugos, Calahorra-Logroño y Antequera-Málaga, así como al análisis de los resultados obtenidos.

2. PANORAMICA DE ENFOQUES ALTERNATIVOS

De acuerdo con Craig, Ghosh y McLafferty (1984), existen tres enfoques diferentes para determinar la participación en el mercado de diferentes centros competitivos. Estos enfoques están basados, respectivamente, en supuestos normativos, en el principio de la preferencia revelada y en la evaluación directa de la utilidad. Dejando al margen este último método, que ha sido mucho menos utilizado, a continuación se examinan brevemente los dos primeros enfoques. Conviene advertir que en principio se aplican tanto para determinar el área comercial sobre la que influye el centro - una ciudad, por ejemplo - como para la elección de establecimientos por parte del consumidor.

Dentro de los modelos basados en supuestos normativos, acaso los más simples sean los del "centro más cercano", desarrollados por Christaller (1935) y Losch (1954). Estos modelos, a menudo excesivamente simplistas, fueron enriquecidos o matizados fundamentalmente en las décadas de los sesenta y setenta. Por otra parte, una línea de trabajo distinta se remonta a Reilly (1931), que partía de la consideración de que si bien es razonable pensar que el consumidor tiene en cuenta la distancia a la hora de elegir un centro comercial, también es cierto que tiene en cuenta otros factores como imagen, tamaño del centro, etc. Esto le llevó a postular su conocida ley de gravitación del comercio, que permite determinar la frontera de las áreas comerciales correspondientes a los centros A y B mediante la siguiente ecuación:

$$D_{AF} = \frac{D_{AB}}{1 + \sqrt{\frac{N_A}{N_B}}} \qquad (1)$$

donde

D_{AF} : Distancia del centro A a la frontera,

D_{AB} : Distancia del centro A al centro B,

N_A, N_B : Tamaño de los centros comerciales A y B, respectivamente.

verificándose que

$$D_{AF} + D_{BF} = D_{AB} \tag{2}$$

Los modelos construidos bajo el enfoque de las preferencias reveladas parten de una función de utilidad en la que se tienen en cuenta otros factores además de la distancia. Así, una función ampliamente utilizada ha sido,

$$V_{ij} = A_j^{\alpha} D_{ij}^{-\beta} \tag{3}$$

donde

V_{ij} : Utilidad para el consumidor i del centro j,

A_j : Medida del atractivo del centro j,

D_{ij} : Distancia que separa al consumidor i del centro j,

α, β : Parámetros del modelo.

Uno de los primeros autores en utilizar este enfoque fue Huff (1962), que basándose en el axioma de elección formulado por Luce (1959), planteó el siguiente modelo:

$$P_{ij} = \frac{V_{ij}}{\sum_{k=1}^{m} V_{ik}} \tag{4}$$

siendo P_{ij} la probabilidad de que el consumidor i acuda al centro j.

Si en (4) sustituimos V_{ij} por su expresión en (3) obtenemos la formulación de Huff:

$$P_{ij} = \frac{A_j^{\alpha} \quad D_{i\,j}^{\beta}}{\sum_{k=1}^{m} A_j^{\alpha} \; D_{i\,j}^{-\beta}} \tag{5}$$

Nakanishi y Cooper (1974) han efectuado una formulación más general del modelo (5) al que han denominado modelo multiplicativo de interacción competitiva: en inglés, Multiplicative Competitive Interaction Model o MCI model. Además de darle una mayor generalidad, estos autores idearon un procedimiento muy simple para su estimación. A continuación se realiza una exposición más detallada de este modelo que, junto con los modelos logit multinomiales, ha sido el procedimiento más divulgado y aplicado durante los últimos años.

3. EL MODELO MULTIPLICATIVO DE INTERACCION COMPETITIVA

Tomando (5) como punto de partida, Nakanishi y Cooper (1974) formulan un modelo más general dado por

$$P_{ij} = \frac{\prod_{k=1}^{q} X_{kij}^{\beta_k}}{\sum_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{q} X_{kij}^{\beta_k}} \quad i = 1,2,...,M;\ j = 1,2,...,m \qquad (6)$$

donde

P_{ij} : probabilidad de que el agente i seleccione el centro j.

X_{kij} : valor de la variable k-ésima, correspondiente al agente i y al centro j.

β_k : parámetros del modelo.

M : número de agentes considerados.

m : número de centros de atracción.

Conviene tener en cuenta en primer lugar que el modelo formulado en (6) es de tipo determinista. Es necesario, por ello, introducir una variable aleatoria al objeto de dotar al modelo de propiedades estocásticas y poder proceder a su contrastación empírica. Apoyándose en una especificación utilizada por Butletz y Naert (1973), los autores formulan el siguiente modelo estocástico:

$$P_{ij} = \frac{\left(\prod_{k=1}^{q} X_{kij}^{\beta_k} \right) \zeta_{ij}^{*}}{\sum_{j=1}^{m} \left(\prod_{k=1}^{q} X_{kij}^{\beta_k} \right) \zeta_{ij}^{*}} \tag{7}$$

donde ζ_{ij}^{*} es el término del error de especificación.

Se va a adoptar el supuesto de que el logaritmo de ζ_{ij}^{*} cumple las hipótesis básicas utilizadas en el modelo de regresión lineal general. Es decir,

$$\log \zeta_{ij}^{*} \sim \text{NID } [0,\sigma^2] \tag{8}$$

Siguiendo un trabajo previo de Nakanishi, los autores desarrollan un procedimiento que permite linealizar (7).

Para ello, en primer lugar tomaremos logarítmos neperianos en (7):

$$\log P_{ij} = \sum_{k=1}^{q} \beta_k \log X_{kij} + \log \zeta_{ij}^{*} - \log \left\{ \sum_{j=1}^{m} \left(\prod_{k=1}^{q} X_{kij}^{\beta_k} \right) \zeta_{ij}^{*} \right\} \tag{9}$$

Si sumamos en (9) sobre j - sobre cada centro de atracción - y dividimos por m - número de centros de atracción- tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \log P_{ij} &= \sum_{k=1}^{q} \beta_k \left\{ \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \log X_{kij} \right\} + \\ &+ \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \log \zeta_{ij}^{*} - \log \left\{ \sum_{j=1}^{m} \left(\prod_{k=1}^{q} X_{kij}^{\beta_k} \right) \zeta_{ij}^{*} \right\} \end{aligned} \tag{10}$$

Si designamos por $\tilde{P}_i$, $\tilde{X}_{ki}$ y $\tilde{\zeta}^*_i$ a las medias geométricas de P_{ij}, X_{kij} y ζ^*_{ij} respectivamente, es decir, si hacemos:

$$\tilde{P}_i = \left[\prod_{j=1}^{m} P_{ij} \right]^{\frac{1}{m}}$$

$$\tilde{X}_{ki} = \left[\prod_{j=1}^{m} X_{kij} \right]^{\frac{1}{m}} \tag{11}$$

$$\tilde{\zeta}^*_i = \left[\prod_{j=1}^{m} \zeta^*_{ij} \right]^{\frac{1}{m}}$$

entonces (10) se puede expresar del siguiente modo

$$\log \left\{ \sum_{j=1}^{m} \left(\prod_{k=1}^{q} X_{kij}^{\beta_k} \right) \zeta^*_{ij} \right\} = \sum_{k=1}^{q} \beta_k \log \tilde{X}_{ki} + \log \tilde{\zeta}^*_i - \log \tilde{P}_i \tag{12}$$

Si sustituimos el último término del segundo miembro de (9) por su valor en (12) obtenemos la siguiente expresión:

$$\log \left[\frac{P_{ij}}{\tilde{P}_i} \right] = \sum_{k=1}^{q} \beta_k \log \left[\frac{X_{kij}}{\tilde{X}_{ki}} \right] + \log \left[\frac{\zeta^*_{ij}}{\tilde{\zeta}^*_i} \right] \tag{13}$$

Haciendo,

$$Y_{ij} = \log \left[\frac{P_{ij}}{\tilde{P}_i} \right]$$

$$Z_{kij} = \log \left[\frac{X_{kij}}{\tilde{X}_{ki}} \right] \qquad (14)$$

$$\zeta_{ij} = \log \left[\frac{\zeta^*_{ij}}{\tilde{\zeta}^*_i} \right]$$

obtenemos el siguiente modelo lineal

$$Y_{ij} = \sum_{k=1}^{q} \beta_k Z_{kij} + \zeta_{ij} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,...,M \\ j = 1,2,...,m \end{array} \qquad (15)$$

Con el fin de su utilización en desarrollos posteriores vamos a expresar el modelo anterior de forma compacta para todas las observaciones. Para ello vamos a hacer

$$\mathbf{y}_i = \begin{pmatrix} Y_{i1} \\ Y_{i2} \\ .... \\ Y_{im} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Z}_i = \begin{pmatrix} Z_{1i1} & Z_{2i1} & ...... & Z_{qi1} \\ Z_{1i2} & Z_{2i2} & ...... & Z_{qi2} \\ . & . & .... & . \\ Z_{1im} & Z_{2im} & ...... & Z_{qim} \end{pmatrix} \qquad \zeta_i = \begin{pmatrix} \zeta_{i1} \\ \zeta_{i2} \\ .... \\ \zeta_{im} \end{pmatrix}$$

e

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_M \end{pmatrix} \qquad Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \cdots \\ Z_M \end{pmatrix} \qquad \zeta = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \cdots \\ \zeta_M \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_q \end{pmatrix}$$

De acuerdo con la anterior notación el modelo, el modelo (15) puede expresarse de la siguiente forma:

$$y = Z\beta + \zeta \tag{16}$$

Antes de examinar el problema de estimación es conveniente analizar las propiedades del término de perturbación ζ_{ij} en (15), a partir de las hipótesis efectuadas en (8) sobre ζ^*_{ij}. Teniendo en cuenta el valor del término de perturbación ζ_{ij} en (14), y sumando para todo j se obtiene:

$$\sum_{j=1}^{m} \zeta_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \log \left\{ \frac{\zeta^*_{ij}}{\tilde{\zeta}^*_i} \right\} = \sum_{j=1}^{m} \left\{ \log \zeta^*_{ij} - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \log \zeta^*_{ij} \right\} = 0 \tag{17}$$

Así pues, existe una relación lineal exacta entre las perturbaciones correspondientes a un agente i. En consecuencia, para cada i, una de las perturbaciones puede expresarse como una combinación lineal de las restantes perturbaciones correspondientes al mismo agente.

Utilizando las ecuaciones (11) y (14) el vector ζ_i puede expresarse de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \zeta_{i1} \\ \zeta_{i2} \\ \cdots \\ \zeta_{im} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log \zeta^*_{i1} \\ \log \zeta^*_{i2} \\ \cdots\cdots \\ \log \zeta^*_{im} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \log \tilde{\zeta}^*_{i} \\ \log \tilde{\zeta}^*_{i} \\ \cdots\cdots \\ \log \tilde{\zeta}^*_{i} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10\ldots0 \\ 01\ldots0 \\ \cdots\cdots \\ 00\ldots1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log \zeta^*_{i1} \\ \log \zeta^*_{i2} \\ \cdots\cdots \\ \log \zeta^*_{im} \end{pmatrix} - \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 11\ldots1 \\ 11\ldots1 \\ \cdots\cdots \\ 11\ldots1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log \zeta^*_{i1} \\ \log \zeta^*_{i2} \\ \cdots\cdots \\ \log \zeta^*_{im} \end{pmatrix} \tag{18}$$

Si designamos por **I** a la matriz identidad *m* x *m*, por **J** a una matriz *m* x *m* cuyos elementos son todos 1, y hacemos

$$\log \zeta^*_i = \begin{pmatrix} \log \zeta^*_{i1} \\ \log \zeta^*_{i2} \\ \cdots\cdots \\ \log \zeta^*_{im} \end{pmatrix}$$

entonces (18) se puede expresar de forma compacta:

$$\zeta_i = \left\{ \mathbf{I} - \frac{1}{m} \mathbf{J} \right\} \log \zeta^*_i \tag{19}$$

De acuerdo con (8) se verificará que el vector de perturbaciones $\log \zeta^*_i$ se distribuye de la siguiente forma:

$$\log \zeta^*_i \sim N\,[0, \sigma^2 I] \tag{20}$$

Por tanto, la matriz de covarianzas del vector ζ_i, a la que denominaremos Σ_i, vendrá dada por

$$\Sigma_i = E\,[\zeta_i\,\zeta_i'] = \left\{ I - \frac{1}{m} J \right\} \sigma^2 I \left\{ I - \frac{1}{m} J \right\} = \sigma^2 \left\{ I - \frac{1}{m} J \right\} \quad (21)$$

ya que la matriz

$$\left\{ I - \frac{1}{m} J \right\}$$

es idempotente.

Por otra parte, la matriz Σ correspondiente a todas las perturbaciones del modelo tendrá la siguiente estructura:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 0 \dots 0 \\ 0\ \Sigma_{2\dots}\ 0 \\ .\ \ .\ \dots\ . \\ 0\ 0 \dots \Sigma_M \end{pmatrix} \quad (22)$$

es decir, se trata de una matriz de covarianzas con estructura bloque diagonal.

A la vista de que, de acuerdo con (21), las perturbaciones correspondientes a un agente i están correlacionadas entre si, parece en principio adecuada la aplicación del método de mínimos cuadrados generalizados. Se podría esperar que la aplicación de este método al modelo dado en (16) condujera al siguiente resultado:

$$\hat{\beta}_g = [Z' \Sigma^{-1} Z]^{-1} [Z' \Sigma^{-1} y] =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{M} Z_i' \, \Sigma^{-1}_i \, Z_i \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{M} Z_i' \, \Sigma^{-1}_i \, y_i \right] \tag{23}$$

Sin embargo, las fórmulas anteriores no son aplicable dado que, como consecuencia de (17), la matriz de covarianzas (21) es singular, y, por tanto, no invertible. Para obviar este problema, lo que procede es eliminar una fila en cada $\mathbf{Z}_i$ y un elemento en cada $\mathbf{y}_i$. Sin pérdida de generalidad supondremos que la matriz denominada $\mathbf{Z}^m_i$ se ha obtenido eliminando la fila m-ésima - es decir, la última fila - de $\mathbf{Z}_i$; análogamente, $\mathbf{y}^m_i$ será un vector que se ha obtenido suprimiendo el último elemento en $\mathbf{y}_i$. En correspondencia con estos cambios definiremos las matrices $\mathbf{I}^*$ y $\mathbf{J}^*$ que difieren de las definidas previamente en que su orden es $(m - 1) \times (m - 1)$. Con estas modificaciones el estimador por MCG vendrá dado por

$$\hat{\beta}^m_g =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{M} \left(\mathbf{Z}^m_i\right)' \frac{1}{\sigma^2} \left\{ \mathbf{I}^* - \frac{1}{m} \mathbf{J}^* \right\}^{-1} \mathbf{Z}^m_i \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{M} \left(\mathbf{Z}^m_i\right)' \frac{1}{\sigma^2} \left\{ \mathbf{I}^* - \frac{1}{m} \mathbf{J}^* \right\}^{-1} \mathbf{y}^m_i \right]$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{M} \left(\mathbf{Z}^m_i\right)' \left\{ \mathbf{I}^* + \mathbf{J}^* \right\} \mathbf{Z}^m_i \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{M} \left(\mathbf{Z}^m_i\right)' \left\{ \mathbf{I}^* + \mathbf{J}^* \right\} \mathbf{y}^m_i \right] \tag{24}$$

La última igualdad está basada en el hecho de que se verifica que

$$\left\{ \mathbf{I}^* - \frac{1}{m} \mathbf{J}^* \right\}^{-1} = \left\{ \mathbf{I}^* + \mathbf{J}^* \right\}$$

Por otra parte, de acuerdo con McGuire, Farley, Lucas y Ring (1968), puede demostrarse - y lo vamos a hacer a continuación - que el estimador dado en (24) coincide exactamente con el obtenido al aplicar a (16) el método de mínimos cuadrados ordinarios (MCO).

Para hacer esta demostración vamos a expresar $\mathbf{Z}_i$ e $\mathbf{y}_i$ de la siguiente forma:

$$\mathbf{Z}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{I}^* \\ \cdots \\ -\mathbf{1} \end{pmatrix} \mathbf{Z}_i^m$$

$$\mathbf{y}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{I}^* \\ \cdots \\ -\mathbf{1} \end{pmatrix} \mathbf{y}_i^m \qquad (25)$$

donde $\mathbf{I}^*$ tiene el significado dado anteriormente y $\mathbf{1}$ es un vector fila (m - 1) de unos.

Obsérvese que en (25) expresamos a matriz completa $\mathbf{Z}_i$ - y análogamente $\mathbf{y}_i$ - como función de las primeras (m - 1) filas ($\mathbf{Z}_i^m$), debido a que, en virtud de la definición efectuada en (14), una de las filas de $\mathbf{Z}_i$ puede expresarse como combinación lineal del resto.

Teniendo en cuenta lo anterior, vamos a calcular el estimador por MCO del vector paramétrico del modelo (16) y, mediante sucesivas transformaciones algebraícas, llegaremos al resultado obtenido en (24):

$$\hat{\beta}_{mco} = [Z'Z]^{-1} [Z'y] =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{M} Z_i{}'Z_i \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{M} Z_i{}'y_i \right]$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{M} \left(Z_i^m\right)' \left\{ I : \text{-}1' \right\} \begin{pmatrix} I \\ \cdots \\ \text{-}1 \end{pmatrix} Z_i^m \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{M} \left(Z_i^m\right)' \left\{ I : \text{-}1' \right\} \begin{pmatrix} I \\ \cdots \\ \text{-}1 \end{pmatrix} y_i^m \right]$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{M} \left(Z_i^m\right)' \left\{ I + J \right\} Z_i^m \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{M} \left(Z_i^m\right)' \left\{ I + J \right\} y_i^m \right] = \hat{\beta}_g^m \qquad (26)$$

En consecuencia, la forma más sencilla de obtener unos estimadores eficientes en (16) es mediante la aplicación del método de MCO. Téngase en cuenta que en este caso no es necesario omitir ninguna observación.

Una limitación importante de este modelo, no señalada por sus autores, reside en las restricciones existentes a la introducción de variables explicativas, especialmente cuando éstas caracterizan exclusivamente al centro comercial, independientemente del agente considerado. Estas restricciones son fruto de las transformaciones efectuadas. Así, se tiene que para cualquier variable k y cualquier agente i,

$$\sum_{j=1}^{m} Z_{kij} = \sum_{j=1}^{m} \log \frac{X_{kij}}{\tilde{X}_{ki}} = \sum_{j=1}^{m} \log X_{kij} - \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \log X_{kij} = 0 \qquad (27)$$

Adicionalmente si para una variable, que sin pérdida de generalidad supondremos que es X_q, se cumple que

$$X_{qij} = X_{qi'j} \qquad (28)$$

para todo i distinto de i' y para cualquier j, se verificará por (11) que

$$\tilde{X}_{qi} = \tilde{X}_{qi'}$$

y consecuentemente en virtud de (14),

$$Z_{qij} = Z_{qi'j} \tag{29}$$

Utilizando (27) y (29), la columna q-ésima de la matriz Z adoptará la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} Z_{q11} \\ Z_{q12} \\ \vdots \\ Z_{q1m} = -\sum_{j=1}^{m-1} Z_{q1j} \\ Z_{q21} = Z_{q11} \\ Z_{q22} = Z_{q12} \\ \vdots \\ Z_{qzm} = -\sum_{j=1}^{m-1} Z_{qzj} \\ \vdots \\ Z_{qM1} = Z_{q11} \\ Z_{qM2} = Z_{q12} \\ \vdots \\ Z_{qMm} = -\sum_{j=1}^{m-1} Z_{qMj} \end{pmatrix} \tag{30}$$

existiendo solamente m-1 valores independientes del regresor Z_q. Esto provoca que el número máximo de variables que verifican (28) y que se pueden incluir simultáneamente en el modelo es m-1, si queremos evitar una situación de multicolinealidad perfecta.

Debemos insistir en que este punto puede ser una limitación notable en muchas aplicaciones empíricas. Con frecuencia, el número de centros de atracción puede ser muy reducido en relación al número de variables, potencialmente explicativas, que caracterizan a dichos centros.

4. FORMULACION DEL MODELO PARA LA DETERMINACION DE CENTROS COMERCIALES EN ESPAÑA.

Mediante los datos obtenidos de la encuesta postal conocemos el porcentaje de gasto realizado, por los municipios cuya respuesta se ha recibido, en otros municipios o centros de atracción, para cada uno de los dieciocho grupos de gastos que figuran en dicha encuesta. A partir de esta información se estimó, para cada grupo, el gasto en pesetas realizado en cada uno de los centros de atracción por cada uno de los municipios, así como el gasto total, resultante de considerar todos los grupos conjuntamente.

También se disponía, a través de la propia encuesta, de la distancia, en kilómetros, del municipio considerado al municipio donde se realiza el gasto, y el tiempo de desplazamiento. Por otra parte se obtuvo la información relativa a los centros de atracción que se podía considerar, a priori, potencialmente relevante tal como población, número de licencias comerciales, etc.

De acuerdo con lo expuesto en el apartado anterior, y por los motivos allí apuntados, hemos optado por un modelo multiplicativo de interacción competitiva, para poder explicar los porcentajes del gasto evadido que se destina a otros municipios. El modelo multiplicativo de interacción competitiva es un modelo no lineal, con todos los problemas de estimación y de propiedades de los estimadores que ello supone. Por este motivo se hace necesario someterlo a una transformación, tal y como se ha visto anteriormente, de forma que los parámetros puedan ser estimados con plenas garantías al tiempo que nos permita llevar a cabo los contrastes deseados.

Así, y dado que para las zonas analizadas sólo disponemos de suficiente información para dos centros de atracción, si designamos por

G_{i1} al porcentaje del gasto evadido que realiza el municipio i en el centro de atracción 1,

G_{i2} al porcentaje del gasto evadido que realiza el municipio i en el centro de atracción 2,

tendremos que

$$Y_{i1} = \log \frac{G_{i1}}{\sqrt{G_{i1} G_{i2}}} \tag{31}$$

$$Y_{i2} = \log \frac{G_{i2}}{\sqrt{G_{i1} G_{i2}}} \tag{32}$$

y, por construcción

$$Y_{i1} = -Y_{i2} \tag{33}$$

Análogamente, para variables que relacionen al municipio atraído con los centros de atracción, tales como distancia kilométrica o tiempo de desplazamiento, al realizar la misma transformación se obtienen unos valores con una estructura similar a la anterior. A modo de ejemplo llamando

X_{i1} a la distancia kilométrica entre el municipio i y el centro de atracción 1,

X_{i2} a la distancia kilométrica entre el municipio i y el centro de atracción 2, la transformación será:

$$D_{i1} = \log \frac{X_{i1}}{\sqrt{X_{i1} X_{i2}}} \tag{34}$$

$$D_{i2} = \log \frac{X_{i2}}{\sqrt{X_{i1} X_{i2}}} \tag{35}$$

y, nuevamente, por construcción

$$D_{i1} = - D_{i2} \tag{36}$$

Por último, en lo que respecta a aquellas variables que recogen características propias de los centros de atracción como son las que hacen referencia a su tamaño -población, número de licencias comerciales, etc. - se procede de igual forma. Para la variable población si llamamos

POB_1 a la población del centro de atracción comercial 1,

POB_2 a la población del centro de atracción comercial 2,

las variables transformadas serán:

$$P_1 = \log \frac{POB_1}{\sqrt{POB_1 POB_2}} \tag{37}$$

$$P_2 = \log \frac{POB_2}{\sqrt{POB_2 POB_2}} \tag{38}$$

y también se cumplirá que:

$$P_1 = - P_2 \tag{39}$$

Obsérvese que variables de este tipo solamente tomarán dos valores a lo largo de toda la muestra, que serán opuestos como se acaba de exponer. Además en la especificación de modelos de este tipo, dado que sólo existen dos centros de atracción, no se podrá incluir más de una variable de este tipo, pues de lo contrario surgiría una situación de multicolinealidad perfecta.

Resumiendo, tenemos que si disponemos de información relativa a **n** municipios que realizan gastos en determinados porcentajes en 2 centros de atracción y si suponemos que la especificación correcta del modelo incluye como variables explicativas a la distancia municipio/centro y población del centro atrayente, los valores del regresado y regresores tendrán la estructura expuesta en el siguiente cuadro:

Observación relativa al municipio ...	Regresando	Regresor 1	Regresor 2
1	Y_{11}	D_{11}	P_1
2	Y_{21}	D_{21}	P_1
3	Y_{31}	D_{31}	P_1
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
n	Y_{n1}	D_{n1}	P_1
1	$Y_{12} = - Y_{11}$	$D_{12} = - D_{11}$	$P_2 = - P_1$
2	$Y_{22} = - Y_{21}$	$D_{22} = - D_{21}$	$P_2 = - P_1$
3	$Y_{32} = - Y_{31}$	$D_{32} = - D_{31}$	$P_2 = - P_1$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
n	$Y_{n2} = - Y_{n1}$	$D_{n2} = - D_{n1}$	$P_2 = - P_1$

(40)

4.1. Interpretación de los resultados obtenidos.

Al final de este trabajo se presentan los resultados obtenidos para cuatro zonas de la geografía española. Para analizar estos resultados vamos a centrarnos en el primer modelo, cuyos centros de atracción son Arévalo y Avila, y para el que se dispone de información correspondiente a 31 municipios.

El modelo especificado adopta la forma:

$$G_{ij} = \frac{X_{ij}^{\beta_1}\ POB_j^{\beta_2}\ \xi_{ij}^*}{X_{i1}^{\beta_1}\ POB_1^{\beta_2}\ \xi_{i1}^* + X_{i2}^{\beta_1}\ POB_2^{\beta_2}\ \xi_{i2}^*} \tag{41}$$

$$i=1,2,...,31$$
$$j=1,2.$$

Los valores de los coeficientes β_1 y β_2 no admiten una intuición sencilla. No obstante, a continuación se deriva una interpretación para β_2, pudiéndose obtener de forma similar para β_1.

Al transformar las variables en el modelo (41) nos quedará:

$$Y_{ij} = \beta_1 D_{ij} + \beta_2 P_j + \xi_{ij} \tag{42}$$

con i = 1,2, ..., 31; j = 1,2 y donde ξ_{ij} resulta de llevar a cabo el mismo tipo de transformación sobre ξ_{ij}^* que la realizada para el resto de variables. Si consideramos, por ejemplo, Y_{i1}, podemos escribir

$$Y_{i1} = \log \frac{G_{i1}}{\sqrt{G_{i1}\ G_{i2}}} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{G_{i1}}{G_{i2}} \right) \tag{43}$$

Por otra parte,

$$P_1 = \log \frac{POB_1}{\sqrt{POB_1\ POB_2}} = \frac{1}{2} \left[\log (POB_1) - \log (POB_2) \right] \tag{44}$$

Procediendo de forma análoga para Y_{i2} y P_2, el modelo se puede expresar de la siguiente forma

$$\log \left(\frac{G_{i1}}{G_{i2}} \right) = 2\beta_1 D_{i1} + \beta_2 \left[\log (POB_1) - \log (POB_2) \right] \qquad (45)$$

$$\log \left(\frac{G_{i2}}{G_{i1}} \right) = 2\beta_1 D_{i2} + \beta_2 \left[\log (POB_2) - \log (POB_1) \right] \qquad (46)$$

$$i = 1, 2, ..., 31$$

A la vista de las anteriores ecuaciones se tiene que una determinada variación porcentual en la población de un municipio provocará una variación porcentual β_2 veces mayor en la relación entre el porcentaje de gasto evadido a ese municipio y el porcentaje de gasto evadido al otro municipio.

Al estimar el modelo (42) por mínimos cuadrados ordinarios obtenemos:

$$\hat{Y}_{ij} = - 3,157\ D_{ij} + 0,514\ P_j \qquad (47)$$

y los signos de los estimadores son los esperados. Así que $\hat{\beta}_1 < 0$ implica que cuanto mayor es la distancia que separa al municipio del centro de atracción, menor es el porcentaje de gasto que podemos esperar que realice en él. Por otra parte una reflexión análoga se puede realizar respecto de $\hat{\beta}_2$: cuanto mayor sea la población de un centro de atracción comercial mayor es el porcentaje de gasto que estimamos que hará un municipio en este centro. Todo ello sin olvidar que nos movemos dentro de un modelo que supone una interacción competitiva y una elección espacial entre dos alternativas.

Para poder realizar predicciones debemos tener en cuenta que el modelo del que partimos no es lineal y, por ello, en vez de remitirnos al modelo (42), resultará más comodo hacerlo en términos del modelo (41). Así si estamos interesados en estimar los porcentajes de gasto que realizaría en Arevalo y Avila, un municipio cuya distancia a estos centros es 10 y 20 kilómetros respectivamente, tendremos que el porcentaje del gasto evadido a Arevalo será igual a

$$\frac{10^{-3,157} \cdot 7005^{0,514}}{10^{-3,157} \cdot 7005^{0,514} + 20^{-3,157} \cdot 43603^{0,514}} = 77,7\% \qquad (48)$$

siendo 7005 la población de Arévalo y 43603 la de Avila.

El porcentaje de gasto evadido a Avila será:

$$\frac{20^{-3,157} \cdot 43603^{0,514}}{10^{-3,157} \cdot 7005^{0,514} + 20^{-3,157} \cdot 43603^{0,514}} = 22,3\% \qquad (49)$$

De igual forma podemos utilizar el modelo estimado para adscribir municipios a uno u otro centro de atracción en función de que el porcentaje de gasto realizado en ellos sobrepase cierto nivel. Como ejemplo, si imputamos a Arévalo aquellos municipios cuyo porcentaje del gasto evadido realizado en dicha ciudad sea superior al 50% tendremos, operando sobre la estimación de (41),

$$\frac{\left(\dfrac{X_{i1}}{X_{i2}}\right)^{-3,157} \cdot 7005^{0,514}}{\left(\dfrac{X_{i1}}{X_{i2}}\right)^{-3,157} \cdot 7005^{0,514} + 43603^{0,514}} > 0,5 \qquad (50)$$

y, resolviendo para $\dfrac{X_{i1}}{X_{i2}}$, obtenemos

$$\frac{X_{i1}}{X_{i2}} < 0'742 \qquad (51)$$

lo que implica que, de acuerdo con el criterio fijado anteriormente, debemos adscribir a Arévalo aquellos municipios cuya distancia a esta ciudad sea inferior en más de un 25'8% a la que le separa de Avila.

El gráfico 1 refleja esta situación, de acuerdo siempre con las distancias declaradas por los propios encuestados. A los veintiseis municipios más relevantes se les representa mediante el símbolo "□" si el mayor volumen de gasto evadido lo realizan en Arévalo, o, mediante el símbolo "x" si lo realiza en Avila.

APENDICE

MODELO 1

Centros de atracción : **Arévalo y Avila**
Número de municipios en la muestra : **31**

$$\hat{Y}_{ij} = -\underset{(0'281)}{3'157}\, D_{ij} + \underset{(0'116)}{0'514}\, P_j$$

$R^2 = 0'687$
$\bar{R}^2 = 0'682$
SCR = 40'39

MODELO 2

Centros de atracción: **Briviesca y Burgos**
Número de municipios en la muestra: **14**

$$\hat{Y}_{ij} = -\underset{(1'086)}{3'629}\, T_{ij} + \underset{(0'366)}{1'046}\, P_j$$

NOTA: T_{ij} es la variable que se obtiene de la transformación del tiempo de desplazamiento del municipio i al centro j.

$R^2 = 0'302$
$\bar{R}^2 = 0'275$
SCR = 59'08

MODELO 3

Centros de atracción: **Calahorra y Logroño**
Número de municipios en la muestra: **13**

$$\hat{Y}_{ij} = -\underset{(0'658)}{3'184}\,D_{ij} + \underset{(0'366)}{1'072}\,P_j$$

$R^2 = 0'619$
$\bar{R}^2 = 0'603$
SCR = 10'83

MODELO 4

Centros de atracción: **Antequera y Málaga**
Número de municipios en la muestra: **9**

$$\hat{Y}_{ij} = -\underset{(0'643)}{4'304}\,D_{ij} + \underset{(0'175)}{0'718}\,P_j$$

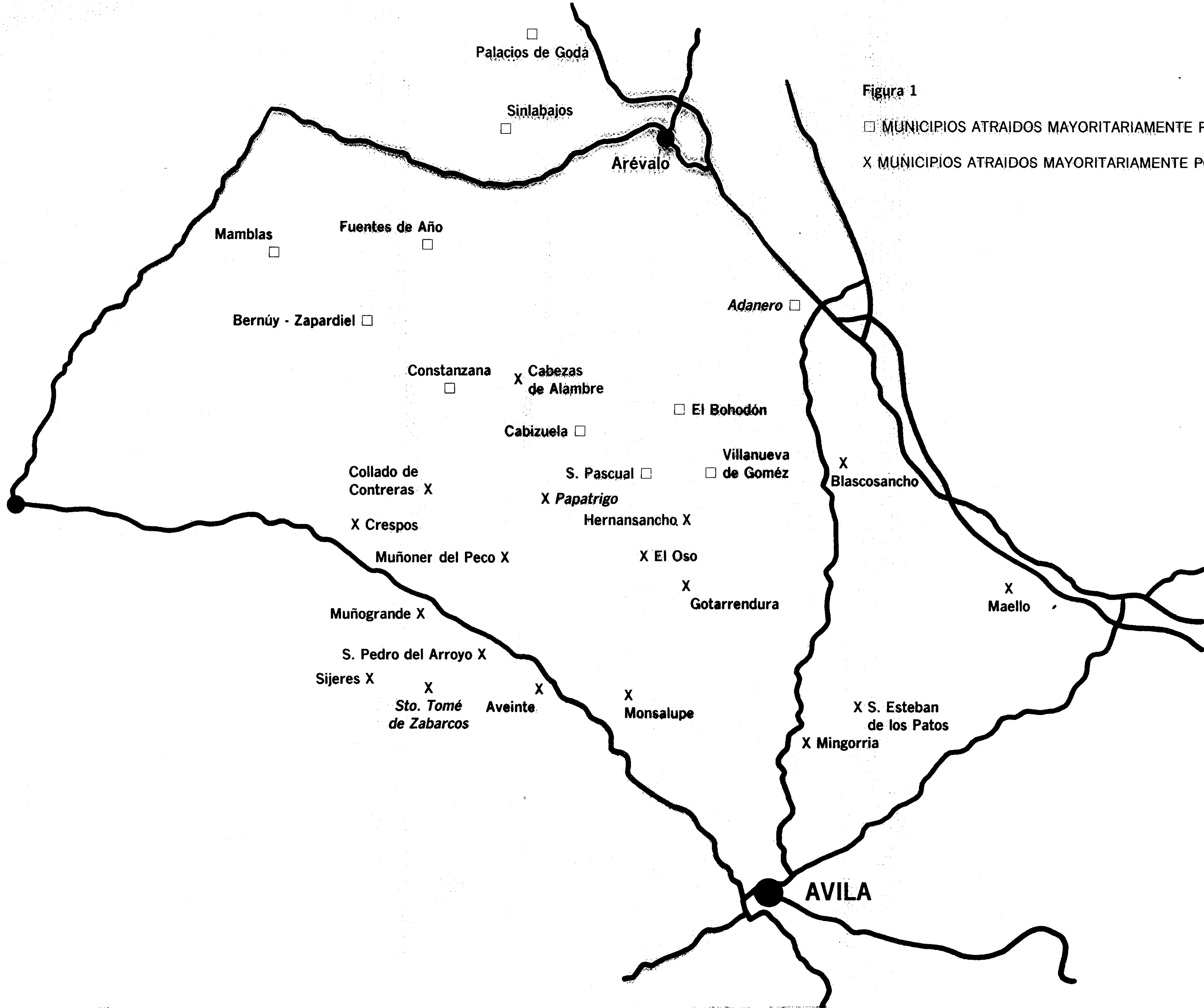
$R^2 = 0'751$
$\bar{R}^2 = 0'735$
SCR = 13'20

R^2 y $\bar{R}^2$ designan al coeficiente de determinación y al coeficiente de determinación corregido respectivamente. SCR es la suma de los cuadrados. *Entre paréntesis figuran las desviaciones típicas estimadas de los correspondientes estimadores. No se han detectado signos de especificación incorrecta.*

Figura 1

□ MUNICIPIOS ATRAIDOS MAYORITARIAMENTE POR AREVALO

X MUNICIPIOS ATRAIDOS MAYORITARIAMENTE POR AVILA



REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

BULTEZ, A.V. y NAERT, A. (1973): "Estimating Gravitational Market Share Models, *Working Paper Núm.* 73-36, European Instute for Advanced Studies in Management.

CHRISTALLER, W. (1935): *Die Zentralen Orte in Süddeutschland*, Jena E., Germany: G. Fischer.

CRAIG, C.S., GHOSH, A. y McLAFFERTY, S. (1984): "Models of the Retail Location Process: A Review", *Journal Retailing*, 60, pp. 5-36.

HUFF, D.L. (1962): "Determination of Intra-Urban Retail Trade Areas", *Real Estate Research Program*, University of California, Los Angeles.

LOSCH, A. (1954): *The Economics of Location*, Yale University Press, New Haven, Conn.

LUCE, R. (1959): *Individual Choice Behavior*, John Wiley & Sons, New York.

McGUIRE, T.W., FARLEY J.V., LUCAS, R.E. Jr., RING, L.W. (1968): "Estimation and Inference for Linear Models in Which Subsets of the Dependent Variables are Constrained", *Journal of American Statiscal Association*, 63, pp. 1201-13.

NAKANISHI, M. y COOPER, L.G. (1974): "Parameter Estimate for Multiplicative Interactive Choice Model: Least Squares Approach", *Journal of Marketing Research*, 11, pp. 303-311.

REILLY, W.J. (1931): *The Law of Retail Gravitation*, Knickerbocker Press, New York.

DOCUMENTOS PUBLICADOS

WP-EC 90-01 "Los determinantes de la evolución de la productividad en España"
M. Mas, F. Pérez. Diciembre 1990.

WP-EC 90-02 "Mecanización y sustitución de factores productivos en la Agricultura Valenciana"
A. Picazo, E. Reig. Diciembre 1990.

WP-EC 90-03 "Productivity in the service sector"
H. Fest. Diciembre 1990.

WP-EC 90-04 "Aplicación de los modelos de elección discreta al análisis de la adopción de innovaciones tecnológicas. El caso del sector azulejero"
E.J. Miravete. Diciembre 1990.

WP-EC 90-05 "Rentabilidad y eficiencia del mercado de acciones español"
A. Peiró. Diciembre 1990.

WP-EC 90-06 "La coordinación de políticas fiscales en el marco de una unión económica y monetaria"
J.E. Boscá, V. Orts. Diciembre 1990.

WP-EC 91-01 "Medición de la segregación ocupacional en España: 1964-1988"
M. Sánchez. Mayo 1991.

WP-EC 91-02 "Capital Adequacy in the New Europe"
E.P.M. Gardener. Mayo 1991.

WP-EC 91-03 "Determinantes de la renta de los hogares de la Comunidad Valenciana. Una aproximación empírica."
M.L. Molto, C. Peraita, M. Sánchez, E. Uriel. Mayo 1991.

WP-EC 91-04 "Un Modelo para la Determinación de Centros Comerciales en España".
A. Peiró, E. Uriel. Septiembre 1991.

WP-EC 91-05 "Exchange Rate Dynamics. Cointegration and Error Correction Mechanism".
M.A. Camarero. Septiembre 1991.

WP-EC 91-06 "Aplicación de una Versión Generalizada del Lema de Shephard con Datos de Panel al Sistema Bancario Español".
R. Domenech. Septiembre 1991.