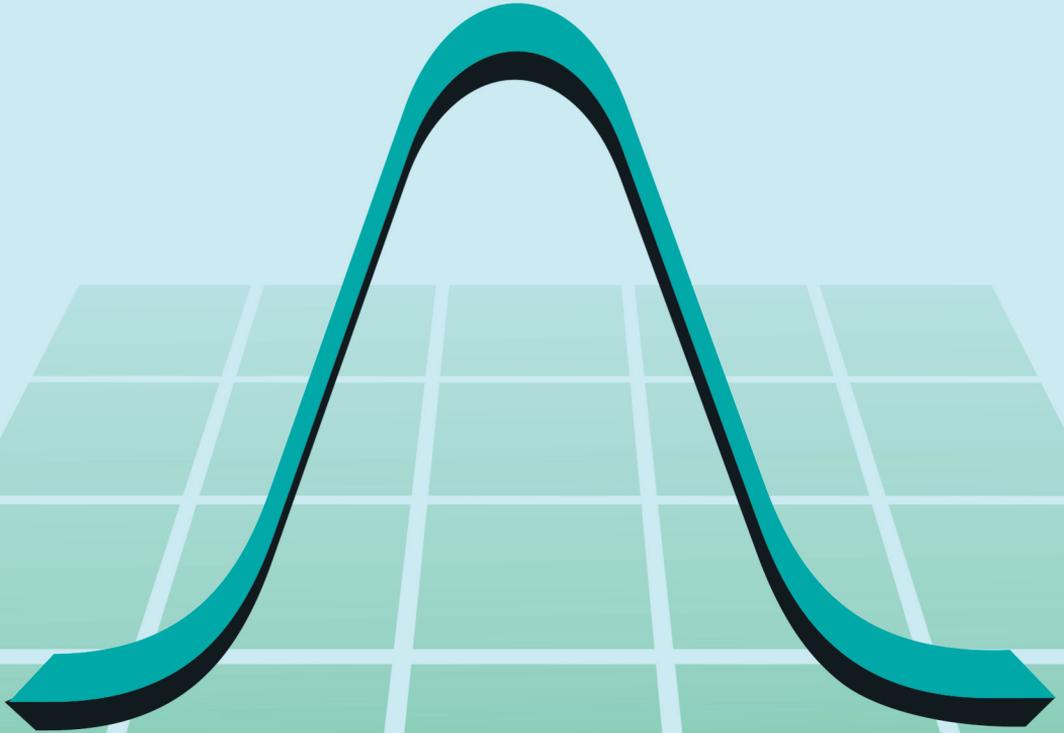


Paulo Roberto Medeiros de Azevedo



Introdução à **Estatística**

3ª edição


edufnr



REITORA

Ângela Maria Paiva Cruz

VICE-REITOR

José Daniel Diniz Melo

DIRETORIA ADMINISTRATIVA DA EDUFERN

Luis Passeggi (Diretor)
Wilson Fernandes (Diretor Adjunto)
Judithe Albuquerque (Secretária)

CONSELHO EDITORIAL

Luis Álvaro Sgadari Passeggi (Presidente)
Ana Karla Pessoa Peixoto Bezerra
Anna Emanuella Nelson dos S. C. da Rocha
Anne Cristine da Silva Dantas
Christianne Medeiros Cavalcante
Edna Maria Rangel de Sá
Eliane Marinho Soriano
Fábio Resende de Araújo
Francisco Dutra de Macedo Filho
Francisco Wildson Confessor
George Dantas de Azevedo
Maria Aniolly Queiroz Maia
Maria da Conceição F. B. S. Passeggi
Maurício Roberto Campelo de Macedo
Nedja Suely Fernandes
Paulo Ricardo Porfírio do Nascimento
Paulo Roberto Medeiros de Azevedo
Regina Simon da Silva
Richardson Naves Leão
Rosires Magali Bezerra de Barros
Tânia Maria de Araújo Lima
Tarcísio Gomes Filho
Teodora de Araújo Alves

EDITORAÇÃO

Helton Rubiano de Macedo (editor)
Paula Frassinetti dos Santos (editora assistente)
Alva Medeiros da Costa (supervisora Editorial)

REVISÃO

Wildson Confessor (coordenador)
Alyne Scott (colaboradora)
Iza Nobre (colaboradora - normalização)

DESIGN EDITORIAL

Michele Holanda (coordenadora)
Edson Lima (capa)
Erinaldo Silva de Sousa (miolo)

Paulo Roberto Medeiros de Azevedo

Introdução à Estatística



Coordenadoria de Processos Técnicos
Catálogo da Publicação na Fonte.UFRN / Biblioteca Central Zila Mamede

Azevedo, Paulo Roberto Medeiros de.

Introdução à estatística [recurso eletrônico] / Paulo Roberto Medeiros de Azevedo. - 3. ed. - Natal, RN : EDUFRN, 2016.

2,8 Mb ; PDF

ISBN 978-85-425-0601-3

Modo de acesso: <http://repositorio.ufrn.br>

1. Probabilidade. 2. Análise de regressão. 3. Estatística matemática. II. Título.

RN/UF/BCZM

2016/30

CDD 519.2

CDU 519.2

Sumário

Prefácio, 9

Capítulo 1

Introdução à probabilidade, 11

- 1.1 Alguns resultados básicos de probabilidade, 11
- 1.2 Probabilidade condicional, 21
- 1.3 Eventos independentes, 23
- 1.4 Teorema da probabilidade total, 28
- 1.5 Teorema de Bayes, 30

Capítulo 2

Variáveis aleatórias, 37

- 2.1 Variável aleatória discreta, 39
- 2.2 Variável aleatória contínua, 40
- 2.3 Distribuição conjunta de uma variável aleatória discreta bidimensional, 46
- 2.4 Variáveis aleatórias discretas independentes, 51
- 2.5 Valor esperado de uma variável aleatória discreta, 56
- 2.6 Variância de uma variável aleatória, 61
- 2.7 Coeficiente de correlação, 66
- 2.8 Função de distribuição acumulada, 68

Capítulo 3

Algumas distribuições importantes, 80

- 3.1 Distribuições discretas, 80
 - 3.1.1 A distribuição de Bernoulli, 80
 - 3.1.2 A distribuição Binomial, 82
 - 3.1.3 A distribuição Hipergeométrica, 84
 - 3.1.4 A distribuição de Poisson, 86
 - 3.1.5 A distribuição de Poisson e a distribuição Binomial, 90

- 3.2 Distribuições contínuas, 94
 - 3.2.1 A distribuição Uniforme, 94
 - 3.2.2 A distribuição Exponencial, 96
 - 3.2.3 A distribuição Normal, 97
 - 3.2.4 A distribuição Qui-quadrado, 101
 - 3.2.5 A distribuição t de Student, 102
 - 3.2.6 A distribuição F, 104

Capítulo 4

Introdução à inferência estatística, 112

- 4.1 População e amostra, 112
- 4.2 Amostra aleatória, 112
- 4.3 Estatísticas e parâmetros, 113
- 4.4 Distribuições amostrais, 113
- 4.5 Distribuição amostral da média, 115
- 4.6 Distribuição amostral da proporção, 117

Capítulo 5

Estimação, 121

- 5.1 Estimação por ponto, 121
- 5.2 Estimação por intervalo, 122

Capítulo 6

Distribuição de frequências, 127

- 6.1 Introdução, 127
- 6.2 Número de classes, 133
- 6.3 Representação gráfica, 136

Capítulo 7

Medidas de tendência central e separatrizes, 142

7.1 Média aritmética, 142

7.2 Mediana, 145

7.3 Separatrizes, 159

Capítulo 8

Medidas de variabilidade, 154

8.1 Principais medidas de variabilidade absoluta, 155

8.2 Medidas de variabilidade relativa, 160

8.3 Esquema dos cinco números e Box-plot, 163

Capítulo 9

Testes de hipóteses: primeiras ideias, 166

9.1 Hipótese estatística, 169

9.2 Erros do tipo I e do tipo II, 167

9.3 Determinação da região de rejeição, 168

9.4 Passos para a construção de um teste de hipóteses, 168

Capítulo 10

Regressão linear simples, 179

10.1 Relação entre variáveis, 179

10.2 Modelo de regressão linear simples, 180

10.3 Método de mínimos quadrados, 181

10.4 Estimadores de mínimos quadrados, 182

10.5 Resíduos, 185

10.6 Algumas propriedades da regressão linear, ajustada pelo método de mínimos quadrados, 187

- 10.7 Inferências sobre β_1 , 189
- 10.8 Estimador da variância de b_1 , 189
- 10.9 Intervalo de confiança para β_1 , 190
- 10.10 Teste sobre β_1 , 192
- 10.11 Inferências sobre β_0 , 193
- 10.12 Intervalo de confiança para β_0 , 194
- 10.13 Predições, 195
- 10.14 Intervalo de confiança para $E(Y_h)$, 196
- 10.15 Intervalo de predição para uma nova observação, 196
- 10.16 Partição da soma de quadrados total, 198
- 10.17 Graus de liberdade, 201
- 10.18 Quadrado médio, 202
- 10.19 Tabela de análise de variância, 203
- 10.20 O coeficiente de determinação, 204
- 10.21 Análise de adequação do modelo, 207

REFERÊNCIAS, 229

APÊNDICE, 230

Prefácio

Estas notas de aula já tinham sido publicadas anteriormente, por meio da coleção SALA DE AULA, da Cooperativa Cultural – UFRN. A ideia inicial surgiu com a reformulação do programa da disciplina “Elementos de Matemática e Estatística”, que era oferecida para o curso de Psicologia. Com a mudança, evidenciou-se a necessidade de um texto para o novo programa, resultando então na elaboração destas notas. O que agora realizamos, entretanto, refere-se à inclusão de alguns tópicos relacionados às variáveis aleatórias contínuas e de algumas das suas principais distribuições, bem como a inserção de um capítulo de regressão linear simples. Este último é resultado de um resumo do primeiro capítulo de outras notas de aula, cujo título é “Modelos de Regressão Linear”, que elaboramos para a disciplina “Análise de Regressão”, do Departamento de Estatística.

Além desses acréscimos, também corrigimos erros. Neste ponto, aproveitamos para fazer um agradecimento especial aos colegas de departamento Dione Maria Valença, Franciné dos Santos Pessoa e Francisco Venâncio Moura, pela realização da revisão ortográfica e por outras relevantes

sugestões, que, com certeza, contribuíram para um significativo enriquecimento deste trabalho.

Os assuntos de variáveis contínuas aqui incluídos ficaram limitados a algumas definições e a certas observações, buscando realizar um paralelo entre os casos contínuos e discretos, tendo em vista que priorizamos as distribuições discretas para a formulação dos conceitos mais básicos de probabilidade. Assim, continuamos com a nossa compreensão inicial, que é a de ministrar disciplinas para outros cursos da universidade, passando aqueles conhecimentos mais fundamentais de estatística de uma maneira bem simples, porém com a certeza de estar contribuindo para o aprendizado de outros resultados, que muito comumente são utilizados em aplicações diversas por alunos de todas as áreas do conhecimento.

Dessa forma, entendemos que este material pode se adequar a várias disciplinas que são oferecidas pelo Departamento de Estatística, mantendo, no entanto, as características de notas de aula.

Natal, julho de 2015.

Paulo Roberto Medeiros de Azevedo

Capítulo 1

Introdução à probabilidade

1.1 Alguns resultados básicos de probabilidade

Ao se estudar um fenômeno através de experimentação, o que normalmente se faz é construir um modelo matemático, determinístico ou probabilístico, que sirva para descrever o respectivo fenômeno, sendo que:

a) Em um experimento determinístico, conhecidas todas as “amarrações”, o resultado final é garantido pelas condições sob as quais ele é executado, podendo ser descrito por uma lei matemática. Como, por exemplo, o modelo que serve para descrever a intensidade de uma força “F” sobre um corpo com certa massa “m”, que se encontra em uma superfície totalmente lisa (sem atrito) e com uma aceleração “a”, é dado por $F = m \times a$. Assim, podemos ver que “F” é determinada pelos valores de “m” e de “a”.

b) Em um experimento não determinístico (ou probabilístico), conhecidas também todas as “amarrações”, temos como prognosticar o que poderá ocorrer, mas jamais garantir o que realmente irá acontecer; ou seja, podemos

somente determinar o comportamento probabilístico do resultado observável.

Exemplos de experimentos não determinísticos

1. Jogar um dado e observar o número mostrado na face de cima.

2. Em uma classe de 30 alunos, verificar quantos têm QI acima de 100.

Para determinar o comportamento probabilístico de um experimento não determinístico precisamos, em primeiro lugar, estabelecer seu espaço amostral “S”, que por definição é o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento.

Exemplos

1. Do experimento de jogar um dado e observar o número mostrado na face de cima, temos:
 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

2. Com relação ao experimento de verificar, em uma classe de 30 alunos, quantos têm QI acima de 100, teremos: $S = \{0, 1, 2, \dots, 30\}$.

Eventos

Definição: evento é um subconjunto do espaço amostral.

Referindo-nos outra vez ao experimento de verificar, em uma classe de 30 alunos, quantos têm QI acima de 100, consideremos, por exemplo, os eventos:

A: pelo menos 20 alunos têm QI acima de 100.

B: no máximo 07 alunos têm QI acima de 100.

Ou seja:

$$A=\{20,21,22,\dots,30\} \text{ e } B=\{0,1,2,\dots,7\}.$$

Observação: considerando-se que A e B são dois eventos, então:

1. $A \cup B$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, A ou B (ou ambos) ocorrerem;
2. $A \cap B$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, A e B ocorrerem;
3. \bar{A} será o evento que ocorrerá se, e somente se, A não ocorrer (dizemos que \bar{A} é o complementar de A).

Eventos mutuamente excludentes

Definição: dois eventos A e B são denominados mutuamente excludentes se eles não puderem ocorrer juntos, ou seja, se a interseção entre eles for o vazio ($A \cap B = \emptyset$).

Temos, do último exemplo, que os eventos $A = \{20, 21, 22, \dots, 30\}$ e $B = \{0, 1, 2, \dots, 7\}$ são mutuamente excludentes, pois $A \cap B = \emptyset$.

Definição de probabilidade

Seja S um espaço amostral associado a um experimento. Para cada evento A, associa-se a um número real representado por $P(A)$, denominado de probabilidade de A, que satisfaz às seguintes propriedades:

- 1) $0 \leq P(A) \leq 1$.
- 2) $P(S) = 1$.
- 3) Se A e B forem eventos mutuamente excludentes ($A \cap B = \emptyset$), então: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

- 4) Se A_1, A_2, \dots, A_n forem eventos dois a dois mutuamente excludentes, então:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

Principais consequências das propriedades apresentadas:

- a) $P(\emptyset)=0$ e $P(\bar{A})=1-P(A)$, sendo \emptyset o vazio e \bar{A} o complementar de A .
- b) Se A e B são dois eventos quaisquer, então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \quad (1.1)$$

- c) Se A, B e C são eventos quaisquer, então:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

- d) Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.

Probabilidades nos espaços amostrais finitos

Consideremos um espaço amostral $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$. A cada evento simples $\{s_i\}$ associa-se $P(s_i)$, denominada de probabilidade de $\{s_i\}$. Assim, a probabilidade de um evento “A” qualquer é dada pela soma das probabilidades dos vários eventos simples que constituem “A”, ou seja, $P(A) = \sum_i P(s_i)$, sendo a soma estendida a todos os $s_i \in A$.

Exemplo 1.1

Seja $S = \{a, b, c, d, e, f\}$, com $P(a) = 1/16$, $P(b) = 1/16$, $P(c) = 1/8$, $P(d) = 3/16$, $P(e) = 1/4$ e $P(f) = 5/16$. Considerando, por exemplo, os eventos: $A = \{a, c, e\}$, $B = \{c, d, e, f\}$ e $C = \{b, c, f\}$, teremos: $P(A) = 1/16 + 1/8 + 1/4 = 7/16$, $P(B) = 1/8 + 3/16 + 1/4 + 5/16 = 14/16$ e, de maneira análoga, encontramos $P(C) = 8/16$.

Espaços amostrais finitos equiprováveis

Consideremos novamente um espaço amostral finito $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, e seja A um evento constituído de K elementos, $1 \leq k \leq n$. Se todos os elementos de S forem

igualmente prováveis, então $P(A)=K/n$, ou seja, nesse caso dizemos que a probabilidade de A é:

$$P(A)= \text{n}^\circ \text{ de casos favoráveis a A} / \text{n}^\circ \text{ total de casos.}$$

Observação: escolher ao acaso (ou aleatoriamente) um objeto dentre n significa dizer que o espaço amostral é equiprovável e, portanto, quer dizer que cada objeto tem a mesma probabilidade de ser escolhido, a saber, $1/n$.

Exemplo 1.2

Numa classe há cinco primeiranistas, quatro segundanistas, oito terceiranistas e três concluintes. Se um estudante é escolhido ao acaso para representar a classe, qual será a probabilidade desse ser terceiranista ou do último ano?

Definindo os eventos:

T: o aluno é terceiranista e C: o aluno é concluinte, teremos: $P(\text{do aluno ser terceiranista ou do último ano}) =$

$$P(T \cup C) = P(T) + P(C) = \frac{8}{20} + \frac{3}{20} = \frac{11}{20}.$$

Exemplo 1.3

Suponha um grupo de 100 pessoas, no qual algumas têm psicose (P), enquanto outras têm neurose (N), sendo algumas idosas (I), enquanto outras são adolescentes (A). A tabela seguinte dá a classificação das referidas pessoas. Escolhendo-se ao acaso uma pessoa desse grupo, qual será a probabilidade dessa ser idosa ou ter alguma neurose?

	P	N	Total
A	1	29	30
I	2	68	70
Total	3	97	100

Temos:

$P(\text{da pessoa escolhida ser idosa ou ter alguma neurose}) =$

$$P(I \cup N) = P(I) + P(N) - P(I \cap N) = \frac{70 + 97 - 68}{100} = \frac{99}{100}.$$

Problemas

1. Um cartão é retirado ao acaso dentre 50 cartões numerados de 1 a 50. Encontre a probabilidade de o número no cartão escolhido ser divisível por 5.

2. Das 10 alunas de uma classe, duas são superdotadas e uma tem QI muito abaixo da média. Se uma delas é escolhida ao acaso, qual será a probabilidade dessa ser superdotada ou ter QI muito abaixo da média?

3. Supor uma classe onde três alunos são considerados com capacidade de liderança, 16 não têm essa capacidade e dois são não classificáveis. Escolhendo-se um aluno ao acaso, qual será a probabilidade deste ter capacidade de liderança ou ser não classificável.

4. O seguinte grupo de pessoas está numa sala: 5 homens maiores de 21 anos, 4 homens com menos de 21 anos, 6 mulheres maiores de 21 anos e 3 mulheres menores de 21 anos. Uma pessoa é escolhida ao acaso. Calcular a probabilidade da pessoa escolhida ser mulher ou ter menos de 21 anos.

5. Considere o lançamento de dois dados. Sejam os eventos A: a soma dos números obtidos é igual a 9 e B: o número no primeiro dado é maior ou igual a 4.

- a) Encontre os elementos de A e de B;
- b) Obtenha $A \cup B$, $A \cap B$ e \bar{B} ;
- c) Determine as probabilidades dos eventos do item b.

6. Três cavalos A, B, C estão numa corrida. Sabe-se que A é duas vezes mais provável de ganhar que B, e este é duas vezes mais que C. Determinar as probabilidades de ganhar dos cavalos A, B e C.

7. Em uma cidade onde se publicam três jornais – A, B e C –

constatou-se que dentre 1000 famílias assinam: A-470; B-420; C-315; A e B-110; A e C-220; B e C-140 e 75 assinam os três. Escolhendo-se ao acaso uma família, qual a probabilidade de que ela:

- a) Não assine nenhum dos três jornais;
- b) Assine apenas um dos três jornais;
- c) Assine pelo menos dois jornais.

8. Verificar as propriedades a, b, c e d, que se localiza no tópicó “Definição de propabilidade”.

1.2 Probabilidade condicional

Considerando o exemplo 1.3, suponhamos que se verificou que a pessoa escolhida é idosa. Neste caso, qual será a probabilidade dessa pessoa ter psicose? Como temos agora a informação de que a pessoa escolhida é idosa, então nosso conjunto de resultados possíveis passa a ser o conjunto das pessoas idosas. Assim:

$P(\text{da pessoa ter psicose, dada a informação de que é idosa}) =$

$$= \frac{\text{n}^\circ \text{ de pessoas com psicose, dentre as idosas}}{\text{n}^\circ \text{ total de pessoas idosas}} = \frac{2}{70} = \frac{1}{35}.$$

De maneira geral, para dois eventos quaisquer A e B, sendo $P(B) > 0$, definimos a probabilidade condicional de A, dado que ocorreu o evento B, denotada por $P(A|B)$, como sendo:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (1.2)$$

Dessa forma, o exemplo anterior também poderá ser resolvido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & P(\text{da pessoa ter psicose, dada a informação de que é idosa}) = \\ & = \frac{P(\text{da pessoa ter psicose e ser idosa})}{P(\text{da pessoa ser idosa})} = \frac{\frac{2}{100}}{\frac{70}{100}} = \frac{2}{70} = \frac{1}{35}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.4

Em certa cidade, 40% da população têm cabelos castanhos, 25% olhos castanhos e 15% têm cabelos e olhos castanhos. Se uma pessoa da cidade é selecionada aleatoriamente e verifica-se que a mesma tem cabelos castanhos, qual a probabilidade de ter também olhos castanhos?

Definindo os eventos:

O: a pessoa tem olhos castanhos e C: a pessoa tem cabelos castanhos, teremos:

$$P(O|C) = \frac{P(O \cap C)}{P(C)} = \frac{0,15}{0,40} = \frac{3}{8}.$$

Supondo que a pessoa selecionada tivesse olhos castanhos, qual seria a probabilidade desta ter também cabelos castanhos? Neste caso teremos:

$$P(C|O) = \frac{P(O \cap C)}{P(O)} = \frac{0,15}{0,25} = \frac{3}{5}.$$

Observação: no caso de probabilidade condicionada, também se verifica:

- 1) $0 \leq P(A|B) \leq 1$.
- 2) $P(S|B) = 1$.
- 3) $P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1 | B) + P(A_2 | B)$, se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

1.3 Eventos independentes

Exemplo 1.5

Uma urna contém duas bolas brancas e três vermelhas. Retirando-se duas bolas com reposição, ou seja, a primeira bola é reposta na urna antes da extração da segunda, tem-se extrações independentes, pois o resultado de uma extração não tem influência no resultado da outra. Assim, por exemplo:

$$P(\text{sair bola branca na 2ª extração} | \text{saiu bola branca na 1ª}) \\ = \frac{2}{5} = P(\text{sair bola branca na 2ª extração}).$$

De forma geral, diz-se que dois eventos, A e B, são independentes se $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$. Por outro lado, da relação (1.2), obtemos:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B). \quad (1.3)$$

e de maneira análoga, de $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, tiramos:

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) \quad (1.4)$$

Portanto, se dois eventos A e B são independentes, tem-se por (1.3) ou (1.4) que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, ou seja:

Definição: dois eventos A e B são independentes se, e somente se, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Em outras palavras, a definição anterior nos dá uma forma alternativa de expressar quando dois eventos são independentes.

Exemplo 1.6

Lança-se uma moeda 3 vezes. Sejam os eventos A: ocorrem três caras ou três coroas; B: ocorrem ao menos duas caras e C: ocorrem no máximo duas caras. Dos pares (A,B), (A,C) e (B,C) quais são independentes? Considerando que "c" representa cara e " \bar{c} " coroa, temos que o espaço amostral para esse experimento é

$S = \{ccc, cc\bar{c}, c\bar{c}c, \bar{c}cc, \bar{c}\bar{c}c, \bar{c}c\bar{c}, c\bar{c}\bar{c}, \bar{c}\bar{c}\bar{c}\}$, e assim obtemos:

$$A = \{ccc, \bar{c}\bar{c}\bar{c}\}, B = \{cc\bar{c}, c\bar{c}c, \bar{c}cc, ccc\},$$

$$C = \{\bar{c}\bar{c}\bar{c}, c\bar{c}\bar{c}, \bar{c}c\bar{c}, \bar{c}\bar{c}c, \bar{c}cc, c\bar{c}c, cc\bar{c}\},$$

$$A \cap B = \{ccc\}, A \cap C = \{\bar{c}\bar{c}\bar{c}\} \text{ e } B \cap C = \{cc\bar{c}, c\bar{c}c, \bar{c}cc\}$$

Logo:

$$P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{7}{8}, P(A \cap B) = \frac{1}{8}, P(A \cap C) = \frac{1}{8} \text{ e}$$

$$P(B \cap C) = \frac{3}{8}.$$

Portanto, teremos:

$$P(A).P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = P(A \cap B), \text{ ou seja, podemos concluir}$$

que A e B são independentes. Temos também: $P(A).P(C) =$

$\frac{1}{4} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{32} \neq P(A \cap C)$. Assim, concluímos que A e C não são

independentes. Procedendo de maneira equivalente, concluímos que B e C não são independentes

.

Exemplo 1.7

Suponhamos que em certa comunidade 5% das pessoas têm algum tipo de neurose e que 35% de sua população sejam de pessoas de cor branca. Qual será a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ter alguma neurose e ser de cor branca? Definindo os eventos: N: a pessoa tem alguma neurose e B: a pessoa é de cor branca, teremos:

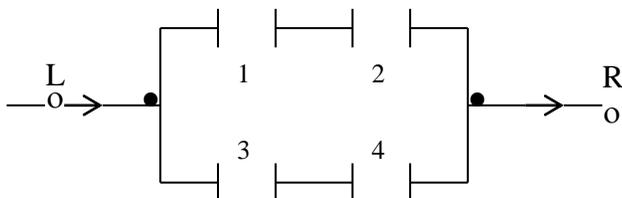
$$\begin{aligned} &P(\text{da pessoa escolhida ter alguma neurose e ser de cor branca}) \\ &= P(N \cap B) = (\text{Por independência}) = P(N) \cdot P(B) = 0,05 \times 0,35 = \\ &= 0,0175 . \end{aligned}$$

Considerando ainda o exemplo apresentado, qual seria a probabilidade da pessoa escolhida ter alguma neurose ou ser de cor branca? Neste caso teremos:

$$\begin{aligned} &P(\text{da pessoa ter alguma neurose ou ser de cor branca}) \\ &= P(N \cup B) = P(N) + P(B) - P(N \cap B) = 0,05 + 0,35 - 0,0175 = 0,3825 \end{aligned}$$

Exemplo 1.8

A probabilidade de fechamento de cada relé do circuito apresentado na figura seguinte é p . Se todos os relés funcionarem independentemente, qual será a probabilidade de que haja corrente entre os terminais L e R?



Definindo os eventos:

r_i : O i -ésimo relé está fechado, $i=1, 2, 3, 4$, teremos:

$$P(\text{haver corrente entre L e R}) = P[(r_1 \cap r_2) \cup (r_3 \cap r_4)] =$$

$$= P(r_1 \cap r_2) + P(r_3 \cap r_4) - P[(r_1 \cap r_2) \cap (r_3 \cap r_4)] =$$

$$(\text{Por independência}) = P(r_1).P(r_2) + P(r_3).P(r_4) -$$

$$P(r_1).P(r_2).P(r_3).P(r_4) = p^2 + p^2 - p^4 = 2p^2 - p^4.$$

Observação: Dizemos que n eventos A_1, A_2, \dots, A_n são mutuamente independentes se, e somente se:

$$P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \dots \cap A_{ik}) = P(A_{i1})P(A_{i2}) \dots P(A_{ik})$$

para $k=2, 3, \dots, n$.

Partição de espaço amostral

Definição: os eventos B_1, B_2, \dots, B_k formam uma partição de um espaço amostral S , se:

- a) $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j$;
- b) $\bigcup_{i=1}^k B_i = S$;
- c) $P(B_i) > 0, \forall i$.

1.4 Teorema da probabilidade total

Se B_1, B_2, \dots, B_k formam uma partição de um espaço amostral S e A é um evento qualquer de S , então:

$$\begin{aligned} P(A) &= P[(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_k)] = \\ &= \sum_{i=1}^k P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^k P(A|B_i)P(B_i). \end{aligned}$$

Exemplo 1.9

Uma determinada peça é manufaturada por três fábricas: 1, 2 e 3. Sabe-se que 1 produz o dobro de peças de 2, e 2 e 3 produzem o mesmo número de peças. Sabe-se também que 2% das peças produzidas por 1 e por 2 são defeituosas, enquanto que 4% das produzidas por 3 são defeituosas. Se todas as peças produzidas forem colocadas em um depósito e depois uma peça for extraída ao acaso, qual será a probabilidade de que essa peça seja defeituosa?

Definindo os eventos:

D: Peça defeituosa,

F_i : Peça produzida pela i -ésima fábrica, $i=1, 2, 3$.

Podemos escrever:

$$D=(D \cap F_1) \cup (D \cap F_2) \cup (D \cap F_3).$$

Assim:

$$P(D)=\sum_{i=1}^3 P(D \cap F_i) =\sum_{i=1}^3 P(D|F_i)P(F_i).$$

Dos dados do problema, temos:

$$P(F_1)=2P(F_2) \text{ e } P(F_2)=P(F_3).$$

Então, pela equação:

$$P(F_1) + P(F_2) + P(F_3)=1.$$

Obteremos:

$$P(F_1)=1/2 \text{ e } P(F_2)=P(F_3)=1/4.$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|F_1)P(F_1) + P(D|F_2)P(F_2) + P(D|F_3)P(F_3) = \\ &= (0,02)(1/2) + (0,02)(1/4) + (0,04)(1/4) = 0,025. \end{aligned}$$

1.5 Teorema de Bayes

Seja B_1, B_2, \dots, B_k uma partição do espaço amostral S e seja A um evento qualquer de S . De acordo com a definição de probabilidade condicionada, pode-se escrever:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^k P(A|B_j)P(B_j)}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Exemplo 1.10

Considerando o Exemplo 1.9, suponha que uma peça seja retirada do depósito e se verifique que é defeituosa. Qual a probabilidade de que tenha sido produzida na fábrica 1?

Neste caso, pede-se:

$$P(F_1|D) = \frac{P(D|F_1)P(F_1)}{\sum_{j=1}^3 P(D|F_j)P(F_j)} = \frac{P(D|F_1)P(F_1)}{P(D)} = \frac{(0,02)(1/2)}{0,025} = 0,4$$

Problemas

9. Suponha que em certa universidade 10% dos alunos sejam superdotados e 57% sejam do sexo feminino. Escolhendo-se um aluno ao acaso, qual a probabilidade deste ser superdotado ou ser do sexo masculino?

10. A classe "B" de uma escola de 2º grau contém 20 alunos, dos quais 8 não gostam de matemática, enquanto que a classe "C" contém 18 alunos, dos quais 6 não gostam de matemática. Se um aluno é escolhido aleatoriamente de cada classe, qual a probabilidade que ambos não gostem de matemática?

11. Sejam A e B eventos com $P(A)=3/8$, $P(B)=3/10$ e $P(A \cup B)=9/20$. Encontre $P(A | B)$ e $P(B | A)$.

12. A probabilidade de que um aluno "A" resolva um certo problema é de $1/3$, e a probabilidade de que um aluno B resolva o mesmo é de $3/5$. Se os dois tentam resolvê-lo isoladamente, qual a probabilidade de:

- a) Ambos resolverem?
- b) Ao menos um resolver?

13. Sejam A e B dois eventos associados a um experimento. Suponha que:

$P(A)=0,4$, enquanto $P(A \cup B)=0,7$. Seja $P(B)=x$.

- a) Para que valor de x os eventos A e B serão mutuamente excludentes?
- b) Para que valor de x os eventos A e B serão independentes?

14. Se dois eventos A e B são mutuamente excludentes com $P(A)=P(B)=1/3$, determine $P(A \cup B)$ e $P(A|B)$.

15. As probabilidades que dois eventos independentes, A e B, ocorram são $2/3$ e $3/5$, respectivamente. Qual a probabilidade:

- a) Que nenhum desses eventos ocorra?
- b) Que pelo menos um desses eventos ocorra?

16. Uma urna contém 4 bolas brancas, 4 vermelhas e 2 azuis. Outra urna contém 5 bolas brancas, 3 vermelhas e 3 azuis. Extrai-se uma bola de cada urna. Qual a probabilidade de que sejam da mesma cor?

17. A probabilidade de que a porta de uma casa esteja trancada à chave é de $\frac{3}{5}$. Há 10 chaves em um chaveiro. Qual a probabilidade de que um indivíduo entre na casa, podendo utilizar, se necessário, apenas uma das chaves, tomada ao acaso do chaveiro?

18. Uma urna contém 3 bolas brancas e 4 azuis. Uma outra contém 4 brancas e 5 azuis. Passa-se uma bola da primeira para a segunda urna e em seguida extrai-se uma bola da segunda urna. Qual a probabilidade de ser branca?

19. Tem-se 3 engradados de motores elétricos. No engradado I tem-se 5 motores de 1 Hp, 3 de $\frac{1}{2}$ Hp e 2 de $\frac{1}{3}$ de Hp. No engradado II tem-se 2 motores de $\frac{1}{2}$ Hp, 2 de 1 Hp e 6 de $\frac{1}{3}$ de Hp. No engradado III tem-se 4 motores de $\frac{1}{3}$ de Hp, 2 de $\frac{1}{2}$ Hp, 2 de $\frac{1}{6}$ de Hp e 4 de 1 Hp. Retirando-se um motor ao acaso de um engradado, também sorteado aleatoriamente, qual a probabilidade de ser de $\frac{1}{3}$ de Hp?

20. Duas lâmpadas defeituosas são misturadas com 2 lâmpadas boas. As lâmpadas são testadas, uma a uma, até que 2

defeituosas sejam encontradas. Qual a probabilidade de que a última defeituosa seja encontrada no terceiro teste?

21. Três fábricas fornecem equipamentos de precisão para o laboratório de química de uma universidade. Apesar de serem aparelhos de precisão existe uma pequena chance de subestimação ou superestimação das medidas efetuadas. As tabelas a seguir apresentam o comportamento do equipamento produzido em cada fábrica:

Fábrica I	Subestima	Exata	Superestima
Probabilidade	0,01	0,98	0,01

Fábrica II	Subestima	Exata	Superestima
Probabilidade	0,005	0,98	0,015

Fábrica III	Subestima	Exata	Superestima
Probabilidade	0,00	0,99	0,01

As fábricas I, II e III fornecem, respectivamente, 20%, 30% e 50% dos aparelhos utilizados. Escolhe-se, ao acaso, um desses aparelhos e pergunta-se: qual a probabilidade de:

- a) Haver superestimação de medidas?

b) Não haver subestimação das medidas efetuadas?

c) Dando medidas exatas, ter sido fabricado em III?

d) Ter sido produzido por I, dado que não subestima as medidas?

22. Um médico desconfia de que um paciente tenha tumor no abdômen, pois isto ocorreu em 70% dos casos similares que tratou. Se o paciente de fato tiver o tumor, o exame ultrassom o detectará com probabilidade 0,9. Entretanto, se ele não tiver, o exame pode, erroneamente, indicar que tem com probabilidade 0,1. Se o exame detectou um tumor, qual é a probabilidade do paciente tê-lo de fato?

23. Numa certa região, a probabilidade de chuva em um dia qualquer de primavera é de 0,1. Um meteorologista da TV acerta suas previsões em 80% dos dias em que chove e em 90% dos dias em que não chove.

a) Qual é a probabilidade do meteorologista acertar sua previsão?

b) Se houve acerto na previsão feita, qual a probabilidade de ter sido um dia de chuva?

24. Das pacientes de uma clínica de ginecologia com idade acima de 40 anos, 60% são ou foram casadas, e 40% são solteiras. Sendo solteira, a probabilidade de ter tido um distúrbio hormonal no último ano é de 10%, enquanto que para as demais essa probabilidade aumenta para 30%. Pergunta-se:

a) Qual a probabilidade de uma paciente escolhida ao acaso ter tido um distúrbio hormonal?

b) Se a paciente sorteada tiver distúrbio hormonal, qual a probabilidade de ser solteira?

c) Se escolhermos duas pacientes ao acaso e com reposição, qual é a probabilidade de pelo menos uma ter o distúrbio?

Capítulo 2

Variáveis aleatórias

Quando, na prática, desejamos investigar algum fenômeno probabilístico estamos, na realidade, interessados em estudar a distribuição de uma ou mais variáveis. Assim, por exemplo, podemos estar interessados em estudar as distribuições dos QIs, do grau de instrução, da altura etc., das pessoas de uma certa população, que são distribuições de variáveis aleatórias. Antes, porém, de uma definição formal de variável aleatória, vejamos o seguinte exemplo:

Consideremos o lançamento de uma moeda duas vezes. Definamos a variável aleatória X = número de caras obtidas nos dois lançamentos. Neste caso, obtemos a seguinte tabela:

Resultados possíveis	Probabilidades	Valor de X
c c	1/4	2
c \bar{c}	1/4	1
\bar{c} c	1/4	1
\bar{c} \bar{c}	1/4	0

Temos que $X=2$, com probabilidade $1/4$, pois $X=2$ se, e somente se, ocorre o resultado cc ; $X=1$, com probabilidade $1/4+1/4=1/2$, pois $X=1$ se, e somente se, ocorrem os resultados $c\bar{c}$ ou $\bar{c}c$, que são mutuamente excludentes, e, por último, temos que $X=0$, com probabilidade $1/4$, pois $X=0$ se, e somente se, ocorre o resultado $\bar{c}\bar{c}$.

Distribuindo-se em uma tabela os possíveis valores de X , com suas respectivas probabilidades, obtém-se:

x	0	1	2
P(X=x)	1/4	1/2	1/4

onde a letra minúscula x representa os valores da variável aleatória X e $P(X=x)$ as respectivas probabilidades.

De acordo com esse exemplo, temos:

Definição: seja S um espaço amostral associado a um determinado experimento. Uma função que associe a cada elemento $s \in S$ um número real é denominada de variável aleatória (v.a.).

2.1 Variável aleatória discreta

Definição: se o conjunto dos possíveis valores de uma variável aleatória X for enumerável, dizemos que X é uma variável aleatória discreta, e a tabela que associa a cada valor de X sua respectiva probabilidade é denominada de distribuição de probabilidade de X .

Do exemplo dos dois lançamentos da moeda temos que X é discreta e sua distribuição de probabilidade é dada pela tabela anterior.

Observação: para cada resultado possível x_i , o número $P(x_i)=P(X=x_i)$ é denominado de probabilidade de x_i , satisfazendo:

$$\text{a) } P(x_i) \geq 0, \forall i;$$

$$\text{b) } \sum_{i=1}^{\infty} P(x_i) = 1.$$

sendo P denominada de função de probabilidade de X .

2.2 Variável aleatória contínua

Quando o conjunto dos possíveis valores de uma variável aleatória X é não enumerável, ou seja, um intervalo ou uma coleção de intervalos, dizemos que X é uma v.a. contínua. Como exemplo, suponhamos que numa pesquisa na universidade estejamos interessados na v.a. $Y = \text{QI}$ dos alunos. Neste caso podemos afirmar, a princípio, que o conjunto de resultados possíveis de Y é o intervalo $(0, 200)$, ou seja, temos que Y é uma v.a. contínua.

De maneira formal, definimos uma variável aleatória contínua, como:

Definição: dizemos que uma v.a. X é contínua quando existe uma função não negativa f , chamada de função densidade de probabilidade de X , tal que:

a) $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R};$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$

Observações:

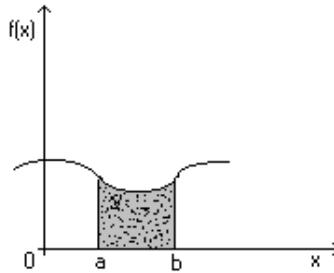
1. Nesse caso, a probabilidade de um evento $[a \leq X \leq b]$ é igual à área sob o gráfico de f entre $x=a$ e $x=b$, ou seja:

$$P(X \in [a, b]) = \int_a^b f(x) dx .$$

2. No caso contínuo, temos que $P(X=a)=0$, logo:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b).$$

3. Vejamos uma ideia do porquê da probabilidade de um evento $[a \leq X \leq b]$, no caso contínuo, ser dada pela área sob o gráfico da função densidade de probabilidade entre $x=a$ e $x=b$, conforme a figura seguinte:



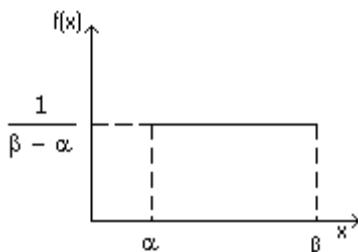
Para isso, suponhamos um experimento que consiste em escolher um ponto ao acaso no segmento de reta $[\alpha; \beta]$ e vejamos como fica a probabilidade do ponto escolhido estar num intervalo $[a, b] \subset [\alpha; \beta]$. Temos aqui que a escolha é feita ao acaso, logo o espaço amostral $S=[\alpha; \beta]$ é equiprovável e, portanto, intervalos de mesmo comprimento terão a mesma probabilidade. Definindo, então, a v.a. X como a coordenada do ponto escolhido, teremos:

$$P(X \in [a, b]) = \frac{\text{comprimento de } [a, b]}{\text{comprimento de } [\alpha, \beta]} = \frac{b - a}{\beta - \alpha}.$$

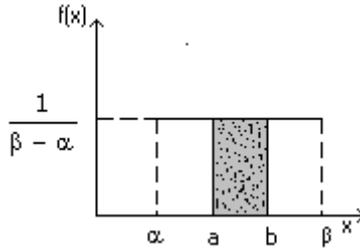
Essa probabilidade pode também ser dada através da função densidade de probabilidade, que, neste caso, é definida simplesmente por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha}, & \text{se } x \in [\alpha, \beta]; \\ 0, & \text{se } x \notin [\alpha, \beta]. \end{cases}$$

cujo gráfico é:



Assim, conforme vimos antes, a probabilidade do evento $[a \leq X \leq b]$ é dada pela área ilustrada a seguir:



Ou seja:

$$P(a \leq X \leq b) = (b-a) \cdot \frac{1}{\beta - \alpha} = \frac{\text{comprimento de } [a, b]}{\text{comprimento de } [\alpha, \beta]}.$$

Para fixar a ideia, consideremos o experimento de escolher um ponto ao acaso no segmento de reta $[0,2]$. Qual será a probabilidade do ponto escolhido estar entre 1 e $\frac{3}{2}$?

Definindo X como a coordenada do ponto escolhido, teremos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } x \in [0,2]; \\ 0, & \text{se } x \notin [0,2]. \end{cases}$$

Assim:

$$P(X \in [1, \frac{3}{2}]) = (\frac{3}{2} - 1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Exemplo 2.1

Suponhamos que uma v.a. X seja contínua, com função densidade de probabilidade (fdp) dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcular $P(X \leq 1/2)$.

Temos:

$$P(X \leq 1/2) = \int_0^{1/2} 2x \, dx = x^2 \Big|_0^{1/2} = \frac{1}{4}.$$

Exemplo 2.2

Seja X a duração da vida (em horas) de um certo tipo de lâmpada, admitindo que X seja contínua com fdp:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x^3}, & \text{se } 1500 \leq x \leq 2500; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determinar a constante K .

Nesse exemplo:

$$\int_{1500}^{2500} \frac{k}{x^3} dx = 1 \Rightarrow -\frac{k}{2x^2} \Big|_{1500}^{2500} = 1 \Rightarrow K = 7.031.250.$$

Quando definimos variável aleatória, atribuímos a um ponto amostral um único valor real. Na maioria das vezes, no entanto, há interesse em atribuir, para um mesmo ponto amostral, duas ou mais características numéricas. Assim, por

exemplo, podemos estar interessados em investigar, ao mesmo tempo, a estatura (H) e o peso (P) de uma pessoa de certa população. Neste caso, temos o par (H,P), que é considerado uma variável aleatória bidimensional.

De maneira análoga ao que falamos sobre uma v.a. unidimensional, uma v.a. bidimensional (X,Y) poderá também ser discreta ou contínua, valendo as mesmas considerações feitas anteriormente.

2.3 Distribuição conjunta de uma variável aleatória discreta bidimensional

Se (X,Y) é uma v.a. discreta bidimensional, então, a cada resultado possível (x,y), associa-se um valor $P(x,y)=P(X=x, Y=y)$, denominado função de probabilidade conjunta de X e Y, e o conjunto de todos os pares [(x,y); $P(x,y)$] chamamos de distribuição de probabilidade conjunta de X e Y, onde, como no caso da variável unidimensional, costuma-se também representar a distribuição conjunta por meio de uma tabela.

Para fixar a ideia da distribuição conjunta de duas v.a.'s discretas, vejamos:

Exemplo 2.3

Suponha que uma urna contém três bolas numeradas 1, 2, 3. Retiramos duas delas, ao acaso e com reposição. Seja X o número da primeira e Y o número da segunda bola retirada, a distribuição conjunta de X e Y é dada por:

Pares de resultados possíveis (x,y)	Probabilidades P(X=x, Y=y)
(1,1)	1/9
(1,2)	1/9
(1,3)	1/9
(2,1)	1/9
(2,2)	1/9
(2,3)	1/9
(3,1)	1/9
(3,2)	1/9
(3,3)	1/9

Temos, no entanto, uma maneira mais usual de representar a distribuição conjunta de X e Y , que é pela tabela de dupla entrada:

Y	1	2	3	$P(X=x)$
X				
1	1/9	1/9	1/9	3/9
2	1/9	1/9	1/9	3/9
3	1/9	1/9	1/9	3/9
$P(Y=y)$	3/9	3/9	3/9	1

De forma que, através dessa, obtemos também as distribuições de X e de Y , chamadas de distribuições marginais, sendo que a de X é dada pela primeira e última coluna e a de Y pela primeira e última linha da referida tabela.

Exemplo 2.4

Com relação ao exemplo 2.3, consideremos agora que as retiradas sejam feitas sem reposição, ou seja, os pares de resultados possíveis (x,y) serão $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,1)$, $(2,3)$, $(3,1)$ e $(3,2)$. Dessa forma, obteremos:

y x	1	2	3	P(X=x)
1	0	1/6	1/6	1/3
2	1/6	0	1/6	1/3
3	1/6	1/6	0	1/3
P(Y=y)	1/3	1/3	1/3	1

Nesse caso:

x	1	2	3	y	1	2	3
P(X=x)	1/3	1/3	1/3	P(Y=y)	1/3	1/3	1/3

são as distribuições marginais de X e de Y, respectivamente.

Observação: dada a distribuição conjunta de duas variáveis aleatórias X e Y, podemos obter as distribuições de funções dessas, como por exemplo, de $X+Y$, $X.Y$, X/Y etc.

Exemplo 2.5

Considerando o exemplo 2.4, vejamos como fica a distribuição da variável aleatória $Z=X.Y$. Para isso, precisamos da tabela:

(x,y)	Z=x . y	Probabilidades
(1,2)	2	1/6
(1,3)	3	1/6
(2,1)	2	1/6
(2,3)	6	1/6
(3,1)	3	1/6
(3,2)	6	1/6

E assim obtemos:

z	2	3	6
P(Z=z)	1/3	1/3	1/3

Observações:

1. Se (X,Y) é uma v.a. contínua bidimensional, tomando todos os valores em alguma região “A” do plano, então associamos a essa variável aleatória uma função densidade de probabilidade conjunta f , que satisfaz:

a) $f(x,y) \geq 0, \forall (x,y) \in A$;

b) $\int_A \int f(x, y) dx dy = 1.$

2. Se f é a fdp conjunta da variável aleatória contínua bidimensional (X,Y) , então as funções densidade de probabilidade marginal de X e de Y , respectivamente, são dadas por:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy \quad \text{e} \quad h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx.$$

2.4 Variáveis aleatórias discretas independentes

Definição: seja (X,Y) uma v.a. discreta bidimensional, dizemos que X e Y são independentes se, e somente se:

$$P(X=x, Y=y) = P(X=x) P(Y=y). \quad (2.1)$$

para todo par (x,y) .

Observações:

1. Basta que (2.1) não se verifique para um par qualquer, para que X e Y não sejam independentes. Nesses casos, diz-se que X e Y são dependentes.

2. Temos no caso contínuo uma definição análoga, ou seja, se (X,Y) é uma v.a. contínua bidimensional, então dizemos que X e Y são variáveis aleatórias independentes se, e somente se, $f(x,y)=g(x)h(y)$, para todo (x, y) , sendo f a fdp conjunta e g e h as marginais de X e de Y , respectivamente.

Exemplo 2.6

De acordo com a definição apresentada, podemos verificar que, no exemplo 2.3, X e Y são independentes, enquanto que no exemplo 2.4 essas variáveis são dependentes.

Exemplo 2.7

Consideremos as variáveis aleatórias, definidas da seguinte maneira:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se uma mulher é casada no civil ou} \\ & \text{no religioso, ou no civil e religioso.} \\ 0, & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{se uma mulher já provocou aborto.} \\ 0, & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

Vemos que a variável aleatória X trata do tipo de união marital, enquanto que Y define se uma mulher já provocou aborto ou não. Suponhamos que em certo país a distribuição conjunta de X e Y seja dada por:

	X	0	1
Y			
0		0,21	0,46
1		0,01	0,32

Podemos concluir que nesse país a prática do aborto independe do tipo de união marital? Calculando as distribuições marginais de X e de Y , obteremos:

x	0	1	P(Y=y)
y			
0	0,21	0,46	0,67
1	0,01	0,32	0,33
P(X=x)	0,22	0,78	1,0

Basta ver que $P(X=0).P(Y=0)=0,147 \neq P(X=0;Y=0)$ para concluirmos que X e Y não são independentes, ou seja, podemos concluir que nesse país a prática do aborto e o tipo de união marital não são independentes, o que significa dizer que existe algum tipo de relação entre essas variáveis.

Exemplo 2.8

Uma companhia de seguros, que trabalha no ramo de automóveis, investigou a relação entre o hábito de fumar do motorista do carro e a frequência das reclamações relativas a acidentes com danos materiais. Para isso, considerou-se as variáveis aleatórias: X = número de acidentes sofridos pelo motorista (a companhia considerou de um a três acidentes) e:

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{se o motorista é fumante;} \\ 0, & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

Suponhamos que a companhia obteve que a distribuição conjunta de X e Y é dada por:

x	1	2	3
y			
0	0,21	0,35	0,14
1	0,09	0,15	0,06

Nesse caso, podemos afirmar que o número de acidentes sofridos pelo motorista independe do fato desse ser ou não fumante? Calculando as distribuições marginais de X e de Y, obteremos:

x	1	2	3	P(Y=y)
y				
0	0,21	0,35	0,14	0,7
1	0,09	0,15	0,06	0,3
P(X=x)	0,3	0,5	0,2	1,0

Podemos ver que $P(X=x; Y=y)=P(X=x).P(Y=Y)$ para todo par (x,y) . Portanto, concluímos que o número de acidentes sofridos pelo motorista independe do fato desse ser ou não fumante.

2.5 Valor esperado de uma variável aleatória discreta

Não basta conhecer a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória, precisamos também de valores que sejam característicos dessa distribuição, como, por exemplo, um valor que esteja situado no seu centro. Assim, temos a definição do valor esperado (ou valor médio) de uma variável aleatória:

Definição: se X é uma v.a. discreta, sendo $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ seus possíveis valores, então o valor esperado (ou esperança matemática ou valor médio) de X é definido como:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i). \quad (2.2)$$

Exemplo 2.9

Considerando o experimento de lançar uma moeda 2 vezes, sendo $X =$ número de caras, temos:

X	0	1	2
P(X=x)	1/4	1/2	1/4

Portanto:

$$E(X) = 0 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = 1.$$

Exemplo 2.10

Uma seguradora paga US\$ 30.000 em caso de acidente de carro, sendo que a taxa cobrada é de US\$ 1000. Sabe-se que a probabilidade de um carro sofrer acidente é de 3%. Quanto a seguradora espera ganhar por carro segurado?

Definindo G : ganho da seguradora, temos que a distribuição de G é:

G	-29.000	1000
P(G=g)	0,03	0,97

Assim:

$$E(G) = -29.000(0,03) + 1000(0,97) = 100.$$

Ou seja, é esperado que a seguradora ganhe US\$ 100 por cada carro segurado.

Observações:

1. Se X é uma v.a. contínua com fdp f , então:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Exemplo 2.11

Considerando X com fdp:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

temos que o valor esperado de X é:

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot 2x dx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

2. Se X é uma v.a. discreta e Y uma função de X ($Y=H(X)$), então:

$$E(Y) = \sum_i H(x_i) P(x_i).$$

Exemplo 2.12

Para $X = n^\circ$ de caras em 2 lançamentos de uma moeda, determinar o valor esperado de $Y=X^2+1$.

Como sabemos, a distribuição de X é:

X	0	1	2
P(X=x)	1/4	1/2	1/4

Assim, de acordo com a observação anterior, temos:

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(X^2+1) = (0^2+1) \cdot 1/4 + (1^2+1) \cdot 1/2 + (2^2+1) \cdot 1/4 = \\ &= 1/4 + 1 + 5/4 = 10/4 = 5/2. \end{aligned}$$

3. Se (X, Y) é uma v.a. discreta bidimensional e Z uma função de (X, Y) ($Z=H(X, Y)$), então:

$$E(Z) = \sum_i \sum_j H(x_i, y_j) P(x_i, y_j).$$

Exemplo 2.13

Considerando (X, Y) com distribuição conjunta:

y x	1	2	3
1	0	1/6	1/6
2	1/6	0	1/6
3	1/6	1/6	0

Calcular o valor esperado de $Z=XY$.

De acordo com a observação anterior, teremos:

$$\begin{aligned}
 E(Z) = E(XY) &= 1.1.0 + 1.2(1/6) + 1.3(1/6) + 2.1(1/6) + \\
 &+ 2.2.0 + 2.3(1/6) + 3.1(1/6) + 3.2(1/6) + 3.3.0 = \\
 &= 0 + 2/6 + 3/6 + 2/6 + 0 + 1 + 3/6 + 1 + 0 = 11/3.
 \end{aligned}$$

4. Se X é uma v.a. contínua com fdp f e $Y=H(X)$, então:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x) f(x) dx.$$

5. Se (X, Y) é uma v.a. contínua bidimensional, com fdp conjunta f e $Z=H(X, Y)$, então:

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(x, y) f(x, y) dx dy.$$

Principais propriedades do valor esperado:

1. O valor esperado de uma constante é a própria constante, ou seja, se C é uma constante, então decorre imediatamente de (2.2) que $E(C)=C$.

2. Multiplicando-se uma v.a. X por uma constante C , seu valor esperado fica multiplicado por C , isto é, $E(CX)=CE(X)$.

3. Se X_1, X_2, \dots, X_n são variáveis aleatórias, então:

$$E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i).$$

4. O valor esperado do produto de duas v.a.'s independentes X e Y é o produto dos valores esperados, isto é, se X e Y são independentes, então $E(XY)=E(X)E(Y)$.

2.6 Variância de uma variável aleatória

Da mesma forma que caracterizamos uma variável aleatória X com relação ao centro de sua distribuição,

precisamos também de um valor que caracterize a dispersão de X em torno de seu valor esperado. Para isso temos a definição de variância, que é o valor esperado de $[X-E(X)]^2$, ou seja:

Definição: seja X uma variável aleatória. Definimos a variância de X , denotada por $V(X)$ ou σ_x^2 , da seguinte maneira:

$$V(X)=E[X-E(X)]^2 . \quad (2.3)$$

Observações:

1. A raiz quadrada positiva de $V(X)$ é chamada de desvio padrão de X e é denotado por σ_x ;

2. Desenvolvendo (2.3), obtemos que $V(X)$ também pode ser dada por:

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2 \quad (2.4)$$

Exemplo 2.14

Com relação ao exemplo 2.9, temos que $E(X)=1$, logo: $[E(X)]^2=1$ e $E(X^2)=0^2 \cdot (1/4)+1^2 \cdot (1/2)+2^2 \cdot (1/4)=3/2$. Portanto, usando (2.4), obtemos: $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2 = \frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$.

Exemplo 2.15

Pelo exemplo 2.11, temos que o valor esperado da v.a. contínua X , com fdp:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

é $E(X)=2/3$. Assim, para o cálculo de $V(X)$, precisamos obter:

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 2x \, dx = \int_0^1 2x^3 \, dx = \frac{1}{2} x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Portanto:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1/2 - (2/3)^2 = 1/2 - (4/9) = 1/18.$$

Covariância entre duas variáveis aleatórias

Uma medida de relação linear entre duas v.a.'s X e Y é dada pela covariância entre elas, ou seja:

Definição: se X e Y são duas v.a.'s, então a covariância entre elas é dada pelo valor esperado do produto dos desvios dessas em relação aos seus respectivos valores esperados:

$$\text{Cov}(X, Y) = E\{[X - E(X)].[Y - E(Y)]\} \quad (2.5)$$

Pode-se também escrever a covariância entre X e Y de uma maneira mais simples, isto é, desenvolvendo-se o segundo membro de (2.5), obtém-se:

$$\text{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y). \quad (2.6)$$

Exemplo 2.16

Considerando o exemplo 2.4, temos que: $E(X)=E(Y)=1.\left(\frac{1}{3}\right)+2.\left(\frac{1}{3}\right)+3.\left(\frac{1}{3}\right) = 2$. Temos também, do exemplo (2.13), que $E(XY)=\frac{11}{3}$. Portanto, para as variáveis X e Y do exemplo 2.4, obtemos:

$$\text{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{11}{3}-(2)(2)=-\frac{1}{3}.$$

Principais propriedades da variância:

1. A variância de uma constante é zero, ou seja, se C é uma constante e $X=C$, então, imediatamente, de (2.3) ou (2.4) temos que $V(X)=0$.

2. Multiplicando-se uma v.a. X por uma constante C , sua variância fica multiplicada pelo quadrado da constante, isto é, $V(CX)=C^2 \cdot V(X)$.

3. Somando-se ou subtraindo-se uma constante C a uma v.a. X , sua variância não se altera, ou seja, $V(X \pm C)=V(X)$.

4. Para duas variáveis aleatórias X e Y , temos:

$$V(X \pm Y)=V(X)+V(Y) \pm 2 \operatorname{cov}(X,Y).$$

5. Se “a” e “b” são constantes e X uma variável aleatória, então:

$$V(aX \pm b)=a^2 \cdot V(X).$$

6. Se X_1, X_2, \dots, X_n são variáveis aleatórias, então:

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{i < j} \operatorname{cov}(X_i, X_j).$$

7. Se X_1, X_2, \dots, X_n são variáveis aleatórias, duas a duas independentes, então:

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i).$$

2.7 Coeficiente de correlação

Para medir a dependência linear entre duas v.a.'s X e Y , de forma que não consideremos as unidades de medida das mesmas, temos o coeficiente de correlação, que é definido por:

$$\rho(X, Y) = E \left\{ \left[\frac{X - E(X)}{\sigma_x} \right] \cdot \left[\frac{Y - E(Y)}{\sigma_y} \right] \right\} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}. \quad (2.7)$$

Pode-se mostrar que o coeficiente de correlação toma valores entre -1 e 1 ($-1 \leq \rho \leq 1$), sendo que quanto mais próximo de -1 ou 1 maior a relação linear entre as variáveis. Um valor de ρ negativo indica que, ao crescer os valores de uma variável, a outra tende a decrescer. Por outro lado, um valor positivo de ρ indica que, ao crescer ou decrescer os valores de uma variável, a outra tende a ter o mesmo comportamento.

Observações:

1. Se $\rho(X, Y) = 0$, dizemos que X e Y são não correlacionadas.

2. Se X e Y são duas v. a.'s independentes, então X e Y são não correlacionadas, pois nesse caso $\text{Cov}(X,Y) = 0$ e consequentemente $\rho(X,Y) = 0$.

3. A recíproca da observação 2 não é verdadeira, ou seja, é possível que duas v.a's X e Y sejam não correlacionadas e, no entanto, X e Y não sejam independentes.

Exemplo 2.17

Considerando novamente o exemplo 2.4, obtemos: $E(X^2) = E(Y^2) = 1^2\left(\frac{1}{3}\right) + 2^2\left(\frac{1}{3}\right) + 3^2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{14}{3}$. Pelo exemplo 2.16, temos que $\text{Cov}(X,Y) = -\frac{1}{3}$ e $E(X) = E(Y) = 2$. Assim, $V(X) = V(Y) = \frac{14}{3} - 4 = \frac{2}{3}$ e, portanto:

$$\rho(X,Y) = \frac{-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{\frac{2}{3}}} = -0,5.$$

Exemplo 2.18

No exemplo 2.7 concluímos que existe algum tipo de relação entre a prática do aborto e o tipo de união marital.

Calculemos, então, o coeficiente de correlação entre essas variáveis. Para isto, obtivemos: $E(X) = 0,78$; $V(X) = 0,172$; $E(Y) = 0,33$; $V(Y) = 0,221$ e $E(X.Y) = 0,32$. Logo:

$$\rho(X,Y) = \frac{0,32 - (0,78)(0,33)}{\sqrt{(0,172)(0,221)}} = 0,32.$$

Vemos, então, que existe uma relação linear positiva entre a prática do aborto e o tipo de união marital.

2.8 Função de distribuição acumulada

Definição: a função de distribuição acumulada (fd) de uma variável aleatória X é definida por:

$$F(x) = P(X \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Resultado 1:

a) Se X é discreta, temos:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) Se X é contínua, então:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(s) ds, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 2.19

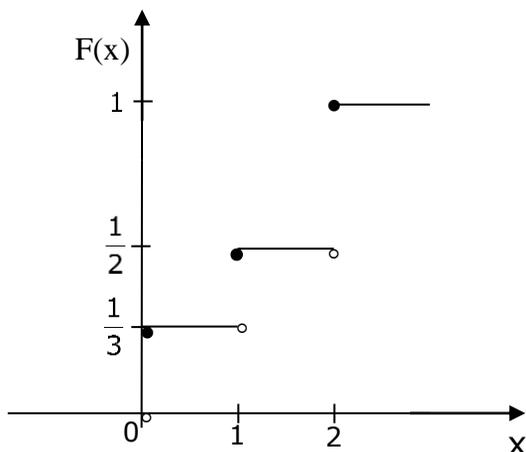
Se X é uma v.a. discreta com distribuição:

X	0	1	2
P(X=x)	1/3	1/6	1/2

então a função de distribuição acumulada de X é:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0; \\ \frac{1}{3}, & \text{se } 0 \leq x < 1; \\ \frac{1}{2}, & \text{se } 1 \leq x < 2; \\ 1, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

cujo gráfico é dado por:



Exemplo 2.20

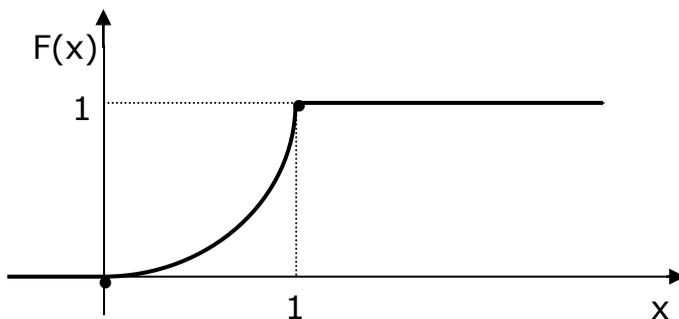
Se X é uma variável aleatória contínua, com fdp:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

então a função de distribuição acumulada de X é dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0; \\ \int_0^x 2t \, dt = x^2, & \text{se } 0 \leq x < 1; \\ 1, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

cujo gráfico é:



Resultado 2:

a) Se F é a função de distribuição acumulada de uma variável aleatória contínua com fdp f , então:

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x).$$

para todo x em que F seja derivável.

b) Se F é a função de distribuição acumulada de uma variável aleatória discreta, com possíveis valores $x_1 < x_2 < \dots$, então:

$$F(x_j) - F(x_{j-1}) = P(X = x_j).$$

Exemplo 2.21

Supondo-se X uma v.a. contínua com função de distribuição acumulada:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0; \\ 1 - e^{-x}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

então, pelo resultado 2, item a, temos que a função densidade de probabilidade (fdp) de X , é:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0; \\ e^{-x}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Problemas

1. Lança-se um dado não viciado. Seja X o dobro do número ocorrido:

- Determine a distribuição de X ;
- Calcule o valor esperado de $3X$ e de $X+5$.

2. Uma v.a. discreta X tem a distribuição de probabilidade dada por:

$$P(X=x) = \frac{k}{x}, \text{ para } x=1,3,5,7.$$

Determine K e $E(X)$.

3. Suponha que uma v.a. Y tenha a seguinte distribuição:

Y	0	1
P(Y=y)	1-q	q

Obtenha o valor esperado e a variância de Y .

4. Sejam X e Y v.a.'s independentes com as seguintes distribuições:

X	1	2	Y	5	10	15
P(X=x)	0,6	0,4	P(Y=y)	0,2	0,5	0,3

- Obter a distribuição conjunta de X e Y;
- Calcular o valor esperado e a variância de X+Y;
- Obter a distribuição e a variância de XY.

5. Numa comunidade em que apenas 10 casais trabalham, fez-se um levantamento no qual foram obtidos os seguintes valores para os rendimentos:

Casal	Rendimento do homem em (U.M.)	Rendimento da mulher em (U.M.)
1	10	5
2	10	10
3	5	5
4	10	5
5	15	5
6	10	10
7	5	10
8	15	10
9	10	10
10	5	10

Um casal é escolhido ao acaso entre os dez. Seja X o rendimento do homem e Y o rendimento da mulher:

- a) Construir a distribuição conjunta de X e Y ;
- b) Determinar as distribuições marginais de X e Y ;
- c) Calcular $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$ e $V(Y)$;
- d) Considerando Z a variável igual à soma dos rendimentos do homem e da mulher, calcule $E(Z)$ e $V(Z)$;
- e) Calcule o coeficiente de correlação entre X e Y .

6. A tabela a seguir dá a distribuição conjunta de X e Y :

Y	X	1	2	3
0		0,1	0,1	0,1
1		0,2	0,0	0,3
2		0,0	0,1	0,1

- a) Obter $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$ e $E(X+Y)$;
- b) Verifique se X e Y são independentes;
- c) Determine a distribuição e o valor esperado de XY ;
- d) Calcule o coeficiente de correlação entre X e Y .

7. Considere a distribuição conjunta de X e Y , parcialmente conhecida, dada na seguinte tabela:

	X	-1	1	P(Y=y)
Y				
-1		1/12		
0				1/3
1		1/4	1/4	
P(X=x)				1

- Completar a tabela, supondo X e Y independentes;
- Calcular $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$ e $V(Y)$;
- Se $Z=aX+bY$, calcule a e b de modo que $E(Z)=10$ e $V(Z)=600$.

8. Considerando um exame de estatística, que consiste em quatro problemas, definamos as seguintes variáveis aleatórias: X = número de problemas feitos corretamente por um aluno e Y definida da seguinte maneira:

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{se um aluno é introvertido;} \\ 0, & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

Suponhamos que a distribuição conjunta de X e Y seja dada por:

Y	x	0	1	2	3	4
0		0,016	0,12	0,28	0,28	0,104
1		0,004	0,03	0,07	0,07	0,026

- a) Ache as distribuições marginais de X e de Y;
- b) Podemos dizer, nesse caso, que existe independência entre o número de questões feitas corretamente e o fato do aluno ser ou não introvertido?
- c) Qual é, então, o valor do coeficiente de correlação entre X e Y?

9. Considerando os alunos de certa universidade, suponhamos que a tabela a seguir seja a distribuição conjunta das variáveis aleatórias:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se o aluno é do sexo masculino;} \\ 0, & \text{se o aluno é do sexo feminino.} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{se o aluno senta-se em uma carteira} \\ & \text{nas filas da frente;} \\ 0, & \text{se o aluno senta-se nas filas de trás.} \end{cases}$$

	X	0	1
Y			
0		0,24	0,48
1		0,14	0,14

- a) Existe independência entre o sexo do aluno e o fato deste sentar-se ou não nas filas da frente?
- b) Determine o coeficiente de correlação entre X e Y.

10. Suponhamos conhecida e dada pela tabela a seguir a distribuição conjunta das variáveis aleatórias

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se uma pessoa costuma frequentemente} \\ & \text{se aborrecer com outras.} \\ 0, & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{se uma pessoa é introvertida} \\ 0, & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

	X	0	1
Y			
0		0,4	0,1
1		0,4	0,1

Nesse caso, qual o coeficiente de correlação linear entre a pessoa ser ou não introvertida e o fato de se aborrecer ou não frequentemente com as outras?

11. De um lote que contém 25 peças, das quais 5 são defeituosas, são escolhidas 4 ao acaso. Seja X o número de defeituosas encontradas, faça o gráfico da função de distribuição acumulada de X , quando:

- a) As peças forem escolhidas com reposição;
- b) As peças forem escolhidas sem reposição.

12. Seja X uma variável aleatória contínua, com fdp dada por:

$$f(x) = \begin{cases} ax, & 0 \leq x < 1 \\ a, & 1 \leq x < 2 \\ -ax + 3a, & 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{para quaisquer outros valores.} \end{cases}$$

Determinar a constante “a”.

13. A proporção de álcool em certo composto pode ser considerada como uma variável aleatória X , com função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} 20x^3(1-x), & \text{se } x \in (0,1); \\ 0, & \text{se } x \notin (0,1). \end{cases}$$

a) Calcule $P(X \leq 2/3)$;

b) Determine a função de distribuição acumulada de X e esboce seu gráfico.

14. Suponha que X seja uma v.a. contínua, com fdp:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{8}{x^3}, & x > 2; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determinar o valor esperado de $W=(1/3)X$.

Capítulo 3

Algumas distribuições importantes

3.1 Distribuições discretas

3.1.1 A distribuição de Bernoulli

Se uma v.a. assume somente os valores zero e um, com probabilidades $1-p$ e p , respectivamente, ou seja, se sua distribuição é dada por:

x	0	1
P(X=x)	$1-p$	p

Então, nesse caso, dizemos que X tem distribuição de Bernoulli, e, por (2.2) e (2.3), obtemos de imediato que $E(X)=p$ e $V(X)=p(1-p)$.

Exemplo 3.1

Uma moeda é lançada uma vez. Seja X definida por:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se ocorrer cara;} \\ 0, & \text{se ocorrer coroa.} \end{cases}$$

Aqui, a distribuição de X é:

x	0	1
P(X=x)	1/2	1/2

Exemplo 3.2

Supor que em certa comunidade a probabilidade de uma pessoa ter problemas de psicose seja igual a 0,01. Se definimos:

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{se uma dada pessoa da comunidade} \\ & \text{tem psicose,} \\ 0, & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

teremos que Y é uma variável aleatória de Bernoulli, e sua distribuição é dada por:

y	0	1
P(Y=y)	0,99	0,01

Experimento binomial

Se um experimento consiste de n repetições independentes de Bernoulli, sendo constante e igual a p a probabilidade de sucesso em cada repetição, então dizemos que esse é um experimento binomial.

3.1.2 A distribuição Binomial

Se uma v.a. X corresponde ao número de sucessos em n repetições de um experimento binomial, sendo p a probabilidade de sucesso em cada repetição, então se diz que X tem distribuição Binomial com parâmetros n e p (costuma-se escrever $X \sim B(n,p)$), e sua função de probabilidades é dada por:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,2,\dots,n. \quad (3.1)$$

Pode-se verificar facilmente que o valor esperado e a variância de uma v.a. $X \sim B(n,p)$ são dados por:

$$E(X)=np \text{ e } V(X)=np(1-p).$$

Exemplo 3.3

Em oito lançamentos de uma moeda, qual será a probabilidade de ocorrerem pelo menos duas caras? Definindo a v.a. X =número de caras nos oito lançamentos, verificamos, de imediato, que $X \sim B(8, 1/2)$. Assim:

$$\begin{aligned} P(\text{de ocorrerem pelo menos duas caras}) &= P(X \geq 2) = 1 - \\ &- [P(X=0) + P(X=1)] = 1 - \binom{8}{0} \cdot (1/2)^0 \cdot (1/2)^8 - \binom{8}{1} \cdot (1/2)^1 \cdot (1/2)^7 = \\ &= 1 - 9(1/2)^8. \end{aligned}$$

Exemplo 3.4

Um exame de estatística consta de seis problemas. Para ser aprovado, um estudante deverá resolver, corretamente, pelo menos 4 deles. Um determinado estudante sabe 60% do assunto sobre o qual serão elaborados os problemas. Qual será a probabilidade desse estudante ser aprovado?

Definindo a v.a. X = número de problemas resolvidos corretamente pelo estudante, temos que $X \sim B(6;0,6)$. Portanto:

$$\begin{aligned}
 P(\text{do estudante ser aprovado}) &= P(X \geq 4) = P(X=4) + \\
 &+ P(X=5) + P(X=6) = \binom{6}{4} (0,6)^4 (0,4)^2 + \binom{6}{5} (0,6)^5 (0,4) + \\
 &+ \binom{6}{6} (0,6)^6 (0,4)^0 = 0,544.
 \end{aligned}$$

3.1.3 A distribuição Hipergeométrica

Consideremos uma população com N elementos, dos quais r tem uma determinada característica “A”. Se retiramos, sem reposição, uma amostra de tamanho n e definirmos X = número de elementos na amostra com a característica “A”, teremos que a distribuição de probabilidade de X é dada por:

$$P(X = K) = \frac{\binom{r}{k} \binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, \min(n, r). \quad (3.2)$$

Nesse caso dizemos que X tem distribuição hipergeométrica.

Valor esperado e variância

Se X tem distribuição hipergeométrica, então pode-se mostrar que:

$$E(X) = np \text{ e } V(X) = np(1-p) \frac{(N-n)}{(N-1)}$$

sendo $p = \frac{r}{N}$.

Exemplo 3.5

Pequenos motores são guardados em caixas de 50 unidades. Um inspetor de qualidade examina cada caixa, antes da posterior remessa, testando 5 motores. Se nenhum motor for defeituoso, a caixa é aceita. Se pelo menos um deles for defeituoso, todos os 50 motores são testados. Dado que existem 6 motores defeituosos numa caixa, qual a probabilidade de que seja necessário todos os motores serem examinados?

Considerando X = número de defeituosos na amostra de 5 motores, temos que X se distribui segundo uma Hipergeométrica, sendo

$$N = 50 \text{ (total de motores);}$$

$r = 6$ (total de motores defeituosos);

$n = 5$ (tamanho da amostra);

ou seja:

$$P(X = K) = \frac{\binom{6}{k} \binom{44}{5-k}}{\binom{50}{5}}, \quad k = 0, 1, \dots, 5.$$

Assim:

$P(\text{todos os motores a serem examinados}) = P(X \geq 1) =$

$$= 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{6}{0} \binom{44}{5}}{\binom{50}{5}} = 1 - 0,51 = 0,49.$$

3.1.4 A distribuição de Poisson

Definição: dizemos que uma variável aleatória discreta X tem distribuição de Poisson com parâmetro α se:

$$P(X=k) = \frac{e^{-\alpha} \cdot \alpha^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Valor esperado e variância

Se X tem distribuição de Poisson com parâmetro α , então:

$$E(X)=V(X)=\alpha \text{ (ver problema 9 deste capítulo).}$$

Exemplo 3.6

Num livro de 800 páginas há 800 erros de impressão. Qual a probabilidade de que uma página contenha pelo menos 3 erros?

Fazendo α =taxa de erros por página, temos a seguinte regra de três:

$$800 \text{ páginas} \rightarrow 800 \text{ erros}$$

$$1 \text{ página} \rightarrow \alpha$$

da qual obtemos $\alpha=1$. Assim, definindo X = número de erros numa página, teremos

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X \leq 2) = 1 - \sum_{k=0}^2 P(X = k) = 1 - \sum_{k=0}^2 \frac{e^{-1} \cdot 1^k}{k} = \\ &= 1 - \left(\frac{e^{-1}}{0!} + \frac{e^{-1}}{1!} + \frac{e^{-1}}{2!} \right) = 1 - e^{-1} \left(1 + 1 + \frac{1}{2} \right) = 0,0803. \end{aligned}$$

Exemplo 3.7

Numa central telefônica chegam 300 telefonemas por hora. Qual a probabilidade de que:

- a) Num minuto não haja chamada?
- b) Em 2 minutos haja 2 chamadas?
- c) Em t minutos não haja chamadas?

Solução:

- a) Fazendo α =taxa de chamadas por minuto, temos:

60 minutos \rightarrow 300 chamadas

1 minuto $\rightarrow \alpha$

da qual obtemos $\alpha=5$. Assim, para X =número de chamadas em 1 minuto:

$$P(\text{não haver chamada})=P(X=0)=\frac{e^{-5} \cdot 5^0}{0!} = e^{-5} = 0,00674.$$

b) Fazendo $\alpha =$ taxa de chamadas em 2 minutos e resolvendo:

60 minutos \rightarrow 300 chamadas

2 minutos $\rightarrow \alpha$

obtemos $\alpha = 10$. Logo, para $X =$ número de chamadas em 2 minutos, temos:

$$P(X = 2) = \frac{e^{-10} \cdot (10)^2}{2!} = 0,00227.$$

c) Fazendo $\alpha =$ taxa de chamadas em t minutos, temos:

60 minutos \rightarrow 300 chamadas

t minutos $\rightarrow \alpha$

da qual obtemos $\alpha = 5t$. Portanto, para $X =$ número de chamadas em t minutos, teremos:

$$P(X=0) = \frac{e^{-5t} (5t)^0}{0!} = e^{-5t}.$$

3.1.5 *A distribuição de Poisson e a distribuição Binomial*

Se $X \sim B(n, p)$, sendo n muito “grande” ($n \rightarrow \infty$) e p muito “pequeno” ($p \rightarrow 0$), então, fazendo-se $\alpha = np$, mostra-se que:

$$P(X = k) \cong \frac{e^{-\alpha} \cdot \alpha^k}{k!}.$$

Ou seja, a distribuição de X tende para uma Poisson com parâmetro $\alpha = np$.

Observação: na prática, a aproximação anterior é considerada satisfatória quando $np \leq 10$.

Exemplo 3.8

A probabilidade de uma lâmpada se queimar ao ser ligada é $1/100$. Numa instalação de 100 lâmpadas, qual a probabilidade de 2 lâmpadas se queimarem ao serem ligadas?

Definindo $X =$ número de lâmpadas que se queimam ao serem ligadas, temos que $X \sim B(100; 1/100)$, ou seja, $np = 100 \cdot (1/100) = 1$. Assim, pela aproximação anterior, obtemos:

$$P(X = 2) \cong \frac{e^{-np} \cdot (np)^2}{2!} = \frac{e^{-1} \cdot 1^2}{2!} = 0,184.$$

Problemas

1. Sabe-se que 20% dos animais submetidos a um certo tratamento não sobrevivem. Se esse tratamento foi aplicado em 20 animais e se X é o número de não sobreviventes, pede-se:

- a) Calcular $E(X)$ e $V(X)$;
- b) Calcular a probabilidade de sobreviverem no mínimo 18 animais.

2. Admitindo-se que a probabilidade de nascer menino é igual à de nascer menina, calcule a probabilidade de um casal com 6 filhos ter 4 homens e 2 mulheres.

3. Em um congresso científico existem 15 matemáticos e 12 estatísticos. Qual a probabilidade de se formar uma comissão com 5 membros, na qual figurem 3 matemáticos e 2 estatísticos?

4. Supondo chances iguais em questões do tipo certo – errado, determine a probabilidade de se acertar pelo menos 3 de 10 questões desse tipo.

5. Em certa cidade, sabe-se que 1% da população tem problemas de psicose. Para um grupo de 20 pessoas dessa cidade, pede-se:

a) Calcular a probabilidade de se encontrar pelo menos uma com psicose;

b) Calcular a probabilidade de se encontrar no máximo duas pessoas com psicose;

c) Determinar o valor esperado e o desvio padrão do número de pessoas com psicose.

6. Quinze pessoas estão usando insígnias numeradas de 1 a 15. Três pessoas são escolhidas ao acaso e são retiradas da sala. Os números das insígnias são anotados. Qual a probabilidade de que:

a) O menor número seja 7?

b) O maior número seja 7?

7. Supondo que 10% dos alunos de uma universidade são superdotados, qual a probabilidade de numa classe com 20 alunos dois, no máximo, sejam superdotados?

8. Certo curso de treinamento aumenta a produtividade de uma população de funcionários em 85% dos casos. Se 11 funcionários participam desse curso, encontre:

a) A probabilidade de no mínimo nove aumentarem a produtividade;

b) O valor esperado do número de funcionários que aumentam a produtividade.

9. Se X tem distribuição de Poisson com parâmetro α , mostrar que $E(X)=V(X)=\alpha$.

10. Uma firma compra lâmpadas por centenas. Examina sempre uma amostra de 15 lâmpadas para verificar se estão boas. Se uma centena inclui 12 lâmpadas queimadas, qual a probabilidade de se escolher uma amostra com pelo menos uma lâmpada queimada?

11. Numa estrada há 2 acidentes para cada 100 Km. Qual a probabilidade de:

- a) Em 250 km ocorram pelo menos 3 acidentes?
- b) Em 300 km ocorram 5 acidentes?

12. Uma fábrica de automóveis verificou que ao testar seus carros na pista de prova há, em média, um estouro de pneus a cada 300 km.

- a) Qual a probabilidade de num teste de 900 km haja no máximo um pneu estourado?
- b) Qual a probabilidade de que um carro ande 450 km sem estourar nenhum pneu?

13. Num lote de 40 peças, 20% são defeituosas. Retirando-se 10 peças do lote, sem reposição, qual a probabilidade de encontrar:

- a) Três defeituosas?
- b) No máximo 2 defeituosas?

14. Se a probabilidade de uma máquina produzir uma peça defeituosa num certo dia é 0,01, qual a probabilidade de se ter no máximo 4 defeituosas em um dia de 500 peças produzidas?

3.2 Distribuições contínuas

3.2.1 A distribuição Uniforme

Definição: se X é uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } x \in (a,b); \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.4)$$

Então dizemos que X tem distribuição uniforme no intervalo (a,b) .

Exemplo 3.9

A dureza de uma peça de aço pode ser pensada como sendo uma variável aleatória com distribuição uniforme, no intervalo $(50;70)$ da escala de Rockwell. Calcular a probabilidade de que uma peça tenha dureza entre 55 e 60.

Definindo X = dureza de uma peça de aço, temos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{70-50} = \frac{1}{20}, & \text{se } x \in (50;70); \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo:

$$P(55 \leq X \leq 60) = \int_{55}^{60} \frac{1}{20} dx = \frac{x}{20} \Big|_{55}^{60} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}.$$

Valor esperado, variância e função de distribuição

Se X tem distribuição uniforme em (a,b) , então (ver problema 24 deste capítulo):

$$a) \quad E(X) = \frac{a+b}{2}.$$

$$\text{b) } V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

$$\text{c) } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a \leq x < b; \\ 1, & \text{se } x \geq b. \end{cases}$$

3.2.2 A distribuição Exponencial

Definição: uma variável aleatória X tem distribuição Exponencial com parâmetro λ , se sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{se } x > 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.5)$$

Valor esperado, variância e função de distribuição

Se X tem distribuição exponencial com parâmetro λ , então (ver problema 25 deste capítulo):

$$\text{a) } E(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

$$\text{b) } V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

$$c) F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{se } x \geq 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 3.10

Suponhamos que X tenha distribuição exponencial com parâmetro λ . Calcular a probabilidade de que X ultrapasse seu valor esperado.

Nesse caso:

$$\begin{aligned} P(X > E(X)) &= P\left(X > \frac{1}{\lambda}\right) = \int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty} = \\ &= -(0 - e^{-1}) = e^{-1} = 0,3679 \end{aligned}$$

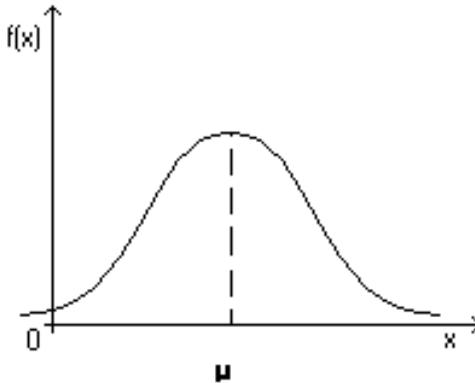
3.2.3 A distribuição Normal

Definição: uma v.a. contínua X tem distribuição Normal com parâmetros μ e σ^2 , $-\infty < \mu < \infty$ e $0 < \sigma^2 < +\infty$, se a sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < +\infty \quad (3.6)$$

Sendo que suas principais características, são:

1. O gráfico de $f(x)$ tem a forma igual a da figura seguinte:



2. $X=\mu$ é o ponto de máximo de $f(x)$;

3. $f(x)$ tende para zero quando x tende para mais ou menos infinito;

4. $f(x)$ é simétrica ao redor de $x=\mu$, isto é, $f(\mu+x)=f(\mu-x)$, para todo x ;

5. Entre os pontos $\mu-3\sigma$ e $\mu+3\sigma$, a área sob o gráfico de $f(x)$ é igual a 99,74%, ou seja, entre estes pontos está praticamente toda área sob o gráfico de $f(x)$;

6. Costuma-se escrever $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ para expressar que a variável aleatória X tem distribuição normal com parâmetros μ e σ^2 ;

7. Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, mostra-se que $E(X) = \mu$ e $V(X) = \sigma^2$.

Variável normal padrão

Uma v.a. Z é dita normal padrão se $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$, sendo X uma v.a. normal com valor esperado μ e variância σ^2 . Assim, pode-se mostrar que Z tem distribuição normal com $E(Z) = 0$ e $V(Z) = 1$, ou seja, $Z \sim N(0; 1)$.

As probabilidades sob a curva da normal padrão são encontradas em tabelas, que, no caso, dão as áreas sob o gráfico da função densidade da normal padrão. Em geral, essas tabelas fornecem a probabilidade de que a variável normal padrão Z esteja entre zero e um valor z , isto é, $P(0 < Z < z)$.

Para ilustrar o uso de uma tabela dessas (Tabela I do apêndice), vejamos os exemplos seguintes.

Exemplo 3.11

Supondo que uma v.a. X tem distribuição normal com média 100 e variância 25, qual será a probabilidade de X estar entre 112 e 114? Temos que $Z = \frac{X-100}{5} \sim N(0,1)$. Logo:

$$P(112 < X < 114) = P\left[\frac{(112-100)}{5} < \frac{(X-100)}{5} < \frac{(114-100)}{5}\right] =$$

$$= P(2,4 < Z < 2,8) = P(0 < Z < 2,8) - P(0 < Z < 2,4) = 0,4974 - 0,4918$$

$$= 0,0056.$$

Exemplo 3.12

Se $X \sim N(50;16)$, determinar x , tal que:

i) $P(X > x) = 0,05$;

ii) $P(X < x) = 0,99$.

Solução:

$$i) P(X > x) = 0,05 \Rightarrow P\left(\frac{X-50}{\sqrt{16}} > \frac{x-50}{\sqrt{16}}\right) = 0,05 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z > \frac{x-50}{4}\right) = 0,05,$$

sendo $Z \sim N(0;1)$. Portanto, procurando na tabela da normal padrão o valor “z”, tal que $P(Z > z) = 0,05$, encontramos $z = 1,65$.

Dessa forma:

$$\frac{x - 50}{4} = 1,65 \Rightarrow x = 4(1,65) + 50 = 56,6.$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } P(X < x) = 0,99 &\Rightarrow P\left(\frac{X - 50}{\sqrt{16}} < \frac{x - 50}{\sqrt{16}}\right) = 0,99 \Rightarrow \\ &\Rightarrow P\left(Z < \frac{x - 50}{4}\right) = 0,99. \end{aligned}$$

Assim, procurando na tabela da normal padrão o valor “z”, tal que $P(Z < z) = 0,99$, temos $z = 2,33$, ou seja:

$$\frac{x - 50}{4} = 2,33 \Rightarrow x = 4(2,33) + 50 = 59,32.$$

3.2.4 A distribuição Qui-quadrado

Sejam Z_1, Z_2, \dots, Z_v independentes e todas com distribuição $N(0,1)$, tem-se que a variável aleatória:

$$Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_v^2 = \sum_{i=1}^v Z_i^2. \quad (3.7)$$

possui uma distribuição chamada qui-quadrado, com parâmetro v , que é denominado de graus de liberdade.

Observações:

1. Costuma-se usar a notação $Y \sim \chi^2_{(v)}$ para denotar que a variável aleatória Y tem distribuição qui-quadrado com v graus de liberdade;

2. A distribuição qui-quadrado tem suas probabilidades tabeladas, de acordo com a Tabela II do apêndice, de forma que essa fornece os valores y , tais que $P(\chi^2_{(v)} > y) = p$, para alguns valores de p e alguns valores de v .

Exemplo 3.13

Supondo $v=10$, temos que o valor y é tal que $P(\chi^2_{(v)} > y) = 0,05$ é 18,307.

3.2.5 A distribuição t de Student

Sejam Z uma variável aleatória com distribuição $N(0,1)$ e Y uma variável aleatória com distribuição $\chi^2_{(v)}$, com Z e Y independentes, tem-se que a variável aleatória:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{v}}} \quad (3.8)$$

possui distribuição chamada t de Student, com v graus de liberdade.

A distribuição t de Student é aproximadamente $N(0,1)$ quando v é significativamente grande. Para v pequeno, a curva da função densidade de probabilidade da distribuição t possui a mesma forma da normal padrão, sendo diferente somente no aspecto do achatamento. Ou seja, a curva da distribuição t é um pouco mais achatada, significando que essa distribuição possui maior variabilidade que a normal padrão.

Observações:

1. Usamos a notação $T \sim t_{(v)}$ para denotar que a variável aleatória T tem distribuição t de Student com v graus de liberdade;

2. A distribuição t de Student também tem suas probabilidades tabeladas, conforme a Tabela III do apêndice, sendo que essa fornece valores t_0 tais, que $P(-t_0 < t_{(v)} < t_0) = 1 - p$, para alguns valores de p e $v = 1, 2, 3, \dots, 30, 35, 40, 50, 60, 120$. Quando v é muito “grande”, aproxima-se a distribuição t pela $N(0,1)$, de forma que se pode ver na Tabela III que para $v > 120$ há uma linha indicada por $v = \infty$, que corresponde às probabilidades de uma distribuição normal padrão.

Exemplo 3.14

Supondo $v=18$ temos, pela tabela da distribuição t , que o valor t_0 é tal que $P(T > t_0) = 0,10$ é 1,33.

3.2.6 A distribuição F

Sejam U e V duas variáveis aleatórias independentes, cada uma com distribuição qui-quadrado com v_1 e v_2 graus de liberdade, respectivamente, tem-se que a variável aleatória:

$$Y = \frac{U/v_1}{V/v_2} \quad (3.9)$$

possui uma distribuição chamada F de Snedecor, ou simplesmente distribuição F , com graus de liberdade v_1 e v_2 .

Observações:

1. Costuma-se usar a notação $Y \sim F(v_1, v_2)$ para denotar que a variável aleatória Y tem distribuição F com v_1 e v_2 graus de liberdade;

2. As probabilidades da distribuição F são também tabeladas de acordo com a Tabela IV do apêndice, sendo que essa fornece os valores y , tais que $P(F(v_1, v_2) > y) = \alpha$. Nos casos

em que precisamos calcular $P(F(v_1, v_2) < y) = \alpha$, usamos a identidade:

$$F(v_1, v_2) = \frac{1}{F(v_2, v_1)}. \quad (3.10)$$

Exemplo 3.15

Temos da Tabela IV que o valor y_1 , tal que $P(F(5,7) > y_1) = 0,05$, é 3,97. Qual será o valor y_2 , tal que $P(F(5,7) < y_2) = 0,05$? Usando (3.10), teremos:

$$0,05 = P(F(5,7) < y_2) = P\left(\frac{1}{F(7,5)} < y_2\right) = P\left(F(7,5) > \frac{1}{y_2}\right).$$

Da tabela da distribuição F obtemos que $1/y_2 = 4,88$. Logo, $y_2 = 0,205$.

Problemas

15. Considerando X a v.a. do exemplo 3.11, calcule:
 - a) $P(100 < X < 106)$;
 - b) $P(89 < X < 107)$;
 - c) $P(X > 108)$.

16. Foi feito um estudo sobre as alturas dos alunos de um colégio, observando-se que elas se distribuem normalmente com média de 1,72m e desvio padrão de 0,05m. Qual a porcentagem dos alunos com altura:

- a) Entre 1,67 e 1,77m?
- b) Abaixo de 1,62m?
- c) Acima de 1,90m?

17. Um teste de inteligência foi aplicado a um grupo de 50 adolescentes do 2º grau. Supondo que se obteve uma distribuição normal com média 70 e desvio padrão de 6, pede-se:

- a) A porcentagem dos alunos com nota superior à 80;
- b) O número de alunos com notas entre 45 e 65.

18. A experiência com certo exame de inglês básico indica que as notas são normalmente distribuídas com média 130 e desvio padrão 20. Se é exigida a nota 100 para que se passe no exame, qual a probabilidade de uma pessoa ser reprovada?

19. As notas de matemática dos alunos de certo colégio(X) são normalmente distribuídas, com média 6,4 e desvio padrão 0,8. O professor atribui graus A, B e C da seguinte forma:

Notas(X)	Grau
$X < 5$	C
$5 \leq X < 7,5$	B
$7,5 \leq X \leq 10$	A

Em uma classe de 80 alunos, qual o número esperado de alunos com grau A?, B?, C?

20. Suponha que as notas de uma prova sejam normalmente distribuídas com média 73 e desvio padrão 15. Sabe-se que 15% dos alunos mais adiantados recebem o grau A e 12% dos mais atrasados recebem grau F. Encontre o mínimo para se receber o grau A e o mínimo para não se receber o grau F.

21. Um teste de aptidão para matemática dá notas que vão de 200 a 800. Estas notas têm distribuição aproximadamente normal com média 470 e desvio padrão 120.

- a) Qual a porcentagem de estudantes com notas entre 500 e 600?
- b) Em um conjunto de 200 estudantes, quantos deverão ficar com notas acima de 450?

22. O tempo necessário para completar uma tarefa escolar tem distribuição normal com média de 90 minutos e desvio padrão de 15 minutos. Qual será a porcentagem de alunos que terminam a tarefa em menos de duas horas?

23. Suponhamos que o QI da população de certo país seja normalmente distribuído com valor esperado igual a 107 e desvio padrão igual a 15. Se uma pessoa é considerada superdotada quando seu QI é superior a 140, qual deverá ser o número de superdotados em uma cidade desse país, com 40.000 habitantes?

24. Se X tem distribuição uniforme em (a,b) , mostre que:

i) $E(X) = \frac{a + b}{2}$.

$$\text{ii) } V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

$$\text{iii) } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a \leq x < b, \\ 1, & \text{se } x \geq b. \end{cases}$$

25. Se X tem distribuição exponencial com parâmetro λ , mostrar que:

$$\text{i) } E(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

$$\text{ii) } V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

$$\text{iii) } F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{se } x \geq 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

26. Uma fábrica de tubos de TV determinou que a vida média dos tubos de sua fabricação é de 800 horas de uso e segue uma distribuição exponencial. Qual a probabilidade de que a fábrica tenha que substituir um tubo gratuitamente, se oferece uma garantia de 300 horas de uso?

27. Na leitura de uma escala, os erros variam de $-1/4$ a $1/4$, com distribuição uniforme de probabilidade. Calcular a média e a variância da distribuição dos erros.

28. A duração de uma lâmpada é uma variável aleatória T, com fdp dada por:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{1000} e^{-\frac{t}{1000}}, & \text{se } t \geq 0 \text{ (em horas)}, \\ 0, & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Calcular a probabilidade de uma lâmpada:

- a) Se queimar antes de 1000 horas;
- b) Durar entre 800 e 1200 horas.

29. Suponha que X seja uniformemente distribuída sobre $[-\alpha ; +\alpha]$, onde $\alpha > 0$. Determinar α , de modo que as seguintes relações sejam satisfeitas:

- a) $P(X > 1) = 1/3$.
- b) $P(X < 1/2) = 0,7$.

30. Definindo $\chi^2(v, \alpha)$ o valor de y, tal que $P(\chi^2_{(v)} > y) = \alpha$, e usando a tabela da distribuição qui-quadrado, determinar:

- a) $\chi^2(10; 50\%)$ b) $\chi^2(21; 10\%)$ c) $\chi^2(1; 2\%)$
- d) $\chi^2(19; 1\%)$ e) $\chi^2(8; 30\%)$

31. Definindo $t(v, \alpha)$ o valor de y , tal que $P(t > y | v) = \alpha$ e usando os valores da tabela da distribuição t , calcule:

- a) $t(1; 5\%)$ b) $t(10; 95\%)$ c) $t(20; 80\%)$
d) $t(6; 10\%)$ e) $t(15; 2,5\%)$ f) $t(120; 0,1\%)$

32. Indicando por $F(v_1, v_2, \alpha)$ o número y , tal que $P(F > y | v_1, v_2) = \alpha$ obtenha, usando a tabela da distribuição F :

- a) $F(2; 3; 5\%)$ b) $F(3; 2; 95\%)$ c) $F(1; \infty; 5\%)$
d) $F(120; 120; 5\%)$ e) $F(15; 15; 95\%)$ f) $F(28; 35; 5\%)$

Capítulo 4

Introdução à inferência estatística

4.1 População e amostra

Entende-se por população um conjunto de indivíduos ou objetos, para os quais se podem observar valores de uma ou mais variáveis. Uma amostra é qualquer subconjunto da população.

Exemplo 4.1

Supondo que queremos estudar algumas características dos QIs de 2000 alunos de uma faculdade, selecionamos uma amostra de 100 alunos e verificamos seus QIs. Nesse caso temos: a variável observada é o QI; a população é formada pelos 2000 QIs e, a amostra, pelos QIs dos 100 alunos selecionados.

4.2 Amostra aleatória

Definição: uma amostra aleatória de tamanho n de uma v. a. X é um conjunto de n variáveis aleatórias independentes $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, cada uma com a mesma distribuição de X .

4.3 Estatísticas e parâmetros

Definição: uma estatística é uma função qualquer da amostra.

Dada uma amostra $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, temos, por exemplo, as estatísticas:

$$\text{Média amostral: } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i .$$

$$\text{Variância amostral: } S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 .$$

Definição: um parâmetro é uma medida usada para descrever uma característica da distribuição de uma v.a. X .

Temos, por exemplo, que o valor esperado e a variância são parâmetros de uma distribuição de probabilidade.

4.4 Distribuições amostrais

Se T é uma estatística da amostra $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$, então a distribuição de T , quando $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ assumem todos os possíveis valores, é chamada de distribuição amostral de T .

Exemplo 4.2

Consideremos uma população de tamanho $N=3$ e uma v.a. X com a seguinte distribuição:

X	1	2	3
P(X=x)	1/3	1/3	1/3

Assim: $E(X)=2$ e $V(X)=2/3=0,667$.

Retirando todas as amostras possíveis de tamanho $n=2$, com reposição, obtemos a seguinte tabela:

Valores amostrais	Probabilidades	Média amostral (\bar{x})
(1,1)	1/9	1,0
(1,2)	1/9	1,5
(1,3)	1/9	2,0
(2,1)	1/9	1,5
(2,2)	1/9	2,0
(2,3)	1/9	2,5
(3,1)	1/9	2,0
(3,2)	1/9	2,5
(3,3)	1/9	3,0

Nesse caso, a distribuição da estatística \bar{X} é dada por:

\bar{x}	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$P(\bar{X} = \bar{x})$	1/9	2/9	3/9	2/9	1/9

sendo:

$$E(\bar{X}) = 1\left(\frac{1}{9}\right) + 1,5\left(\frac{2}{9}\right) + 2\left(\frac{3}{9}\right) + 2,5\left(\frac{2}{9}\right) + 3\left(\frac{1}{9}\right) = 2.$$

$$E(\bar{X}^2) = 1\left(\frac{1}{9}\right) + 2,25\left(\frac{2}{9}\right) + 4\left(\frac{3}{9}\right) + 6,25\left(\frac{2}{9}\right) + 9\left(\frac{1}{9}\right) = 4,333$$

Logo:

$$V(\bar{X}) = 4,333 - 4 = 0,333.$$

Assim, verificamos que $E(\bar{X}) = E(X)$ e $V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{2}$.

4.5 Distribuição amostral da média

Na teoria da inferência estatística tem-se o seguinte resultado: seja X uma v.a. com valor esperado μ e variância σ^2 e \bar{X} a média de uma amostra aleatória de tamanho n de X .

Então:

a) $E(\bar{X}) = \mu$;

b) $V(\bar{X}) = \sigma^2 / n$;

c) (Teorema Central do Limite) A distribuição de \bar{X} aproxima-se de uma distribuição normal com valor esperado μ e variância σ^2/n , quando n tende ao infinito.

Observações:

1. Como regra prática, aceita-se que para amostras com mais de 30 elementos, a aproximação citada em (c) já pode ser considerada muito boa.

2. Se a distribuição da população é normal, com valor esperado μ e variância σ^2 , então a média amostral baseada em uma amostra aleatória de tamanho n tem distribuição normal, com valor esperado μ e variância σ^2/n , independentemente do tamanho da amostra.

Exemplo 4.3

Suponhamos que na população de universitários brasileiros certo atributo psicológico, avaliado mediante emprego de determinado teste, tenha distribuição com valor esperado igual a 100 e desvio padrão 16. Se uma amostra aleatória de tamanho 64 é escolhida dessa população, qual será a probabilidade da média amostral estar acima de 104?

Temos nesse exemplo que a distribuição da média amostral \bar{X} é aproximadamente $N(100; 4)$. Logo:

$$P(\bar{X} > 104) = P\left(\frac{\bar{X} - 100}{2} > \frac{104 - 100}{2}\right) = P(Z > 2) = 0,0228.$$

4.6 Distribuição amostral da proporção

Consideremos uma população que tem uma proporção p de portadores de certa característica, e seja $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ uma amostra aleatória em que $X_i, 1 \leq i \leq n$ é definida por:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se o } i\text{-ésimo elemento é portador} \\ & \text{da característica;} \\ 0, & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

Temos que $X_i, 1 \leq i \leq n$ tem distribuição de Bernoulli, com $E(X_i) = p$ e $V(X_i) = p(1-p)$. Portanto, a distribuição da média amostral \bar{X} se aproxima de uma distribuição normal, com valor esperado p e variância $p(1-p)/n$, quando n tende ao infinito.

Observação: dado que \bar{X} é a proporção de elementos da amostra que são portadores da citada característica, então costumamos fazer $\bar{X} = \hat{p}$.

Exemplo 4.4

Em certa cidade, 30% dos motoristas envolvidos em acidentes fatais mostram evidências do uso de drogas. Numa amostra de 200 acidentes fatais, qual será a probabilidade de que mais de 25% desses motoristas tenham usado drogas?

Definindo a variável aleatória \hat{P} = proporção de motoristas que usam drogas numa amostra de 200 acidentes fatais, temos que a distribuição de \hat{P} é aproximadamente $N(0,30;0,00105)$. Assim:

$$\begin{aligned} P(\hat{P} > 0,25) &= P\left(\frac{\hat{P} - 0,30}{\sqrt{0,00105}} > \frac{0,25 - 0,30}{\sqrt{0,00105}}\right) \\ &= P(Z > -1,54) = 0,9382. \end{aligned}$$

Problemas

1. Um sociólogo extrai uma amostra aleatória de 45 pessoas de uma população, cuja renda média é U\$ 900,00 e o desvio padrão US\$ 200,00. Qual será a probabilidade de que a renda média da amostra seja inferior a US\$ 850,00?

2. Consideremos a eleição para presidente do diretório acadêmico em certo ano, quando 60% dos eleitores votaram no candidato A. Suponhamos que imediatamente antes da eleição tivéssemos extraído uma amostra de 40 eleitores. Qual seria a probabilidade de que na amostra extraída o candidato A tivesse minoria?

3. Admitindo-se que a chance de nascer menino seja igual a de nascer menina, qual a probabilidade de que mais de 40% das primeiras 50 crianças, nascidas em um certo ano, sejam do sexo masculino?

4. Certas vacinas produzidas por um laboratório têm validade média de 800 horas e desvio padrão de 60 horas. Determine a probabilidade de uma amostra aleatória de 50 vacinas ter a validade média:

- a) Entre 790 e 810 horas;
- b) Inferior a 785 horas;
- c) Superior a 820 horas.

5. Suponhamos que o nível educacional de adultos de certo país tenha uma média de 11,1 anos e um desvio padrão de 3 anos. Qual a probabilidade de que, em uma amostra aleatória

de 40 adultos, se encontre um nível médio de escolaridade entre 10 e 12 anos?

6. Supondo que 2% das pessoas de certa cidade têm problemas de psicose, qual será a probabilidade de numa amostra aleatória de 400 pessoas dessa cidade 3% ou mais tenham psicose?

Capítulo 5

Estimação

5.1 Estimação por ponto

Seja $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ uma amostra de uma variável aleatória X e θ um parâmetro desconhecido da distribuição de X , um estimador pontual de θ é definido como sendo qualquer função de $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$.

Estimador não viciado

Um estimador T de um parâmetro θ por definição é não viciado se $E(T) = \theta$.

Consistência

Considerando a amostra X_1, X_2, \dots, X_n de uma variável aleatória X e θ um parâmetro da sua distribuição, temos que um estimador T de θ , baseado em X_1, X_2, \dots, X_n , é dito consistente se esse satisfaz às duas seguintes condições:

- a) T é não viciado;
- b) A variância de T se aproxima de zero quando n tende ao infinito.

Exemplo 5.1

De acordo com o que vimos anteriormente, se $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ é uma amostra aleatória de uma distribuição de Bernoulli, com parâmetro p , então a proporção amostral \hat{P} é aproximadamente $N(p; p(1-p)/n)$. Nesse caso temos que \hat{P} é um estimador consistente de p , pois $E(\hat{P})=p$ e, conforme podemos ver, a variância de \hat{P} se aproxima de zero quando n tende ao infinito.

5.2 Estimação por intervalo

Um intervalo que contenha um parâmetro θ , com certa probabilidade $1-\alpha$, é chamado de intervalo de confiança para θ , com coeficiente de confiança $1-\alpha$.

Intervalo de confiança para a média populacional

Consideremos X_1, X_2, \dots, X_n uma amostra aleatória de uma variável X , com $E(X) = \mu$ e $V(X) = \sigma^2$. Sabemos que, para n suficientemente grande, a distribuição de $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ é

aproximadamente $N(0;1)$, sendo z_α o valor da tabela da normal padrão, tal que $P(-z_\alpha < Z < z_\alpha) = 1-\alpha$, isto é:

$$P(-z_\alpha < \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_\alpha) = 1-\alpha \Rightarrow P(\bar{X} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1-\alpha$$

Assim, se diz que $(\bar{X} - z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ é um intervalo de confiança para μ , com coeficiente de confiança $1-\alpha$.

Exemplo 5.2

Em certa universidade, sabe-se que a distribuição dos QIs dos alunos tem variância igual a 64. Se numa amostra de 40 alunos obteve-se um QI médio igual a 115, qual será o intervalo, com 95% de confiança, para o QI médio dos alunos da referida universidade?

Temos aqui $1-\alpha=0,95$, logo $z_{\alpha}=1,96$ e, portanto, o intervalo de confiança pretendido é dado por:

$$[115-(1,96) \frac{8}{\sqrt{40}} ; 115+(1,96) \frac{8}{\sqrt{40}}] = (112,5; 117,5).$$

Intervalo de confiança para a proporção p

Dada uma amostra aleatória X_1, X_2, \dots, X_n de uma distribuição de Bernoulli com parâmetro p, temos que, para n suficientemente grande, a distribuição de $Z = \frac{\hat{P}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$ é

aproximadamente $N(0;1)$, sendo $\hat{P} = (\sum_{i=1}^n X_i)/n$. Assim:

$$P(-z_{\alpha} < \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} < z_{\alpha}) = 1 - \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(\hat{P} - z_{\alpha} \sqrt{p(1-p)/n} < p < \hat{P} + z_{\alpha} \sqrt{p(1-p)/n}) = 1 - \alpha .$$

Como não conhecemos p , substituímos $p(1-p)$ pelo estimador $\hat{P}(1-\hat{P})$ e, dessa forma, temos que $(\hat{P} - z_{\alpha} \sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})/n} ; \hat{P} + z_{\alpha} \sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})/n})$ é um intervalo de confiança para p , com coeficiente de confiança $1-\alpha$.

Exemplo 5.3

Suponhamos que uma amostra de 100 homens de uma universidade brasileira tenha a seguinte distribuição de QIs:

QI	N.º de homens
92 — 107	29
107 — 122	38
122 — 137	20
137 — 152	10
152 — 167	3
TOTAL	100

Nesse caso, qual será o intervalo, com 90% de confiança, para a proporção de homens com QI superior a 137?

Para $1-\alpha=0,9$, obtemos na tabela da normal padrão que $z_{\alpha}=1,65$. Temos também, pela tabela da distribuição de QIs acima, que o número de homens com QI superior a 137 é 13, ou seja, $\hat{p}=13/100 = 0,13$. Portanto, o intervalo pretendido é dado por:

$$[0,13-(1,65)\sqrt{(0,13\times 0,87)/100} ; \\ 0,13+(1,65)\sqrt{(0,13\times 0,87)/100}]=(0,07 ; 0,18).$$

Problemas

1. A distribuição do tempo de reação de motoristas de certo país tem desvio padrão igual a 0,2 segundos. Selecionou-se uma amostra de 50 motoristas e obteve-se um tempo médio de reação igual a 0,83. Determine um intervalo de 95% de confiança para o tempo médio de reação da população de motoristas desse país.

2. Em certa cidade, deseja-se estimar a proporção P de pessoas que são favoráveis à fluoração da água. Supondo que numa amostra de 100 pessoas dessa cidade, 75 são favoráveis à

água fluorada, qual será o intervalo com 99% de confiança para a proporção P ?

3. Antes de uma eleição deseja-se fazer uma pesquisa para verificar a proporção de eleitores que pretendem votar num candidato A. Para isso, consultou-se uma amostra de 1600 eleitores, da qual obteve-se que 35% eram favoráveis à A. Nesse caso, qual será o intervalo com 95% de confiança para a proporção de eleitores que são favoráveis ao candidato A?

4. Suponha que a nota num teste de inteligência de crianças de certa população em idade escolar tenha distribuição com desvio padrão igual a 3. Se numa amostra de 362 crianças obteve-se nota média igual a 35, qual será um intervalo, com 90% de confiança, para a nota média dessa população?

5. Supondo que numa pesquisa de âmbito nacional envolvendo 2000 famílias, 200 delas mostravam ter um ou mais de seus membros com algum tipo de neurose, determine um intervalo, com 99% de confiança, para a proporção de famílias que têm algum tipo de neurose.

Capítulo 6

Distribuição de frequências

Na prática, quando obtemos observações amostrais, inicialmente organizamos os dados em tabelas e gráficos, para facilitar a compreensão das distribuições das variáveis em estudo. Em seguida, realizamos cálculos de algumas medidas, como por exemplo médias e variâncias, que servem essencialmente como estimativas de parâmetros da população de onde foi retirada a amostra. Trataremos a seguir de tais assuntos, como construção de tabelas e gráficos e obtenção de algumas estimativas, de forma que, neste capítulo 6, estudaremos um caso específico de organização de dados em tabela e, nos seguintes, 7 e 8, faremos os cálculos de algumas medidas de tendência central, de separatrizes e de variabilidade amostrais. No capítulo 9 daremos uma introdução à inferência estatística que testa hipóteses sobre parâmetros populacionais.

6.1 Introdução

Para uma análise estatística, no caso da variável em estudo ser contínua, é sempre conveniente os dados coletados

serem agrupados em classes, obtendo-se assim o que se denomina de distribuição de frequências, cujos elementos serão aqui definidos com base na tabela do exemplo seguinte.

Exemplo 6.1

A tabela a seguir exhibe a distribuição das notas em uma prova de estatística, de 500 candidatos, em certo concurso público.

Notas	Frequências
0 — 10	5
10 — 20	15
20 — 30	20
30 — 40	45
40 — 50	100
50 — 60	130
60 — 70	100
70 — 80	60
80 — 90	15
90 — 100	10
TOTAL	500

Observações:

1. O símbolo $|—$ indica a inclusão na classe do valor situado à esquerda e a exclusão do valor situado à direita. Considerando, por exemplo, a classe $50 |— 60$, temos que essa congrega notas de 50, inclusive, até 60, exclusive;

2. O valor situado à esquerda é chamado de limite inferior da classe e o situado à direita, de limite superior.

Principais elementos na construção de uma distribuição de frequências

1. Amplitude total (A_t)

A amplitude total de um conjunto de dados qualquer é definida como a diferença entre o maior e o menor valores do conjunto.

2. A amplitude de classe

A amplitude de classe é definida como sendo a diferença entre dois limites inferiores ou entre dois limites superiores sucessivos, nos casos em que a distribuição tenha a mesma amplitude em todas as classes. De acordo, então, com esta definição, temos que a amplitude de classe do exemplo anterior é igual a 10.

Observação: Na construção de uma distribuição de frequências é conveniente que todas as classes tenham a mesma amplitude, pois, assim, evitam-se equívocos na interpretação da variação do fenômeno.

3. Ponto médio de classe

Ponto médio de uma classe é o ponto equidistante dos extremos, que serve para representar a classe nos casos de cálculos de algumas medidas. A coluna dos pontos médios em uma distribuição de frequências normalmente é representada pela letra “m”.

Para obter o ponto médio de uma classe acrescentamos ao limite inferior a metade da amplitude de classe. Assim temos, por exemplo, que o ponto médio da segunda classe da distribuição do exemplo 6.1 é dado por $10+10/2=15$.

Tipos de frequências:

Em uma distribuição de frequências, tem-se:

Frequências absolutas $\left\{ \begin{array}{l} \text{simples} \\ \text{acumuladas} \left\{ \begin{array}{l} \text{abaixo de} \\ \text{acima de} \end{array} \right. \end{array} \right.$

Frequências relativas $\left\{ \begin{array}{l} \text{simples} \\ \text{acumuladas} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{abaixo de} \\ \text{acima de} \end{array} \right.$

Sendo:

- a) Frequência absoluta simples: é o número de observações de uma classe. Normalmente a coluna destas frequências é representada pela letra “f”;
- b) Frequência relativa simples: é a proporção de observações de uma classe em relação ao número total de observações;
- c) Frequências acumuladas abaixo de (absolutas ou relativas): obtém-se somando, a partir da primeira classe, cada frequência simples com a frequência acumulada anterior. Costuma-se representar as colunas destas frequências por F_{\downarrow} e $F_{\downarrow}\%$, respectivamente;
- d) Frequências acumuladas acima de (absolutas ou relativas): procede-se da mesma forma das frequências acumuladas abaixo de, porém partindo da última classe. As colunas destas frequências são representadas por F_{\uparrow} e $F_{\uparrow}\%$, respectivamente.

Exemplo 6.2

Da distribuição do exemplo 6.1, temos:

Classes	m	f	f%	F↓	F↓%	F↑	F↑%
0 — 10	5	5	1,0	5	1,0	500	100,0
10 — 20	15	15	3,0	20	4,0	495	99,0
20 — 30	25	20	4,0	40	8,0	480	96,0
30 — 40	35	45	9,0	85	17,0	460	92,0
40 — 50	45	100	20,0	185	37,0	415	83,0
50 — 60	55	130	26,0	315	63,0	315	3,0
60 — 70	65	100	20,0	415	83,0	185	37,0
70 — 80	75	60	12,0	475	95,0	85	17,0
80 — 90	85	15	3,0	490	98,0	25	5,0
90 — 100	95	10	2,0	500	100,0	10	2,0
TOTAL	-	500	100,0	-	-	-	-

6.2 Número de classes

Existem várias regras para a determinação do número de classes de uma distribuição de frequência, como, por exemplo, a de Sturges, que é dada por:

$$K=1+(3,31) \log n.$$

Sendo:

K = número de classes

n = número de observações.

Essa regra, no entanto, tem a desvantagem de dar muitas classes para um pequeno número de observações e relativamente poucas classes, quando esse número é grande.

Por um lado mais prático, tem-se a sugestão de vários outros autores de que o número de classes deve variar entre 5 e 20, sendo esta escolha dependente mais da natureza dos dados e da unidade em que esses estejam expressos. De acordo, então, com essa sugestão é que se costuma usar a seguinte regra prática: escolhe-se um número, se possível inteiro e que esteja próximo da metade do intervalo $(A_t/20 ; A_t/5)$, para ser a amplitude de classe. A seguir adiciona-se essa amplitude aos

limites inferiores das classes, determinando-se, assim, a distribuição e o número de classes.

Exemplo 6.3

Os dados seguintes são os rendimentos de 70 examinandos numa prova de raciocínio:

25 42 26 25 42 23 41 22 43 20 28 39

30 29 38 29 37 28 40 28 31 35 32 31

35 31 34 32 36 31 33 43 34 33 33 32

34 34 32 34 35 32 34 36 32 35 31 36

32 34 37 30 39 40 30 38 30 40 31 37

41 23 40 26 41 27 43 28 38 41

Nesse conjunto de dados temos que o maior valor é 43 e o menor é 20. Assim obtemos que $A_t=43-20=23$. Consequentemente:

$$(A_t/20 ; A_t/5) = (1,15 ; 4,6)$$

Logo, de acordo com a regra anterior, temos que a distribuição de frequências para esses dados fica como na tabela a seguir, em que a amplitude de classe é $a=3$, que é um

número inteiro e está próximo da metade do intervalo ($A_t / 20$; $A_t / 5$).

Observação: aproveitamos essa distribuição para exemplos da seção seguinte; por isso, também determinamos nessa tabela as frequências acumuladas absolutas, abaixo e acima de.

Classes	f	F↓	F↑
20 — 23	2	2	70
23 — 26	4	6	68
26 — 29	7	13	64
29 — 32	12	25	57
32 — 35	17	42	45
35 — 38	10	52	28
38 — 41	9	61	18
41 — 44	9	70	9
TOTAL	70	-	-

6.3 Representação gráfica

Para representar graficamente uma distribuição de frequências usam-se os seguintes gráficos:

a) O polígono de frequências ou o histograma para representar as frequências simples;

b) O diagrama de frequências acumuladas (ogiva de Galton) para representar as frequências acumuladas.

Construção do polígono de frequências

No eixo das abscissas marcam-se os limites inferiores das classes e o limite superior da distribuição;

As frequências são marcadas no eixo das ordenadas, a partir de perpendiculares levantadas dos pontos médios das respectivas classes;

Fecha-se o polígono ligando os pontos extremos aos pontos médios dos intervalos, que se acrescentam no início e no fim da distribuição.

Construção do histograma

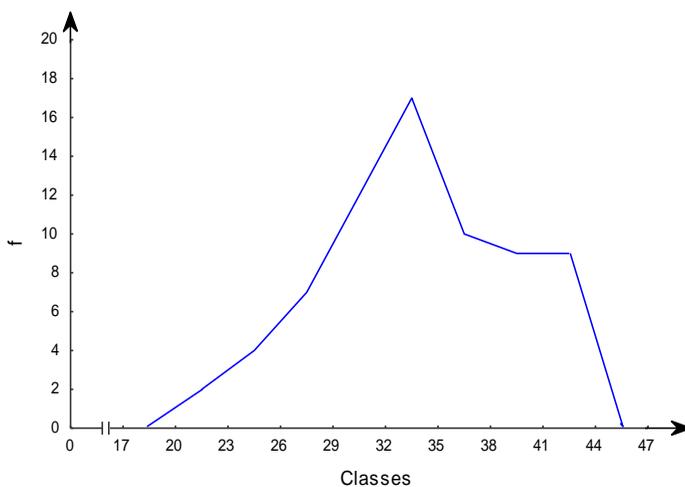
O histograma é construído de forma equivalente ao polígono de frequências, só que, neste caso, não se representam

todos os resultados de uma classe pelo seu ponto médio; porém, supõe-se que tais resultados distribuem-se uniformemente por todo o intervalo.

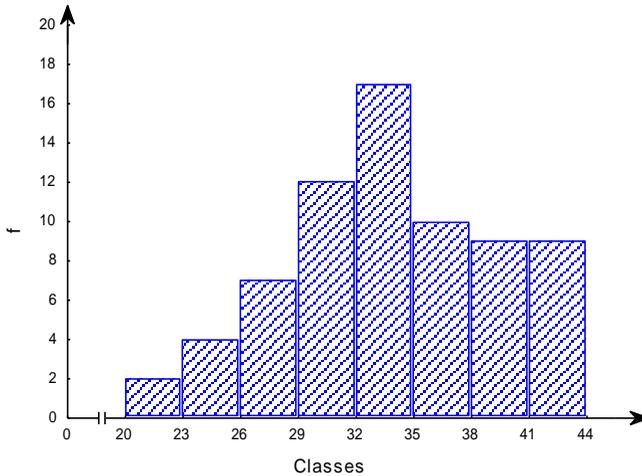
Exemplo 6.4

Da distribuição do exemplo 6.3 temos que o polígono de frequências e o histograma são dados, respectivamente, por

a) Polígono de frequências



b) Histograma



Observação: é comum também se representar as frequências das classes, no histograma, pelas áreas dos respectivos retângulos. Neste caso, tem-se:

$$A = b \times h$$

Sendo:

A = área = frequência de classe

b = base = intervalo de classe

h = altura.

Construção da ogiva de Galton

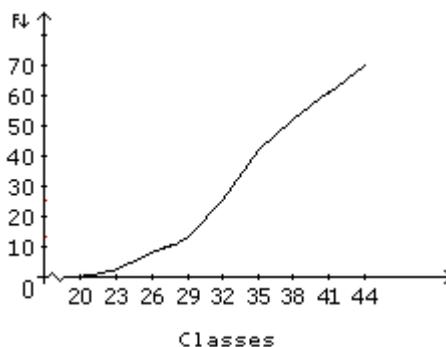
No eixo das ordenadas marcam-se as frequências acumuladas e no eixo das abscissas os limites inferiores ou superiores das classes, de onde são levantadas perpendiculares para encontrar as respectivas frequências acumuladas.

Observação: em se utilizando as frequências “abaixo de” é preferível que sejam usados os limites superiores como representantes das classes, enquanto que, no caso das frequências “acima de”, devem-se usar os limites inferiores.

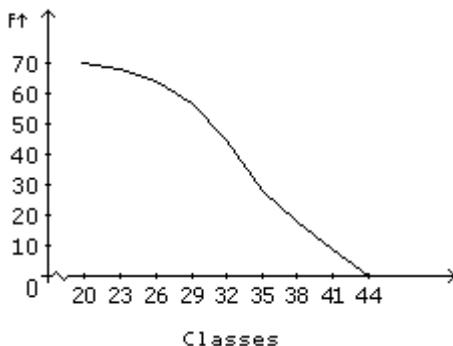
Exemplo 6.5

Considerando ainda a distribuição do exemplo 6.3, teremos:

a) Frequências “abaixo de”



b) Frequências “acima de”



Problemas

1. Os dados seguintes referem-se ao tempo gasto, em horas, por 70 pessoas, na execução de um desenho técnico:

3,4	8,1	7,9	3,4	5,6	8,1	9,0	8,3	4,2	7,2
7,5	5,2	6,0	7,0	8,1	7,6	6,9	6,0	8,0	4,0
8,4	6	4,8	6,3	8,2	7,9	8,3	7,2	7,0	4,3
6,1	9,8	2,3	4,1	5,6	6,4	5,4	7,5	8,0	5,0
1,5	4,0	4,3	4,8	9,9	4,1	10,0	10,0	6,0	6,0
6,2	6,8	8,1	9,1	8,5	7,3	4,9	4,5	5,1	6,0
7,1	8,1	8,0	2,0	1,9	7,4	7,0	7,3	7,4	5,2

Pede-se:

- a) Construir uma distribuição de frequências para os dados;
- b) Construir o polígono de frequências, o histograma e a ogiva de Galton.

2. A tabela seguinte nos dá a distribuição dos pontos em um teste de rapidez e exatidão, em tarefas digitais, aplicado a um grupo de 100 alunos de uma certa escola:

Pontos	f
0 — 10	5
10 — 20	10
20 — 30	12
30 — 40	35
40 — 50	24
50 — 60	14
TOTAL	100

- a) Determine o número de alunos com menos de 30 pontos;
- b) Determine a porcentagem dos alunos com 10 pontos ou mais;
- c) Construa o polígono de frequências e a ogiva de Galton.

Capítulo 7

Medidas de tendência central e separatrizes

Medidas de tendência central ou promédios são valores que servem para representar a distribuição como um todo, além de possibilitarem o confronto entre distribuições. Das principais medidas de tendência central destacamos aqui a média aritmética e a mediana.

7.1 Média aritmética

1. Média aritmética de valores isolados

Se $\underbrace{X_1, X_1, \dots, X_1}_{f_1 \text{ vezes}}, \underbrace{X_2, X_2, \dots, X_2}_{f_2 \text{ vezes}}, \dots, \underbrace{X_n, X_n, \dots, X_n}_{f_n \text{ vezes}}$ é uma série de valores repetidos, tem-se que a média aritmética, neste caso, é o quociente entre a soma dos valores do conjunto e o número total de valores, ou seja:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i X_i}{\sum_{i=1}^n f_i}. \quad (7.1)$$

Exemplo 7.1

Suponhamos que os números de questões respondidas corretamente por 20 alunos de psicologia em uma prova de estatística foram os seguintes:

7	6	7	6	7
4	5	7	5	8
6	5	5	7	8
4	7	7	7	6

Tabulando esses números, obteremos:

Nº de questões corretas(x)	Nº de alunos(f)	f.x
4	2	8
5	4	20
6	4	24
7	8	56
8	2	16
Total	20	124

Assim:

$$\bar{X} = 124/20 = 6,2 .$$

2. Média aritmética de uma distribuição de frequências

Para uma distribuição de frequências com k classes, sendo m_1, m_2, \dots, m_k seus pontos médios, tem-se que a média aritmética é calculada por:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i m_i}{\sum_{i=1}^k f_i} . \quad (7.2)$$

Exemplo 7.2

Considerando novamente a distribuição do exemplo 6.3, calculemos sua média aritmética, de forma que, determinando as colunas que são necessárias, teremos:

Classes	f	m	f.m
20 — 23	2	21,5	43,0
23 — 26	4	24,5	98,0
26 — 29	7	27,5	192,5
29 — 32	12	30,5	366,0
32 — 35	17	33,5	569,5
35 — 38	10	36,5	365,0
38 — 41	9	39,5	355,5
41 — 44	9	42,5	382,5
Total	70	-	2372,0

Assim:

$$\bar{X} = 2372/70 = 33,88.$$

7.2 Mediana

A mediana é a medida de tendência central que divide a distribuição em duas partes iguais, ou seja, é o valor que fica no meio da série ordenada.

1. Mediana de valores isolados

Temos que a mediana de uma distribuição também pode ser definida como o valor do elemento mediano, sendo que esse elemento é o número que indica a ordem em que se encontra a mediana. Em geral, usa-se o seguinte procedimento para determinar o elemento mediano:

i) Se o número de observações N é ímpar, então $E_{md} = (N+1)/2$, sendo E_{md} o elemento mediano;

ii) Se o número de observações N é par, então $E_{md} = N/2$, e, neste caso, a mediana é igual à média aritmética dos dois valores centrais.

Exemplo 7.3

Suponha um grupo de 5 pessoas com as seguintes estaturas: 1,85m; 1,60m; 1,70m; 1,65m e 1,60m. Aqui, $E_{md} = (N+1)/2 = 6/2 = 3$. Logo, ordenando os valores obtemos que a estatura mediana deste grupo é 1,65 m.

Exemplo 7.4

Ao invés de um grupo de cinco pessoas, como no exemplo 7.3, consideremos agora as seis seguintes estaturas: 1,85m; 1,60m; 1,70m; 1,65m; 1,60m e 1,62m. Assim, $E_{md} = N/2 = 6/2 = 3$. Colocando os valores em ordem crescente: 1,60; 1,60; 1,62; 1,65; 1,70; 1,85, obtemos que 1,62 e 1,65 são os dois valores centrais. Logo:

$$md = (1,62+1,65)/2 = 1,63.$$

Exemplo 7.5

Com relação ao exemplo 7.1 temos que o cálculo da mediana fica mais fácil se, em primeiro lugar, determinamos a coluna das frequências acumuladas, ou seja:

Nº de questões corretas(x)	f	F↓
4	2	2
5	4	6
6	4	10
7	8	18
8	2	20
TOTAL	20	-

Desta forma: $E_{md} = 20/2 = 10$. Logo, pela tabela anterior:

$$md = (6+7)/2 = 6,5.$$

Mediana de uma distribuição de frequências

Considerando f_m como sendo a frequência simples da classe da mediana, F_{ant} como a frequência acumulada até a classe anterior à classe da mediana, l_i o limite inferior da classe da mediana, $E_{md} = \sum f_i / 2 = N/2$ (para N par ou ímpar) e “ a ” a amplitude de classe, mostra-se facilmente que a mediana de uma distribuição de frequências é dada por:

$$md = l_i + (E_{md} - F_{ant})a/f_m. \quad (7.3)$$

Exemplo 7.6

A distribuição da tabela a seguir dá as notas em um teste de rapidez e exatidão de um grupo de 46 pessoas do sexo feminino.

Notas	f	F↓
0 — 5	1	1
5 — 10	1	2
10 — 15	4	6
15 — 20	10	16
20 — 25	17	33
25 — 30	9	42
30 — 35	3	45
35 — 40	1	46
Total	46	-

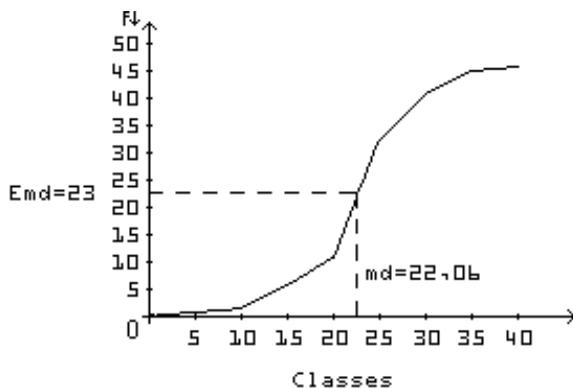
Qual será, então, a nota mediana do grupo? Temos que $E_{md} = 46/2 = 23$. Logo, pela coluna das frequências acumuladas, vemos que a classe da mediana é 20 |— 25. Assim:

$$md = 20 + (23 - 16)(5)/17 = 22,06.$$

Observação: a mediana de uma distribuição de frequências também pode ser obtida a partir da ogiva de Galton, pois a mediana é a abscissa do ponto, cuja ordenada é o elemento mediano.

Exemplo 7.7

Do exemplo 7.6, obtemos:



Emprego da média e da mediana

De uma maneira geral, prefere-se empregar a média aritmética quando a distribuição dos dados é simétrica, ou nos casos em que se faz necessário o cálculo de outras estatísticas. Por outro lado, a mediana é preferida quando se deseja o ponto que divide a distribuição em duas partes iguais, ou nos casos em que na distribuição dos dados existam valores muito distanciados dos demais, comumente chamados de valores extremos.

7.3 Separatrizes

Definição: separatrizes são os valores da distribuição nomeados por suas posições na série ordenada.

De maneira análoga ao que vimos, com relação à mediana, tem-se que uma separatriz é o valor do elemento que indica a ordem em que esta se encontra. Existem separatrizes de quaisquer ordens, porém algumas são de maior importância, como as que veremos a seguir.

1. Quartis

Permitem dividir a distribuição em quatro partes iguais, quanto ao número de elementos de cada uma. Numa distribuição de frequências temos:

$$Q_j = l_j + (EQ_j - FQ_{j-1}) a/f_j . \quad (7.4)$$

Sendo:

Q_j : o j -ésimo quartil, $j = 1, 2, 3$;

l_j : o limite inferior da classe do j -ésimo quartil;

EQ_j : o elemento quartil j , de forma que, considerando N como o total das frequências, temos : $EQ_j = j \cdot N/4$;

FQ_{j-1} : é a frequência acumulada até a classe anterior à classe do j -ésimo quartil;

f_j : é a frequência simples da classe do j -ésimo quartil.

Observação: podemos ver de imediato que $md = Q_2$.

2. Percentis ou centis

Dividem a distribuição em cem partes iguais, quanto ao número de elementos de cada uma. Se P_j é o j -ésimo percentil, $j=1,2,3,\dots,99$, com $EP_j=j.N/100$, então, analogamente ao cálculo dos quartis em uma distribuição de frequências, tem-se que o cálculo de P_j é dado por:

$$P_j = l_j + (EP_j - FP_{j-1})a/f_j. \quad (7.5)$$

Exemplo 7.8

Considerando o exemplo 7.6, determinemos:

- O valor que separa 25% das notas mais baixas;
- O valor cujo percentual de pessoas com notas acima deste é 30 %;
- O valor que separa 25% das pessoas com as maiores notas.

No item (a) desejamos calcular Q_1 (ou P_{25}), pois podemos verificar que $Q_1 = P_{25}$. Assim, $EQ_1 = 46/4 = 11,5$. Logo, pela coluna das frequências acumuladas, vemos que a classe de Q_1 é 15 |— 20; portanto:

$$Q_1 = 15 + (11,5 - 6)(5)/10 = 17,75.$$

Queremos calcular no item (b) o septuagésimo percentil (P_{70}). Assim, teremos: $EP_{70} = (70)(46)/100 = 32,2$. Logo:

$$P_{70} = 20 + (32,2 - 16)(5)/17 = 24,76.$$

No item (c) queremos calcular P_{75} (ou Q_3), pois temos que $P_{75} = Q_3$. Assim, $EP_{75} = (75)(46)/100 = 34,5$. Pela coluna das frequências acumuladas verificamos que a classe de P_{75} é 25 — 30. Portanto:

$$P_{75} = 25 + (34,5 - 33)(5)/9 = 25,83.$$

Problemas

1. Os dados seguintes referem-se aos rendimentos em tarefas verbais de 22 alunos de uma escola do primeiro grau.

Rendimento	Nº de alunos
5	2
6	2
8	8
9	6
10	4
TOTAL	22

Determinar os rendimentos médio e mediano dos alunos.

2. A tabela seguinte dá o rendimento em tarefas motoras, medido por score, de 160 alunos de uma universidade.

Escore	f
5 — 10	5
10 — 15	10
15 — 20	24
20 — 25	62
25 — 30	34
30 — 35	18
35 — 40	7
Total	160

- Sabendo-se que os 30% dos alunos mais fracos irão para um treinamento especial, qual será o score exigido por tal treinamento?
- Qual é o score mínimo que delimita os 75% dos melhores alunos em motricidade?
- Calcular a média e a mediana desses scores.

Capítulo 8

Medidas de variabilidade

Podemos definir variabilidade de um conjunto de dados como sendo a maior ou menor diversificação dos valores em torno de uma medida de tendência central. Considerando, por exemplo, as notas de dois alunos A e B, em cinco disciplinas diferentes:

Alunos	Notas				
A	5,5	5,0	4,9	6,1	6,0
B	1,5	8,9	5,5	9,5	2,1

verificamos que a média do aluno A nas cinco disciplinas é igual a 5,5 e a do aluno B também é 5,5 , ou seja, em média estes alunos têm o mesmo rendimento. Por outro lado, vemos que existe significativa diferença nas distribuições das notas, de forma que, com relação ao aluno A, podemos considerar seus conhecimentos como uniformes nas cinco disciplinas, enquanto que o aluno B mostra um bom nível em algumas disciplinas e bastante deficiência em outras. Assim, podemos

dizer que a diferença das distribuições está nos graus de concentração das notas, que, no caso, são bem diferentes.

As medidas de variabilidade podem ser absolutas ou relativas. Em 8.1 e 8.2 a seguir apresentaremos algumas das consideradas mais importantes.

8.1 Principais medidas de variabilidade absoluta

1. Desvio quartil

É a média aritmética das diferenças entre a mediana e os dois quartis, ou seja:

$$D_q = [(Q_3 - md) + (md - Q_1)]/2 = (Q_3 - Q_1)/2. \quad (8.1)$$

Exemplo 8.1

Considerando a distribuição do exemplo 7.6 já temos, pelo exemplo 7.8, que $Q_1 = 17,75$ e $Q_3 = 25,83$. Portanto, para esta distribuição:

$$D_q = (25,83 - 17,75)/2 = 4,04.$$

Observações:

1. O desvio quartil é uma medida que não é afetada por valores extremos, sendo, portanto, recomendada quando houver valores desse tipo na distribuição dos dados, ou seja, nos casos em que a medida de tendência central mais adequada seja a mediana;

2. O desvio quartil tem a desvantagem de só considerar Q_1 e Q_3 , isto é, despreza o restante do conjunto dos dados.

2. Desvio padrão

É a raiz quadrada da média dos quadrados dos desvios, tomados em relação à média aritmética.

a) Desvio padrão de valores isolados

Seja $\underbrace{X_1, X_1, \dots, X_1}_{f_1 \text{ vezes}}$, $\underbrace{X_2, X_2, \dots, X_2}_{f_2 \text{ vezes}}$, ..., $\underbrace{X_n, X_n, \dots, X_n}_{f_n \text{ vezes}}$ uma série de valores repetidos. Neste caso, o desvio padrão é calculado por:

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^n f_i (X_i - \bar{X})^2 / \sum_{i=1}^n f_i} . \quad (8.2)$$

Fazendo $N = \sum_{i=1}^n f_i$ e desenvolvendo (8.2), obtemos:

$$S = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n f_i X_i^2 / N\right) - \bar{X}^2} \quad . \quad (8.3)$$

Exemplo 8.2

Considerando novamente a distribuição do exemplo 7.1 calcularemos a seguir seu desvio padrão, sendo que, para usar (8.3), precisamos das colunas definidas pelos produtos $f.X$ e $f.X^2$, isto é:

Notas(x)	f	f.x	f.x²
4	2	8	32
5	4	20	100
6	4	24	144
7	8	56	192
8	2	16	128
Total	20	124	796

Portanto:

$$S = \sqrt{796/20 - (124/20)^2} = \sqrt{39,8 - 38,44} = 1,17.$$

b) Desvio padrão de uma distribuição de frequências

De maneira análoga ao cálculo realizado na distribuição de valores isolados, obtemos o desvio padrão de uma distribuição de frequências, ou seja, dada uma distribuição com k classes, sendo m_1, m_2, \dots, m_k seus pontos médios, temos:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k f_i (m_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^k f_i}} . \quad (8.4)$$

Fazendo $N = \sum_{i=1}^k f_i$ e desenvolvendo (8.4), obteremos:

$$S = \sqrt{\left(\frac{\sum_{i=1}^k f_i m_i^2}{N}\right) - \bar{X}^2} . \quad (8.5)$$

Exemplo 8.3

Calcularemos a seguir o desvio padrão da distribuição:

Classes	f
0 — 10	9
10 — 20	11
20 — 30	12
30 — 40	10
40 — 50	8
Total	50

Determinando as colunas que são necessárias para o cálculo, teremos:

Classes	f	m	f.m	f.m²
0 — 10	9	5	45	225
10 — 20	11	15	165	2475
20 — 30	12	25	300	7500
30 — 40	10	35	350	12250
40 — 50	8	45	360	16200
Total	50	-	1220	38650

Assim:

$$S = \sqrt{38650/50 - (1220/50)^2} = \sqrt{773 - 595,36} = 13,33.$$

Principais propriedades do desvio padrão:

1. Somando-se ou subtraindo-se uma constante a cada elemento de um conjunto de dados, o desvio padrão não se altera;

2. Dividindo-se ou multiplicando-se cada elemento de um conjunto de dados por uma constante, o desvio padrão fica multiplicado ou dividido por esta constante, conforme seja o caso.

Problemas

1. Calcular o desvio padrão da distribuição do problema 1, do capítulo anterior.

2. Calcular o desvio padrão e o desvio quartil da distribuição do problema 2, do capítulo anterior.

8.2 Medidas de variabilidade relativa

Uma medida de dispersão relativa resulta da comparação entre medidas de variabilidade absoluta e de tendência central, sendo seu uso justificado nos casos em que

se deseje comparar as variabilidades de distribuições, nas quais:

a) As unidades de escala são desiguais (conforme temos no exemplo 8.4, a seguir);

b) Mesmo tendo as unidades de escala iguais, as médias sejam significativamente diferentes (conforme exemplo 8.5).

Principais medidas de variabilidade relativa

1. Desvio quartil reduzido: é a relação entre o desvio quartil e a mediana, ou seja:

$$D_{qr} = [(Q_3 - Q_1)/2]/md = (Q_3 - Q_1)/2md \quad (8.6)$$

2. Coeficiente de variação de Pearson: é a relação entre o desvio padrão e a média aritmética, isto é:

$$CV_p = \frac{S}{\bar{X}} \times 100\% \quad (8.7)$$

Exemplo 8.4

Suponhamos uma sala de aula com 50 alunos possuidores de uma estatura média de 1,14 m, com desvio padrão igual a 0,063 m e um peso médio de 50 kg, com desvio padrão igual a 6,0 kg. Qual a maior variabilidade relativa, a dos pesos ou a das alturas?

Calculando o coeficiente de variação de Pearson para as distribuições das alturas e dos pesos, respectivamente, obtemos $(0,063/1,14) \times 100\% = 5,53\%$ e $(6/50) \times 100\% = 12\%$, de onde concluímos que os pesos têm maior variabilidade relativa que as alturas.

Exemplo 8.5

Consideremos os seguintes dados, referentes às alturas de um grupo de meninos e de um grupo de homens:

Grupo	Média	Desvio padrão
Meninos	50 cm	6 cm
Homens	160 cm	16 cm

Neste caso, que grupo tem maior variabilidade relativa?

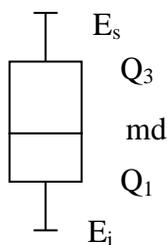
Temos que $(6/50) \times 100\% = 12\%$ e $(16/160) \times 100\% = 10\%$ são os coeficientes de variação de Pearson para os grupos dos meninos e dos homens, respectivamente, dos quais concluímos que as alturas dos meninos têm maior variabilidade relativa que a dos homens.

8.3 Esquema dos cinco números e Box-plot

Definindo E_i e E_s , respectivamente, como os valores extremos inferior e superior de um conjunto de dados, temos a representação do esquema dos cinco números, que é dada por:

	n	
Md	md	
Q	Q_1	Q_3
E	E_i	E_s

Na figura seguinte, chamada de Box-plot, está traduzida graficamente a informação dada pelo “Esquema dos cinco números”:



Observação: o Box-plot nos dá uma ideia da posição, dispersão, assimetria e comprimento das caudas da distribuição dos dados.

Exemplo 8.6

Considerando os dados do exemplo 7.1:

a) Esquema dos cinco números

Da distribuição desse exemplo já temos:

$$n=20; E_1=4; E_5=8 \text{ e } md=6,5.$$

Para os cálculos de Q_1 e Q_3 precisamos obter:

$$EQ_1=20/4=5 \text{ e } EQ_3=3(20)/4=15.$$

Assim, pelas frequências acumuladas dadas no exemplo 7.5, obtemos:

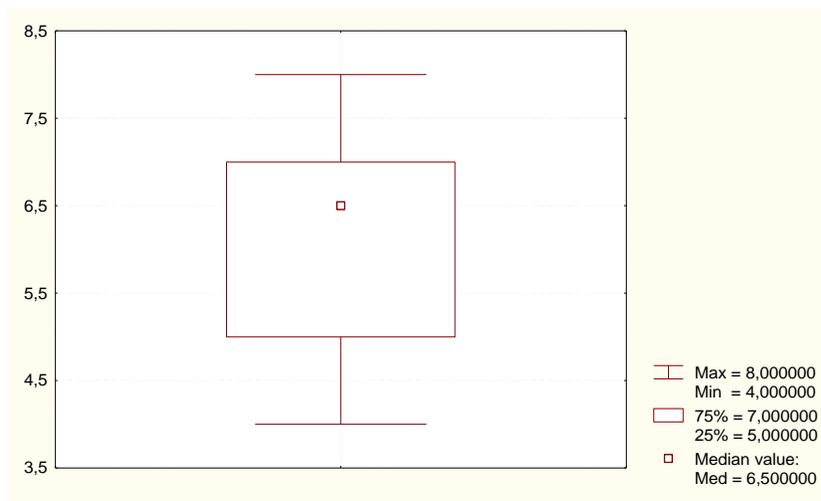
$$Q_1=5 \text{ e } Q_3=7$$

Portanto, o “Esquema dos cinco números” ficará:

	20	
Md	6,5	
Q	5	7
E	4	8

b) Box-plot

Através do Software “Statística”, obtemos o Box-plot:



Problemas

3. Considerando as distribuições dos problemas 1 e 2 do capítulo anterior, qual delas apresenta maior variabilidade relativa?

4. Considerando a distribuição do problema 2 do capítulo 6 e a distribuição do exemplo 7.6, qual das duas tem maior variabilidade relativa?

5. Construir o “Esquema dos cinco números” e o Box-plot para os dados dos problemas 1 e 2 do capítulo anterior.

Capítulo 9

Testes de hipóteses: primeiras ideias

9.1 Hipótese estatística

Seja X uma variável aleatória e θ um parâmetro da distribuição de X , na prática, normalmente ocorre que θ é desconhecido. Este fato, então, faz com que procuremos estimadores para θ , conforme comentamos anteriormente, além de nos levar a definir hipóteses a respeito desse, de forma que, baseada em uma amostra aleatória, a inferência estatística testa qual das referidas hipóteses é ou não verdadeira. Assim, podemos estar interessados em testar, por exemplo, se θ é igual a um certo θ_0 , que é chamada de “hipótese nula” e que usualmente representamos por H_0 , ou seja:

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

A hipótese que será considerada como aceitável, caso H_0 seja rejeitada, chama-se de “hipótese alternativa”, normalmente representada por H_1 , que poderá, nesse caso, ter uma das seguintes formas:

$$H_1 : \theta < \theta_0 ; \quad H_1 : \theta > \theta_0 \quad \text{ou} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

Observação: dizemos que um teste é bilateral quando a hipótese alternativa é da forma $H_1 : \theta \neq \theta_0$. Por outro lado, se essa hipótese é dada por $H_1 : \theta < \theta_0$ ou $H_1 : \theta > \theta_0$, dizemos que o teste é unilateral à esquerda ou à direita, conforme seja o caso.

9.2 Erros do tipo I e do tipo II

Ao realizarmos um teste de hipóteses estamos sujeitos a cometer dois tipos de erros, a saber, o chamado erro do tipo I, que consiste em rejeitar a hipótese nula quando essa é verdadeira, e o erro do tipo II, que consiste em não rejeitar H_0 , quando H_0 é falsa. As probabilidades desses erros são, portanto:

$$\alpha = \text{P}(\text{do erro tipo I}) = \text{P}(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira}) \text{ e}$$

$$\beta = \text{P}(\text{do erro tipo II}) = \text{P}(\text{não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é falsa})$$

sendo que α também é chamada de nível de significância do teste.

Seria desejável, obviamente, que os valores de α e β fossem ambos tão pequenos quanto possível. No entanto, pode-se verificar que, ao diminuir-se o valor de um, o outro aumenta. Assim, na prática, costuma-se arbitrar um valor para

o nível de significância, que usualmente é fixado em 0,01 ou 0,05.

9.3 Determinação da região de rejeição

Dada uma amostra aleatória, o que na realidade um teste de hipótese faz é, baseado no valor de uma estatística T , rejeitar ou não a hipótese nula, sendo esta hipótese rejeitada se o valor de T pertencer a uma certa região, denominada de região de rejeição, RR . Assim, podemos escrever a probabilidade do erro tipo I como:

$$P(T \in RR \mid H_0 \text{ é verdadeira}) = \alpha \quad (9.1)$$

Consequentemente, para um valor fixo de α obtemos por (9.1) a respectiva região de rejeição, ou seja, dessa forma conseguimos a região que determina a rejeição de H_0 .

9.4 Passos para a construção de um teste de hipóteses

A seguir temos uma sequência que pode ser usada na realização de qualquer teste de hipóteses:

Passo 1: fixar as hipóteses nula(H_0) e alternativa (H_1);

Passo 2: decidir qual estatística será usada para julgar a hipótese nula;

Passo 3: fixar o nível de significância α , usando-o em seguida para definir a região de rejeição;

Passo 4: usar as informações da amostra para calcular o valor da estatística citada no passo 2;

Passo 5: se o valor citado no passo anterior pertencer à região de rejeição, rejeitar H_0 ; caso contrário, não rejeitar.

Veremos a seguir exemplos para testar a hipótese de que a proporção p de uma população seja igual a um certo valor fixado p_0 . Também testaremos a hipótese de que a média populacional μ seja igual a um certo valor μ_0 , supondo-se conhecida a variância populacional.

Exemplo 9.1

Um candidato Y a prefeito de certa cidade afirma que 60% dos eleitores são favoráveis à sua candidatura. Um outro candidato, no entanto, deseja contestar essa afirmação, e para isto, contratou uma pesquisa de opinião, na qual o instituto contratado usou uma amostra de 200 eleitores. Constatado que dos eleitores entrevistados 110 eram favoráveis ao candidato Y, pode-se acreditar, ao nível de 5%, que Y tem realmente 60% da preferência dos eleitores?

Passo 1: colocaremos à prova a afirmação do candidato Y, isto é, $H_0: p=0,60$, sendo p a proporção de eleitores favoráveis a Y. Sabemos que se esta hipótese não for verdadeira o outro candidato espera uma porcentagem menor, nunca maior. Portanto, a hipótese alternativa, neste caso, é dada por $H_1 : p < 0,60$, ou seja, o teste é unilateral à esquerda.

Passo 2: a estatística a ser usada aqui é:

$$Z = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{200}}}$$

sendo \hat{P} a proporção dos 200 eleitores que são favoráveis ao candidato Y e, conforme já sabemos, \hat{P} tem distribuição aproximadamente $N(p; \frac{p(1-p)}{200})$, significando dizer que a distribuição de Z se aproxima de uma $N(0;1)$.

Passo 3: fixando $\alpha = 5\%$, e sendo este um teste unilateral à esquerda, temos:

$$\begin{aligned} 0,05 &= P(\text{Rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é Verdadeira}) = \\ &= P(Z < z_0 \mid p = 0,60) \end{aligned}$$

do qual obtemos, através da tabela da normal padrão, que $z_0 = -1,65$, ou seja, neste caso a região de rejeição é definida pelo conjunto dos valores da normal padrão menores que $-1,65$.

Passo 4: dado que 110 dos eleitores entrevistados eram favoráveis a Y temos que a proporção amostral fica:

$$\hat{p} = \frac{110}{200} = 0,55. \text{ Assim, o valor da estatística do teste para os}$$

dados observados, e considerando H_0 verdadeira, será:

$$Z = \frac{0,55 - 0,60}{0,0346} = -1,445$$

Passo 5: do resultado anterior vemos que o valor observado de Z não pertence à região de rejeição. Portanto, não temos motivo para rejeitar a hipótese nula, isto é, há evidências de que o candidato Y tem realmente 60% da preferência do eleitorado.

Exemplo 9.2

Uma senhora Y afirma possuir percepção extrassensorial. Para testar tal capacidade foi pedida a participação de pessoas presentes para a realização de um experimento, sendo que cada repetição consistia no seguinte: um dos presentes pegava uma carta preta e uma branca,

segurando uma em cada mão, de forma que a senhora Y só podia ver as costas das cartas. Em seguida, pedia-se à referida senhora para identificar em que mão estava cada uma das cartas. O experimento foi repetido 40 vezes e, dessas, a senhora Y acertou 27 e errou 13. Baseando-se neste experimento podemos afirmar, ao nível de 1,0%, que essa senhora tem realmente percepção extrassensorial ou devemos concluir o contrário, ou seja, que ela simplesmente adivinhou?

Nesse caso estamos interessados em testar a hipótese de que a senhora Y está simplesmente adivinhando, o que significa testar se a proporção p de acertos é igual a 0,5. Um valor de p maior que 0,5 indicará, então, que a senhora Y possui percepção extrassensorial. Assim, seguindo os passos para a construção de um teste de hipóteses, teremos:

Passo 1: de acordo com o que citamos anteriormente, para esse teste a hipótese nula é $H_0: p = 0,5$, e a alternativa será $H_1: p > 0,5$, ou seja, teremos aqui um teste unilateral à direita. No caso de H_0 não ser verdadeira espera-se uma proporção de acertos maior que 0,5, dada a afirmação da senhora Y de que possui percepção extrassensorial.

Passo 2: a estatística desse teste é:

$$Z = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{40}}}$$

sendo \hat{P} a proporção de acertos da senhora Y nas 40 realizações do experimento. Novamente temos que \hat{P} possui distribuição aproximadamente $N(p; \frac{p(1-p)}{40})$, ou seja, a estatística Z se distribui segundo uma $N(0;1)$, também de forma aproximada.

Passo 3: fixando $\alpha = 1,0\%$ e sendo esse um teste unilateral à direita, temos:

$$\begin{aligned} 0,01 &= P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira}) = \\ &= P(Z > z_0 \mid p = 0,50) \end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos da tabela da normal padrão que $z_0=2,33$, ou seja, a região de rejeição é definida pelo conjunto dos valores da normal padrão maiores que 2,33.

Passo 4: dado que a senhora Y acertou 27 das 40 repetições do experimento então o valor da proporção amostral é $\hat{P} = 27/40=0,675$. Consequentemente, supondo H_0 verdadeira:

$$Z = \frac{0,675 - 0,5}{0,079} = 2,215$$

Passo 5: como o valor observado de Z não pertence à região de rejeição, não rejeitamos H_0 . Isto é, ao nível de 1,0%, não rejeitamos a hipótese de que a senhora Y estava simplesmente adivinhando.

Exemplo 9.3

Para uma população de crianças com igual idade cronológica, deseja-se testar a hipótese de que a média populacional de seus QIs difere de 100. Para isto, aplicou-se o teste de Binet-Terman a uma amostra de 2970 crianças, obtendo-se um QI médio igual a 102. Supondo-se que o desvio padrão da população é conhecido e igual a 17,03, pode-se afirmar, ao nível de 5%, que difere de 100 o QI médio da população dessas crianças?

Passo 1: considerando μ o QI médio da população dessas crianças, nossa hipótese nula é $H_0: \mu = 100$ e a alternativa $H_1: \mu \neq 100$.

Passo 2: a estatística para este teste é:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{17,03}{\sqrt{2970}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{0,3125}$$

sendo a distribuição de Z aproximadamente $N(0;1)$.

Passo 3: fixado $\alpha = 5,0\%$, e sendo esse um teste bilateral, temos:

$$\begin{aligned}0,05 &= P(Z < -z_0 \text{ ou } Z > z_0 \mid \mu = 100) = \\ &= P(Z < -z_0 \mid \mu = 100) + P(Z > z_0 \mid \mu = 100) = \\ &= 2 P(Z > z_0 \mid \mu = 100) \Rightarrow \\ \Rightarrow P(Z > z_0 \mid \mu = 100) &= \frac{0,05}{2} = 0,025\end{aligned}$$

Assim, da tabela da normal padrão obtemos $z_0=1,96$, ou seja, a região de rejeição fica definida pelo conjunto dos valores da normal padrão menores que $-1,96$ ou maiores que $1,96$.

Passo 4: pelos dados do problema temos que o valor da média amostral é $\bar{X} = 102$. Logo, supondo H_0 verdadeira:

$$Z = \frac{102 - 100}{0,3125} = 6,4$$

Passo 5: como o valor de Z pertence à região de rejeição, rejeitamos H_0 , isto é, não aceitamos a hipótese de que o QI médio da população das crianças seja igual a 100.

Problemas

1. Para cada uma das hipóteses a seguir definir a região de rejeição correspondente, supondo-se para isto um nível de significância igual a 1%.

(a) $H_0: P=0,5$ contra $H_1: P<0,5$

(b) $H_0: P=0,5$ contra $H_1: P>0,5$

(c) $H_0: P=0,5$ contra $H_1: P\neq 0,5$

2. Os novos operários de uma empresa são treinados a operar uma máquina, e o tempo X (em horas) de aprendizado é anotado. Admite-se que X tem distribuição $N(25;100)$. Uma nova técnica de ensino, que deve melhorar o tempo de aprendizado, foi testada em 16 novos empregados, os quais apresentaram 22,3 horas como tempo médio de aprendizado. Você diria, ao nível de 5%, que a nova técnica é melhor do que a anterior?

3. As estatísticas mostram que, aproximadamente, 40% dos candidatos aos cursos de psicologia de certo país conseguem ser admitidos. Uma escola superior bastante conhecida informa, no entanto, que de seus 43 candidatos ao curso de psicologia, neste último ano, 30 foram admitidos. Você acha, ao nível de 1%, que essa escola tem razões para

afirmar que a proporção de candidatos admitidos para seu curso de psicologia é maior do que a nacional?

4. Os produtores de um programa de televisão pretendem modificá-lo se o mesmo for assistido regularmente por menos de um quarto dos telespectadores. Uma pesquisa encomendada a uma empresa especializada mostrou que, de 400 famílias entrevistadas, 70 assistem ao programa regularmente. Baseando-se nos dados, qual deve ser, ao nível de 1%, a decisão dos produtores?

5. O salário médio dos empregados das indústrias siderúrgicas é de 2,5 salários mínimos, com um desvio padrão de 0,5 salários mínimos. Em uma firma de 1500 empregados, consultou-se 49 e obteve-se um salário médio de 2,1 salários mínimos. Pode-se concluir que esta firma paga salários inferiores? Use $\alpha = 5\%$.

6. Uma companhia de cigarros anuncia que o índice médio de nicotina dos cigarros que fabrica apresenta-se abaixo de 23 mg por cigarro. Um laboratório realiza 6 análises desse índice, obtendo: 27, 24, 21, 25, 26, 22. Sabendo-se que o índice de nicotina se distribui normalmente, com variância igual a $4,86 \text{ mg}^2$, pode-se aceitar, ao nível de 5%, a afirmação do fabricante?

7. Sabe-se que os calouros admitidos nos cursos de matemática de todas as universidades de certo país apresentam, num teste vocacional, uma nota média igual a 115 e o desvio padrão igual a 20. O curso de matemática de uma universidade Y desse país está interessado em saber se seus calouros são típicos com relação à vocação. Para isto aplicou o mesmo teste vocacional na sua última turma de 40 calouros e obteve uma nota média igual a 118. Baseando-se nessa turma podemos afirmar, ao nível de 5%, que os alunos de matemática da universidade Y são típicos com relação à vocação?

8. Numa universidade X deseja-se testar se é diferente de 50% a proporção de alunos com QI acima de 110. Para isto colheu-se uma amostra de 60 alunos e obteve-se que 41 destes tinham QI acima de 110. Com base nesta amostra podemos acreditar, ao nível de 1%, que não é de 50% a proporção de alunos com QI acima de 110?

Capítulo 10

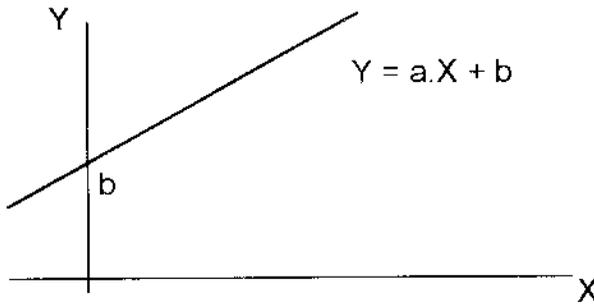
Regressão linear simples

10.1 Relação entre variáveis

a) Uma relação funcional entre duas variáveis é dada por:

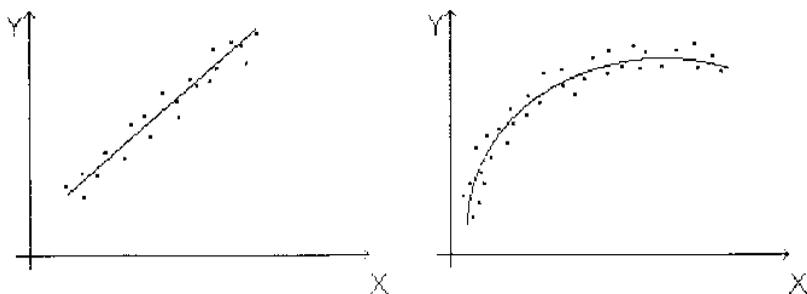
$$Y = f(X)$$

de forma que, para um particular valor da variável independente X , a função f indica o valor da variável dependente Y . Se $Y = aX + b$, por exemplo:



então, nesse caso, todos os pontos estão sobre a reta.

b) Em uma relação estatística (ou modelo estatístico), no entanto, os pontos não estão necessariamente sobre a curva da relação, conforme ilustramos a seguir:



10.2 Modelo de regressão linear simples

Quando se tem uma única variável independente (variável X) e o modelo estatístico da forma:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \quad (10.1)$$

sendo:

Y_i : variável resposta (dependente);

X_i : valor préfixado(não é variável aleatória);

β_0 e β_1 : parâmetros;

ε_i : é um erro aleatório, com $E(\varepsilon_i) = 0$,
 $\text{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$, para $i=1,2, \dots,n$ e $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, \forall i \neq j$, e

usando-se a suposição de que a distribuição de ε_i é normal, ou seja, trabalhando-se com a hipótese de que a distribuição de ε_i é $N(0, \sigma^2)$, $\forall i$, então nesse caso diz-se que o modelo (10.1) é de regressão linear simples, com erros normalmente distribuídos.

No modelo de regressão linear simples temos:

- a) O valor esperado de Y é chamado de função de regressão, sendo:

$$E(Y_i) = E(\beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i;$$

b) $\text{Var}(Y_i) = \text{Var}(\beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i) = \text{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2;$

- c) $\text{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$, $\forall i \neq j$, visto que ε_i e ε_j são não correlacionadas, para todo $i \neq j$;

- d) O parâmetro β_1 significa em quanto muda $E(Y)$, para cada unidade que se acrescenta em X .

10.3 Método de mínimos quadrados

Para determinar estimadores para β_0 e β_1 , normalmente emprega-se o método de mínimos quadrados, que considera a soma dos quadrados dos desvios de Y com relação ao seu valor esperado:

$$Q = \sum_i \varepsilon_i^2 = \sum [Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i)]^2. \quad (10.2)$$

Sendo que, de acordo com esse método, os estimadores de β_0 e β_1 são os valores que minimizam Q .

10.4 Estimadores de mínimos quadrados

Derivando Q com relação a β_0 e β_1 , obtemos:

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta_0} = -2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i);$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{i=1}^n X_i (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i).$$

Fazendo as equações anteriores iguais a zero e usando b_0 e b_1 como os valores de β_0 e β_1 que minimizam Q , obteremos:

$$-2 \sum_{i=1}^n (Y_i - b_0 - b_1 X_i) = 0;$$

$$-2 \sum_{i=1}^n X_i (Y_i - b_0 - b_1 X_i) = 0.$$

Desenvolvendo, temos:

$$\sum_{i=1}^n Y_i - nb_0 - b_1 \sum_{i=1}^n X_i = 0; \quad (10.3)$$

$$\sum_{i=1}^n X_i Y_i - b_0 \sum_{i=1}^n X_i - b_1 \sum_{i=1}^n X_i^2 = 0. \quad (10.4)$$

As equações (10.3) e (10.4) são então chamadas de equações normais e b_0 e b_1 são os estimadores de mínimos quadrados de β_0 e β_1 , respectivamente.

De (10.3) e (10.4) podemos diretamente obter b_0 e b_1 , sendo:

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - \frac{(\sum_{i=1}^n X_i)(\sum_{i=1}^n Y_i)}{n}}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n X_i)^2}{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}; \quad (10.5)$$

$$b_0 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n Y_i - b_1 \sum_{i=1}^n X_i \right) = \bar{Y} - b_1 \bar{X}. \quad (10.6)$$

Observação: costuma-se escrever:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 X,$$

que é o estimador de mínimos quadrados da função de regressão $E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X$.

Exemplo 10.1

Um psicólogo estava investigando a relação entre o tempo que um indivíduo leva para reagir a certo estímulo e a idade dele. Definiu-se então Y = tempo de reação e X = idade, obtendo-se os seguintes resultados, para uma amostra de 20 indivíduos.

Y	X	Y	X
96	20	109	30
92	20	100	30
106	20	112	35
100	20	105	35
98	25	118	35
104	25	108	35
110	25	113	40
101	25	112	40
116	30	127	40
106	30	117	40

Nesse caso:

$$b_1 = \frac{65.400 - \frac{(600)(2.150)}{20}}{19.000 - \frac{(600)^2}{20}} = 0,90;$$

$$b_0 = \frac{1}{20} (2.150 - (0,90)(600)) = 80,5.$$

Assim:

$$\hat{Y} = 80,5 + 0,90X_i$$

ou seja, estimamos que o tempo médio de reação cresce 0,90 para cada aumento de um ano na idade do indivíduo.

10.5 Resíduos

Definimos o resíduo para uma dada observação como a diferença entre o valor observado e o valor estimado, ou seja, denotando o i -ésimo resíduo por e_i , temos:

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - b_0 - b_1X_i.$$

Exemplo 10.2

Considerando os dados do exemplo anterior, obtemos:

Y	\hat{Y}_i	e_i	Y	\hat{Y}_i	e_i
96	98,5	-2,5	109	107,5	1,5
92	98,5	-6,5	100	107,5	-7,5
106	98,5	7,5	112	112,0	0,0
100	98,5	1,5	105	112,0	-7,0
98	103,0	-5,0	118	112,0	6,0
104	103,0	1,0	108	112,0	-4,0
110	103,0	7,0	113	116,5	-3,5
101	103,0	-2,0	112	116,5	-4,5
116	107,5	8,5	127	116,5	10,5
106	107,5	-1,5	117	116,5	0,5

Observação: os resíduos são importantes para verificar se um modelo de regressão é apropriado para os dados que se tem em mãos (mais adiante trataremos deste assunto).

10.6 Algumas propriedades da regressão linear, ajustada pelo método de mínimos quadrados

1. A soma dos resíduos é zero:

$$\sum_{i=1}^n e_i = \sum_{i=1}^n (Y_i - b_0 - b_1 X_i) = \sum_{i=1}^n Y_i - n b_0 - b_1 \sum_{i=1}^n X_i = 0,$$

pela equação (10.3)

2. A soma dos valores observados da variável dependente (Y) é igual à soma dos valores ajustados (\hat{Y}), isto é, também pela equação (10.3):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n Y_i &= n b_0 + b_1 \sum_{i=1}^n X_i \\ &= \sum_{i=1}^n b_0 + b_1 \sum_{i=1}^n X_i \\ &= \sum_{i=1}^n (b_0 + b_1 X_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \hat{Y}_i. \end{aligned}$$

3. A regressão linear ajustada passa pelo ponto (\bar{X}, \bar{Y}) , pois:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 X = \bar{Y} - b_1 \bar{X} + b_1 X = \bar{Y} + b_1 (X - \bar{X}).$$

4. A soma dos resíduos ponderados pelos níveis da variável independente é zero, ou seja:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n X_i e_i &= \sum_{i=1}^n X_i (Y_i - \hat{Y}_i) \\ &= \sum_{i=1}^n X_i (Y_i - b_0 - b_1 X_i) \\ &= \sum_{i=1}^n X_i Y_i - b_0 \sum_{i=1}^n X_i - b_1 \sum_{i=1}^n X_i^2 = 0\end{aligned}$$

(pela equação normal (10.4)).

5. A soma dos resíduos ponderados pelos valores ajustados também é zero, isto é:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \hat{Y}_i e_i &= \sum_{i=1}^n (b_0 + b_1 X_i) e_i \\ &= b_0 \sum_{i=1}^n e_i + b_1 \sum_{i=1}^n X_i e_i = 0.\end{aligned}$$

10.7 Inferências sobre β_1

Para o modelo de regressão linear simples, $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$, mostra-se que b_1 tem distribuição normal com média e variância dadas por:

$$E(b_1) = \beta_1 \text{ (} b_1 \text{ é não viciado) e } \text{Var}(b_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}.$$

10.8 Estimador da variância de b_1

De acordo com a definição do i -ésimo resíduo, temos a soma dos quadrados residuais (ou soma de quadrados dos erros):

$$SQE = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - b_0 - b_1 X_i)^2. \quad (10.7)$$

Dividindo SQE por $n-2$ (que são seus graus de liberdade), obtemos o chamado quadrado médio residual (ou quadrado médio do erro):

$$QME = \frac{SQE}{n-2}. \quad (10.8)$$

Mais adiante mostraremos que QME é um estimador não viciado de σ^2 , ou seja, $E(\text{QME}) = \sigma^2$. Desta forma obtemos um estimador não viciado para a variância de b_1 , a saber:

$$S^2(b_1) = \frac{\text{QME}}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} . \quad (10.9)$$

10.9 Intervalo de confiança para β_1

Facilmente mostra-se que a distribuição de $(b_1 - \beta_1)/S(b_1)$ é uma t de Student com $n-2$ graus de liberdade. Assim, para t_0 o valor real, tal que $P(t_{(n-2)} > t_0) = \alpha/2$, tem-se:

$$P(-t_0 < \frac{b_1 - \beta_1}{s(b_1)} < t_0) = 1 - \alpha \quad \Rightarrow$$

$$P(-t_0 S(b_1) < b_1 - \beta_1 < t_0 S(b_1)) = 1 - \alpha ,$$

ou seja, obtém-se então que $[b_1 - t_0 S(b_1) ; b_1 + t_0 S(b_1)]$ é um intervalo de confiança para β_1 com coeficiente de confiança $1 - \alpha$.

Observação: como já sabemos, para o cálculo de $S^2(b_1)$ precisamos de SQE, sendo que esta soma pode ser dada por uma das três seguintes fórmulas:

$$SQE = \sum Y_i^2 - b_0 \sum Y_i - b_1 \sum X_i Y_i. \quad (10.10)$$

$$SQE = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 - \frac{[\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})]^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2}. \quad (10.11)$$

$$SQE = \left[\sum Y_i^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{n} \right] - \frac{\left[\sum X_i Y_i - \frac{(\sum X_i)(\sum Y_i)}{n} \right]^2}{\sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}}. \quad (10.12)$$

de forma que, no caso em que já se conheça b_0 e b_1 , a fórmula (10.10) é obviamente a mais indicada para este cálculo.

Exemplo 10.3

Considerando o exemplo 10.1, do qual já conhecemos b_0 e b_1 , teremos:

$$SQE = 232.498 - 80,5(2150) - 0,90(65.400) = 563.$$

Temos também que $\sum (X_i - \bar{X})^2 = 1.000$. Assim:

$$S^2(b_1) = \frac{\frac{563}{18}}{1.000} = 0,0313 \Rightarrow S(b_1) = 0,177.$$

Para $1-\alpha = 0,95$ obtemos, pela tabela da distribuição t, que $t_0 = 2,101$. Portanto:

$$[b_1 \pm t_0 S(b_1)] = [0,90 \pm (2,101)(0,177)] = (0,53 ; 1,27).$$

10.10 Teste sobre β_1

Para verificar se não existe relação linear entre X e Y, testamos:

$$H_0: \beta_1 = 0$$

$$H_1: \beta_1 \neq 0$$

De forma que não rejeitar H_0 significa não existir relação linear entre X e Y. Nesse caso, temos que a estatística do teste é:

$$t = \frac{b_1}{S(b_1)}. \quad (10.13)$$

cuja distribuição é uma t de Student com $n-2$ graus de liberdade, supondo H_0 verdadeira.

Considerando novamente o exemplo 10.1, teremos:

$$t_c = \frac{0,90}{0,177} = 5,1.$$

Portanto, como $|t_c| > 2,101$, rejeitamos H_0 nesse caso, ou seja, há evidências de que existe relação linear entre X e Y .

10.11 Inferências sobre β_0

Para o modelo de regressão linear simples $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$, temos que a distribuição de $b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{X}$ é normal com média β_0 (b_0 é não viciado), e a variância é dada por:

$$\text{Var}(b_0) = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right]. \quad (10.14)$$

De imediato, então, concluímos que:

$$S^2(b_0) = QME \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right], \quad (10.15)$$

é um estimador não viciado de $\text{var}(b_0)$.

10.12 Intervalo de confiança para β_0

Analogamente ao que vimos para b_1 , temos que a distribuição de $(b_0 - \beta_0)/S(b_0)$ é uma t de Student com $n-2$ graus de liberdade. Conseqüentemente, se t_0 é o valor da distribuição t, tal que $P(t_{(n-2)} > t_0) = \frac{\alpha}{2}$, então:

$$(b_0 - t_0 S(b_0) ; b_0 + t_0 S(b_0))$$

será um intervalo de confiança para β_0 , com coeficiente de confiança $1 - \alpha$. Da mesma forma, temos que $t = b_0/S(b_0)$ é a estatística para testar:

$$H_0: \beta_0 = 0$$

$$H_1: \beta_0 \neq 0$$

cuja distribuição também é uma t de Student com n-2 graus de liberdade, quando H_0 é verdadeira.

10.13 Predições

Para os elementos pertencentes à amostra, usamos até agora o índice i . Introduziremos, no entanto, um outro índice h para nos referirmos aos valores que pertençam ou não à amostra. Assim $\hat{Y}_h = b_0 + b_1 X_h$, do qual verificamos que \hat{Y}_h tem distribuição normal e também podemos mostrar que seu valor esperado e sua variância são dados por:

$$E(\hat{Y}_h) = E(Y_h). \quad (10.16)$$

$$\text{Var}(\hat{Y}_h) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(X_h - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right). \quad (10.17)$$

Substituindo então σ^2 por QME obtemos um estimador não viciado de $\text{Var}(\hat{Y}_h)$:

$$S^2(\hat{Y}_h) = \text{QME} \left(\frac{1}{n} + \frac{(X_h - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right). \quad (10.18)$$

10.14 Intervalo de confiança para $E(Y_h)$

Não é difícil mostrar que $[\hat{Y}_h - E(Y_h)]/S(\hat{Y}_h)$ tem distribuição t de Student com $n-2$ graus de liberdade. Dessa forma, considerando t_0 como o valor da distribuição t, tal que

$$P(t_{(n-2)} > t_0) = \frac{\alpha}{2}, \text{ temos que:}$$

$$[\hat{Y}_h - t_0 S(\hat{Y}_h) ; \hat{Y}_h + t_0 S(\hat{Y}_h)],$$

é um intervalo de confiança para $E(Y_h)$, com coeficiente de confiança $1-\alpha$.

10.15 Intervalo de predição para uma nova observação

Representando por $Y_{h(\text{nov})}$ uma nova observação de Y , para o nível X_h de X , e pelo fato da independência entre $Y_{h(\text{nov})}$ e as observações da amostra, temos:

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_{h(\text{nov})} - \hat{Y}_h) &= \text{Var}(Y_{h(\text{nov})}) + \text{Var}(\hat{Y}_h) = \\ &= \sigma^2 + \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(X_h - \bar{X})^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \right] = \sigma^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_h - \bar{X})^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \right]. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, um estimador não viciado para $\text{Var}(Y_{h(\text{nov})} - \hat{Y}_h)$ será:

$$S^2(Y_{h(\text{nov})} - \hat{Y}_h) = \text{QME} \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_h - \bar{X})^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \right].$$

No caso do modelo de Regressão Linear Simples pode-se mostrar que a distribuição de:

$$\frac{Y_{h(\text{nov})} - \hat{Y}_h}{S(Y_{h(\text{nov})} - \hat{Y}_h)},$$

é uma *t* de Student com $n-2$ graus de liberdade. Assim, considerando-se novamente t_0 como o valor da distribuição *t*, tal que $P[t_{(n-2)} > t_0] = \frac{\alpha}{2}$, tem-se, portanto, que o intervalo de predição para $Y_{h(\text{nov})}$ será dado por:

$$\hat{Y}_h \pm t_0 S(Y_{h(\text{nov})} - \hat{Y}_h).$$

Exemplo 10.4

Com relação ainda ao exemplo 10.1 e considerando uma idade de 45 anos, teremos:

$$S^2(Y_{45(\text{nov0})} - \hat{Y}_{45}) = \frac{563}{18} \left[1 + \frac{1}{20} + \frac{(45 - 30)^2}{1000} \right] = 39,822 \Rightarrow$$

$$S(Y_{45(\text{nov0})} - \hat{Y}_{45}) = 6,315$$

Temos também:

$$\hat{Y}_{45} = 80,5 + (0,90)(45) = 121.$$

Para $1 - \alpha = 0,95$, obtemos $t_0 = 2,101$. Assim:

$$[\hat{Y}_{45} \pm t_0 S(Y_{45(\text{nov0})} - \hat{Y}_{45})] = [121 \pm 2,101(6,315)] = (107,73 ; 134,27)$$

é o intervalo de predição para $Y_{45(\text{nov0})}$, com 95% de confiança.

10.16 Partição da soma de quadrados total

A variação de Y_i é convencionalmente definida por $Y_i - \bar{Y}$, de forma que a medida de variação total é dada pela soma de quadrados:

$$SQT = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n Y_i^2 - n\bar{Y}^2, \quad (10.19)$$

que é denominada de *soma de quadrados total*.

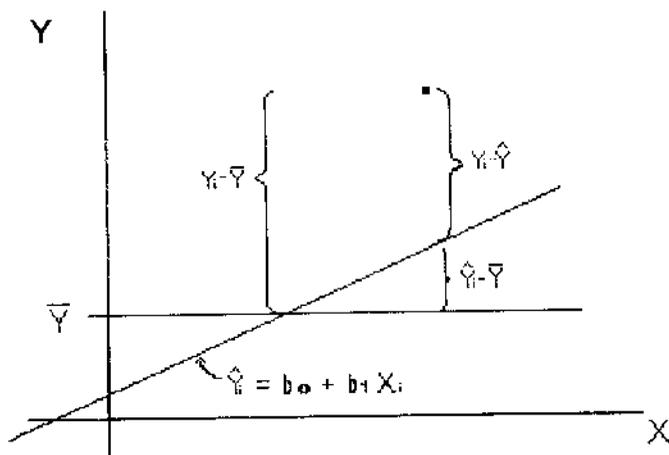
A variação de Y_i em torno da reta de regressão é dada por $Y_i - \hat{Y}_i$, de forma que a medida desses desvios é denominada de *soma de quadrados dos erros*. Conforme vimos antes é definida por:

$$SQE = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 . \quad (10.20)$$

Finalmente, para medir a variação dos valores ajustados em torno da média das observações, temos a soma de quadrados da regressão:

$$SQR = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 . \quad (10.21)$$

Na figura seguinte ilustramos a partição da variação de Y_i :



de forma que o desvio $Y_i - \bar{Y}$ pode ser visto como a soma dos componentes $Y_i - \hat{Y}_i$ e $\hat{Y}_i - \bar{Y}$, ou seja:

$$(Y_i - \bar{Y}) = (Y_i - \hat{Y}_i) + (\hat{Y}_i - \bar{Y}). \quad (10.22)$$

Temos também que as somas de quadrados seguem a mesma relação de (10.22), isto é:

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 + \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2, \quad (10.23)$$

pois:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 &= \sum_{i=1}^n [(\hat{Y}_i - \bar{Y}) + (Y_i - \hat{Y}_i)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n [(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + 2(\hat{Y}_i - \bar{Y})(Y_i - \hat{Y}_i) + (Y_i - \hat{Y}_i)^2] \\ &= \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})(Y_i - \hat{Y}_i), \end{aligned}$$

sendo:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})(Y_i - \hat{Y}_i) &= \sum_{i=1}^n \hat{Y}_i(Y_i - \hat{Y}_i) - \bar{Y} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \hat{Y}_i e_i - \bar{Y} \sum_{i=1}^n e_i = 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, está verificado o que afirmamos anteriormente, ou seja:

$$\boxed{SQT = SSE + SQR} \quad (10.24)$$

10.17 Graus de liberdade

Este número indica quantas partes envolvendo as n observações Y_1, Y_2, \dots, Y_n é preciso conhecer para determinar a soma de quadrados. Assim, a soma de quadrados total tem $n-1$ graus de liberdade, visto que $\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}) = 0$, significando, portanto, que se conhecendo $n-1$ das partes $Y_1 - \bar{Y}, Y_2 - \bar{Y}, \dots, Y_n - \bar{Y}$ a outra estará conhecida.

De acordo com o que foi visto anteriormente $\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i) = 0$ e $\sum_{i=1}^n X_i(Y_i - \hat{Y}_i) = 0$. Logo, conhecendo-se $n-2$ das partes $Y_1 - \hat{Y}_1, Y_2 - \hat{Y}_2, \dots, Y_n - \hat{Y}_n$, as outras duas estarão imediatamente determinadas. Portanto, conclui-se que a soma de quadrados do erro tem $n-2$ graus de liberdade.

Por outro lado, pode-se verificar que $SQR = b_1^2 \sum (X_i - \bar{X})^2$. Assim, observa-se que essa soma de quadrados depende de uma única função de Y_1, Y_2, \dots, Y_n , que é b_1 . Dessa forma, conclui-se que SQR tem um grau de liberdade.

Observação: nesse caso temos que os graus de liberdade são aditivos, pois:

$$(n-1) = (n-2) + 1.$$

10.18 Quadrado médio

Dividindo-se a soma de quadrados pelo respectivo número de graus de liberdade obtém-se o chamado quadrado médio, ou seja, $QME = SQR / (n-2)$ e $QMR = SQR$, sendo que QME e QMR denotam o quadrado médio do erro e o quadrado médio da regressão, respectivamente.

10.19 Tabela de análise de variância

A tabela seguinte apresenta a partição da soma de quadrados total e dos seus graus de liberdade, sendo então definida como tabela de análise de variância.

Fonte de variação	Somas de quadrados	Graus de liberdade	Quadrados médios
Regressão	SQR	1	QMR
Erro	SQE	n-2	QME
Total	SQT	n-1	

Considerando novamente o exemplo 10.1, temos:

$$SQT = \sum_{i=1}^n Y_i^2 - n\bar{Y}^2,$$

$$SQT = 232.498 - (20)(107,5)^2 = 1.373.$$

No exemplo 10.3 obtivemos $SQE = 563$. Assim:

$$SQR = SQT - SQE,$$

$$SQR = 1.373 - 563 = 810.$$

Dessa forma:

Fonte de variação	Somas de quadrados	Graus de liberdade	Quadrados médios
Regressão	810	1	810
Erro	563	18	31,28
Total	1.373	19	

10.20 O coeficiente de determinação

Um valor que mede o efeito da variável independente X na variação de Y é o chamado *coeficiente de determinação*, que é definido por:

$$r^2 = \frac{SQT - SQE}{SQT} = \frac{SQR}{SQT}, \quad (10.25)$$

sendo que SQT mede a variação de Y, independente de X, e SQE mede a variação de Y, considerando a variável X no modelo de regressão.

Observações:

- 1) Como $0 \leq \text{SQE} \leq \text{SQT}$, então $0 \leq r^2 \leq 1$.
- 2) Se todas as observações caem na reta ajustada então $\text{SQE}=0$ e, conseqüentemente, $r^2=1$. Neste caso, a variável X explica toda variação nas observações Y.
- 3) Se $b_1=0$, então $\hat{Y} = \bar{Y}$, portanto $\text{SQE}=\text{SQT}$ e, conseqüentemente, $r^2=0$, significando que X não influi na redução da variação de Y.
- 4) A SQE é chamada de “variação não explicada”, enquanto que SQR é denominada de “variação explicada pela equação de regressão”. Assim, costuma-se interpretar r^2 como a proporção da variação total de Y, que é explicada por X, segundo o modelo de regressão considerado.
- 5) A raiz quadrada de r^2 é o coeficiente de correlação amostral:

$$r = \pm\sqrt{r^2} ,$$

de forma que a variação desse coeficiente é:

$$-1 \leq r \leq 1,$$

com o sinal correspondendo ao sinal de b_1 (coeficiente angular da reta estimada).

6) Pode-se verificar que o coeficiente de correlação amostral também pode ser obtido diretamente por:

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \right]^{\frac{1}{2}}} = \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - \frac{(\sum_{i=1}^n X_i)(\sum_{i=1}^n Y_i)}{n}}{\left[\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n X_i)^2}{n} \right) \left(\sum_{i=1}^n Y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n Y_i)^2}{n} \right) \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (10.26)
 \end{aligned}$$

Exemplo 10.5

Ainda com relação ao exemplo 10.1, temos:

$$r^2 = \frac{810}{1.373} = 0,59.$$

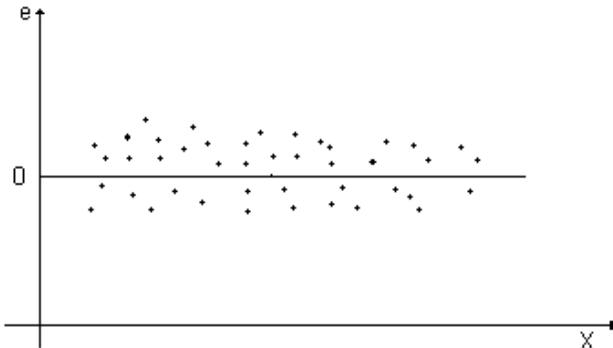
10.21 Análise de adequação do modelo

Usamos gráficos de resíduos para examinar, de maneira informal, alguns problemas que podem ser detectados no ajuste de um modelo de regressão linear, como:

- a) A função de regressão não é linear;
- b) Os erros não têm variância constante;
- c) Presença de observações muito distanciadas das demais (*outliers*);
- d) Os erros não são normalmente distribuídos.

a) A função de regressão não é linear

No caso do modelo linear ser apropriado para os dados, o gráfico dos resíduos contra a variável independente X apresenta o seguinte aspecto:



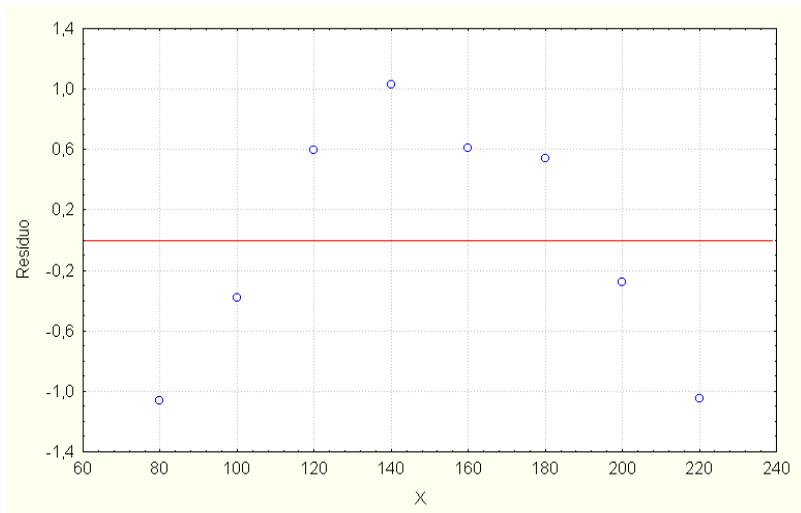
Para mostrar um exemplo em que o modelo linear não é adequado, consideremos o seguinte conjunto de dados:

Y	X	\hat{Y}	e
0,60	80	1,66	-1,06
6,70	220	7,75	-1,05
5,30	140	4,27	1,03
4,00	120	3,40	0,60
6,55	180	6,01	0,54
2,15	100	2,53	-0,38
6,60	200	6,88	-0,28
5,75	160	5,14	0,61

sendo:

$$\hat{Y} = -1,82 + 0,0435X.$$

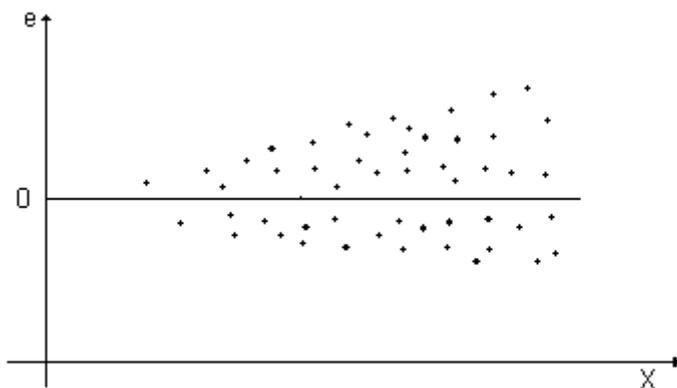
Nesse caso:



Conforme vemos, a função de regressão linear não é adequada para esses dados, pois os resíduos não distribuem-se aleatoriamente em torno do zero.

b) Os erros não têm variância constante

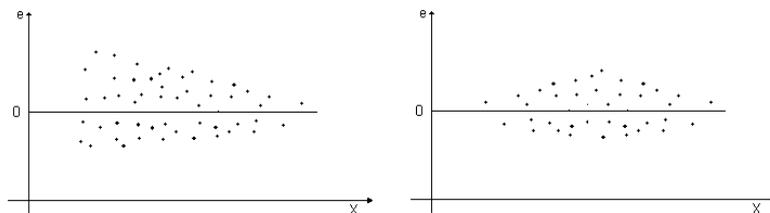
Se a variância dos erros aumenta quando os valores de X crescem, então o gráfico dos resíduos contra a variável independente X apresenta-se com o seguinte aspecto:



Observações:

1. Obtém-se um comportamento análogo no gráfico dos resíduos contra os valores ajustados \hat{Y} , sendo que, no caso da função de regressão não ser linear, ou quando se tem um modelo de regressão múltipla, necessariamente usa-se este último;

2. Equivalentemente, é possível encontrar a variância dos erros decrescendo, quando X cresce, ou variando de alguma maneira, ou seja, pode-se ter a variância dos erros não constante também em casos em que o gráfico dos resíduos tem formas tais como:

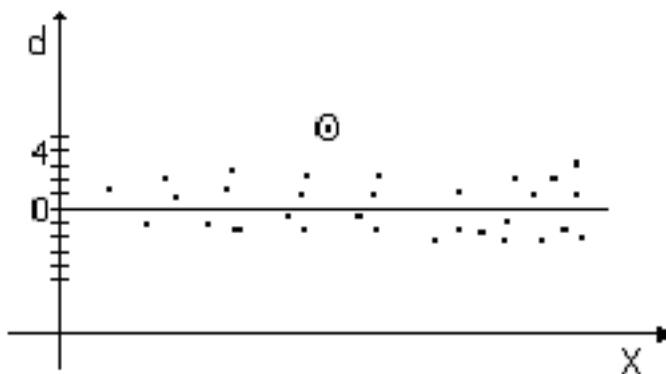


c) Presença de *outliers*

Se diz que $d_i = e_i / \sqrt{QME}$ é o i -ésimo resíduo padronizado pelo desvio padrão, dado que o QME é uma variância amostral dos resíduos, isto é:

$$\frac{\sum (e_i - \bar{e})^2}{n - 2} = \frac{\sum e_i^2}{n - 2} = \frac{SQE}{n - 2} = QME.$$

Portanto consideraremos o gráfico de resíduos padronizados contra a variável independente para verificar se algum ponto está a uma distância do zero superior a três. Essa é uma das maneiras, entre várias outras existentes, de classificar uma observação como *outlier*. Para exemplificar, vejamos o gráfico a seguir, no qual o ponto circulado é tratado como *outlier*, pois a distância entre ele e o zero é maior que três.



Observações:

1. A presença de um *outlier* causa prejuízos para o ajuste de uma reta de regressão porque, pelo método de mínimos quadrados, a reta ajustada é puxada desproporcionalmente para esse ponto;

2. Um *outlier* pode, no entanto, conter significativas informações, de forma que a simples exclusão desse ponto poderia causar considerável perda para o ajuste, ou seja, a retirada de *outliers* do conjunto dos dados só é recomendada quando se tem a certeza de que eles são resultados de “erros grosseiros” na fase da amostragem.

d) Normalidade da distribuição dos erros

Através do “papel de probabilidade normal”, que é um papel em que uma das escalas está subdividida conforme as probabilidades acumuladas de uma distribuição normal, pode-se, de uma forma prática, verificar se a distribuição dos dados foge muito de uma normal ou não. Para isto, calculam-se as frequências relativas acumuladas dos dados e faz-se um plot destas frequências contra as probabilidades acumuladas do “papel de probabilidade normal”, de forma que, no caso em que os dados venham de uma distribuição normal, esse plot será aproximadamente uma reta.

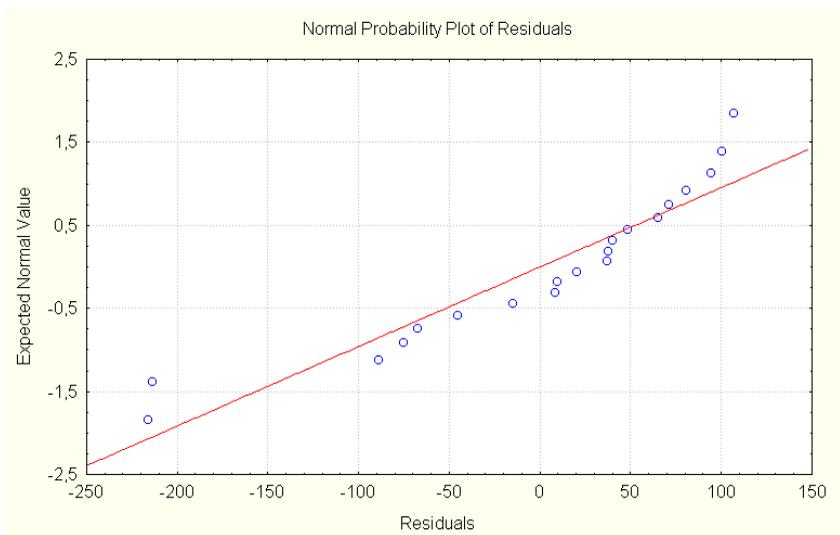
Para fixar a ideia, consideremos o seguinte conjunto de dados:

X	Y	X	Y
15,50	2158,70	13,00	2165,20
23,75	1678,15	3,75	2399,55
8,00	2316,00	25,00	1779,80
17,00	2061,30	9,75	2336,75
5,50	2207,50	22,00	1765,30
19,00	1708,30	18,00	2053,50
24,00	1784,70	6,00	2414,40
2,50	2575,00	12,50	2200,50
7,50	2357,90	2,00	2654,20
11,00	2256,70	21,50	1753,70

Admitindo o modelo $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$, obtemos:

$$\hat{Y}_i = 2627,82 - 37,15 X_i ,$$

cujo plot da probabilidade normal dos resíduos desse ajuste, obtido através do pacote computacional *Statística*, é o seguinte:



Vemos que o plot apresentado é aproximadamente uma reta e, sendo esse equivalente ao plot obtido através do “papel de probabilidade normal” então não temos motivo para rejeitar a hipótese de que os erros nesse caso têm distribuição normal.

Observação: pode-se também verificar informalmente a normalidade da distribuição dos erros por outros métodos práticos, como a análise do histograma dos resíduos ou observando simplesmente se cerca de 68% dos desvios padronizados caem entre -1 e $+1$, ou se aproximadamente 90% deles caem entre $-1,64$ e $1,64$.

Problemas

1. Uma substância usada em pesquisas biológicas é embalada em caixas de 1000 ampolas e embarcada em transporte aéreo. Os dados seguintes referem-se ao número de vezes que a caixa é transferida de um transporte para outro durante a viagem (X) e o número de ampolas quebradas encontradas na chegada (Y).

Observação	1	2	3	4	5	6	7	8
X	2	1	3	1	4	2	1	2
Y	16	9	17	12	22	13	8	15

Considerando-se um modelo de regressão linear simples:

- Obtenha a função de regressão estimada;
- Calcule os resíduos e verifique se a soma deles é zero, conforme a propriedade vista anteriormente;
- Obtenha uma estimativa para σ^2 .

2. Experiências com um certo tipo de plástico indicam que existe relação entre a dureza dos itens que modelam o plástico

(Y) e o tempo decorrido depois da conclusão do processo de modelagem (X). Doze fornadas do plástico foram feitas e em cada uma realizou-se um teste para verificar a dureza. Os resultados estão a seguir, sendo X o tempo em horas e Y a dureza (medida em brinell unidades).

Obs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	32	48	72	64	48	16	40	48	48	24	80	56
Y	22	26	32	29	25	19	23	27	26	21	36	30
	0	2	3	8	5	9	6	9	7	4	9	5

Considerando um modelo de regressão linear simples:

- a) Obtenha a função de regressão estimada;
- b) Determine:

I. A estimativa da mudança na resposta média quando o tempo é aumentado em uma hora;

II. A estimativa da resposta média quando $X = 40$;

III. Uma estimativa para σ^2 .

3. Testar a não existência de relação linear entre X e Y , para os problemas **1** e **2**.
4. Construir intervalos de confiança para β_0 e para β_1 , ao nível de 95%, para os problemas **1** e **2**.
5. Considerando o exercício **1**, construir um intervalo de predição, ao nível de 95%, para o número de ampolas quebradas encontradas na chegada, quando a caixa for transferida de um transporte para o outro num total de 10 vezes.
6. Com relação ao exercício **2**, construir um intervalo de confiança para a dureza média dos itens, ao nível de 95%, quando o tempo decorrido depois da conclusão do processo for igual a 10,7.
7. Ainda com relação ao exercício **2**, construir um intervalo de predição, ao nível de 95%, para a dureza dos itens, quando o tempo decorrido depois da conclusão do processo for igual a 17,5.

8. Determine os coeficientes de determinação para os exercícios **1** e **2**.

9. Sejam X = renda pessoal disponível e Y = consumo pessoal, cujos dados estão na tabela a seguir:

Renda e consumo nos Estados Unidos, 1948 – 1957

(em bilhões de dólares)

Ano	Consumo pessoal (Y)	Renda pessoal disponível (X)
1948	199	212
1949	204	214
1950	216	231
1951	218	237
1952	224	244
1953	235	255
1954	238	257
1955	256	273
1956	264	284
1957	270	290

Considerando-se o modelo $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$, então:

- a) Obtenha a função de regressão estimada;
- b) Teste, ao nível de 5%, se não existe relação linear entre X e Y;
- c) Qual a estimativa do aumento de consumo pessoal médio, quando a renda pessoal disponível é aumentada em um bilhão de dólares?
- d) Ao nível de 95%, qual o intervalo de predição para o consumo pessoal, quando a renda pessoal disponível for de 350 bilhões de dólares?
- e) Qual percentagem da variabilidade do consumo pessoal é explicada pela renda pessoal disponível no modelo?

10. Faça análise gráfica dos resíduos dos exercícios 1 e 2 para verificar se existe indicativo de algum "problema" nos ajustes feitos. Tire suas conclusões.

Respostas dos problemas

CAPÍTULO 1

1. $1/5$
2. $3/10$
3. $5/21$
4. $13/18$
5. (c) $P(A \cup B) = 19/36$; $P(A \cap B) = 3/36$; $P(\bar{B}) = 1/2$
6. $P(A) = 4/7$; $P(B) = 2/7$; $P(C) = 1/7$
7. a) 0,19; b) 0,49; c) 0,32
9. 0,487
10. $2/15$
11. $P(A|B) = 3/4$; $P(B|A) = 3/5$
12. (a) $1/5$; (b) $11/15$
13. (a) 0,3; (b) 0,5
14. $2/3$ e 0
15. (a) $2/15$; (b) $13/15$
16. $19/55$;
17. $23/50$;

19. 17/45.

21. a) 0,0115 ; b) 0,9965 ; c) 0,5025 ; d) 0,199.

22. 0,95.

23. a) 0,89 ; b) 0,09.

24. a) 0,22 ; b) 0,18 ; c) 0,952.

CAPÍTULO 2

1. (b) 21 e 12

2. $K=105/176$; $E(X)=2,39$

3. $E(Y)=q$; $V(Y)=q(1-q)$

4. (b) $E(X+Y)=11,9$; $V(X+Y)=12,49$; (c) $V(XY)=53,41$

5. (a)

x	5	10	15	P(Y=y)
y				
5	0,1	0,2	0,1	0,4
10	0,2	0,3	0,1	0,6
P(X=x)	0,3	0,5	0,2	1,0

(c) $E(X)=9,5$; $E(Y)=8$; $V(X)=12,25$; $V(Y)=6$

(d) $E(Z)=17,5$; $V(Z)=16,25$

(e) $\rho(X,Y)=-0,117$

6. (a) $E(X)=2,2$; $E(Y)=0,9$; $V(X)=0,76$; $V(Y)=0,49$;
 $E(X+Y)=3,1$.

(c) $E(XY)=2,1$;

XY	0	1	3	4	6
P(xy)	0,3	0,2	0,3	0,1	0,1

(d) $\rho(X,Y)=0,197$

7. (b) $E(X)=0$; $E(Y)=1/3$; $V(X)=1$; $V(Y)=5/9$.

(c) $a= \pm 10$; $b=30$

8. (b) Sim (c) zero

9. (a) Não (b) $\rho(X,Y)=-0,154$

10. $\rho(X,Y)=0$ (neste caso as variáveis são independentes)

12. $a=1/2$

14. $E(W)=4/3$

CAPÍTULO 3

1. (a) $E(X)=4$; $V(X)=3,2$; (b) 0,2061.
2. 0,2344
4. 0,9453
5. (a) 0,182; (b) 0,999; (c) 0,2 e 0,44.
6. (a) $4/65$; (b) $3/91$;
7. 0,6769
8. (a) 0,7788; (b) $E(X)=9,35$
10. 0,8747;
11. (a) 0,8753; (b) 0,1606.
12. (a) 0,1991; (b) 0,2231
13. (a) 0,2224; (b) 0,6883
14. 0,4405
15. (a) 0,3849; (b) 0,9053; (c) 0,0548
16. (a) 68,27% (b) 2,28% (c) zero
17. (a) 4,75% (b) 10
18. 0,0668
19. 7; 70 e 3
20. 88,5 e 55,3
21. (a) 26,12%; (b) 113
22. 97,72%

23. 556
26. 0,3127;
27. 0 e 1/48;
28. (a) 0,632; (b) 0,148
29. (a) $\alpha=3$; (b) $\alpha=1,25$.

CAPÍTULO 4

1. 0,0465
2. 0,0985
3. 0,9207
4. (a) 0,762; (b) 0,0384; (c) 0,0091
5. 0,9611
6. 0,0764

CAPÍTULO 5

1. (0,774; 0,885)
2. (0,638; 0,862)
3. (0,327; 0,373)
4. (34,74; 35,26)
5. (0,08; 0,12)
- 6.

CAPÍTULO 7

1. 8,18 e 8
2. (a) 20,72; (b) 20,08; (c) 23,5 e 23,31

CAPÍTULO 8

1. $S=1,476$
2. $S=6,514$, $D_q=3,86$
3. A distribuição do problema 2.
4. A distribuição do problema 2 do capítulo 6.

CAPÍTULO 9

1. (a) O conjunto dos valores da normal padrão, menores que -2,33;
(b) O conjunto dos valores da normal padrão, maiores que 2,33;
(c) O conjunto dos valores da normal padrão, menores que -2,57 ou maiores que 2,57.
2. Não podemos dizer que a nova técnica é melhor do que a anterior.

3. A escola tem razões para afirmar que os candidatos a seu curso de psicologia são melhores que os da média nacional.
4. Os produtores devem modificar o programa.
5. Pode-se concluir que esta firma paga salários inferiores.
6. Não se pode aceitar a afirmação do fabricante.
7. Podemos concluir que os alunos de psicologia da universidade Y são típicos com relação à vocação.
8. Podemos acreditar que não é de 50% a proporção de alunos com QI acima de 110.

CAPÍTULO 10

1. (a) $\hat{Y} = 6 + 4X$

(c) 2,67

2.

(a) $\hat{Y} = 145,72 + 2,57X$

(b) (1) 2,57; (2) 248,38; (3) 151,98

3. Em ambos os casos rejeita-se a hipótese da não existência de relação linear entre X e Y.

4.

Exercício 1

Para β_0 : (2,84 ; 9,16)

Para β_1 : (2,59 ; 5,41)

Exercício 2

Para β_0 : (123,01 ; 168,42)

Para β_1 : (2,12 ; 3,01)

5. (33,93 ; 58,07)

6. (154,84 ; 191,52)

7. (159,01 ; 222,26)

8. 0,889 e 0,943

9.

(a) $\hat{Y} = 7,05 + 0,90X$

(b) Rejeita-se a hipótese da não existência de relação linear entre X e Y.

(c) 0,90

(d) (313,72 ; 332,11)

(e) 0,991

REFERÊNCIAS

- BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. *Estatística Básica*. São Paulo: Atual, 1987.
- FONSECA, J. S.; MARTINS, G. A. *Curso de Estatística*. São Paulo: Atlas, 1979.
- GONÇALVES, F. A. *Estatística Descritiva: uma introdução*. São Paulo: Atlas, 1978.
- JAMES, B. R. *Introdução à Probabilidade* (Notas de Aula). Rio de Janeiro: IMPA, 1981.
- MEYER, P. L. *Probabilidade: aplicações à estatística*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1976.
- MORETTIN, L. G. *Estatística Básica: probabilidade*. 6. ed. São Paulo: McGraw-Hill, s.d.
- MORETTIN, P. A. *Introdução à Estatística*. São Paulo: Atual, 1981.
- NETO, P. L. O. C. *Estatística*. São Paulo: Edgar Blucher, 1977.
- MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. C. P. *Noções de Probabilidade e Estatística*. 4. ed. São Paulo: EDUSP, 2002.
- MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. *Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros*. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científico, 2003.

APÊNDICES –TABELAS ESTATÍSTICAS

TABELA I – Distribuição Normal

TABELA II – Distribuição Qui-quadrado

TABELA III – Distribuição t de Student

TABELA IV – Distribuição F

TABELA I – Distribuição Normal

Distribuição normal – valores de $P(0 \leq Z \leq z_0)$

z_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

TABELA II – Distribuição Qui-quadrado

Distribuições χ^2 – valores de $\chi^2_{\alpha, P}$, onde $P = P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha, P})$

$P \backslash \nu$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	39	40	50	60
0,995	0,00393	0,0157	0,02982	0,04393	0,05793	0,07193	0,08593	0,09993	0,11393	0,12793	0,14193	0,15593	0,16993	0,18393	0,19793	0,21193	0,22593	0,23993	0,25393	0,26793	0,28193	0,29593	0,30993	0,32393	0,33793	0,35193	0,36593	0,37993	0,39393	0,40793	0,42193	0,43593	0,44993	0,46393
0,99	0,00400	0,0160	0,0300	0,0440	0,0580	0,0720	0,0860	0,1000	0,1140	0,1280	0,1420	0,1560	0,1700	0,1840	0,1980	0,2120	0,2260	0,2400	0,2540	0,2680	0,2820	0,2960	0,3100	0,3240	0,3380	0,3520	0,3660	0,3800	0,3940	0,4080	0,4220	0,4360	0,4500	0,4640
0,95	0,00433	0,0173	0,0313	0,0453	0,0593	0,0733	0,0873	0,1013	0,1153	0,1293	0,1433	0,1573	0,1713	0,1853	0,1993	0,2133	0,2273	0,2413	0,2553	0,2693	0,2833	0,2973	0,3113	0,3253	0,3393	0,3533	0,3673	0,3813	0,3953	0,4093	0,4233	0,4373	0,4513	0,4653
0,90	0,00466	0,0196	0,0336	0,0476	0,0616	0,0756	0,0896	0,1036	0,1176	0,1316	0,1456	0,1596	0,1736	0,1876	0,2016	0,2156	0,2296	0,2436	0,2576	0,2716	0,2856	0,2996	0,3136	0,3276	0,3416	0,3556	0,3696	0,3836	0,3976	0,4116	0,4256	0,4396	0,4536	0,4676
0,75	0,00539	0,0219	0,0359	0,0499	0,0639	0,0779	0,0919	0,1059	0,1199	0,1339	0,1479	0,1619	0,1759	0,1899	0,2039	0,2179	0,2319	0,2459	0,2599	0,2739	0,2879	0,3019	0,3159	0,3299	0,3439	0,3579	0,3719	0,3859	0,3999	0,4139	0,4279	0,4419	0,4559	0,4699
0,50	0,00636	0,0256	0,0406	0,0556	0,0706	0,0856	0,1006	0,1156	0,1306	0,1456	0,1606	0,1756	0,1906	0,2056	0,2206	0,2356	0,2506	0,2656	0,2806	0,2956	0,3106	0,3256	0,3406	0,3556	0,3706	0,3856	0,3996	0,4136	0,4276	0,4416	0,4556	0,4696	0,4836	0,4976
0,25	0,00778	0,0321	0,0471	0,0621	0,0771	0,0921	0,1071	0,1221	0,1371	0,1521	0,1671	0,1821	0,1971	0,2121	0,2271	0,2421	0,2571	0,2721	0,2871	0,3021	0,3171	0,3321	0,3471	0,3621	0,3771	0,3921	0,4071	0,4221	0,4371	0,4521	0,4671	0,4821	0,4971	0,5121
0,10	0,00975	0,0384	0,0534	0,0684	0,0834	0,0984	0,1134	0,1284	0,1434	0,1584	0,1734	0,1884	0,2034	0,2184	0,2334	0,2484	0,2634	0,2784	0,2934	0,3084	0,3234	0,3384	0,3534	0,3684	0,3834	0,3984	0,4134	0,4284	0,4434	0,4584	0,4734	0,4884	0,5034	0,5184
0,05	0,01084	0,0421	0,0571	0,0721	0,0871	0,1021	0,1171	0,1321	0,1471	0,1621	0,1771	0,1921	0,2071	0,2221	0,2371	0,2521	0,2671	0,2821	0,2971	0,3121	0,3271	0,3421	0,3571	0,3721	0,3871	0,4021	0,4171	0,4321	0,4471	0,4621	0,4771	0,4921	0,5071	0,5221
0,025	0,01219	0,0456	0,0606	0,0756	0,0906	0,1056	0,1206	0,1356	0,1506	0,1656	0,1806	0,1956	0,2106	0,2256	0,2406	0,2556	0,2706	0,2856	0,3006	0,3156	0,3306	0,3456	0,3606	0,3756	0,3906	0,4056	0,4206	0,4356	0,4506	0,4656	0,4806	0,4956	0,5106	
0,01	0,01386	0,0501	0,0651	0,0801	0,0951	0,1101	0,1251	0,1401	0,1551	0,1701	0,1851	0,2001	0,2151	0,2301	0,2451	0,2601	0,2751	0,2901	0,3051	0,3201	0,3351	0,3501	0,3651	0,3801	0,3951	0,4101	0,4251	0,4401	0,4551	0,4701	0,4851	0,5001	0,5151	
0,005	0,01578	0,0544	0,0694	0,0844	0,0994	0,1144	0,1294	0,1444	0,1594	0,1744	0,1894	0,2044	0,2194	0,2344	0,2494	0,2644	0,2794	0,2944	0,3094	0,3244	0,3394	0,3544	0,3694	0,3844	0,3994	0,4144	0,4294	0,4444	0,4594	0,4744	0,4894	0,5044	0,5194	
0,001	0,01801	0,0584	0,0734	0,0884	0,1034	0,1184	0,1334	0,1484	0,1634	0,1784	0,1934	0,2084	0,2234	0,2384	0,2534	0,2684	0,2834	0,2984	0,3134	0,3284	0,3434	0,3584	0,3734	0,3884	0,4034	0,4184	0,4334	0,4484	0,4634	0,4784	0,4934	0,5084	0,5234	

TABELA III – Distribuição t de Student

Graus de liberdade	DISTRIBUIÇÃO DE STUDENT: $S(t_n)$													Graus de liberdade	
	VALORES CRÍTICOS DE t tais que $P(-t_c < t < t_c) = 1 - p$														
	p = 90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	5%	4%	2%	1%	0.2%	0.1%
1	0.158	0.325	0.510	0.727	1.000	1.376	1.983	3.078	6.314	12.706	15.894	31.827	63.657	318.309	636.619
2	0.142	0.289	0.445	0.617	0.816	1.061	1.386	1.868	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925	22.327	31.598
3	0.137	0.277	0.424	0.584	0.785	0.978	1.260	1.658	2.833	3.192	3.482	4.541	5.841	10.214	12.924
4	0.134	0.271	0.414	0.568	0.771	0.941	1.190	1.533	2.722	2.776	2.998	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.132	0.267	0.408	0.563	0.767	0.920	1.156	1.476	2.015	2.071	2.156	3.365	3.855	5.893	6.869
6	0.131	0.265	0.404	0.559	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.047	2.112	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.130	0.263	0.402	0.549	0.711	0.898	1.119	1.415	1.895	2.065	2.117	2.998	3.489	4.785	5.408
8	0.129	0.262	0.399	0.545	0.706	0.889	1.108	1.387	1.880	2.066	2.117	2.888	3.385	4.501	5.041
9	0.129	0.261	0.398	0.543	0.703	0.885	1.103	1.383	1.875	2.066	2.117	2.880	3.376	4.497	4.981
10	0.129	0.260	0.397	0.542	0.700	0.879	1.093	1.372	1.871	2.066	2.117	2.874	3.189	4.144	4.587
11	0.128	0.260	0.396	0.540	0.697	0.878	1.088	1.363	1.796	2.201	2.328	2.718	3.106	3.025	4.437
12	0.128	0.259	0.395	0.539	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.303	2.681	3.085	2.930	4.318
13	0.128	0.258	0.394	0.538	0.693	0.869	1.078	1.349	1.768	2.160	2.282	2.650	3.072	2.852	4.221
14	0.128	0.258	0.393	0.537	0.692	0.866	1.076	1.346	1.761	2.160	2.282	2.650	3.072	2.852	4.221
15	0.128	0.258	0.393	0.536	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.248	2.602	2.847	2.733	4.073
16	0.128	0.258	0.392	0.535	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.235	2.583	2.832	2.688	4.015
17	0.128	0.257	0.392	0.534	0.689	0.863	1.067	1.330	1.740	2.110	2.224	2.567	2.808	2.646	3.965
18	0.127	0.257	0.391	0.533	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.205	2.539	2.801	2.610	3.922
19	0.127	0.257	0.391	0.533	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.205	2.539	2.801	2.610	3.922
20	0.127	0.257	0.391	0.533	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.197	2.528	2.845	2.552	3.860
21	0.127	0.257	0.391	0.532	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.090	2.189	2.518	2.831	2.527	3.819
22	0.127	0.256	0.390	0.532	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.089	2.189	2.518	2.831	2.527	3.819
23	0.127	0.256	0.390	0.532	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.177	2.500	2.807	2.495	3.792
24	0.127	0.256	0.390	0.531	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.172	2.492	2.797	2.467	3.883
25	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.166	2.485	2.787	2.450	3.850
26	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.162	2.479	2.779	2.435	3.819
27	0.127	0.256	0.389	0.531	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.158	2.473	2.771	2.421	3.792
28	0.127	0.256	0.389	0.530	0.684	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.154	2.467	2.763	2.408	3.788
29	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.150	2.462	2.756	2.396	3.745
30	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.147	2.457	2.750	2.385	3.725
35	0.126	0.255	0.388	0.529	0.682	0.852	1.052	1.306	1.690	2.030	2.133	2.438	2.724	2.340	3.707
40	0.126	0.255	0.388	0.528	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.123	2.423	2.704	2.307	3.690
50	0.126	0.254	0.387	0.528	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.109	2.403	2.678	2.261	3.674
60	0.126	0.254	0.387	0.527	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.099	2.389	2.660	2.232	3.659
120	0.126	0.254	0.386	0.526	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.076	2.358	2.617	2.160	3.646
∞	0.126	0.253	0.524	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.054	2.326	2.576	2.090	3.281
	p = 90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	5%	4%	2%	1%	0.2%	0.1%

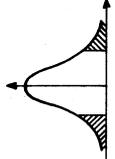
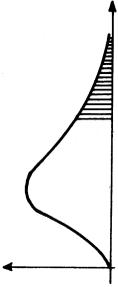


TABELA IV – Distribuição F

DISTRIBUIÇÃO DE FISHER-SNEDECOR – 1 VALORES CRÍTICOS DE F TAIS QUE $P(F > F_C) = 0,05$		GRAUS DE LIBERDADE DO NUMERADOR DE F: n_1		GRAUS DE LIBERDADE DO DENOMINADOR DE F: n_2																			
Gráus de liberdade do denominador de F: n_2	Gráus de liberdade do numerador de F: n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	16	18	20	24	30	40	60	120	-	
1	181,4	189,5	216,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,9	245,4	246,9	247,3	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3	254,3		
2	16,91	16,16	15,26	15,00	14,80	14,66	14,56	14,49	14,43	14,38	14,34	14,30	14,27	14,25	14,23	14,21	14,20	14,19	14,18	14,17	14,16		
3	10,71	9,65	8,89	8,69	8,55	8,46	8,39	8,34	8,30	8,27	8,25	8,23	8,22	8,21	8,20	8,19	8,18	8,18	8,17	8,17	8,16		
4	7,71	6,84	6,29	6,16	6,06	5,98	5,92	5,88	5,85	5,83	5,82	5,81	5,80	5,80	5,79	5,79	5,78	5,78	5,77	5,77	5,76		
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,08	4,98	4,92	4,87	4,84	4,82	4,81	4,80	4,79	4,79	4,78	4,78	4,77	4,77	4,76	4,76	4,75		
6	5,89	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,96	3,94	3,92	3,90	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70		
7	5,32	4,48	4,25	4,02	3,87	3,73	3,66	3,64	3,57	3,53	3,51	3,49	3,47	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23	3,23		
8	4,91	4,07	3,84	3,61	3,45	3,33	3,28	3,26	3,22	3,20	3,17	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93	2,91	2,89	2,88		
9	4,52	3,68	3,45	3,23	3,06	2,94	2,89	2,87	2,82	2,80	2,78	2,76	2,74	2,70	2,66	2,63	2,59	2,56	2,54	2,52	2,51		
10	4,08	3,24	3,01	2,79	2,62	2,50	2,45	2,43	2,37	2,35	2,33	2,30	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,07	2,03	2,00	1,98		
11	4,54	3,68	3,45	3,23	3,06	2,94	2,89	2,87	2,82	2,80	2,78	2,76	2,74	2,70	2,67	2,63	2,59	2,56	2,54	2,52	2,51		
12	4,15	3,29	3,06	2,84	2,67	2,55	2,50	2,48	2,42	2,40	2,38	2,35	2,33	2,30	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,08	2,01		
13	4,03	3,17	2,94	2,72	2,55	2,43	2,38	2,36	2,30	2,28	2,26	2,23	2,21	2,17	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84		
14	4,60	3,74	3,51	3,29	3,12	2,99	2,94	2,92	2,86	2,84	2,82	2,79	2,77	2,73	2,68	2,64	2,59	2,54	2,49	2,44	2,38		
15	4,64	3,68	3,45	3,23	3,06	2,94	2,89	2,87	2,82	2,80	2,78	2,76	2,74	2,70	2,67	2,63	2,59	2,56	2,54	2,52	2,51		
16	4,49	3,63	3,40	3,18	3,01	2,89	2,84	2,82	2,76	2,74	2,72	2,70	2,68	2,64	2,59	2,54	2,49	2,44	2,38	2,33	2,28		
17	4,16	3,30	3,07	2,85	2,68	2,56	2,51	2,49	2,43	2,41	2,39	2,36	2,34	2,31	2,28	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01		
18	4,15	3,25	3,02	2,80	2,63	2,51	2,46	2,44	2,38	2,36	2,34	2,31	2,29	2,26	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96		
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,71	2,63	2,58	2,56	2,49	2,47	2,45	2,41	2,34	2,29	2,27	2,23	2,22	2,19	2,15	2,11	2,06		
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,63	2,58	2,56	2,49	2,47	2,45	2,41	2,34	2,29	2,27	2,23	2,22	2,19	2,15	2,11	2,06		
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,30	2,26	2,20	2,18	2,15	2,12	2,10	2,06	2,01	1,96	1,90		
22	4,30	3,45	3,05	2,82	2,66	2,55	2,48	2,40	2,34	2,30	2,27	2,23	2,17	2,15	2,13	2,10	2,07	2,03	1,98	1,94	1,88		
23	4,28	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,44	2,37	2,32	2,27	2,25	2,22	2,16	2,14	2,11	2,08	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86		
24	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,33	2,28	2,24	2,18	2,13	2,11	2,09	2,06	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79		
25	4,23	3,37	2,97	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,13	2,11	2,09	2,06	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79		
26	4,21	3,35	2,95	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,26	2,20	2,13	2,08	2,04	2,00	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67		
27	4,20	3,34	2,94	2,72	2,56	2,45	2,36	2,30	2,25	2,19	2,12	2,06	2,02	1,99	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65		
28	4,18	3,33	2,93	2,71	2,55	2,44	2,35	2,29	2,24	2,18	2,10	2,05	2,01	1,97	1,94	1,89	1,85	1,81	1,76	1,70	1,64		
29	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,04	2,01	1,96	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62		
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,04	2,01	1,96	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62		
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,26	2,18	2,12	2,08	2,04	1,99	1,92	1,87	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51		
60	3,90	3,16	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,86	1,81	1,77	1,72	1,68	1,63	1,58	1,53	1,47	1,39		
120	3,64	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,85	1,78	1,69	1,67	1,63	1,60	1,57	1,52	1,48	1,39	1,32	1,22		
-																							





Este livro foi projetado pela equipe editorial da Editora
da Universidade Federal do Rio Grande do Norte.
Foi impresso em junho de 2016.