UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE – UFRN
CENTRO DE CIENCIAS SOCIAIS APLICADAS – CCSA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO – PPGEd

GISELLE COSTA DE SOUSA

Um estudo sobre as origens da Lógica Matemática

NATAL – RN
2008

GISELLE COSTA DE SOUSA

UM ESTUDO SOBRE AS ORIGENS DA LÓGICA MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como um dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Educação.

Orientador: Prof. Dr. John Andrew Fossa.

NATAL – RN

2008

Catalogação da Publicação na Fonte. UFRN / SISBI / Biblioteca Setorial
Especializada do Centro de Ciências Exatas e da Terra – CCET.

Sousa, Giselle Costa de.
Um estudo sobre as origens da Lógica Matemática / Giselle Costa de Sousa. – Natal, 2008.
192 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. John Andrew Fossa.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Sociais Aplicadas. Programa de Pós-Graduação em Educação.

1. Lógica Matemática - Tese. 2. Boole, George (1815-1864) - Tese. 3. De Morgan, Augustus (1806-1971) - Tese. 4. Whately, Richard (1787-1863) - Tese. 5. Educação Matemática - Tese. I. Fossa, John Andrew. II. Título.

RN/UF/BSE-CCET CDU: 510.6

GISELLE COSTA DE SOUSA

UM ESTUDO SOBRE AS ORIGENS DA LÓGICA MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Departamento de Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como um dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Educação.

Orientador: Prof. Dr. John Andrew Fossa.

Aprovado em 13 / 06 / 2003

BANCA EXAMINADORA

John Andrew Fossa

Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

Lígia Arantes Sad

Universidade Federal do Espirito Santo - UFES

Rogéria Gaudêncio do Rego

Universidade Federal da Paraiba – UFPB

Bernadete Barbosa Morey

Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

Paulo Cézar de Faria

Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

Francisco Peregrino Rodrigues Neto

Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

Josinalva Estácio Mendes

Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE

A todos aqueles que acreditaram em mim e contribuíram com este trabalho.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela iluminação, força e discernimento constantes.

Aos meus pais, José Alves de Sousa e Marinalva Costa de Sousa, aos quais serei eternamente grata, pelo dom da vida, pelo amor, pelo incentivo permanente e pelo norte incondicional em toda a minha caminhada. A eles dedico e ofereço este trabalho.

A meu esposo, Jallys do Nascimento Miranda, pelo apoio irrestrito e constante.

A minha irmã Girlane Costa de Sousa, disposta a auxiliar-me quando necessário, especialmente, com relação ao português.

Ao meu irmão, Geovany Jhonata Costa de Sousa, que com sua juventude soube me dar força.

A todos os demais familiares, sempre presentes e confiantes no alcance de meus objetivos, bem como pelas orações e estímulo.

A John Andrew Fossa, amigo e orientador deste estudo, pelas sábias contribuições, pelo incentivo e pela crença nas possibilidades e contribuições desta pesquisa.

A Emerson Souza de Sena, pelos vários auxílios quanto à informática.

Aos amigos que, compreenderam minha ausência necessária em momentos especiais, torceram por mim e me deram muita força e confiança durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores, colegas e funcionários da Escola Municipal Professora Terezinha Paulino de Lima, na qual leciono, pela cumplicidade profissional e intelectual, bem como, pelo apoio e compreensão proporcionado em favor de minha formação.

Aos professores, colegas e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Educação da UFRN, do qual faço parte, pelo apoio proporcionado.

RESUMO

O presente estudo tem como objetivo uma elucidação das origens da lógica matemática. Esta tem seu início atribuído ao matemático inglês autodidata George Boole (1815-1864), especialmente porque seus livros *The Mathematical Analysis of Logic* (1847) e *An Investigation of the Laws of Thought* (1854) são reconhecidos como as obras inaugurais do referido ramo. Contudo, curiosamente, na mesma época um outro matemático chamado Augustus de Morgan (1806-1871) também lançou um livro, intitulado *Formal Logic* (1847), em defesa da matematização da lógica. Mesmo assim, tempos depois neste mesmo século, uma outra obra nomeada *Elements of Logic* (1875) surgiu evidenciando a lógica aristotélica a partir da figura de Richard Whately (1787-1863), considerado o maior lógico aristotélico da época. Desta forma, nossa pesquisa, permeada pela história da matemática, propõe estudar a lógica produzida por estes personagens imersos na idade áurea da matemática (século XIX) a fim de compararmos os sistemas vigentes no referido período e clarificarmos as origens da lógica matemática. Para isso buscamos delinear o panorama histórico envoltório deste estudo. Descrevemos, brevemente, considerações biográficas destes três representantes da lógica do século XIX aliadas à exposição de seus pontos de vista quanto à lógica à luz das obras citadas acima. Neste sentido, aspiramos ainda apresentar considerações acerca do que existia de lógica aristotélica vigente no período de Boole e De Morgan comparando-a com a nova lógica emergente (a lógica matemática). Além disso, diante da análise textual das obras citadas acima, buscamos ainda confrontar os sistemas de Boole e De Morgan a fim de chegarmos ao motivo pelo o qual o de Boole ter sido considerado melhor e mais eficiente. À parte desta preponderância, almejamos estudar as falhas constatadas no sistema lógico de Boole frente à produção de seus contemporâneos, verificando, por exemplo, se elas se repetiram ou não. Concluímos que as origens da lógica matemática residem nas obras de lógica de George Boole, visto que, nelas, há a apresentação de uma nova lógica, matematizada pelas leis do pensamento análogas às da aritmética, enquanto De Morgan conseguiu em seu trabalho expandir a lógica aristotélica, mas ainda esteve preso a ela.

Palavras-chave: Lógica Matemática. Boole, George (1815-1864). De Morgan, Augustus (1806-1971). Whately, Richard (1787-1863). Educação Matemática.

ABSTRACT

The present study has as objective to explaining about the origins of the mathematical logic. This has its beginning attributed to the autodidactic English mathematician George Boole (1815-1864), especially because his books *The Mathematical Analysis of Logic* (1847) and *An Investigation of the Laws of Thought* (1854) are recognized as the inaugural works of the referred branch. However, surprisingly, in the same time another mathematician called Augutus of Morgan (1806-1871) it also published a book, entitled *Formal Logic* (1847), in defense of the mathematic logic. Even so, times later on this same century, another work named *Elements of Logic* (1875) it appeared evidencing the Aristotelian logic with Richard Whately (1787-1863), considered the better Aristotelian logical of that time. This way, our research, permeated by the history of the mathematics, it intends to study the logic produced by these submerged personages in the golden age of the mathematics (19th century) to we compare the valid systems in referred period and we clarify the origins of the mathematical logic. For that we looked for to delineate the panorama historical wrapper of this study. We described, shortly, biographical considerations about these three representatives of the logic of the 19th century formed an alliance with the exhibition of their point of view as for the logic to the light of the works mentioned above. In this sense, we aspirated to present considerations about what effective Aristotelian´s logic existed in the period of Boole and De Morgan comparing it with the new emerging logic (the mathematical logic). Besides of this, before the textual analysis of the works mentioned above, we still looked for to confront the systems of Boole and De Morgan for we arrive to the reason because the Boole´s system was considered better and more efficient. Separate of this preponderance we longed to study the flaws verified in the logical system of Boole front to their contemporaries' production, verifying, for example, if they repeated or not. We concluded that the origins of the mathematical logic is in the works of logic of George Boole, because, in them, has the presentation of a new logic, matematizada for the laws of the thought similar to the one of the arithmetic, while De Morgan, in your work, expand the Aristotelian logic, but it was still arrested to her.

Keywords: Mathematical Logic. Boole, George (1815-1864). De Morgan, Augustus (1806-1971). Whately, Richard (1787-1863). Mathematical Education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE FOTOS

LISTA DE ESQUEMAS

LISTA DE MAPAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Foto 1 – Árvore de Boole

Fonte: National ..., (2007).

1 INTRODUÇÃO

Nas definições comumente encontradas no dicionário, tem-se a Matemática como a "Ciência que investiga, por meio de raciocínio dedutivo, as relações entre entidades abstratas, como os números, as figuras geométricas, etc." (MATEMÁTICA, 2004, p. 613). Ou ainda, "Ciência que tem por objeto as grandezas, as formas e as relações numéricas entre entidades definidas abstrata e logicamente" (MATEMÁTICA, 2001, p. 447). De fato, muito se fala de que a Matemática é a ciência que estuda o raciocínio lógico, mas, que sentido teria esta frase se não entendermos que raciocínio lógico é este e, principalmente, qual sua relação com a Matemática?

A fim de contribuir ao esclarecimento desta questão falamos da gênese do conceito de Matemática começando pela amiúde ligação com a lógica. Segundo Costa (1980), a aproximação destas ciências vem desde o fim do século XIX, quando tem-se o registro das origens da Lógica Matemática. Para o referido autor, é mérito da escola logicista ter percebido que separar Lógica e Matemática era algo arbitrário, entretanto, despótico também é tentar reduzir uma a outra. Nesta perspectiva, Costa (1980) esclarece que a vertigem apontada pelos atributos da escola logicista para a ligação da Lógica com a Matemática vai sendo transmudada pelas outras correntes filosóficas (formalistas e intuicionistas) que sensatamente apontam para o fato de que Matemática e Lógica são ciências que se aproximam. Com prudência quanto a estes aspectos, Costa (1980) radica a íntima correlação entre Lógica e Matemática como sendo o uso básico que ambas fazem do método axiomático e da formalização na manipulação de seus objetivos.

Contudo, retomando nossa afirmação inicial sobre o conceito comumente empregado para a Matemática, sentimos que ele está impregnado de um caráter multifacetado da nossa própria concepção de ciência. Este, por sua vez, reflete nossa perspectiva sobre o mundo dinâmico em que vivemos, carregado de mudanças constantes e impulsionadas pelos avanços propiciados pelo conhecimento científico. Segundo Quine ([19--]) apud (COSTA, 1980), para se entender bem este conhecimento é necessário compreendermos a ciência criada por Aristóteles, visto que ela consiste no denominador comum das ciências específicas.

Na opinião de alguns filósofos como Kant (2003) a Lógica foi criada já adulta, ou seja, pronta e acabada por seu fundador. Por este motivo, os dogmas elaborados por Aristóteles afiguram-se como arquétipos por muito tempo. Porém, no século XIX surgiram indagações revolucionárias que impulsionaram grandes transformações no campo da lógica e, posteriormente, no sistema de conhecimento de modo geral, tendo como base uma nova concepção da Ciência criada por Aristóteles. Especialmente neste período, figuraram-se os fundamentos de uma nova Lógica, a Lógica Matemática a qual reflete a Lógica, notadamente, como uma atividade racional (inerente a uma função mental) modelada matematicamente.

Com a idéia de matematizar nosso pensamento mediante um cálculo puramente formal o paradigma aristotélico foi enfrentado pela primeira, mas não pela última vez. De fato, desde então a Lógica tem evoluído tanto que, hodiernamente, não se pode mais sustentar opiniões semelhantes à de Kant. Assim, para um bom entendimento da Ciência e do conhecimento, de um modo geral, acreditamos ser imprescindível estudar as origens da Lógica Matemática propiciando os elementos indispensáveis para formar uma visão nítida da panorâmica do surgimento deste momento marcante da Lógica. Buscamos, assim, aclarar o significado da Lógica, da Matemática, seu ensino e da Ciência em geral. Por isto, cremos este ser um estudo que interesse não apenas aos especialistas, mas também a todos que se preocupam com questões que dizem respeito à Ciência, à Filosofia, à Matemática e ao Ensino. Isto porque, entendemos que a forma como se ensina Matemática está intimamente ligada à maneira que compreendemos a própria Matemática.

Salientamos que ao longo deste trabalho adotamos a palavra ilustração no lugar de figura para representar as imagens aqui contidas com o intuito de evitar confusão com as figuras silogísticas apresentadas a partir da página 36.

Com o intuito de fertilizarmos este debate profícuo entre a ligação da Lógica e a Matemática nosso estudo objetiva elucidar as **Origens da Lógica Matemática**. Por este motivo, versa sobre investigações a respeito de seu surgimento, marcado, especialmente, pelo aparecimento das obras contemporâneas ***The Mathematical Analysis of Logic*** (1847), de George Boole, e ***Formal Logic*** (1847), de Augustus de Morgan, acrescidas pelo trabalho ***An Investigation of the Laws of Thought*** (1854), de George Boole.

Para tanto, realizamos uma pesquisa histórica com caráter bibliográfico a fim de contextualizar o panorama histórico deste surgimento a partir da apreciação das transformações sociais envoltórias do século XIX, da influência desses acontecimentos na própria Matemática e, ainda, mediante a delineação da Lógica ao longo dos tempos.

Ainda fazendo uso da pesquisa bibliográfica de cunho exploratório, buscamos investigar a lógica de Richard Whately (um dos mais importantes lógicos aristotélicos ingleses do século XIX), Augustus de Morgan e George Boole, acrescentando um pouco de suas biografias, bem como caracterizando-os como homens e cientistas inseridos na história. Com enfoque interpretativo diante destas informações, procuramos compreender melhor o que cada um quis sustentar em seus trabalhos lógicos e, deste modo, caracterizar e comparar sua(s) lógica(s).

Visando alcançar nossos objetivos, dispomos também de pesquisas em documentos correlatos – que trazem comentários e mostram a posição dos matemáticos e filósofos diante das idéias e resultados destes personagens (a exemplo, temos as correspondências entre Boole e De Morgan – que surgiram na época, observando, por exemplo, a repercussão, aceitação das idéias inerentes à lógica matemática e observação de possível existência de divergências de seus pensamentos, sobretudo, quanto ao trabalho de George Boole (considerado por alguns como o Pai da Lógica Matemática).

Finalmente, frente a essas informações almejamos clarificar as origens da Lógica Matemática.

Com este fim, estruturamos nosso trabalho em seis capítulos. No segundo deles, intitulado **Panorama histórico**, buscamos retratar o contexto das origens da Lógica Matemática procurando clarificar o meio em que estiveram imersos aqueles que nela trabalharam. Neste sentido, apontamos os principais acontecimentos imbuídos na Europa (especialmente a Inglaterra) durante o século XIX, buscando retratar as transformações sociais ocorridas e seu reflexo na matemática. Por fim, apresentamos a lógica ao longo dos tempos almejando propiciar uma maior compreensão de sua evolução.

O terceiro capítulo de nosso estudo chama-se **A lógica aristotélica vigente no século XIX**. Nele, mostramos que embora o século XIX marque a origem da lógica matemática esta transição não foi repentina e, como toda novidade, necessitou de um tempo para ser compreendida e aceita. Por isto, enfatizamos que, ainda neste período, a codificação afigurada por Aristóteles vigorava através da presença de lógicos aristotélicos como Richard Whately. Para tanto, iniciamos o capítulo tecendo comentários a respeito do próprio Whately. Em seguida, buscamos expor a lógica por ele endossada mediante sua obra intitulada **Elements of Logic** (1875), que foi adotado como livro texto por muitos anos.

Em **A lógica de Augustus de Morgan**, o quarto capítulo da presente tese, fizemos uma apreciação dos dados biográficos de De Morgan. Ainda nesse capítulo, abordamos o tratamento dado por ele em direção à formalização da Lógica. Neste sentido, tomamos como referência o conteúdo do livro **Formal Logic** (1845) além de artigos que buscam elucidar seu pensamento e possível contribuição para a origem da Lógica Matemática. Por fim, tecemos comentários acerca do sistema proposto por ele em paralelo ao sistema aristotélico vigente.

No quinto capítulo, nomeado como **A lógica de George Boole**, apresentamos inicialmente as informações biográficas de George Boole e, em seguida, analisamos a sua Lógica imbuída pelo conteúdo de seus primeiro e segundo livros à luz da lógica de Richard Whately e Augustus de Morgan. Diante deste paralelo, procuramos aclarar a preponderância do sistema de Boole frente à lógica aristotélica e a de De Morgan e, assim, esclarecermos a origem e importância da Lógica Matemática..

Por fim, em nossa **Conclusão** destacamos os resultados advindos deste estudo juntamente com suas implicações futuras. De tal modo, retomamos os objetivos relatados nesta **Introdução**, mostrando se foram alcançados e abrimos espaço para as possibilidades de vindouras pesquisas. Destacamos, neste cenário a aceitação e força do trabalho de Boole frente ao surgimento da lógica matemática. Além disso, que o sistema de De Morgan representou uma expansão ao modo aristotélico tradicional, mas ainda preso a ele, enquanto que Boole criou um novo sistema, a Lógica Matemática.

CAPÍTULO 2: PANORAMA HISTÓRICO

Foto 2 – Revolução Industrial
FONTE: A História ..., (2007)

2 PANORAMA HISTÓRICO

2.1 CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

O presente capítulo traz ao longo de seu corpo um escorço histórico dos acontecimentos que envolveram a Europa (especialmente a Inglaterra) durante o século XIX, buscando assim retratar o contexto das origens da Lógica Matemática, ou pelo menos o meio em que estiveram imersos aqueles que nela trabalharam.

2.2 O RETRATO DAS TRANSFORMAÇÕES SOCIAIS NA EUROPA DO SÉCULO XIX

Norteados pelo fato de que **o hoje é fruto do ontem**, sobretudo daquele mais imediato, não podemos falar das transformações sociais do século XIX sem mencionar os acontecimentos importantes que precederam este período. Veremos que as mudanças significantes no século XIX são devidas às marcas deixadas pelos períodos precedentes (final do século XVIII), bem como resultam de um emaranhado de outras forças sociais que se desenrolaram ao longo do tempo.

Para Montalvão et al. (1998), no final do século XVIII e início do século XIX a Europa passou por um melhoramento agrícola que foi implementado nos grandes campos, formados quando proprietários privados cercaram terras públicas. De acordo com Montalvão et al. (1998), os lucros oriundos da agricultura aliados ao do comércio colonial e estrangeiro não se estagnaram nestes fins e passaram a ser canalizados através de centenas de bancos e da Bolsa de Valores (fundada em 1773) para uma outra crescente atividade existente no período: os processos industriais. Estes processos, como veremos, geraram mudanças tão radicais na sociedade que os historiadores chamam este período de Revolução Industrial. Piletti (2004, p. 64) conceitua esta revolução como “o processo de mecanização da produção ocorrido inicialmente na Inglaterra, no século XVIII.”

Sob um olhar mais minucioso, Schmidt (1999) esclarece que esta revolução começou na Inglaterra devido ao fato de que os burgueses[1] ingleses haviam enriquecido bastante neste período em decorrência da ampliação de seus negócios e do fortalecimento de sua economia. Este acúmulo primitivo de capital ocorreu pelo financiamento de ataques piratas, tráficos de escravos, empréstimo de dinheiro a juros, vitória em guerras, tratados impostos a países fracos, o pagamento de salários miseráveis aos artesãos empregados nas manufaturas e, sobretudo, pelo comércio. Aliás, nesta atividade a burguesia inglesa esteve bem à frente das demais, liderando o mercado interno e externo.

Para Carmo (1997, p. 46), a Inglaterra saiu na frente, pois reuniu as seguintes condições necessárias para a formação da sociedade industrial:

> - Havia grandes capitais acumulados;
> - Havia uma classe social, a burguesia, possuidora desses capitais e interessada em investir no desenvolvimento das técnicas de produção;
> - Os interesses burgueses predominavam no parlamento;
> - Havia uma grande quantidade de trabalhadores livres, que nada possuíam, a não ser sua força de trabalho, a qual precisavam vender em troca de um salário.

A referida autora acrescenta ainda que, aliada a estas condições, a Inglaterra dispunha de recursos naturais, como o ferro e o carvão, indispensáveis à indústria.

Nesta mesma linha, Pilleti (2004) ressalta que grande parte do poderio inglês foi conquistado com o **Ato de navegação e a Revolução Gloriosa**[2], os quais proporcionaram o capital e as condições políticas necessárias. Vale salientar que a marinha inglesa, nesta época, era a maior do mundo, possibilitando o comércio dos produtos industrializados em quase todos os lugares. Contudo, o referido autor coloca, além disso, que os ingleses tinham dois outros fatores importantes para determinar sua liderança: o primeiro, consiste na disponibilidade de mão-de-obra e, o segundo, a existência de grandes jazidas de ferro e carvão no país.

Entretanto, é sabido que quanto mais comércio, maior é a concorrência. Assim, em busca de vencê-la era preciso oferecer produtos mais baratos, o que só foi possível quando as máquinas entraram em cena para dinamizar a produção. Neste sentido, Schmidt, (1999, p. 108)

---

[1] Habitantes dos burgos (cidades). Entretanto, vale salientar que esta palavra ganhou outra acepção com o trabalho de Karl Heinrich Marx (1818-1883) para o qual, burguesia, quer dizer os donos dos meios de produção. Para mais detalhes sobre Marx, ver Ruiza et al. (2007).

[2] O Ato de Navegação foi um conjunto de decretos que apoiavam o monopólio inglês na realização dos transportes de produtos procedentes da Inglaterra ou a ela destinados e que assim, garantiu o domínio do transporte marítimo e do comercio industrial para a Inglaterra. Já a Revolução Gloriosa (1688-1689) estabeleceu a supremacia do Parlamento sobre a monarquia na Inglaterra.

salienta que “foi a pressão do mercado (ameaça dos concorrentes) que levou a burguesia inglesa a aperfeiçoar suas máquinas e a investir nas indústrias.”

Como se deu o caminho percorrido por esta burguesia até o surgimento das primeiras máquinas e a inauguração desse processo industrial?

Para Montalvão et al. (1998) este novo processo se iniciou especialmente no século XVIII em virtude da invenção da bomba a vapor do ferreiro inglês Thomas Newcomen (1663-1729)[3], em 1712, auxiliando a mineração de carvão. Com a fusão do carvão coque foi possível produzir ferro bom e barato para as maquinarias posteriores como a lançadeira – inventada pelo engenheiro inglês John Kay[4] (1704-1780) em 1733 – e a máquina de fiar – criada em 1764 pelo carpinteiro, fiandor e inventor britânico James Hargreaves[5] (1720-1778) – as quais eram usadas nas novas e grandes fábricas têxteis de algodão. Entretanto, o processo industrial tornou-se significantemente mais pulsante a partir do surgimento das eficientes máquinas a vapor[6], que também utilizavam o carvão como combustível. Carmo (1997) acrescenta o aparecimento do descaroçador de algodão – feito pelo inventor e empresário norte americano Eli Whitney[7] (1765-1825), em 1782 – e o tear mecânico – surgido, em 1785, através do Reverendo britânico Edmund Cartwright[8] (1743-1823) –, como exemplos de maquinarias.

Em decorrência deste processo o novo mundo do capitalismo da cidade, da tecnologia e da mudança incessante triunfou, fazendo com que o modo de vida e a mentalidade de milhões de pessoas se transformassem numa velocidade espantosa e, até devastadora. Em suma, as sirenes das fábricas marcam um novo ritmo de vida.

Para Schmidt, (1999), ao observarmos estes fatos sob os olhares do século XXI é fácil entendermos o porquê do impacto destas mudanças e a profundidade de seus efeitos na vida das pessoas. Basta, para isso, repararmos como as máquinas estão presentes na nossa vida. Olhando à nossa volta, percebemos claramente que a maioria dos objetos que usamos foi feito por trabalhadores, que, para produzi-los, usaram diversas máquinas. O presente trabalho (tese), por exemplo, foi feito com o auxílio de várias máquinas, por exemplo, o computador, a impressora, as máquinas que produzem papel e as que geram energia elétrica.

---

[3] Para mais detalhes ver Braga Filho (2007).
[4] Para mais detalhes biográficos, ver John ..., (2007).
[5] Para mais detalhes biográficos, ver Fernandes (2002a).
[6] Segundo Schmidt (1999), em [17--], surgiu uma nova fonte para movimentar as máquinas. O operário, matemático e engenheiro escocês James Watt (1736-1819) criou a primeira máquina a vapor realmente eficaz que basicamente buscava botar o carvão em brasa para aquecer a água até que ela produzisse muito vapor que se expandia e contraia dentro de um cilindro de metal fazendo a máquina girar.
[7] Para mais detalhes, ver Eli Whitney (2007).
[8] Segundo Fernandes (2002b), além de clérigo, Cartwright foi poeta e inventor.

Já nas primeiras décadas do século XIX as máquinas a vapor equiparam navios e locomotivas, outras se destinaram a fabricar tecido (movimentando os teares mecânicos) e, assim, passaram a aumentar a produção das demais mercadorias, fazendo os lucros dos burgueses crescer na mesma proporção da miséria do proletariado (trabalhadores). As fábricas começaram a se espalhar rapidamente em virtude do investimento dos empresários ingleses.

2.2.1 Mudanças ocorridas com a expansão da indústria (Europa)

De acordo com Carmo (1997), a Revolução Industrial não pode ser vista apenas como uma mudança acelerada nos meios de produção. Para ela, é notório observarmos que esta revolução transformou profundamente a vida econômica, social, política e cultural da humanidade, já que, em toda parte que ela ocorreu, o modo de viver e de pensar foi modificado rápida e radicalmente.

Como mencionado no início deste capítulo, as mudanças significantes não acontecem de uma hora para outra, mas são resultados de um conjunto de fatos ocorridos ao longo do tempo, ou seja, faz-se necessário um período de transição. De fato, como encarado por Carmo (1997), a Revolução Industrial (espinha dorsal das transformações do século XIX) teve um longo tempo de preparação, correspondente à transição do feudalismo para o capitalismo, que se deu na Idade Moderna.

Podemos considerar a Revolução Industrial como o passo decisivo para o estabelecimento da sociedade capitalista. Esta, por sua vez, passou a exigir cada vez mais mão-de-obra livre e barata para fazer as indústrias operarem.

O suprimento desta necessidade se deu, especialmente, por duas vias. Primeiro, mediante a ampliação das terras por parte dos grandes fazendeiros que encurralaram os camponeses em pequenas terras sem condições de competição e até de subsistência, tendo que abandoná-las para trabalhar nas cidades. Em segundo lugar, a desigual competição imposta aos artesãos por parte das indústrias as quais conseguiam confeccionar muito mais rapidamente e de maneira mais barata que as oficinas.

Aos poucos tanto os camponeses quanto os artesãos, por não conseguirem mais viver por conta da terra ou do artesanato, tiveram que buscar emprego como operários nas fábricas, aceitando uma excessiva jornada de trabalho e recebendo pequenos salários para não morrer de fome. Surgia então o proletariado.

Por um lado, a Revolução Industrial atrelada ao capitalismo deixou a grande maioria dos operários viver em péssimas condições. A nova classe de trabalhadores industriais, desarraigada de seus lares rurais, tinha salários muito baixos, uma jornada de trabalho extensa (14 a 16 horas), sem direito a férias e carecendo de segurança no trabalho. O proletariado se sujeitava ao trabalho em fábricas muito sujas e barulhentas, à humilhação dos patrões e às perigosas condições de aglomeração no trabalho e em casa. Por este motivo, os trabalhadores perceberam a necessidade de se unir organizando sindicatos (legalizados na Inglaterra em 1824; na França em 1884) e greves[9].

Por outro lado, a Revolução Industrial enriqueceu muitos capitalistas trazendo progressos técnicos e inovações administrativas que se espalharam pela Europa (especialmente na Alemanha) e pelos E.U.A., causando uma explosão de produção industrial, demanda por matérias-primas e competição por mercados. Os inventores, tanto treinados quanto autodidatas, forneciam os meios para a produção em escala maior (aço Bessemer[10], 1855; máquina de costura, 1846). (MONTALVÃO et al., 1998).

Em outras palavras, a semente brotada na Inglaterra germinou em outros campos da Europa. Schmidt (1999) enfatiza que, na França, os frutos da revolução foram semeados com o impulso dado na época do militar e estadista francês Napoleão Bonaparte[11] (1769-1821) e firmados com o desenvolvimento das ferrovias a partir de 1840. Na Alemanha estas alterações só foram sentidas dez anos mais tarde, enquanto que na Itália e Rússia a importância do processo industrial só foi adquirida no final do século XIX. A exemplo destes, temos ainda os E.U.A cujas matrizes industriais surgiram no final do século XVIII, mas sua arrancada industrial chegou somente na segunda metade do século XIX (depois que os estados do Norte venceram os do Sul numa guerra civil). Por fim, citamos o Japão, cuja industrialização contou com o apoio do governo e tomou corpo nas últimas décadas do século XIX (quando o Estado se ligou à burguesia).

Deste modo, sentimos que a dicotomia social imposta pelo capitalismo e a Revolução Industrial geraram tanto riqueza quanto pobreza, tão discrepantes e atuais. Esta, por sua vez, vem crescendo até hoje e aumentando o abismo social.

---

[9] Neste período surgiram movimentos importantes de luta a exemplo do ludismo e o movimento cartista. No primeiro deles, de acordo com Schmidt (1999), os trabalhadores formavam grupos e invadiam as fábricas. Já o segundo é marcado pelo documento chamado **Carta do Povo** que reivindicava o sufrágio universal masculino (o direito de voto para todos os homens).

[10] Segundo Henry ..., (2007), o processo de fabricação do aço Bessemer está relacionado ao engenheiro e inventor do Reino Unido Sir Henry Bessemer (1813-1898).

[11] Para mais detalhes biográficos, ver Loures (2007).

A exemplo das alterações impostas pela Revolução Industrial no modo de vida da humanidade temos o aumento da população nas cidades Européias. Neste sentido, destacamos que grandes cidades, como Londres e Paris encheram-se de favelas e cortiços, pois os camponeses e artesãos, arruinados, passaram a ser cada vez mais importantes. Na Inglaterra, por volta de 1850, havia mais pessoas na cidade do que no campo.

Esta migração teve influência direta na qualidade de vida das pessoas haja vista que as cidades não estavam preparadas para recebê-las. Portanto, os pobres conviviam com a insalubridade amontoando-se em bairros onde o esgoto e os ratos disputavam as ruas com os pedestres, tinham casas velhas e desconfortáveis e, falta de água. Ao mesmo tempo, o trabalhador tinha que se adaptar às tarefas monótonas e repetitivas das fábricas, à disciplina imposta pelos patrões e ao medo do desemprego, em contraste com o trabalho costumeiro e autônomo do campo.

Havia uma vida moderna que, em contra partida, impunha mudanças incessantes aliadas ao progresso avassalador. O capitalismo industrial estimulou os pesquisadores a buscar o **lado prático** do conhecimento e a aperfeiçoar a indústria, fazendo com que surgissem a cada instante novas máquinas, novos produtos, novos gostos e modas, novas tecnologias.

Os principais avanços tecnológicos são destacados por Schmidt (1999) como sendo os barcos – criados pelo engenheiro e inventor norte-americano Robert Fulton[12] (1765-1815), em 1807 – e a locomotiva a vapor – inventada pelo engenheiro mecânico inglês George Stephenson[13] (1781-1848), em 1825 –, que representam a revolução ocorrida nos transportes; a máquina agrícola – feita pelo inventor e industrial norte-americano Cyrus Hall McCormick [14] (1809-1884), em 1834 –; a fotografia – inventada pelo comerciante e pesquisador francês Louis Jacques Mande Daguerre[15] (1787-1851), em 1839 – e ainda o telégrafo – criado pelo pintor e inventor norte americano Samuel Finley Breese Morse[16] (1791-1872), em 1844 –, representante da revolução nos meios de comunicação.

A respeito deste fato, Montalvão et al. (1998) acrescenta que a especialização local e o comércio de longa distância foram auxiliados por estas revoluções nos transportes e nas comunicações. Para ele, cada uma destas invenções tem um papel nas transformações ocorridas durante o século XIX. As estradas de ferro foram introduzidas na década de 1820 na

[12] Mais detalhes, ver Robert ..., ([200-]).
[13] Para mais detalhes, ver George ..., ([200-b]).
[14] Ver o site Netsaber ..., ([2007]).
[15] Para mais detalhes biográficos, ver Louis ..., ([200-]).
[16] Consultar o site Criptografia ..., (2005), para mais detalhes.

Inglaterra e nos E.U.A. Em 1880, mais de 240.000 quilômetros de linhas férreas haviam sido assentadas no mundo todo e mais 160.000 quilômetros na década seguinte. Os navios a vapor foram aperfeiçoados (o *Savannah* cruzou o Atlântico em 1819). O telégrafo, aperfeiçoado em 1844 (Morse), conectou o Velho e o Novo Mundo por cabo em 1866, e acelerou o passo do comércio e da política internacionais. A primeira estação telefônica comercial entrou em operação nos E.U.A. em 1878.

Em suma, as transformações fecundas do século XIX são devidas principalmente à instauração do sistema capitalista oriundo do processo de industrialização. Percebemos que o retrato das transformações sociais que envolveram a Europa durante o século XIX é devido aos estímulos capitalistas deixados pelos períodos antecedentes, tendo como espinha dorsal a Revolução Industrial e proporcionando mudanças não apenas nos meios de produção, mas, sobretudo no modo de vida das pessoas. Em decorrência da somatória de todas estas condições propícias, a Inglaterra foi o coração destas transformações que, além de se expandirem para todo o mundo, perduram até hoje. No que segue, vemos como tais acontecimentos se portaram diante da Matemática do século XIX.

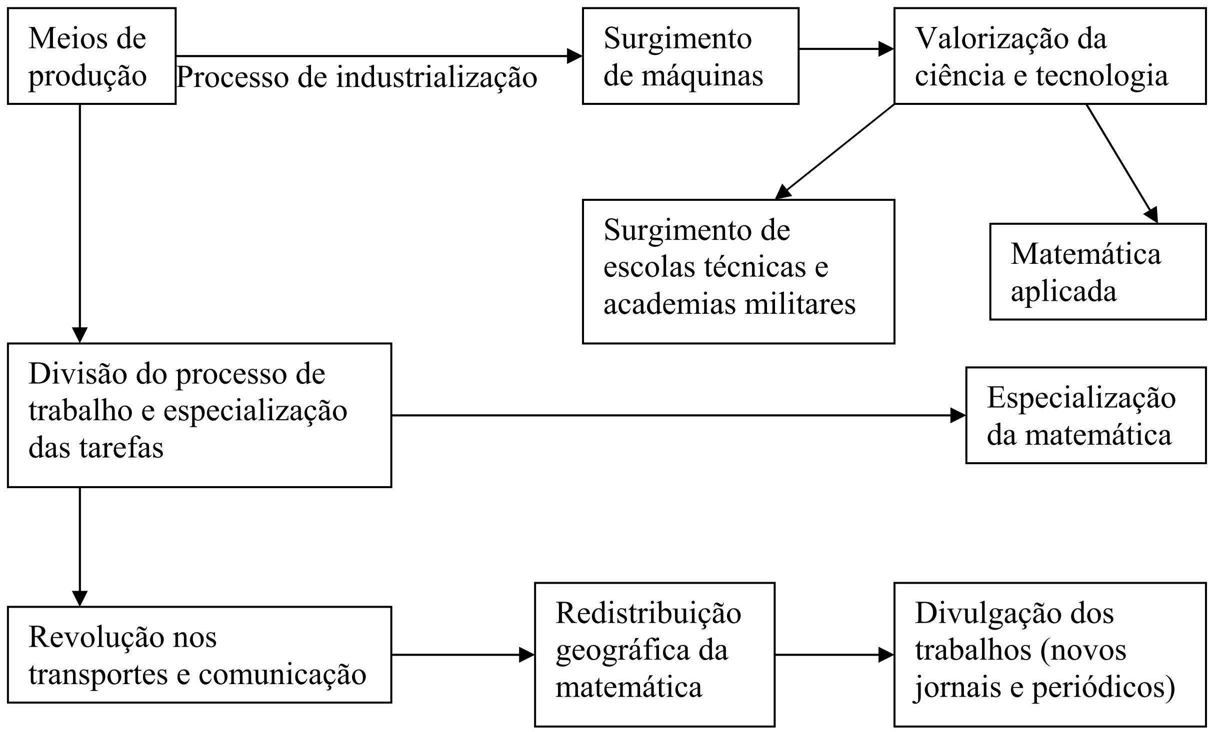
2.3 O DIÁLOGO DAS TRANSFORMAÇÕES SOCIAIS COM A MATEMÁTICA

Nosso diálogo começa pela ligação dos fatos históricos com a Matemática em sua **maturidade**[17].

Como destacado na seção anterior, o século XIX foi envolvido por uma gama de mudanças que o marcaram fortemente. Estas transformações tratam, em suma, das mudanças nos meios de produção e no modo de vida das pessoas. Cada uma dessas alterações se ramificou em várias outras que marcaram fortemente o período e, conseqüentemente, a Matemática produzida nele.

A fim de observarmos estas ramificações e destacarmos sua ligação com a Matemática, vejamos o fluxograma que segue:

[17] A expressão **maturidade** da Matemática é usada por Fossa (2004) para se referir à Matemática do século XIX.



Fluxograma – Ligação de fatos históricos do séc. XIX com a Matemática.

O processo de industrialização visualizado sucintamente no fluxograma acima alude às implicações que este tenha exercido sobre as características mais notáveis observadas na Matemática produzida no século XIX.

A exemplo, destacamos que para atender às necessidades impostas pelo processo de industrialização, a Matemática passou ainda mais a enfatizar aplicação e incessantemente atender aos anseios das indústrias resolvendo problemas de cunho prático. Ao mesmo tempo, estas soluções eram experimentadas e postas em prática pelas escolas técnicas e academias militares as quais, além disso, eram responsáveis pelo suprimento de mão-de-obra qualificada para as novas exigências e profissões surgidas.

Aludimos ainda que a divisão do processo de trabalho e especialização das tarefas nas fábricas estava atrelada à especialização da Matemática deste período, haja vista que, a atenção industrial estaria cada vez mais voltada a um processo específico na linha de produção e os problemas surgidos eram cada vez mais característicos de uma sub-área, cujas soluções eram também respondidas por novas sub-áreas da Matemática.

Por fim, exemplificamos a alusão do fluxograma com a relação da revolução nos meios de transportes e de comunicação com a redistribuição geográfica da Matemática, bem como, com o surgimento de novos jornais e periódicos. De fato, a valorização e ampliação dos meios de comunicação estimularam a divulgação dos trabalhos científicos, como veremos mais detalhadamente na página 30 do presente estudo. Do mesmo modo, a revolução nos transportes acena para o fato da produção Matemática ter se tornado mais difusa nesta época, especialmente, pelo fato da França (que era o centro da produção Matemática) ir perdendo seu posto para outros países como a Inglaterra e Alemanha.

No fluxograma, podemos notar que as mudanças nos meios de produção implicaram na melhoria geral dos padrões de vida (proporcionada pela comodidade advinda do aparecimento das máquinas no cotidiano) o qual ativou um interesse geral pela ciência e tecnologia – contudo, salientamos que isto era e ainda é privilégio de poucos. Neste sentido, enfatizamos que a atividade científica era vista como um empreendimento colaborativo, isto é, houve a consciência de que a ciência poderia ser determinante para melhorar a vida das pessoas. Isto se refletiu na criação de premiações como medalhas concedidas por associações de grupos científicos específicos como a Royal Society[18].

Ao mesmo tempo em que as novas classes sociais valorizavam a ciência, nelas também surgiam novos anseios acadêmicos (STRUIK, 1967). Estas aspirações culminaram em reformas nas escolas e universidades. Tais instituições voltavam sua atenção para o ensino como parte integrante do treinamento de engenheiros e, desta forma, a Matemática teórica e prática passou a integrar os currículos, com ênfase nas pesquisas tão quanto sob o ensino (valorização da Matemática aplicada).

Contudo, diante de tantas mudanças no dia-a-dia, era de se esperar que as novas classes também passassem a aceitar mudanças na própria definição das ciências, aceitando idéias novas e admitindo erros nos conceitos tomados como arquétipos. Particularmente, com a Matemática isto aconteceu[19] (valorização da Matemática pura).

Para a Matemática, o século XIX foi um período extremamente rico e saliente em relação aos precedentes[20]. De fato, como ressaltado por Smith (1906), até antes do século XIX foram constituídos os fundamentos da Matemática. A partir do século XIX houve um intenso estudo dos primeiros princípios mediante a análise crítica destes, o que ocorreu com a tentativa ou necessidade de refutar os mesmos.

---

[18] As premiações da *Royal Society* não são limitadas apenas a seus membros estando aberta para qualquer idioma e às seguintes variedades de disciplinas: em ciência e tecnologia, nas ciências sociais e nas ciências humanas. Existem cerca de dez tipos diferentes de medalhas que tem a premiação variando anualmente, bienalmente ou trienalmente, de acordo com a categoria. A escolha dos medalhistas é feita pelos membros da sociedade e mais de um prêmio pode ser concedido ao mesmo nome (THE ROYAL ..., [200-]).

[19] Mais detalhes ver o artigo **Um olhar que não se apegue à generalização** de Sousa e Anjos (2006).

[20] Ver Fossa e Sousa (2004).

Segundo Vergani (2003), a busca de refutação de conceitos arquétipos quando não traz à tona sua invalidação, conduz a sua reafirmação ou, em seu percurso, faz emergir novas idéias e conceitos e por isso é tão frutífera. Realmente, assim ocorreu com a Matemática, que passou a ser vista com outros olhos. Especialmente neste período, ela foi redefinida e aceita não só como a ciência dos números (aplicação), mas também como aquela que estuda o raciocínio lógico (abstração) (NAGEL, 1935). Evocamos que isto se deu, sobretudo, pela mudança de postura da sociedade que passou a questionar se os padrões de rigor eram adequados e a não mais os ver como intocáveis. Assim, certos conhecimentos ou conceitos estáticos e hirtos foram paulatinamente refeitos pela quebra de sua fixidez.

Vale salientar que o progresso nos padrões de vida enfatizou o processo de urbanização nas cidades, estando aliado (como mencionado no item 2.2) ao crescimento do abismo social existente até hoje (proletariado muito mais pobre e capitalistas muito mais ricos) e ao aumento da população, mais concentrada nos centros urbanos.

Continuando nosso diálogo, falemos de outro ponto inerente às mudanças no contexto histórico do século XIX e sua implicação na Matemática. Tratamos agora da divisão do processo de trabalho que foi caracterizado pela especialização nas tarefas efetuadas no ambiente da fábrica. Esta particularização das atividades exercidas pelo operário faz referência à especialização ocorrida na Matemática do século XIX.

A respeito da especialização da Matemática ocorrida durante o século XIX, Boyer (1974) exemplifica que enquanto Leonhard Euler (1707-1783) [21] pode ser visto como matemático, nós pensamos em Augustin Louis Cauchy (1789-1857)[22] como analista.

Diferente dos séculos precedentes, a partir do século XIX nós não pensamos apenas em Matemática e sim, Matemáticas. Deste modo, a especialização acima mencionada contemplou a introdução de conceitos como geometrias não-euclidianas, espaços n-dimensionais, álgebras não comutativas, processos infinitos e estruturas não-quantitativas. Com tal processo particular emergiram conquistas relevantes como o surgimento do novo mundo da geometria, tornado conhecido em 1829, por Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856)[23], um russo professor de alemão[24]; a álgebra moderna que se firmou principalmente na

---

[21] Ver Tibúrcio ([200-]).
[22] Para mais detalhes ver artigo E-Escola ..., ([200-]).
[23] Dados biográficos segundo o site Nikolai ..., ([200-].).
[24] De fato, não é tão claro como parece no texto, pois embora tenha havido a publicação inicial de Lobachevsky, esta não foi única no ramo já que Johann Bolyai (1802-1860) também deu sua contribuição e, mais especialmente ainda, ressaltamos que há indícios de Carl Friedrich Gauss (1777-1856) também ter trabalhado, mas não publicado, no assunto. (Ver o site A NOVA ..., [200-]).

universidade de Cambridge; e o campo da análise surpreso pela matemática do infinito, em 1874, de George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor[25].

Em suma, Boyer (1974, p. 435) esclarece:

> A matemática tem sido freqüentemente comparada a uma árvore, pois cresce numa estrutura acima da terra que se espalha e ramifica sempre mais, ao passo que ao mesmo tempo suas raízes cada vez mais se aprofundam e alargam, em busca de fundamentos sólidos. Esse duplo crescimento foi especialmente característico do desenvolvimento da análise do século XIX.

Neste sentido, percebemos que a matemática tem alcançado enormes proporções e contribuído fortemente para a vida moderna, haja vista que a maioria dos conhecimentos científicos atuais tem sido o resultado de uma síntese de diferentes ramos da Matemática. Vale ressaltar que quanto mais se especializa mais se observa a unidade da Matemática.

Por fim, como última parte de nosso diálogo, destacamos, no cenário das transformações do século XIX, a revolução ocorrida nos transportes e nos meios de comunicação. Este ponto acena para um outro marco na Matemática, a redistribuição geográfica e o surgimento de jornais e periódicos.

Quanto à redefinição geográfica temos o fato da França (considerada o centro da produção matemática) ir perdendo seu posto para outros países como a Inglaterra e, ainda, a emergência da Alemanha, no cenário da produção matemática. Crouzet (1996) salienta que a quebra do monopólio francês foi feita gradualmente, pois até 1830 ainda era a França que dava o sinal, mas à medida que a quebra acontecia, também se permitia a troca de idéias e uma maior flexibilidade do conhecimento matemático.

Para Boyer (1996), por volta da primeira metade do século XIX os matemáticos alemães estiveram bem à frente dos de outras nacionalidades no que se refere à análise e a geometria, mas quando se trata da álgebra podemos dizer que esta foi quase um monopólio britânico. No que se refere à Inglaterra, destacamos neste período, a criação pelo governo do *Trinity College* (Cambridge), da *Analytical Society* liderada por um grupo de estudantes – como George Peacock (1791-1858)[26] e Charles Babbage (1791-1871)[27] – e a *British Association for Advancement of Science* (conduzida por figuras importantes como Augustus de Morgan). Tais fundações, aliadas à quebra do isolamento inglês[28], contribuíram fortemente

---

[25] Para mais detalhes ver Martins et al (2001).

[26] Segundo Connor e Robertson (1996a).

[27] De acordo com Charles ..., ([200-]).

[28] Durante muitos anos a matemática inglesa esteve estéril ou atrasada por isolar-se e não assumir a matemática de outros (especialmente pela disputa da fundação do cálculo, entre Newton e Leibniz). Boyer (1974) explicita

para a virada da matemática inglesa que, nesta época, passou a ser o centro da produção matemática.

Já quanto ao surgimento de jornais e periódicos, Smith (1906) destaca os primeiros números do jornal francês da *l´École Polytechnique* (estabelecido em 1796), o *Journal für die reine und angewandte Mathematik* de Crelle (1826), o *The Cambridge Mathematical Journal* (1839) e o *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* (1846). Além destes veículos surgiram também diversos periódicos como: o *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1842), *Archiv der Mathematik* de Grunert (1843), *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche* de Tortolini (1850), *Zeitschrift für Mathematik und Physik* de Schlömilch (1856), o *Quarterly Journal of Mathematics* (1857) e o *Giornale di Matematiche* de Battaglini (1863).

Enfatizamos que o surgimento de tais veículos de comunicação influenciou, de forma especial, a grande expansão e qualidade do conhecimento matemático produzido no século XIX. Realmente, o aparecimento destes veículos proporcionou uma maior divulgação dos trabalhos produzidos o que, por sua vez, acreditamos ter estimulado os pesquisadores a produzir mais (expansão e quantidade). Ressaltamos que a publicação nestes jornais e periódicos rendia, muitas vezes, prêmios concedidos por sociedades como a Royal Society e universidades como Oxford (por exemplo, o título de **doutor *honoris* causa**), em reconhecimento do valor das pesquisas dos autores. Do mesmo modo, cremos que o surgimento destes veículos de comunicação possibilitou um intercâmbio de idéias, permitindo sugestões e chamando atenção para novas áreas (qualidade).

Apoiando-nos no fato de que somos frutos de nosso meio, encerramos nosso diálogo verificando a intimidade da produção matemática de um período com as transformações sociais ocorridas na referida época. Acreditamos que o alcance da potencialidade de uma ciência, particularmente da Matemática, não ocorre à revelia das mudanças e exigências da sociedade e nem é fruto somente de sua época, mas recebe também influência dos períodos precedentes.

---

que, enquanto os matemáticos continentais estavam desenvolvendo a representação gráfica dos números complexos, na Inglaterra havia protestos de que mesmo os números negativos existissem. Com ajuda de um grupo de jovens de Cambridge houve a virada da matemática inglesa e a quebra do isolamento inglês que fez com que os matemáticos deixassem de trabalhar como em um vaso fechado e passassem a aceitar a matemática produzida por outros.

Especialmente, no século XIX, a espinha dorsal do contexto foi marcada pelo processo industrial o qual inspirou a valorização da ciência e o aprofundamento no tocante à Matemática. Tantas foram as influências que, atualmente, dizemos que o século XIX merece uma atenção especial quando falamos de Matemática. Segundo Boyer (1974), este centenário deve ser considerado como a **idade áurea** da Matemática, haja vista que os cem anos que compreendem o século XIX apresentam um crescimento matemático que superou a soma total de produtividade dos períodos precedentes, tanto em quantidade quanto em qualidade.

Seguindo o caminho do escorço histórico, façamos agora algumas reflexões acerca do caminho percorrido pela lógica ao longo dos tempos a fim de clarificarmos sua produção e compreendermos como ocorreram as transformações nesta ciência.

2.4 A LÓGICA AO LONGO DOS TEMPOS

Como a Lógica versa o cerne de nossa questão investigativa, nossa abordagem histórica não se limitará, neste caso, apenas ao século XIX, mas sim, tratará do seu percurso histórico. A fim de compreendermos o andamento da Lógica começamos falando um pouco de sua própria essência, isto é, em que ela consiste.

Se consultarmos um dicionário, veremos que Lógica pode ser definida como “o estudo das leis do raciocínio” (LUFT, 2001, p. 428), ou ainda, como “modo pelo qual as coisas ou os acontecimentos se encadeiam, numa seqüência coerente.” (XIMENES, 2004, p. 588). Mas, na opinião de Mortari (2001), ao aprofundarmos o estudo sobre o assunto, vemos que toda definição atribuída a esta ciência, assim como em outras, é incompleta.

Mortari (2001) acredita que as ciências não são estáticas e evoluem ao longo dos tempos com o surgimento de novas especialidades e a mudança constante nas fronteiras entre elas, cujos limites estão longe de serem nítidos. Para o referido autor, é mais justo atribuir um sentido provisório a cada uma delas e neste sentido, Mortari (2001, p. 02) afirma que “lógica é a ciência que estuda princípios e métodos de inferência, tendo como objetivo principal determinar em que condições certas coisas se seguem (são conseqüência), ou não, de outras”. Mais adiante Mortari (2001, p. 349) acrescenta que a Lógica também pode ser caracterizada como “o estudo do raciocínio válido” e enfatiza que este raciocínio é um processo mental.

Numa discussão a respeito dos matemáticos e a verdade, Mortari (2001) chama para a Lógica a responsabilidade de ser um instrumento de verificação das ciências formais (como a

Matemática) a partir da demonstração. Mas também expõe que a Lógica também pode ser um recurso de validação nas ciências empíricas (como a Física), pois se pode mostrar que alguma proposição da física é verdadeira mostrando que ela é conseqüência lógica de outras proposições verdadeiras da Física. Esta é, pois, uma concepção mais ampla que a rotineira que, em oposição, assume ingenuamente que as ciências empíricas necessitam e utilizam apenas, como recurso de validação de seus argumentos, a observação e experimentação.

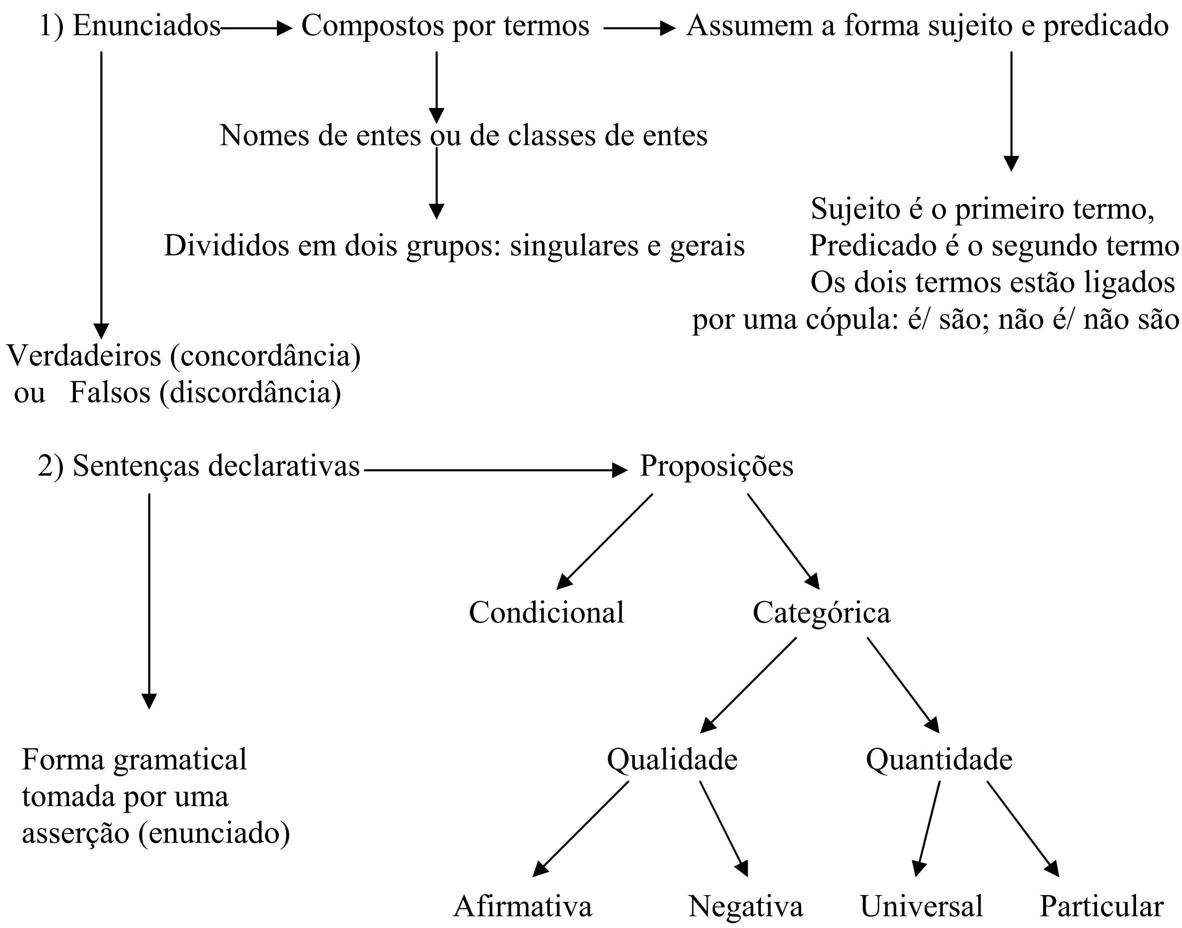
Diante de uma maior clarificação de nosso objeto de estudo, da caracterização preliminar do que é a Lógica e do que ela se ocupa, vejamos agora a apresentação do caminho percorrido pela Lógica ao longo dos tempos, ou seja, um pouco do que aconteceu desde o início até os tempos de hoje.

Para compreendermos a evolução da Lógica passaremos pelos seguintes pontos chaves: o exame das contribuições de Aristóteles, o aporte dado pelos estóicos e megáricos, os subsídios deixados pelos estudiosos do período escolástico e os resultados dos matemáticos dos séculos XIX e XX (a partir de quando a Lógica passou a ser associada à Matemática, especialmente à álgebra).

A origem da Lógica está associada à figura do filósofo grego Aristóteles (384-322 a.C.), pois ele foi o primeiro a desenvolver uma teoria lógica cuja preocupação fundamental era fazer um estudo sistemático dos tipos de argumentos válidos. Isto não quer dizer que não havia discussão sobre lógica anterior de sua existência sistemática no século IV a.C., já que, segundo Mortari (2001), uma certa preocupação com a questão da validade dos argumentos também é constatada por parte dos sofistas e de Platão. Porém, dizemos que foi a partir dos estudos sobre argumentos silogísticos de Aristóteles que a lógica tomou corpo enquanto ciência pela primeira vez.

De acordo com Hegenberg (1977), os estudos de Aristóteles referentes à Lógica foram caracterizados no *Órganon* que, por sua vez, apresentou a teoria silogística, reunindo uma análise das discussões comuns em seu tempo sobre o assunto.

O *Órganon* contém o cerne da Lógica Aristotélica, que podemos esquematizar da seguinte maneira:



Esquema 1 – Termos da Lógica Aristotélica

De fato, de acordo com o esquema acima percebemos que os enunciados são tratados como sentenças declarativas que, por sua vez, são chamadas de proposições compostas por termos (sujeito e predicado). Estas, por sua vez, são divididas em dois grupos, mas apenas o segundo, das proposições categóricas, é utilizado por Aristóteles para compor sua teoria silogística. Para isto, Aristóteles dividiu tais proposições em quatro grupos, quanto à qualidade e à quantidade.

Cada proposição categórica tratada por Aristóteles, possui, primeiro, um quantificador como **todo, nenhum** ou **algum**; uma cópula, como **é, são, não é ou não são** e; dois termos (sujeito e predicado). De acordo com Hegenberg (1977, p. 15), escolhendo as vogais das palavras *AfIrmO* e *nEgO*, estas proposições costumam ser enunciadas como segue:

A: Todo X é Y (universal afirmativa)

Ex: Todo cisne é branco.

E: Nenhum X é Y (universal negativa)

Ex: Nenhum cisne é branco

I: Algum X é Y (particular afirmativa)

Ex: Algum cisne é branco.

O: Algum X não é Y (particular negativa)

Ex: Algum cisne não é branco.

As **relações entre os termos de cada proposição** categórica mencionada por Aristóteles são ilustradas com um artifício pictórico de Venn, hoje conhecidos como **diagramas de Venn** – em homenagem ao matemático inglês John Venn (1834-1923), contemporâneo de George Boole. Tal artifício baseia-se na simples idéia de associar cada termo da proposição a uma região do plano. Mais precisamente ressaltamos que, nestes diagramas, subconjuntos vazios são sombreados, não-vazios são sinalizados por conter um elemento, digamos a, e os sobre os quais não se têm informações são deixados em branco. Assim, temos a ilustração 1:

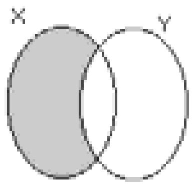
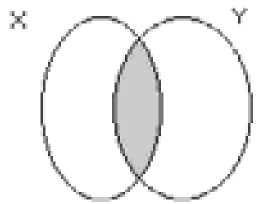
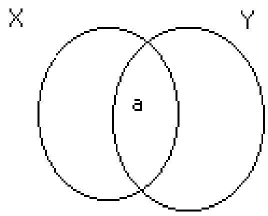
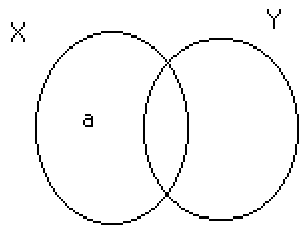
Proposição	Diagrama	Proposição	Diagrama
A		E	
I		O	

Ilustração 1 – Diagramas das proposições categóricas.
Fonte: Sousa (2005).

Já a **relação entre os tipos de proposições** é estabelecida pelo que se chama de quadro de oposições seguinte:

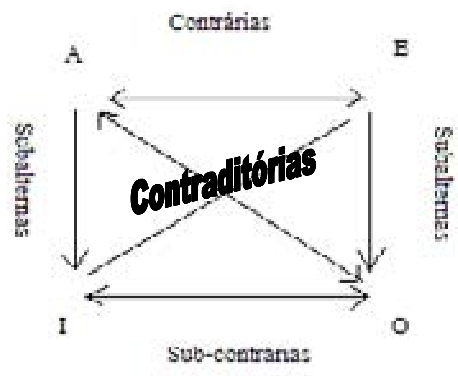


Ilustração 2 – Quadro de oposição 1.
Fonte: Sousa (2005).

Contraditórias são aquelas proposições em que se uma for falsa a outra é verdadeira e vice-versa; contrárias são as que não podem ser verdadeiras simultaneamente, porém podem ser falsas simultaneamente; sub-contrárias são aquelas que não podem ser falsas ao mesmo tempo, mas podem ser verdadeiras concomitantemente; e subalternas são aquelas nos sentido de que a universal acarreta a particular, do caso de veracidade, da mesma forma que particular acarreta geral, no caso de falsidade (ver também página 58).

Desta forma, a teoria lógica de Aristóteles se utiliza destes constituintes e compõe uma importante parte da lógica tradicional com o que ele chama de silogismo. Segundo Mortari (2001, p. 27), "silogismo é um tipo muito particular de argumento, tendo sempre duas premissas e, claro, uma conclusão."

Uma parte relevante da Lógica Aristotélica trata de operações conhecidas como **operações de conversão de proposições**. Vale salientar que são as operações de conversão que permitem obter, de duas premissas dadas, uma conclusão. Logo, são as operações de conversão que dão a funcionalidade do silogismo. São elas:

Conversão **simples**: conversão por sumária troca dos termos que compreendem o sujeito e o predicado.

Conversão por **limitação**: conversão de redução de um tipo de proposição para outro, por exemplo, da universal para particular.

Conversão por **negação**: o sujeito passa a ser o complementar do predicado, isto é, inverte os termos, negando-os.

Na concepção de Aristóteles o silogismo ainda é formado por **inferências**[29] e **três termos (maior - P, médio - M e menor - S)** os quais estão dispostos no silogismo de forma a compor **duas premissas e uma conclusão**. A primeira premissa é formada pelo termo maior e o termo médio, a segunda premissa é constituída pelo termo menor e o termo médio e, por fim, a conclusão é que composta pelo termo maior (predicado) e menor (sujeito). A ordenação de tais termos pode ser feita de quatro maneiras independentes e cuja disposição é chamada de **figuras do silogismo**, conforme segue (ver também página 37).

$$\begin{array}{cccc} M\quad P & P\quad M & M\quad S & P\quad M \\ \underline{S\quad M} & \underline{S\quad M} & \underline{M\quad S} & \underline{M\quad S} \\ S\quad P & S\quad P & S\quad P & S\quad P \\ \text{Fig. 1} & \text{Fig. 2} & \text{Fig.3} & \text{Fig. 4} \end{array}$$

Vejamos um exemplo ilustrativo de silogismo para o caso particular da Figura 1:

$$\begin{array}{ll} 1^{a} \text{ premissa} \rightarrow \text{(A) Todo } \underbrace{\text{cisne}}_{M} \text{ é } \underbrace{\text{branco}}_{P}. & M\quad P \\ 2^{a} \text{ premissa} \rightarrow \text{(I) Algum } \underbrace{\text{animal}}_{S} \text{ é } \underbrace{\text{cisne}}_{M}. & \underline{S\quad M} \\ \hline \text{Conclusão} \rightarrow \text{(I) Algum } \underbrace{\text{animal}}_{S} \text{ é } \underbrace{\text{branco}}_{P}. & S\quad P \end{array}$$

Aristóteles considerava apenas as três primeiras, classificando a primeira como **perfeita** e as duas outras como **imperfeitas** ou redutíveis à primeira.

Na concepção de Mortari (2001), Aristóteles buscou em sua teoria lógica caracterizar as formas de silogismo e determinar quais delas eram válidas e quais não eram. Entretanto, desta forma, sua teoria lógica deixou a desejar, pois restringiu os argumentos utilizáveis a silogismos cujas formas válidas são limitadas (apenas 19, mas Aristóteles falava em 14). Hegenberg (1977) vai mais adiante e esclarece que:

> [...] cada figura permite considerar seus *modos*, num total de 256 silogismos diversos. Deles, alguns são legítimos, no sentido de que sendo aceitas as premissas, a conclusão também precisa ser aceita; outros, porém, não são válidos. São 24 as formas válidas, 5 das quais normalmente são desprezadas, por serem conclusões "fracas", já fornecidas em outras das formas, sendo discutível a validade de uma das 19 restantes – de maneira que, afinal, 18 formas válidas se identificam de modo irretorquível . (HERENBERG, 1977, p. 18 – 19, grifo do autor)

[29] Atualmente, Hegenberg (1977, p. 18) concebe que "uma inferência consiste na afirmação de certa proposição, sua conclusão, com base em outra(s) proposição(ões), a(s) sua(s) premissa(s), dada(s) como verdadeira(s), ou tratada(s) como se o fosse(m)". Uma inferência trivial (tautológica) pode ser obtida quando simplesmente re-enunciamos uma premissa.

De fato, percebemos, que mesmo diante do sucesso de Aristóteles em classificar exaustivamente as formas de silogismo, seu trabalho ficou limitado à reduzida validade de suas formas silogísticas. Todavia, seu trabalho foi reconhecido e permaneceu como referência por muitos séculos até ser superado por outros mais atuais como veremos. De acordo com Sousa (2005) os modos silogísticos, tradicionalmente válidos, receberam nomes especiais usando palavras mnemônicas[30] desenvolvidas na Idade Média:

> Fig. 1 – bArbArA, cElArEnt, dArII, fErIO que prioris.
>
> Fig. 2 – cEsArE, cAmEstrEs, fEstIno, bArOkO, secundae.
>
> Fig. 3 – Tertia dArAptI, dIsAmIs, dAtIsI, fElAptOn, bOkArdO, fErIsO, habet: quarta insuper addit.
>
> Fig. 4 – brAmAntIp, cAmEnEs, dImArIs, fEsapO, frEsIsOn. (SOUSA, 2005, p. 173)

Nestas, ressaltamos que as vogais destacadas em maiúsculo concebem o tipo de proposição categórica caracterizada nas premissas e na conclusão, respectivamente.

Contudo, a Lógica Aristotélica não foi a única a ser desenvolvida em seu período. Outros se ocuparam com a Lógica, inclusive gregos, debatendo inúmeras idéias referentes ao assunto e desenvolvendo uma lógica diferente da de Aristóteles. Neste grupo, entram os megários, tendo Euclides de Mégara[31] (aproximadamente 435 a.C.-365 a.C) como fundador da escola megária; e a escola dos estóicos, cujo fundador foi Zenão (336 a.C.-204 a.C.), discípulo de Parmênides.

Mortari (2001) salienta que embora os dois sistemas lógicos se completem com o aristotélico, suas teorias foram tidas, na Grécia antiga, como rivais, provavelmente pelo fato dos estóicos e os aristotélicos terem uma certa inimizade. Além disso, Costa (1977) acrescenta que, a lógica da escola dos estóicos e megários apresenta-se de modo diferente da aristotélica, pois se liga ao Cálculo Proposicional, enquanto a de Aristóteles se refere ao Cálculo de Predicados.

---

[30] Segundo o Estudo legal.com ([200-]) as palavras mnemônicas estão relacionadas a um método de associação que compõe uma técnica de memorização desenvolvida na idade média.

[31] De acordo com Costa (1977), O Euclides de Mégara não deve ser confundido com Euclides de Alexandria (360 a.C.-295 a.C.), matemático platônico e autor dos **Elementos de Euclides**, enquanto o de Mégara era filósofo influenciado por Sócrates.

Como as obras dos estóicos foram esquecidas com o tempo, a Lógica Aristotélica ganhou força na Idade Média e ficou conhecida daí por diante. Por este motivo, Hegenberg (1977) afirma que os trabalhos destes antigos, como os estóicos e megáricos, permaneceram quase ignorados e subjugados pelas idéias de Aristóteles (que foram disseminadas).

A lógica desenvolvida pelos megáricos e estóicos é denominada atualmente de Lógica Proposicional. Nela foi introduzida uma nomenclatura nova desenvolvida um tanto que à revelia do trabalho de Aristóteles. Entretanto, Hegenberg (1977, p. 22) enfatiza que a impressão de que eles estavam fazendo algo inteiramente diverso não deve prevalecer. Para o referido autor, a principal diferença entre a Lógica Aristotélica e a dos estóicos e megáricos pode ser resumida da seguinte forma:

> a) enquanto a lógica aristotélica, em suas partes notáveis (silogística), se associa ao que hoje entendemos por lógica das classes (ou predicados), a da escola estóico-megárica é uma lógica das proposições.
> b) enquanto Aristóteles formula a maioria de seus resultados na forma de condicionais expressos na linguagem objeto, os estóicos e megáricos formulam regras de inferência e usam a metalinguagem para tanto.
> c) o *status* ontológico das fórmulas não está claramente determinado em Aristóteles: não se sabe se são seqüências de sinais, estruturas mentais ou estruturas objetivas. Nos trabalhos da *Stoa* há, ao contrário, uma elaborada teoria de sinais e os teoremas da lógica são enunciados de modo que sempre signifiquem algo pertencente ao domínio dos significados.

Neste sentido, Mortari (2001) acredita que as duas lógicas se completariam caso não houvesse a rivalidade entre seus pesquisadores e, se assim o fosse, poderiam ter sido reunidas numa só.

Segue a este período vigorante da origem da lógica e firmamento da Lógica Aristotélica, um período de inércia referente ao assunto. Durante um bom tempo, a Lógica permaneceu quase sem pesquisas, pois não se levantou problemas novos e se limitou ao aperfeiçoamento de certas técnicas já existentes, bem como ao aprimoramento da maneira de ensinar Lógica. Desta forma, este período foi chamado de período escolástico onde houve uma reunião dos traços aristotélicos e estóicos que culminaram na obra de Boécio (*circa* 480-524).

Já o período medieval se restringiu também ao melhoramento dos escritos de Aristóteles. Hegenberg (1977, p. 23) fala que quase nada se sabe dos séculos XIV e XV, pois para ele houve apenas uma "periodização razoável." Segundo o referido autor, pode-se identificar uma época de decadência (até Abelardo, 1079-1142), uma época de certa vitalidade (até fins do séc. XIII e marcada pela obra de Petrus Hispanus) e a época da sistematização (iniciada com Guilherme de Ockam falecido em 1349/50) que se prolonga até o fim da Idade Média (séc. XV).

Hegenberg (1977) salienta que a Lógica árabe e a judaica são praticamente desconhecidas, mas quanto à lógica hindu já se pode dizer que floresceu um pensamento bem diferente daquele comum no ocidente e que foi dividido em dois momentos: um pré-sistemático (séc. II ao séc. VIII) e um outro período chamado de ouro (entre os séc. XIV e XVI).

Contudo, o estudo da Lógica não se limitou aos medievais e prosseguiu sendo abordado em um período posterior chamado de período clássico. Este, por sua vez, tem suas bases fixadas nas contribuições de Aristóteles e é bem representado por uma espécie de manual obrigatório para todo estudante intitulado *Logique ou l´art de penser* (de autoria de P. Nicole e A. Arnaut), também conhecido como *Logique de Port Royal* (publicado em 1662, Paris). Tal obra teve grande influência em seu período, mas nem todos a tomaram como **bíblia** e tampouco seguiram-na a finco. Um exemplo, que se afasta desta influência, é Leibniz (1646- 1716) cujas idéias inovadoras foram as primeiras a desafiar a Lógica Aristotélica, mas que não vieram a se concretizar.

De fato, a ameaça das idéias leibnizianas ao poderio da Lógica Aristotélica não foi suficiente para abalar suas estruturas e, assim, ela continuou vigorante com toda sua força tanto que o filósofo Immanuel Kant (1724-1804) posteriormente veio a afirmar, no prefácio de seu livro **Crítica da razão pura** que:

> Reconhecidamente a lógica, desde tempos longínquos, seguiu o caminho seguro, pelo fato de, desde Aristóteles, não ter dado um passo atrás [sic.], a não ser que se leve em conta de aperfeiçoamento a abolição de algumas sutilezas desnecessárias ou a determinantes que tornaram mais nítido seu conteúdo, coisa que mais diz respeito à elegância que à ciência escorreita. Que não tenha até hoje progredido é também digno de nota, parecendo, por conseguinte, acabada e perfeita, tanto quanto se pode afigurar. Na verdade, se alguns contemporâneos pensaram alargá-la, [...] provém isso do seu desconhecimento da natureza peculiar desta ciência. (KANT, 2003, p. 25 – 26).

Em outras palavras, esta seria uma previsão errônea do filósofo ao inferir que a Lógica tinha sido inventada pronta por Aristóteles, e nada mais havia a fazer. Tanto que, posteriormente, mais precisamente em meados do século XIX esta situação começou a mudar.

No início deste capítulo mostramos como o século XIX foi marcado por transformações relevantes (principalmente na Inglaterra, coração da Revolução Industrial) que revolucionaram o modo de vida daquele período e que deixaram vestígios para os séculos posteriores. Ainda enfatizamos, previamente, que estas mudanças influenciaram a produção matemática da época tanto que este período é tido como a idade áurea desta ciência. Por este motivo, o referido centenário é tomado como referência quando estudamos a produção do conhecimento matemático.

Neste momento, acenamos, além disso, para a importância da Lógica do século XIX, especialmente a partir de sua segunda metade. Da mesma forma que a Inglaterra foi o coração das revoluções influentes na sociedade do século XIX, o imo do desenvolvimento da Lógica deste período reside neste país.

De modo geral, como mencionado anteriormente, os séculos XVII, XVIII e a primeira metade do século XIX foram pobres em contribuições para a Lógica. Seu rápido desenvolvimento só viria a dar-se após a metade final do século XIX, mediante os investimentos algébricos feitos por matemáticos ingleses.

Nérici (1978) chama atenção para a lógica inglesa dizendo que uma vertente da Logística[32] começou com o livro *An Outline of a New System of Logic*, de um inglês chamado George Bentham (1800 – 1884)[33]. Nesta obra as proposições categóricas são ampliadas, pela quantificação, de quatro (apenas qualitativamente) para oito.

Sabe-se que nesta época ocorreu a virada da matemática inglesa, especialmente pelo aprofundamento e valorização da Álgebra. A Lógica, aproveitando a ênfase nas questões algébricas e a reformulação da própria definição da Matemática, despertou um novo período em sua história, marcado pela busca da relação entre Lógica e Matemática.

Surge, então, a concretização do pensamento iniciado por Leibniz e a efetivação da quebra com os padrões aristotélicos através da criação do que é conhecido como **Lógica Matemática.** O marco inicial desta Lógica foi a publicação, em 1847, dos trabalhos de George Boole e Augustus de Morgan, intitulados respectivamente como *The Mathematical Analysis of Logic* e *Formal Logic*. Entretanto, a principal obra referente a origem da Lógica Matemática surgiu em 1854 e é conhecida como *An Investigation of the Laws of Thought*, de George Boole.

---

[32] Segundo Brugger (apud NÉRICI, 1978, p. 82), "Logística é aquela forma de lógica que se apresenta num sistema de sinais, e que permite operar com estes, de modo idêntico ao da matemática. [...] Em princípio, a Logística foi vislumbrada por Leibniz. [...] A Logística não impugnou nem tornou supérflua a Lógica tradicional, [...]. Contudo, devemos contar, entre suas vantagens, uma maior exatidão e uma integridade sistemática que permite aplicá-la a domínios da realidade, nos quais seria insuficiente a Lógica tradicional." Vale salientar que a Logística acima mencionada não é a lógica oposta à aritmética, como os gregos clássicos.

[33] Para mais detalhes biográficos, ver George ..., ([200-a]).

Na opinião de Nérici (1978, p. 84) a contribuição de Boole e De Morgan pode ser resumida como:

> a) Maior identidade entre Lógica e Matemática.
> b) Percepção de que a Lógica Clássica reduz seu campo operacional (campo de seus objetos), enquanto que a Matemática alcança o máximo de realização. Ou melhor, a Lógica Clássica limita a relação de conceitos e juízos a *comparações concretas*, ao passo que a Matemática proporciona, de uma só vez, a fórmula gera de todas as relações possíveis com os objetos, pelo que a Lógica Clássica, com o seu silogismo, passaria a ser "um mero caso particular da nova estrutura de raciocinar". (grifo do autor)

Vale salientar que o conteúdo dos livros de Boole e De Morgan será abordado com mais detalhes em capítulos posteriores e, por isto, neste momento, nos limitaremos à citação acima que, em suma, esclarece que tanto Boole quanto De Morgan buscaram a simbolização ou matematização da Lógica fazendo, numa linguagem simbólica e artificial, uma expansão do que Aristóteles havia começado. Também verificamos que o trecho acima alude à valorização da abstração (Matemática pura) rompendo as fronteiras do concreto (Matemática aplicada).

Realmente, vemos que o movimento da Matemática (especialmente a álgebra inglesa) implicou fortes mudanças no campo da Lógica ao enfrentar a tradição aristotélica em favor da criação da Lógica Matemática. O próprio Boole atribuiu grande valor à sua Álgebra, imaginando que poderia, com seu auxílio, provar as mais importantes leis lógicas. Entretanto, Hegenberg (1977, p. 26) diz "esta linha de ataque, algébrica, ficou por muito tempo negligenciada, readquirindo, em nossos dias, um vigor extraordinário."

Assim, seguindo nosso estudo sobre o caminho percorrido pela Lógica ao longo dos tempos, voltaremos nossa atenção à Lógica Moderna ressaltando a obra do filósofo e matemático alemão Gottlob Frege (1848 – 1925), mais precisamente, com a publicação de seu livro intitulado *Begriffschrift* ou, como é conhecida em português, **Conceitografia,** de 1879. Outro trabalho relevante de Frege foi publicado em 1884 recebendo o seguinte título *Grundlagen der Arithmetik.*

Enquanto os trabalhos de Boole e De Morgan marcaram as origens da Lógica Matemática, o de Frege e seus seguidores apontaram para as origens da Lógica Moderna. A diferença primordial entre estas Lógicas está no fato de que Frege não buscou comparar Lógica e Matemática, mas sim tentou situá-la em um contexto independente. Por este motivo, ele talvez tenha compreendido melhor a natureza da própria Lógica. Todavia, seria ingênuo afirmar que Frege abandonou completamente a Matemática ao desenvolver os estudos lógicos, já que a relevância dos trabalhos de Boole e De Morgan era e ainda é notória. O fato é que Frege, em seu trabalho, deu um tratamento diferente à ligação entre Lógica e Matemática. Em suma, Boole fez da Lógica um campo da Matemática e Frege quis reduzir a Matemática à Lógica.

De acordo com Mortari (2001), Frege havia notado que os matemáticos de sua época freqüentemente cometiam erros em suas demonstrações e, por isso, almejou sistematizar o raciocínio matemático encontrando uma caracterização precisa do que seria uma demonstração.

Desta forma, Frege fez duas grandes descobertas: primeiro, formalizou o Cálculo Sentencial e, segundo, distinguiu as premissas em que se baseiam um raciocínio e as regras de inferência (modo que se deve proceder para chegar a uma dada tese partindo de premissas dadas). Usou símbolos de maneira a tentar driblar as dificuldades oriundas do emprego da linguagem cotidiana, mas também se distanciou do caráter matemático dado por Boole neste processo, pois buscava construir um fundamento para a própria Matemática.

Em suma, Frege tencionava em sua obra que a aritmética poderia ser construída exclusivamente a partir de leis da lógica verificando até que ponto ela seria construída à custa de princípios do pensamento e sem recorrer a enunciados empíricos.

Os estudos de Frege influenciaram outros mais recentes como as pesquisas de B. Russell (1872-1970) e A. N. Whitehead (1861-1947) os quais desenvolveram um famoso trabalho marco do século XX e conhecido como os *Principia Mathematica.*

Os *Principia Mathematica* compreendem três volumes publicados entre 1910 e 1913 e mais uma nova edição, lançada entre 1925 e 1927. Nele os autores põem em prática as idéias de Frege, apresentando a Matemática como um sistema que se constrói a partir da Lógica. Bertrand Arthur William Russell[34] (1872-1970) e Alfred North Whitehead[35] (1861-1947) ainda tratam do simbolismo devido a G. Peano (matemático italiano, 1858-1932, cuja obra fundamental foi **Formulário matemático**, datada de 1894). Este trabalho tem sido tão influente que inúmeros outros vêm sendo desenvolvidos tomando como referência seu conteúdo e trazendo para a Lógica muitos resultados contribuintes por seu grande avanço.

Mas, seguindo nossa linha de pensamento de que as ciências não podem ser consideradas acabadas em qualquer momento e que, por isso, permanecem em constante

---

[34] Segundo Bertrand ..., ([200-]), Russel foi um conde que pertenceu a uma família inglesa de aristocratas. Contudo ficou mais conhecido como um dos mais importantes matemáticos, filósofos e lógicos do século XX. Também foi político liberal e ativista buscando popularizar a filosofia e sendo crítico influente das armas nucleares, bem como, da guerra do Vietename.

[35] De acordo com Irvine (2007), Whitehead, assim como Russell, foi matemático, lógico e filósofo britânico.

mudança, notamos que a Lógica continuou evoluindo após os *Principia Mathematica*. A exemplo desta inovação, temos o interesse pela diferença entre Lógica e Metalógica, nascida de forma embrionária nos *Principia*.

Hegenberg (1977) ressalta que a Metalógica foi examinada por formas diversas pelo matemáticos alemães David Hilbert[36] (1862-1862), Leopold Lowenheim[37] (1878-1957) e pelo matemático norueguês Thoralf Skolem [38] (1887-1963). Sua sistematização veio com a metodologia de Alfred Tarski[39] (1902-1983), a sintaxe do filósofo alemão Rudolf Carnap[40] (1891 – 1970) e alguns sistemas combinados resultados da Lógica e Metalógica, como os do matemático e lógico austríaco Kurt Gödel[41] (1906-1978).

Hoje em dia, em virtude da Lógica estar se desenvolvendo aceleradamente, correntes, especialidades e subespecialidades inúmeras surgem num "emaranhado o qual nos falta perspectiva adequada" (HEGENBERG, 1977, p. 28). Considera-se, inclusive, a Lógica não mais como uma parte da Filosofia e da Matemática, mas como uma ciência independente.

> Seguindo a linha de pensamento da Lógica nos dias de hoje, Mortari (2001) chama atenção para uma discussão atual que envolve a admissão de Lógicas Não-Clássicas. Para tanto, o referido autor caracteriza a Lógica Clássica, primeiramente, enfatizando que ela não é a teoria do silogismo de Aristóteles (considerada como Lógica Tradicional) e em seguida, admitindo que ela "compreende, basicamente, o cálculo de predicados de primeira ordem com identidade e símbolos funcionais." (MORTARI, 2001, p. 351). Além disso, Mortari (2001) ressalva que a Lógica Clássica obedece alguns princípios lógicos considerados fundamentais, tais como: princípio de identidade, princípio da não-contradição, princípio do terceiro excluído e princípio da bivalência. Além disso, assume os operadores (funções de verdade como $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$), admite que o universo de uma estrutura é sempre não-vazio (tem pelo menos um indivíduo) e aceita que as constantes individuais têm referência. Em suma, a Lógica Clássica é caracterizada por Mortari (2001, p. 353) como "uma relação de conseqüência, definida sintática e semanticamente" tendo "o conjunto resultante de teoremas/fórmulas válidas –'as leis lógicas' – é exatamente o mesmo em qualquer dos casos." Embora considere o vasto campo de aplicação da Lógica Clássica, Mortari (2001) salienta que há alguns **senões**. Afim de abarcá-los, surgem, em contra-partida, as Lógicas Não-Clássicas as quais podem ser divididas em dois grupos: as Lógicas Complementares e as Lógicas Alternativas. Esclarecendo, o primeiro deles se refere às Lógicas que buscam estender a Lógica Clássica mediante o acréscimo do que ficou faltando, como a introdução de novos operadores e a ampliação da linguagem. Deste modo, respeitam o que é posto pela Lógica Clássica, pois consideram que ela está correta dentro de seus limites. Já o segundo grupo se refere às Lógicas que possibilitam o trabalho com teorias inconsistentes, mas não triviais e paralelamente com sistemas incompatíveis entre si – isto é, ampliam ou violam a Lógica Clássica em determinados princípios básicos.

[36] Para mais detalhes, ver Connor e Robertson (1999).
[37] Para mais detalhes biográficos, ver Connor e Robertson (2006).
[38] Mais detalhes, consultar Connor e Robertson (2005a).
[39] Segundo Gómez (2006).
[40] Para mais detalhes biográficos, ver o site Philosophisches ..., ([200-]).
[41] Segundo Kurt ..., ([200-]), Gödel foi naturalizado americano.

Diante destes comentários a respeito da situação da Lógica atual, percebemos que a trajetória de desenvolvimento da Lógica é condizente com a opinião de Mortari (2001) acerca da incompletude de sua definição, pois ela se apresenta em constante mudança ao longo do tempo quebrando a idéia de sua fixidez. Percebe-se, pois, que o movimento de produção de uma Ciência é constante, liga-se aos acontecimentos históricos e, por isso, necessita um aprofundamento no tocante a cada um destes aspectos para ser compreendido melhor. É, pois, com o estudo de sua evolução que notamos um momento marcante no seu desenvolvimento (o século XIX) o qual condiz com um momento histórico importante para a sociedade e a Matemática.

O século XIX consiste na eclosão de convergência entre estas ciências que foi marcado pela evolução da álgebra, especialmente, na Inglaterra. Os ingleses também lideram a reformulação da Lógica que passou a ser identificada como Lógica Matemática (Boole e De Morgan) e que evoluiu para a Lógica Moderna (Frege).

Apresentamos brevemente a concepção de Lógica desde Aristóteles no século 4a.C. Agora veremos como vigorava esta concepção, tida como tradicional, em meados de sua ruptura e ligação com a Matemática, ou seja, durante a primeira metade do século XIX a partir da obra de um dos seus maiores representantes (da lógica tradicional) no período, Richard Wathely.

CAPÍTULO 3: A LÓGICA ARISTOTÉLICA VIGENTE NO SÉCULO XIX

Foto 3 – Whately.

Fonte: WHATELY (2008)

3 A LÓGICA ARISTOTÉLICA VIGENTE NO SÉCULO XIX

3.1 CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

Neste capítulo mostraremos que a lógica tradicional ainda vigorava durante o início do século XIX e que sua força emergia pela figura de lógicos aristotélicos como Richard Whately. A fim de compreendermos a Lógica por ele endossada, começamos apresentando seus dados biográficos e posteriormente seu sistema lógico. Para tanto, usaremos como fonte primordial o livro *Elements of Logic,* de Richard Whately (1875).

3.2 SOBRE RICHARD WHATELY

Foto 4 – Richard Whately.
Fonte: Acton…, (1993).

Embora devidamente reconhecido em sua época, Richard Whately teve sua história de vida pouco documentada e, por este motivo, há uma escassez de informações biográficas a seu respeito. Todavia, vale salientar que não vemos impedimento nesta precariedade em virtude de nosso enfoque principal ser o estudo de sua Lógica. Assim, nos limitaremos a apresentar sua personalidade, em linhas gerais, a fim de melhor compreendermos sua obra.

No dia 01 de fevereiro de 1787 nasceu, na capital inglesa (Londres), o nono filho do Reverendo Joseph Whately. A família Whately nomeou seu caçula de Richard.

Boa parte de sua infância foi passada na companhia de seu avô, o qual cultivava um jardim admirado pelo neto. Lá, um bom tempo deste jovem foi dedicado ao estudo de insetos. Ainda moço, por volta dos nove anos, Whately foi enviado por seus pais para estudar numa escola particular fora de Bristol[42] (ver Mapa 1). Nove anos mais tarde, em abril de 1805, iniciou sua vida acadêmica na Universidade de Oxford. Tutelado pelo bispo inglês Edward Copleston (1776-1849)[43], Whately instruiu-se nos rudimentos das ciências tornando-se teólogo, filósofo, lógico, pedagogo e reformador social.

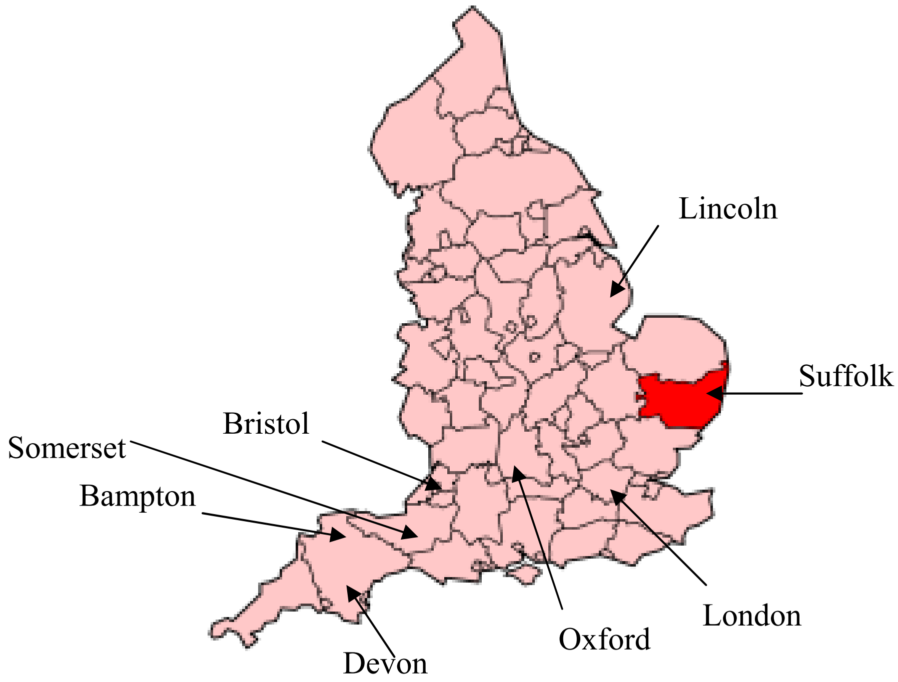
Por ser filho de um clérigo, é natural pensar que Whately buscasse obter ordens sacras. De fato, este foi o pensamento de Whately enquanto freqüentou a faculdade de Oriel, em Oxford (ver Mapa 1), entretanto, ele não se conteve em repassar tais ensinamentos, mas sim, dedicou-se a repensá-los. Whately tornou-se autor de um livro intitulado *Historic Doubts Relative to Napolean Bonaparte* (1819). Nesta obra, ele satirizou a Bíblia mediante a aplicação rigorosa da Lógica na prova da existência de milagres em contraposição à existência de Napoleão Bonaparte.

Em 1822, Whately foi eleito conferencista (preletor) da cidade de Bampton[44] (ver Mapa 1). Nesta função seus sermões pregaram sobre "*The Use and Abuse of Party Feeling in Religion.*" (BIOGRAPHY…, [200-]). *Bampton Lectures* da Universidade de Oxford foram fundados por um legado de John Bampton (1690-1751)[45], desde 1780 (BAMPTON ..., [200-]). Era uma série de conferências anuais as quais passaram a ser bienais por volta do século XIX. Tais conferências concentravam-se em tópicos teológicos cristãos e atraíram grande interesse e controvérsia. Eram tradicionalmente publicadas em forma de livro. Série semelhante de Conferências de Bampton na América foram determinadas na Universidade de Columbia.

Em agosto do ano seguinte, Whately mudou-se para Halesworth[46], em Suffolk[47] (ver Mapa 1). Entretanto, em 1825, por ter sido designado diretor do St. Alban´s Hall, retornou a

[42] Segundo a Wikipedia Cyclopaedia, Bristol localiza-se no sudoeste da Inglaterra a 185km ao oeste de Londres, entre Bath, Gloucester e Newport. (BRISTOL, [2007]).
[43] Mais detalhes ver Edward (1911).
[44] McBride, ([2004]) mostra que Bampton localiza-se no sudoeste da Inglaterra, mais precisamente na região de Devon e próximo a Somerset. (The Bampton ..., [200-]).
[45] De acordo com John ([2007]), John Bampton foi membro do Trinity College, Oxford e *cânon* de *Salisbury* (membro do clero cristão da catedral de Wiltshire, Inglaterra).
[46] Halesworth é um pequeno centro comercial localizado ao noroeste de Suffolk, Inglaterra. Tem um população por volta de 6000 habitantes. (HALESWORTH, [2007]).

Oxford (ver Mapa 1). Em decorrência do amplo reconhecimento de sua capacidade nas atividades de Oxford, Whately tornou-se professor de Economia Política, em 1829, ao suceder o economista inglês Nassau William Sênior (1790-1864)[48]. Enquanto tal se destacou no sistema de mercado livre insistindo que era a melhor filosofia econômica.



Mapa 1 – Inglaterra
Fonte: Suffolk ([200-])
University of Bristol (2006)

Dando continuidade a sua atividade intelectual, Whately (1875) explicitou suas convicções referentes à Lógica, já enveredadas no primeiro livro, publicando uma segunda obra que reuniu os elementos da Lógica Aristotélica necessários, segundo Whately, a uma

[47] Suffolk é um grande município histórico e moderno neometropolitano localizado no oeste da Inglaterra. Segundo Wikipedia, o município de Suffolk possui um dos maiores portos da Europa. (SUFFOLK, [200-]).
[48] Para mais detalhes ver Nassau (1911).

primeira abordagem do assunto (pelos estudantes). O referido trabalho foi intitulado *Elements of Logic* e publicado em 1826. Ressaltamos que o conteúdo da referida obra será apresentado com mais detalhes na seção posterior deste Capítulo, mas vale salientar que seu texto foi talvez o primeiro tratado inglês a fornecer uma defesa vigorosa da Lógica como um campo de estudo. Enfatizamos ainda que foi um trabalho extremamente influente em seu período, dominando o campo por quase duas décadas e sendo lido até mesmo hoje.

Os principais trabalhos de Whately podem assim ser listados:

> • *Historic Doubts Relative to Napoleon Bonaparte*, 1819;
> • *The Use and Abuse of Party Feeling in Matters of Religion*, 1822;
> • *Letters on the Church, By an Episcopalian,* 1826;
> • *Elements of Logic*, 1826;
> • *Elements of Rhetoric*, 1828;
> • *Introductory Lectures on Political Economy, Being part of a course delivered in the Easter term*, 1832;
> • *Easy Lessons on Money Matters for the Use of Young People*, 1837;
> • *Introductory Lessons on Morals and Christian Evidences*, 1857. (RICHARD …., [200-a])

Como vemos, a coletânea acima exprime com clareza os assuntos abordados por Whately em decorrência de suas convicções pessoais e formação acadêmica. Tratam, em suma, de religião, Lógica, economia, política e, especialmente, de suas relações.

Seu compromisso com questões religiosas, renderam a Whately o posto de Arcebispo de Dublin (ver Mapa 3), em 1831. Nesta posição, apoiou a remoção de inaptidões políticas sofridas por católicos ingleses e criou um programa de instrução religiosa como parte integrante do currículo nacional das escolas, tanto para crianças católicas quanto para protestantes. Entretanto, devido à intransigência religiosa da época, este esquema foi logo abandonado. (RICHARD…, [200-b]).

Whately permaneceu como arcebispo até sua morte, em 08 de outubro de 1863, na cidade de Dublin, Irlanda. (RICHARD…, [200-b]). Dentre os assuntos que mais interessavam a Whately, ao longo de sua existência, estavam: a revisão da lei criminal, a emancipação para as populações judias e a educação. De fato, sua trajetória de vida ressalta que estes interesses pessoais envolvem sempre questões sociais imbuídas pela educação e religião. Destacamos, neste cenário, o livro (listado na citação acima), publicado em 1837, relativo à economia ensinada para crianças.

3.3 OS *ELEMENTS OF LOGIC* (1875), DE RICHARD WHATELY

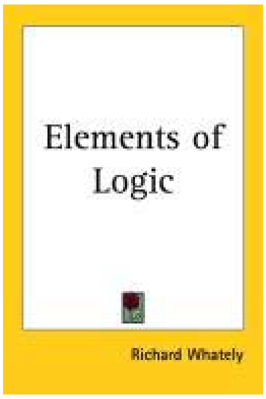


Ilustração 3 – Livro de Whately
Fonte: Whately (1875)

Como explanado na seção anterior, *Elements of Logic* é uma obra que propõe, essencialmente, ver a Lógica como um campo de estudo próprio. Para tanto, Whately (1875, p. vii) destaca no prefácio do referido trabalho que ele:

> […] to make up of manuscripts compiled in great measure from what I had read to me from him [Dr. Copeston] in conversations on the subject, or which he had read to me from his common-place book, interspersed with observations of my own. These manuscripts I had drawn up and was in the habit of employing, for the use of my own pupils.

A preocupação de ver a Lógica como um campo de estudo exigiu de Whately uma intensa investigação sobre o assunto, passando pela análise crítica do material existente, reconhecendo sua utilidade quando possível ou sua necessidade de reformulação quando preciso. A exemplo, o trecho acima explicita a contribuição advinda dos manuscritos do Dr. Copleston (Bispo de Llandaff), a ênfase no acréscimo das próprias contribuições de Whately e a utilidade do material reunido para o uso de seus próprios alunos.

Em defesa da Lógica como campo de estudo, Whately advoga seu lugar nas universidades, especialmente, citando as reformulações no estatuto da Universidade de Oxford, onde trabalhava. Neste sentido, Whately (1875, p. xii) ressalta:

> It was doubtless from a strong and deliberate conviction of the advantages, direct and indirect, accruing from an acquaintance with Logic, that the University of Oxford, when re-modelling their system, not only retained that branch of study, regardless of the clamours of many of the half-learned, but even assigned a prominent place to it, by making it an indispensable part of the Examination for the first Degree.

De fato, Whately aprecia a iniciativa da referida Universidade em introduzir a Lógica em seu sistema de ensino, convicto que traria vantagens diretas ou indiretas.

Posteriormente, enfatiza que a lógica é um campo rico de investigação que merece lugar proeminente entre os estudos propostos, em virtude de sua utilidade para os demais ramos. Whately (1875, p. xxi) argumenta que:

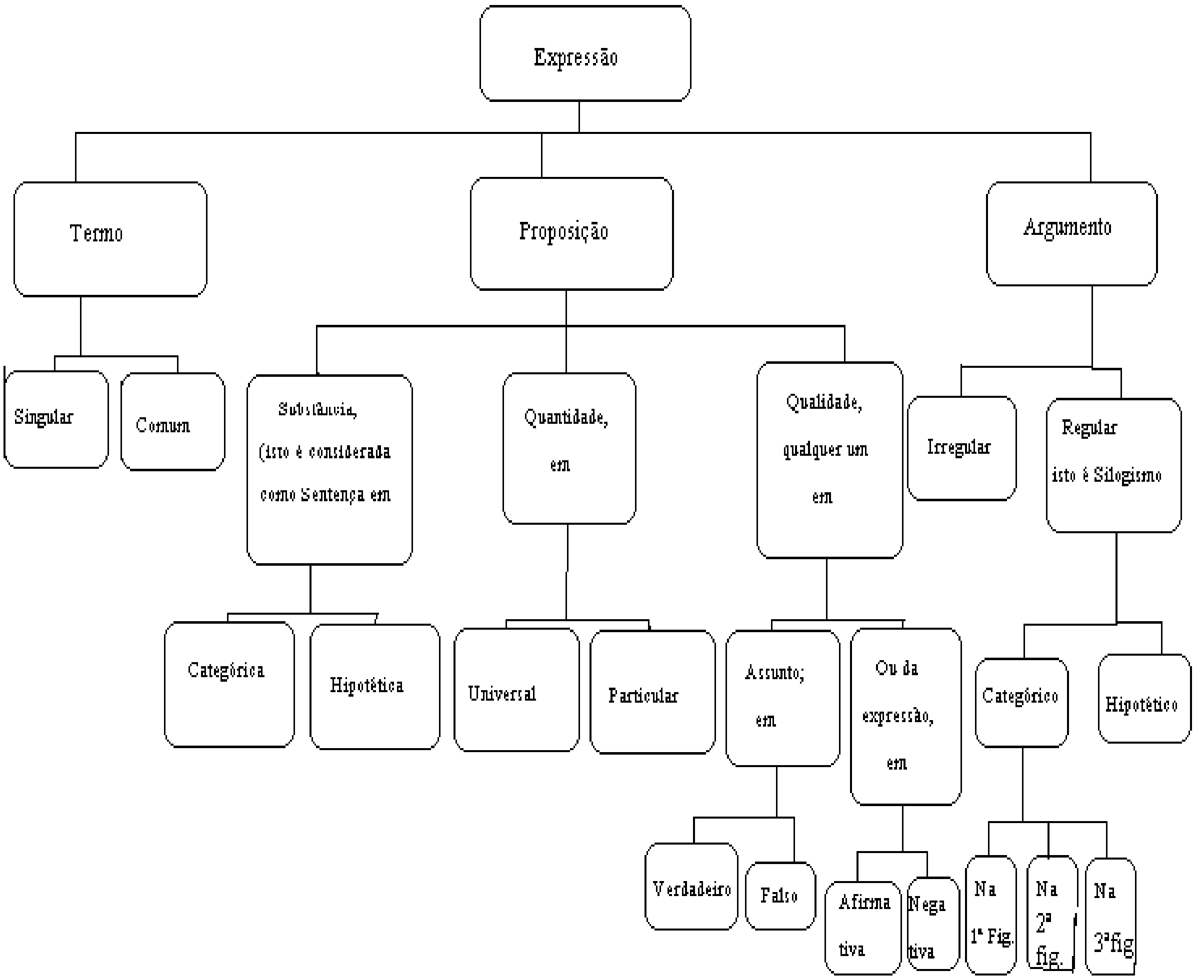
> A knowledge of logical rules will not indeed supply the want of other knowledge; nor was it ever proposed, by any one who really understood this science, to substitute it for any other; but it is no less true that no other can be substituted for this; that it is valuable in every branch of study; and that it enables us to use to the greatest advantage the knowledge we possess.

Não sobreleva a Lógica frente aos outros campos, mas destaca sua importância na potencialidade de compreensão dos mesmos.

Neste sentido, Whately preparou uma obra que aprecia a Lógica Aristotélica vigorante no início do século XIX, propondo fundamentalmente usá-la (pelos estudantes) nos cursos acadêmicos mediante sua relação com outros ramos, especialmente, religião e política.

Segundo Costa (1980), a Lógica tradicional é constituída basicamente pela codificação de Aristóteles, mas tem evoluído muito nos últimos anos. Por este mesmo motivo, vemos a figura de Whately como um representante da Lógica Aristotélica vigorante no início do século XIX. Seus *Elements of Logic* trazem a base essencial dos tratados de Aristóteles, entretanto, constituem mais particularmente uma Lógica escolástica vinculada à religião e à política, pois a obra traz os elementos lógicos tradicionalmente vigentes e os repassa ao ensino aplicado à solução de questões religiosas e políticas, posto que a própria história de vida de Whately o aponta como um religioso e lógico convicto.

O livro de Whately reuniu os elementos da Lógica Aristotélica necessários a uma primeira abordagem do assunto num esquema como o que segue:



Esquema 2 – Elementos da Lógica Aristotélica
Fonte: Whately (1875, p. 92)

[49] Apropriadamente, assim como Aristóteles, Whately omite a 4ª figura categórica em seu esquema. Para mais detalhes ver discussão da página 66a

O esquema aprecia uma árvore de divisão da Lógica, cujo pressuposto versa sobre a **expressão** da linguagem de qualquer operação mental. De tal modo, propõe fixar em nossa mente os termos técnicos da lógica tradicional os quais alvitramos explanar.

Neste sentido, Whately (1875) enfaixa esta Lógica em três partes: o estudo dos termos, o tratamento das proposições e o estudo dos argumentos.

3.3.1 O estudo dos termos

Esta primeira parte da Lógica refere-se à primeira operação da mente, "Simple-apprehension," mencionada por Whately (1875, p. 36). Na concepção do autor, esta operação consiste na ação ou condição da mente na qual recebe a noção de qualquer objeto que, quando expresso numa linguagem, é chamado de termo.

Segundo Whately (1875), um termo pode ser definido como o que é dito sobre uma coisa. Deste modo, pode consistir de uma palavra ou várias e, conseqüentemente, ser dividido em: singular ou comum.

A exemplo, temos que um termo singular está para um indivíduo, como César; enquanto que um termo comum está para qualquer número indefinido de indivíduos, como homem.

Acrescentamos que um termo pode ser dito distribuído ou não distribuído. Será distribuído se for tomado universalmente, estando para toda coisa que possa ser aplicado. Será não distribuído quando ele estiver apenas para uma porção de coisas a ele significada. Deste modo, Whately (1875, p. 28) observa que as palavras *all* e *every* marcam a distribuição dos termos, da mesma forma que a palavra *some* marca a sua não distribuição. Entretanto, ressalta que nem sempre estas palavras são expressas, sendo freqüentemente compreendidas pelo contexto e, portanto, suprimidas. Por exemplo, a expressão **comida é necessária** pode ser expressa como **alguma comida** ou ainda no caso da afirmação **o homem é mortal** entende-se **todo homem é mortal**.

No tratamento silogístico dado a um sistema lógico, além dos termos maior e menor (sujeito e predicado da conclusão), há também a importância de um termo, chamado de termo médio. A respeito deste, Whately (1875, p. 28) esclarece que

> […] the term of which, in one premiss, something is affirmed or denied, and to which, in the others premises, something else is reffered as contained in it, is called the ‘middle’ term in the syllogism, as standing *between* the other two (*viz.* the two terms in the conclusion), and being the medium of proof. (grifo do autor)

Sendo, pois, neste caso, o termo médio um instrumento de prova da conclusão.

Além disso, dizemos que os termos são os extremos ou limites da proposição que, por sua vez, é composta por dois termos (sujeito e predicado).

Exemplo: $\underbrace{\text{César}}_{\substack{\text{SUJEITO}\\ \text{uma palavra}}}$ é um $\underbrace{\text{bom homem}}_{\substack{\text{PREDICADO}\\ \text{várias palavras}}}$.

3.3.2 O tratamento das proposições

A segunda parte da Lógica faz referência à segunda operação da mente, “Judgment,” mencionada por Whately (1875, p. 36). Para o referido autor, esta operação propõe a comparação de duas ou mais noções as quais são os objetos de apreensão. Pronuncia ainda se elas concordam ou não umas com as outras.

De acordo com Whately (1875, p.41), uma proposição consiste num “Judgment expresssed in words,” sendo entendida como uma ação de julgamento expresso na linguagem e, deste modo, podendo ser uma expressão na qual uma coisa é dita (afirmada ou negada).

Quando se trata de silogismo, dizemos que ele é composto de três proposições, as duas primeiras chamadas de premissas e a última tida como conclusão.

Seguindo o esquema proposto por Whately, vemos que a proposição pode ser dividida em de acordo com: a substância (sentença), a quantidade e a qualidade.

Com referência a substância, as proposições podem ser: categóricas ou hipotéticas.

As categóricas são definidas por Whately (1875, p. 41) como “that the Predicate does, or does not, apply to the Subject.” Esclarecendo, temos que as proposições categóricas são as que relacionam conjuntos, podendo ainda ser subdivididas: em puras ou modais. A primeira afirma que o sujeito concorda ou não com o predicado. Já a segunda expressa em qual modo ela concorda, estabelecendo, assim, o grau de certeza da sentença, isto é, sua necessidade ou possibilidade.

Exemplo: Joãozinho passará de ano (pura).

Joãozinho possivelmente passará de ano (modal).

Já as sentenças hipotéticas fazem sua afirmação sobre uma condição, ou com uma alternativa. A condição é denotada, por exemplo, pela palavra **se**, assim como a alternativa pode ser marcada pela palavra **ou**.

Exemplo: Se Joãozinho estudou, ele deve ter tido uma boa nota (condicional)

Ou Joãozinho estudou ou ele não estudou (alternativa ou disjuntiva).

Com referência à quantidade, as proposições podem ser universais ou particulares.

Uma proposição universal é tomada quando o predicado é dito do todo do sujeito da proposição. Neste tipo, o sujeito é distribuído (entendido em seu sentido completo). Os sinais universais são **todo** e **nenhum.**

Exemplo: Todo brasileiro é festeiro.

Nenhum nordestino é preguiçoso.

Uma Proposição é assumida como particular quando o predicado é dito apenas de uma parte do sujeito que não é distribuído (tomado apenas uma parte de seu significado). As palavras **Alguns** e **Nem** são exemplos de sinal particular.

Exemplo: Alguns políticos são corruptos.

Nem todos os livros são tediosos.

Vale salientar que, quando a proposição não possui estes sinais ela é chamada de proposição indefinida. Esta muitas vezes é entendida como proposição universal.

Exemplo: Cachorros têm patas.

Pode ser assumido como: Todos os cachorros têm patas.

Whately (1875, p. 44) enfatiza que "it is evident that the *subject* is *distributed* in every *universal* proposition, and never in a *particular*: (that being the very difference between universal and particular propositions)." De modo que, a distribuição do sujeito da proposição encontra-se ligada a sua quantidade que, por sua vez, não interfere na distribuição do predicado da proposição. De fato, a este respeito Whately (1875, p. 29) menciona que "the distribuition or non-distribution of the *predicate* is entirely independent of the *quantity* of the proposition; nor are the signs 'all' and 'some' ever affixed to the predicate; because its distribution depends upon, and is indicated by, the '*quality*' of the proposition." Segue desta ressalva, aferida a quantidade e qualidade das proposições associadas à distribuição dos seus termos (sujeito e predicado, respectivamente), uma regra universal, para cada caso, a qual explanaremos a seguir.

Com referência à qualidade, as proposições se subdividem com relação à qualidade do assunto e à qualidade da expressão. No primeiro caso, podem ser verdadeiras ou falsas e, no segundo caso, sendo afirmativas ou negativas. Outra distinção apresentada por Whately (1875) para esta dicotomia da qualidade das proposições consiste em considerar o primeiro tipo como sendo de proposições **acidentais** (do ponto de vista de sua investigação sobre formas de expressão) enquanto que o segundo tipo consiste das **essenciais** (sob enfoque da sua pesquisa).

Destarte, acompanhando a Lógica Tradicional, Whately se detém à dicotomia residente na afirmação ou negação das proposições por considerá-la como diferença primordial com relação à qualidade das proposições.

Assim, as proposições afirmativas são consideradas verdadeiras quando alguma parte do predicado concorda com o sujeito. Enquanto que as negativas são avaliadas como verdadeiras se todo o predicado discorda com o sujeito.

Retomando as citações de Whately apresentadas na página anterior, com respeito à **distribuição dos termos** da proposição, observamos que a distribuição do **sujeito** associa-se a quantidade da proposição, analogamente, a distribuição do **predicado** é indicada pela sua qualidade. Completamos ainda com a informação de duas regras, tomadas por Whately (1875.p. 45), como universais para a distribuição dos termos de uma proposição. São elas:

1º) Todas as proposições universais distribuem o **sujeito**.
2º) Toda proposição **negativa** e, nenhuma afirmativa, distribui o predicado.

Whately (1875, p. 45) ressalva a possibilidade de acontecer que o todo do predicado em uma proposição afirmativa concorde com o sujeito, como no caso da proposição "todos os homens são animais racionais," a qual é igualmente verdade à "todos os animais racionais são os homens." Entretanto, para ele isto é meramente um acidente, e não é um caso incluído na forma de expressão que é considerada na Lógica.

Um ponto importante referente às **divisões das proposições** é destacado por Whately (1875, p. 43) da seguinte forma:

> As every proposition must be either *Affirmative* or *Negative,* and must also be either *universal* or *particular*, we reckon, in all, four kinds of pure categorical propositions, (i.e. considered as to their quantity and quality *both*) *viz*. Universal

> Affirmative, whose symbol (used for brevity) is *A*; Universal Negative, *E*; Particular Affirmative, *I*; Particular Negative, *O*.(grifo do autor)

Posto que toda proposição categórica se apresenta em uma das quatro formas acima apresentadas e representadas, por brevidade, pelas letras *A*, *E*, *I* e *O*, abordaremos agora algumas das manipulações possíveis em seu tratamento, a saber, falaremos de **proposições opostas**, bem como, da **conversão de proposições**.

Conforme a Lógica Tradicional, duas proposições são ditas **opostas** quando, tendo mesmo sujeito e predicado, elas diferem em quantidade, qualidade ou ambos. Whately (1875) explica que há quatro tipos de oposições para um par de proposições, são elas: contrárias, subcontrárias, subalternas e contraditórias.

Segue, um esquema apresentado por Whately (1875, p. 46) trazendo todas as relações de oposição permissíveis entre as quatro proposições categóricas.

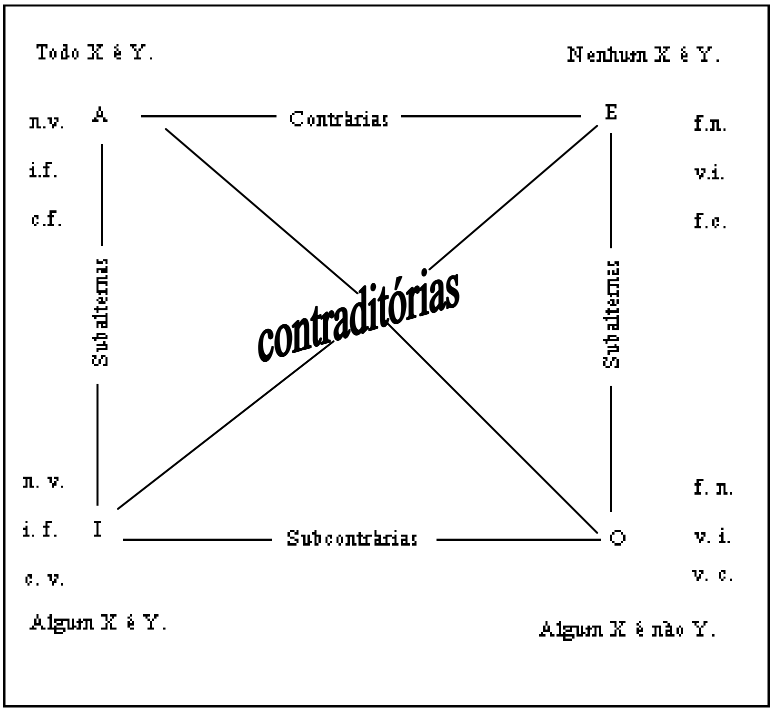


Ilustração 4 – Quadro de oposição 2

Fonte: Whately (1875, p. 46)

É também conhecido como quadro de oposição. Nele, as proposições são indicadas pelos símbolos *A*, *E*, *I* e *O*. Contudo, como vemos na Ilustração 4, Whately (1875) ainda acrescenta as letras *n*, *i*, *c,* que significam os tipos de matéria[50]: necessário (sempre verdade), impossível (sempre falso) e contingente (nem necessário nem impossível, isto é, nem sempre verdadeiro nem sempre falso). Adiciona ainda as inicias *v* e *f*, que atribuem a verdade ou falsidade de cada proposição respectivamente. Além disso, são indicados os quatro tipos de oposições possíveis.

A respeito da **oposição**, vale elucidar que:

i) **Contrárias** ocorrem quando ambas as proposições podem ser conjuntamente falsas, mas nunca ambas verdadeiras. Do quadro de oposição temos que o par de proposições universais, *A* e *E*, são as proposições contrárias.

ii) **Subcontrárias** quer dizer o inverso das contrárias, ou seja, ocorrem quando ambas as proposições podem ser verdadeiras, mas nunca ambas falsas. De fato, temos que o par de proposições particulares (inverso das universais) são *I* e *O*.

iii) **Subalternas** ocorrem quando a verdade da particular segue da verdade da universal e a falsidade da universal segue da falsidade da particular, donde deduzimos que as proposições opostamente subalternas diferem apenas em quantidade. Neste caso, o quadro de oposição apresenta as binárias *A* e *I*, ou *E* e *O*.

iv) **Contraditórias** ocorre quando uma é completamente oposta da outra, isto é, se uma dada proposição é verdadeira a outra é necessariamente falsa ou se admitimos que uma proposição é falsa, a outra obrigatoriamente é verdadeira. Aqui, as proposições categóricas que se enquadram neste tipo são *A* e *O* ou *E* e *I*. Esta oposição difere o par de proposições envolvido, tanto em quantidade quanto em qualidade.

Whately (1875, p. 48) destaca que "the rules of Opposition merely pronounce on the truth or falsity of each proposition, *given,* the 'matter'," para entendermos que a verdade ou falsidade de uma proposição deve depender do assunto (em questão), cuja determinação está fora do ramo da lógica.

Em suma, vimos que existem quatro tipos de proposições categóricas, as quais podem se opor mediante quatro tipos de oposições. Veremos agora que há três tipos de conversão das proposições.

Na concepção de Whately (1875, p. 48) "a proposition is Said to be *converted* when its Terms are *transposed;* i.e. when the Subject is made the Predicate, and the Predicate the Subject." De acordo com a lógica tradicional tem-se que esta conversão não deve ser

[50] Matéria (*matter*) é um termo técnico que indica o tipo de ligação real entre os termos da proposição, com respeito ao seu significado. Deste modo, é o sentido que determina a matéria, ou seja, a ligação entre os termos dado o seu significado.

entendida como um processo de raciocínio, mas sim, ser considerada apenas como o mesmo julgamento em outra forma.

Acrescentamos ainda que há algumas outras alterações possíveis e que fazem com que uma proposição seja convertida em outra. Notamos tais alterações possíveis na proposição a partir das diferenças entre os três tipos de conversão: Simples, Negação e Limitação.

i) **Conversão simples**: trata-se do tipo de conversão explicitada na última citação de Whately, ou seja, aquela em que os termos são apenas transpostos. Das proposições categóricas temos que *E* e *I* admitem conversão simples.

Exemplo: Nenhum estudante é ignorante. Converte-se em:

Nenhum ignorante é estudante.

ii) **Conversão por negação**: também conhecida como contraposição. Aquela que troca os termos e nega-os. Das proposições categóricas temos que *A* e *O* aceitam conversão por negação.

Exemplo: Todo pesquisador é um curioso. Convertida em:

Ele que não é um curioso é um não pesquisador. Ou ainda:

$$\underbrace{\text{Nenhum pesquisador}}_{\text{sujeito}} \text{ é } \underbrace{\text{um não curioso}}_{\text{predicado}}.$$

iii) **Conversão por limitação**: também chamada de conversão por acidente. Consiste naquela que limita a quantidade da proposição fazendo com que ela passe de universal para particular. Das proposições categóricas temos que *A* e *E* podem ser convertidas por limitação.

Exemplo: Todo aluno é estudioso. Convertida para:

Alguns alunos são estudiosos.

3.3.3 Argumento

O argumento é tomado por Whately (1875, p. 51) como a terceira operação da mente, ou seja, a ação de raciocinar. Para tanto, ele assegura que esta ação, expressa em palavras, pode seguir uma forma irregular ou se apresentar em um formato regular. Este último, segundo o referido autor, resume o tratamento da terceira parte da Lógica como sendo o estudo do silogismo. Portanto, como exposto pelo esquema de Whately (1875) e pela Lógica

Aristotélica, temos que os argumentos podem se apresentar em uma forma irregular ou em uma forma regular.

Vale salientar que a forma irregular é desconsiderada no estudo dos argumentos sob a ótica da Lógica Tradicional. Admite-se a existência desta forma, embora, em sua ocorrência, seja aconselhada uma adaptação à forma regular ou silogística. Ressaltamos que tal dificuldade é sanada pela Lógica Matemática ao assumir o tratamento de argumentos não silogísticos.

Com referência às formas regulares de argumento, enfatizamos que as mesmas tratam dos **silogismos** e, mais ainda, que Whately (1875, p. 17) entendeu o **silogismo** não como "um tipo de argumento, mas como uma forma peculiar de expressão na qual todo argumento pode ser declarado." Segundo Whately (1875, p. 5), Aristóteles considerou "the Syllogism as an engine for the investigation of nature," enfatizando a importância desta parte da Lógica para sua própria constituição.

Todo **argumento**, apresentado na forma regular, versa de duas partes: as **premissas** e a **conclusão**. Sob a ótica do **silogismo** dizemos que esta primeira parte dos argumentos, as **premissas,** é composta por **duas proposições**. Do mesmo modo, a segunda parte dos argumentos, a **conclusão**, constitui-se de **uma proposição**. Portanto, concluímos que um **silogismo** é composto por **três proposições**, cada uma das quais contendo dois termos (sujeito e predicado) e uma **copula** (é ou não é) que afirma ou nega o predicado.

Exemplo:

$$\underbrace{\left.\begin{array}{l}\text{Todo homem é mortal.}\\ \text{Sócrates é um homem.}\end{array}\right\}\text{premissas}\\ \text{Sócrates é mortal.}\}\text{conclusão}}_{\text{argumento}}$$

$$\underbrace{\underbrace{\left.\overbrace{\text{Todo homem}}^{\text{sujeito}}\ \overbrace{\text{é}}^{\text{copula}}\ \overbrace{\text{mortal.}}^{\text{predicado}}\right\}\text{proposição 1}\\ \text{Sócrates é um homem.}\}\text{proposição 2}\\ \text{Sócrates é mortal.}\}\text{proposição 3}}_{\text{argumento na forma regular}}}_{\text{silogismo}}$$

A fim de continuarmos elucidando o estudo dos argumentos e da própria Lógica Aristotélica faz-se necessária à apreciação a respeito da linguagem dentro do contexto da Lógica Tradicional. Nas palavras de Whately (1875, p. 37), "language is employed for various purposes." Além disso "Logic is *entirely conversant about language*" e ainda consiste na "art of employing language properly for the purpose of Reasoning." Para tanto, os sinais "are an indispensable *instrument* of all Reasoning." Por fim, Whately (1875, p. 36) argumenta que a "language affords the *signs* by which these operations of the mind are not only expressed, and communicated to others, but even, for the most part, carried on by ourselves." De fato, como já explanado, as três partes em que a Lógica foi dividida por Whately (1875, p. 36), – o estudo dos termos, o tratamento das proposições e o estudo dos argumentos – salientam o que ele chama de "three operations [or states] of the mind which are immediately concerned in Argument." A analogia aqui referida profere, ao estudo dos termos, a condição da mente de receber a noção de qualquer objeto semelhante a nossa percepção dos sentidos. Da mesma forma, Whately (1875) assimila o tratamento das proposições relacionado à ação mental de julgar dois objetos apreendidos na primeira operação e compará-los no sentido de identificar se eles concordam ou discordam uns com os outros. Por fim, a terceira operação mental, o raciocínio, está associada ao estudo dos argumentos à medida que consiste numa ação de proceder de certos julgamentos a outros fundados sobre os primeiros.

Admitindo que a Lógica pode ser completamente convertida numa linguagem simbólica, assumimos também que os argumentos podem ser expressos por símbolos, sem prejuízos. Deste modo, Whately (1875, p. 20) esclarece que:

> [...] the validity [or 'conclusiveness,' or 'soundness'] of the Argument does not at all depend on our understanding the meaning of them. For if we substitute for one of the things we are speaking about, some unmeaning Symbol, (such as a letter of the alphabet,) [sic.] which may stand for any thing that may be agreed on, the Reasoning remains the same.

Donde explicita não apenas a liberdade dos argumentos frente aos símbolos como também ressalva que a validade do raciocínio independe do sentido das palavras atribuídas aos seus respectivos símbolos, mas sim da forma de expressão em que eles se apresentam. Isto é, se a mesma forma de expressão for preservada, qualquer palavra pode ser substituída, por exemplo, pelas letras X, Y ou Z, e, neste caso, torna-se impossível admitir a verdade das premissas sem admitir também a veracidade da conclusão.

Voltando a burilar os Elementos de Lógica enfaixados no esquema apresentado por Whately, evoquemos agora a divisão da forma regular de argumentos, isto é, dos silogismos. Conforme o esquema citado, as formas de argumentos silogísticos podem ser de dois tipos: categóricos ou hipotéticos.

Antes de falarmos destes dois tipos de silogismos, abrimos um parêntese para explanarmos a respeito do que Whately (1875, p. 23) chama "the keystone of his whole logical system." Trata-se, pois, do *dictum de omni et nullo* ou *Dictum* de Aristóteles o qual, nas palavras de Whately (1875, p. 53): "whatever is predicated of a term distributed, whether affirmatively or negatively, may be predicated in like manner of every thing contained under it." Em outras palavras, tem-se que tudo que é predicado universalmente de qualquer classe de coisas pode ser predicado, da mesma maneira, de qualquer coisa compreendida nessa classe. Neste sentido, o *Dictum* de Aristóteles pode ser percebido, por um lado, como o princípio fundamental de um sistema lógico e, por outro, nada mais é do que uma explicação do que o é entendido pelo significado de uma . Assim sendo, o *Dictum* ressalva a impossibilidade de um silogismo ser composto por duas premissas negativas ou por duas premissas particulares, haja vista que, neste caso, não haveria conclusão válida, como podemos notar nos exemplos abaixo.

Ex: DUAS PREMISSAS NEGATIVAS

Nenhum cachorro é racional.	XY
Algum cachorro é não adestrado.	XZ
$\therefore$ Nada ou qualquer coisa se pode afirmar sobre a relação entre adestrado e racional.	ZY

Vejamos com o auxílio dos **diagramas de Venn**. Nestes diagramas, subclasses vazias são sombreadas, não-vazias são sinalizadas por conter um elemento, digamos a, e as sobre as quais não se têm informações são deixadas em branco. Além disso, dizemos que um argumento é válido quando todas as informações da conclusão já constam nas premissas.

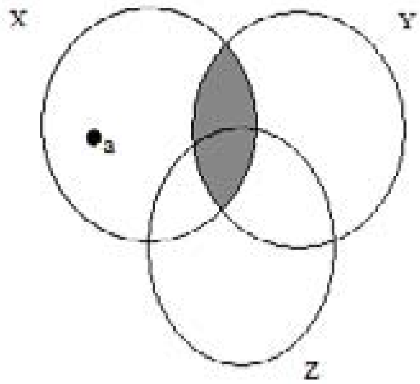
Seja X o conjunto dos cachorros, Y o conjunto dos racionais e Z o conjunto dos adestrados. Então:

De: Nenhum X é Y, temos

De: Algum X é não Z, temos: ·a

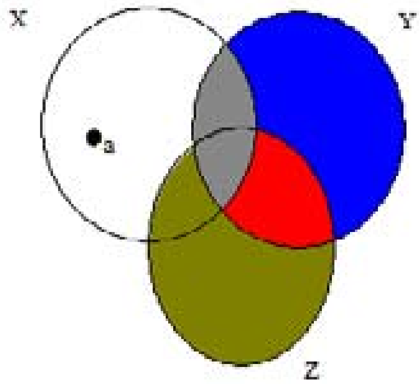
Portanto, obtemos o seguinte diagrama:

[51] Segundo a lógica aristotélica, a palavra Classe está associada à descrição. Deste modo, é usada quando há ou não várias coisas para as quais a descrição pode ser aplicada. Logo, dizemos que algo se refere a uma classe se ele possui ou não certos atributos. Freqüentemente, usa-se a expressão Classe de objetos.



Deste, podemos perceber que nada se pode afirmar sobre Z e Y em virtude das regiões que os relacionam estarem em branco. Mais paulatinamente falando, podemos notar que todas as possibilidades de conclusão se esgotam ao analisarmos cada caso. Para tanto, veja o mesmo diagrama refeito considerando tais casos.

Ilustração 5 – Diagrama 1



De: Nenhum X é Y, temos
De: Algum X é não Z, temos: ·a
Entretanto, para alguma conclusão deveríamos ter as seguintes possibilidades:
<u>Conclusão particular</u> acarretaria algum elemento na interseção de Z e Y, mas não há, pois vemos que a região está sombreada ou pintada.
<u>Conclusão universal</u> teríamos os casos:
Todo Y é Z
Todo Z é Y
Nenhum Z é Y ou Nenhum Y é Z

Ilustração 6 – Diagrama 1 refeito

Ex: DUAS PREMISSAS PARTICULARES

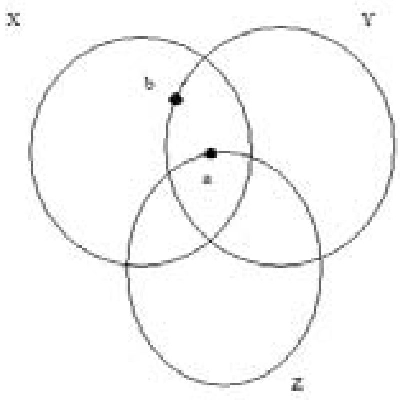
Algum atleta é vitorioso.	XY
Algum vitorioso é não esportista.	YZ
∴ Nada ou qualquer coisa se pode afirmar sobre a relação entre atleta e esportista.	XZ

Vejamos com o auxílio dos diagramas de Veen:

Seja X o conjunto dos atletas, Y o conjunto dos vitoriosos e Z o conjunto dos esportistas. Então:

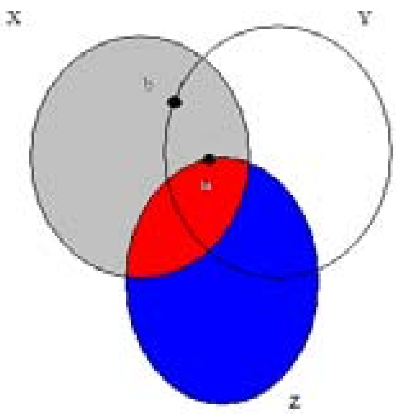
De: Algum X é Y, temos ·a
De: Algum X é não Z, temos: ·b

Portanto, obtemos o seguinte diagrama:



Similarmente ao exemplo anterior, podemos perceber que nada se pode afirmar sobre X e Z em virtude das regiões que os relacionam estarem em branco. Podemos notar mais claramente que todas as possibilidades de conclusão se esgotam ao analisarmos cada caso. Para tanto, veja o mesmo diagrama refeito considerando tais casos.

Ilustração 7 – Diagrama 2



De: Algum X é Y, temos ·a
De: Algum X é não Z, temos: ·b
Porém, para alguma conclusão deveríamos ter as seguintes possibilidades:
<u>Conclusão particular</u> deveria haver algum elemento na interseção de X e Z, mas não há, pois vemos que a região está sombreada ou pintada.
<u>Conclusão universal</u> deveríamos ter os casos:
Todo Y é Z
Todo Z é Y
Nenhum Z é Y ou Nenhum Y é Z

Ilustração 8 – Diagrama 2 refeito

Outro fato relevante a respeito do *Dictum* de Aristóteles é que ele consiste numa regra que pode ser aplicada a todos os argumentos, entretanto, não pode ser diretamente nem imediatamente aplicado para todos os silogismos categóricos puros.

Agora, voltemos nossa atenção para explanar cada um dos tipos de argumentos silogísticos (categóricos e hipotéticos).

Em primeiro lugar, de acordo com a linguagem comum, a palavra **categórico** se refere à categoria ou classe (também relacionada à conjuntos). Também pode ser entendida como algo que é claro, explícito ou peremptório. De tal modo que analogamente entendemos um silogismo categórico como aquele determinante para o tratamento das classes de objetos representadas ou expressas pelos termos.

Como para este tipo de silogismo o *Dictum* de Aristóteles nem sempre é aplicado facilmente. Whately (1875, p. 53 – 57) apresenta alguns axiomas a respeito do tratamento dos silogismos categóricos. São eles:

i) Todo silogismo tem três e apenas três termos (o termo médio e os extremos da conclusão).

ii) Todo silogismo tem três e apenas três proposições (a premissa maior, a premissa menor e a conclusão).

iii) Se o termo médio é ambíguo há, na realidade, dois termos médios. Neste caso, o termo médio é um termo equívoco usado em diferentes sentidos nas duas premissas, ou seja, tal termo é representado por uma palavra com dois significados distintos e, portanto, não há silogismo.

iv) Nenhum termo deve ser distribuído na conclusão sem ter sido distribuído em uma das premissas.

v) De duas premissas negativas categóricas nada se pode inferir.

vi) Se uma premissa for negativa, a conclusão deve ser negativa. Disto se deduz que para provar uma conclusão negativa deve-se ter uma das premissas negativas.

Por fim, concluímos que estes seis axiomas abarcam todos os silogismos categóricos e deles será evidente ainda duas ressalvas: primeiro, nada pode ser provado de duas premissas particulares, pois neste silogismo ou temos um termo médio não distribuído ou um processo ilícito; segundo, se uma premissa é particular, a conclusão deve ser particular.

Sabendo que um silogismo é composto por três proposições e que na Lógica Tradicional há quatro proposições categóricas, a Lógica Aristotélica traz um elemento importante para o tratamento dos silogismos categóricos. Este elemento é chamado de **Modo** e surge como um facilitador para a compreensão da disposição destas premissas (na forma silogística) de acordo com suas respectivas quantidades e qualidades (indicadas por suas respectivas letras).

Realmente, quando pensamos em todas as possibilidades destas disposições vemos que há um número significante de possibilidades:

$$\underbrace{4}_{\text{premissas maiores}} \times \underbrace{4}_{\text{premissas menores}} \times \underbrace{4}_{\text{conclusões}} = 64 \text{ alternativas.}$$

Contudo, este número não passa de mero cálculo aritmético já que, na prática, nem todos estes **Modos** são admissíveis na Lógica Tradicional. Restam, destes 64, apenas 11 modos válidos, os quais seguem:

A, A, A/ A, A, I/ A, E, E/ A, E, O/ A, I, I/ A, O, O/

E, A, E/ E, A, O/ E, I, O/ I, A, I/ O, A, O.

O que foi explanado sobre as proposições, sua oposição e conversão resume-se na forma silogística à forma das **Figuras silogísticas**. Estas, por sua vez, explicitam tudo apenas usando letras. Por este motivo, no esquema da página 52, o grupo dos silogismos categóricos é composto de três figuras. Whately (1875, p. 57) diz que "the Figure of a syllogism consists in the situation of the Middle-term with respect to the Extremes of the Conclusion," a saber:

a) 1ª figura é aquela em que o termo médio é o sujeito da premissa maior e o predicado da premissa menor.

b) 2ª figura consiste aquela onde o termo médio é o predicado de ambas as premissas.

c) 3ª figura trata da que o termo médio é sujeito de ambas as premissas.

Há ainda uma quarta figura, – o termo médio é predicado da premissa maior e sujeito da menor – mas é considerada desajeitada ou artificial.

Em suma, fazendo X ser o termo maior, Z ser o menor e Y o médio, **as figuras** versam o esquema:

1ª Figura	2ª Figura	3ª Figura	4ª Figura
Y, X,	X, Y,	Y, X	X, Y,
Z, Y,	Z, Y,	Y, Z,	Y, Z,
Z, X,	Z, X,	Z, X,	Z, X.

Almejando que a abordagem das **figuras silogísticas** seja clarificada, lembramos (como explanado no capítulo 2) que a Lógica Aristotélica traz a apreciação destas mediante algumas palavras mnemônicas desenvolvidas na Idade Média.

Explanando agora a respeito do segundo tipo de argumento silogístico, falemos do silogismo hipotético o qual é definido por Whately (1875, p. 67) com aquele em que "the *Reasoning* itself *rests* on the hypothesis." Pode ser de dois tipos: condicional ou disjuntivo.

a) Condicional

Um silogismo condicional contém duas proposições categóricas. A primeira é chamada de antecedente e a segunda de conseqüente. Vale salientar que toda proposição condicional pode ser considerada como uma universal afirmativa. Segue também que a verdade ou falsidade deste tipo de silogismo depende inteiramente do seu conseqüente, o qual segue do antecedente.

Exemplo: $\underbrace{\text{Se o dia é de sol,}}_{\text{antecedente}}$ $\underbrace{\text{eu irei a praia}}_{\text{conseqüente}}$.

Fez sol, então fui à praia.

Há três tipos de silogismos condicionais: construtivo, destrutivo e o *Dilemma*.

i) Construtivo é aquele em que se o antecedente é verdadeiro, o conseqüente deve ser verdadeiro.

Exemplo: Se ele estudou, então ele está apto a ser aprovado.

Mas, de fato ele estudou. Assim, de fato ele será aprovado.

ii) Destrutivo é aquele onde o conseqüente sendo negado, o antecedente pode ser negado, ou seja, infere-se o contraditório do antecedente.

De fato, notamos com isto que uma proposição condicional pode ser convertida por negação onde o contraditório do conseqüente é o antecedente e o contraditório do antecedente é assumido como um conseqüente.

Exemplo: Se ele estudou, então ele está apto a ser aprovado.

Mas ele não foi aprovado. Assim, ele não estudou.

ii) Dilemma é um tipo complexo de silogismo condicional, embora às vezes considerado disjuntivo. Entretanto, se assim o for Whately (1875) afirma que o *Dilemma* pode ser reduzido à forma condicional.

Exemplo: Se o dia é de sol, então eu irei à praia.

Se ele estudou, então ele está apto a ser aprovado.

Mas ou o dia é de sol ou ele estudou.

Então ou eu irei à praia ou ele está apto a ser aprovado.

b) *Disjuntivo*

Além do silogismo hipotético condicional há ainda o silogismo hipotético disjuntivo. Uma proposição disjuntiva é formada por duas ou mais ligadas pela conjunção *ou* a qual declara uma alternativa.

Exemplo: Ou fará sol ou eu não irei à praia.

Com relação aos silogismos hipotéticos disjuntivos deve ser observado ainda que se um ou mais membros for afirmado, o resto deve ser negado, donde dizemos que os membros deste silogismo são exclusivos. Além disto, acrescentamos que um silogismo disjuntivo pode facilmente ser reduzido a um condicional tomando como um antecedente o contraditório de um ou mais dos seus membros.

Ao encerrar a abordagem dos silogismos hipotéticos, Whately (1875, p. 71) traz que "Hypothetical [compound] Propositions, whether Condicional or Disjuntive, that they are always *affirmative*" e ainda "accordingly, the *contradiction* of any hypothetical proposition is *not* made by a *hypothetical.*"

Diante dos elementos paulatinamente enfaixados do esquema citado na página 52 ressaltamos que foram extraídos aqueles que julgamos necessários para a apresentação e comparação com a Lógica Matemática trazida nos capítulos posteriores e a respeito da qual nos propomos investigar as origens. Neste sentido, observamos que o critério de seleção atribuído esteve atrelado ao aspecto da proximidade com a Lógica Tradicional (Aristotélica). De fato, percebemos que os *Elements of Logic* de Whately endossam os elementos propostos por Aristóteles.

Destacamos neste cenário, a ênfase atribuída pela Lógica Aristotélica (mesmo vigente no século XIX) aos argumentos silogísticos. A respeito desta relevância Whately (1875, p.17) afirma que "An argument thus stated regularly and at full length is called a Syllogism; which therefore is evidently not a peculiar *kind of argument*, but only a peculiar *form* of expression, in which every argument may be stated." Unifica, deste modo, argumento e silogismo.

Entretanto, há argumentos que não são silogísticos e, para estes casos, os lógicos tradicionais **forçavam a barra** fazendo uma espécie de **malabares** para adaptá-los a sua forma limitada. Diante destas limitações surge, na segunda metade do século XIX, uma nova lógica cuja força reside no fato de transcender as fronteiras da Lógica Aristotélica trazendo a manipulação de argumentos que não são silogísticos. Reportamos aqui à Lógica Matemática que respeitava a Lógica Tradicional ao mesmo tempo em que conseguia se libertar do silogismo, admitindo argumentos de outros tipos e desenvolvendo seu sistema lógico de forma paralela. Posto estes atributos, ressalvamos que enquanto Aristóteles entendia a Lógica sob a estrutura da linguagem, Boole entendeu a mesma com relação à estrutura do pensamento matematizado.

CAPÍTULO 4: A LÓGICA DE AUGUSTUS DE MORGAN

Foto 5 – De Morgan

Fonte: Fonte: De Morgan ..., (2003)

4 A LÓGICA DE AUGUSTUS DE MORGAN

4.1 CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

Vimos nos capítulos anteriores que até o século XIX ainda era a Lógica Aristotélica que dava o sinal e ditava as regras. Percebemos que a sua tradição era mantida a partir de figuras como Richard Whately. Entretanto, em meados deste período surgiu uma nova visão sobre a Lógica vigente. Essa, por sua vez, foi concretizada pela matematização da lógica que, respeitando o paradigma aristotélico, buscou expandi-lo a partir de sua formalização. Isto se deu, especialmente em 1847, mediante os trabalhos de Augustus de Morgan e George Boole. Destinamos este capítulo para conhecermos o primeiro deles, Augustus de Morgan e seu trabalho.

4.2 DADOS BIOGRÁFICOS DE AUGUSTUS DE MORGAN

Foto 6 – Augustus de Morgan
Fonte: Grup of Logic, Language and Computation (2004).

Augustus de Morgan foi um relevante matemático e notável professor que nasceu na cidade de Madurai (Índia) no dia 27 de junho de 1806. Entretanto, em decorrência da rebelião Sepoy[51] , na Índia, sua família foi morar na Inglaterra. Seu pai, John de Morgan, foi um

[51] A referida rebelião foi uma guerra civil ocorrida entre 1857 e 1859 que marcou decisivamente o desenvolvimento histórico-colonial da Índia. Tratou-se de uma rebelião de soldados indianos de tropas britânicas, na maior sua parte, muçulmanos. Tudo indica que a causa principal da rebelião foi o desprezo inglês pelas concepções culturais locais. Assim, o motim é considerado por muitos na Ásia como expressão da primeira guerra de independência indiana, sobretudo, por motivos culturais. (BISPO; HÜLSKATH, 2006).

coronel da Companhia Oeste da Índia onde morreu quando De Morgan tinha dez anos de idade.

Ainda quando bebê, De Morgan perdeu a visão do olho direito e segundo Casas [200-], p. 1) "este infortunio probablemente condicionó la formación de su personalidad que, para algunos de sus compañeros, resultaba extravagante." Casas ([200-]) opina ainda que tal deficiência física também ocasionou infortúnias perseguições à De Morgan e o impediu de ser um aluno de destaque na escola secundária.

Sua fase escolar iniciou-se na Inglaterra com o auxílio de professores particulares. Neste período, suas habilidades matemáticas ainda não haviam sido notadas e, somente aos 14 anos, um amigo de sua família (ao ver De Morgan fazer um elaborado desenho, com régua e compasso, de uma figura euclidiana) o iniciou numa demonstração de Euclides.

Posteriormente, De Morgan foi introduzido na escola secundária do senhor Parsons (membro do Oriel College, Oxford), o qual apreciava mais os clássicos que a Matemática. Macfarlane (1916) ressalta que a mãe de De Morgan era um membro ardoroso da igreja e, por este motivo, almejou que seu filho seguisse uma carreira religiosa. Entretanto, De Morgan se mostrou arredio aos princípios da igreja e à possibilidade cogitada por sua mãe (embora respeitosamente).

Aos 16 anos, De Morgan entrou para o *Trinity College* (Cambridge) cuja graduação possibilitou a tutoria influente de figuras como George Peacock (1791-1858) e William Whewell (1794-1866). Do primeiro deles, De Morgan assumiu um espírito inovador quanto à Matemática. Já do segundo de seus tutores, De Morgan adquiriu um interesse pela renovação da Lógica. Como já referido no primeiro Capítulo, esta época foi conhecida como a Idade de Ouro da Matemática, especialmente, devido ao empenho de matemáticos como Peacock que se esforçaram em quebrar o isolamento da Matemática inglesa mediante a fundação da *Analytical* e a busca de uma formalização da Álgebra. Segundo Casas ([200-], p. 2), Peacock "no consiguó su objetivo pero estimuló a sus alunos, entre ellos a De Morgan, a avanzar en la

---

[53] A *Analytical Society* foi fundada, em 1812, por um grupo de estudantes de Cambridge liderado pelo professor Robert Woodhouse (1773-1827). Em 1803, Woodhouse havia publicado uma série de documentos que promoviam o cálculo de Leibniz e, impulsionados pelo trabalho deste condutor, os membros da *Analytical Society* nortearam os objetivos da sociedade a qual almejou, primordialmente, a promoção do uso do cálculo leibniziano ao invés de cálculo newtoniano. Dentre os sócios destacamos Charles Babbage (1791-1871), John Herschel (1792-1871) e George Peacock (1791-1858). Este último teve papel importante na primeira ação sólida da Sociedade que, só ocorreu em 1816, quando um livro texto de cálculo analítico foi traduzido do francês para o inglês e distribuído nas universidades britânicas. Tal ação permitiu a introdução dos símbolos de Leibniz e, conseqüentemente, um maior uso da nova notação nos exames e meio acadêmico. Segue a esta iniciativa a publicação de diversos livros com o mesmo intuito, divulgar o método e simbologia do cálculo leibniziano. Em 1819, a Sociedade foi renomeada como *Cambridge Philosophical Society* e, em 1832, tornou-se oficialmente conhecida como continua sendo até hoje. (BAMPTON ..., [200-]).

construcción de uma formalizaión del Álgebra.” Do mesmo modo, o contato com Whewell impulsionou De Morgan a trabalhar em direção a um momento marcante na história da lógica, o surgimento da Lógica Matemática, ou ao menos, a concretização de sua formulação.

Trinity College, Cambridge

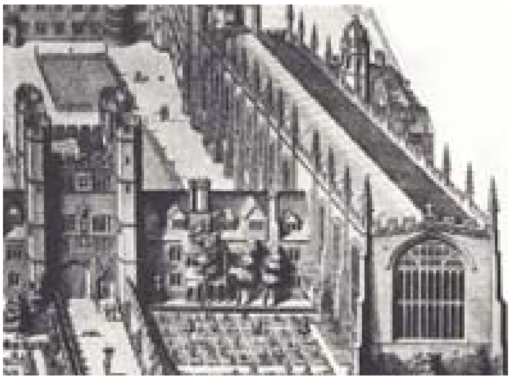


Foto 7 – *Trinity College*, Cambridge
Fonte: Astronomía (2005)

Foto 8 – *Trinity College*, Cambridge
Fonte: Cambridges ..., ([200_])

Na época de sua vida acadêmica no *Trinity College*, Macfarlane (1916) enfatiza um fato interessante. De Morgan passou a ser um proeminente freqüentador dos clubes musicais, tomando a flauta como recreação em detrimento ao desenvolvimento de outras atividades esportivas que eram dificultadas por sua deficiência visual, como testificado anteriormente. Curiosamente, este fato quase levou De Morgan a se enveredar no caminho das artes, haja vista que ele chegou a obter o grau de Bacharel em Artes, mas não culminou com o título de Máster de Artes em virtude de sua recusa ao submeter-se ao teste teológico[52]. A partir de então, traços de sua personalidade passam a ser melhor burilados e confundem-se com seu caminho profissional, como veremos a seguir.

Abandonando as artes e ainda muito jovem, aos 22 anos, De Morgan tornou-se professor de Matemática da recém inaugurada Universidade de Londres[53], tendo recusado anteriormente os convites das Universidades de Cambridge e Oxford as quais ainda se resguardavam quanto à neutralidade teológica e insistiam em aplicar o teste abnegado por De

[52] Macfarlane (1916) destaca que tal teste foi abolido, em 1875, nas Universidades de Oxford e Cambridge.
[53] Esta universidade é conhecida em inglês por *London University* e, embora tenha a mesma tradução, não deve ser confundida com a *University of London* que só foi fundada dez anos após a primeira. A este respeito, Macfarlane (1916, p. 22) afirma que “The London University was affiliated as a teaching college with the University of London, and its name was changed to University College. The University of London was not a success as an examining body; a teaching University was demanded,” atestando a relação entre as referidas universidades.

Morgan. Assim como George Boole (como veremos no próximo capítulo), De Morgan foi defensor da liberdade religiosa e não aceitava submeter-se ao exame religioso exigido pelas instituições citadas anteriormente, bem como este foi o motivo que o levou a interromper sua docência na Universidade de Londres com pedidos de demissão em decorrência das restrições acadêmicas impostas.

Foto 9 – *University London*
Fonte: University London ([200-])

A *London University* ou Universidade de Londres (como é conhecida em português) foi uma instituição fundada por um corpo de homens cujos pensamentos eram julgados liberais quanto à religião, porém, a relação entre os membros do conselho, os professores e estudantes parece não ter ficado bem estabelecida quanto a esta intenção. Conseqüentemente, a existência de confrontos inevitavelmente abalou a universidade. De fato, uma disputa surgida entre o professor de Anatomia e os estudantes, aliada à equivocada ação do Conselho, levou vários professores, encabeçados por De Morgan, a pedir demissão. Contudo, o infortúnio acidente (afogamento) a que o substituto da cadeira de Matemática foi acometido, aliada a reconhecida capacidade de De Morgan como professor, levou-o a retomar seu posto na Universidade de Londres.

Concomitante ao início de sua docência na Universidade de Londres, De Morgan também inaugurou sua produção matemática. Foi o produtor mais efetivo da Sociedade para Difusão do Conhecimento Útil[54] e chegou a publicar, além de alguns livros, cerca de 713

[54] A Sociedade para Difusão do Conhecimento Útil foi criada em 1826 por um comitê de pessoas eminentes e, especialmente, pelos mesmos reformadores, encabeçados pelo Lord Brougham (escocês conspícuo no campo da ciência e política), da Universidade de Londres. De acordo com a Wikipedia, esta organização tinha o intuito de fornecer informação a pessoas que não tinham acesso ao ensino formal e que, fundamentalmente, eram autodidatas (SULFFOK, [200-]). Deste modo, publicava textos, curtos e objetivos, que buscavam adaptar o conhecimento científico ao seu público alvo. Como veremos, similarmente, outras instituições (como o Instituto de Mecânica que contou com a participação de George Boole) tinham objetivo de caráter social semelhante.

artigos para a *Penny Cyclopedia*[55]. Por este motivo, foi considerado um incansável produtor. Dentre seus trabalhos de destaque, temos:

- *Elements of Arithmetic* (1830);
- *Induction (Mathematics)* (1838)
- *Formal Logic* (1847);
- *Trygonometry and double algebra* (1849);

O primeiro deles obteve bastante êxito e, por este motivo, logo teve sua primeira edição esgotada, sendo necessária a breve produção de uma segunda edição. O segundo trabalho tem sua relevância destacada por Connor, J.J. e Robertson, E. F. (2005b) ao afirmarem que trata-se de um artigo que trouxe a expressão **indução matemática** pela primeira vez[56]. Já a terceira obra é tida como a mais notável. Nela há a compilação das idéias lógicas de De Morgan, particularmente, abordando a sistematização da Lógica Simbólica e a inclusão do conceito de quantificação de predicados. Por fim, de acordo com Kneale, W. e Kneale, M. (1980), o quarto trabalho da lista supracitada merece ênfase, pois trouxe uma interpretação geométrica dos números complexos.

É interessante salientarmos que, sendo um escritor fecundo, De Morgan também estudou sobre História da Matemática, escreveu biografias (de Newton e Halley), produziu um dicionário que abarcou os matemáticos mais importantes do século XVII, estudou sobre Astronomia (desenvolvendo um almanaque onde apareciam todas as datas das fases da lua entre 2000 a.C. e 2000 d.C.) e ainda desenvolveu pesquisas referentes à Estatística e Probabilidade (abordando temas relacionados a seguros de vida). A respeito deste último, Casas ([200-]) ressalta que o bisavô de De Morgan, Jamos Dodson orientou a primeira companhia de seguros de vida a usar Matemática para calcular os débitos a pagar.

---

[55] Segundo a Penny Cyclopaedia ([2007]), assim como a *Penny Magazine*, a *Penny Cyclopaedia* era um multi-volume da Sociedade para Difusão do Conhecimento Útil publicada por Charles Knight e editada por George Long ao longo dos dez anos compreendidos entre 1833 e 1843.

[56] Boyer (1974, p. 365) ressalta que "em 1654 Pascal deu uma explanação eminentemente clara do método de indução matemática" cujos estudos também foram partilhados por Pierre de Fermat (1601-1665) ao investigar o desenvolvimento do raciocínio por recorrência. Entretanto, há indícios de tal método em uma obra anterior, de autoria de Francesco Maurolycus (1494-1575), embora, o nome, propriamente dito, **indução matemática** só surgiria, em 1838, no artigo citado de De Morgan.

De fato, constatamos que a produção de De Morgan aborda temas diversos como a Aritmética, a Análise e a Probabilidade, mas suas contribuições mais significantes consistem em avanços, especialmente, para a Álgebra e a Lógica. Neste sentido, De Morgan Industries Corporation (2003) traz que "he was a founder, with George Boole, of symbolic logic as it developed in England." Da mesma maneira, Casas ([200-]) observa que De Morgan é mais conhecido como criador das Leis de De Morgan as quais "sono alla base dei sistemi logici elettronici ed informatici."

Sobre a Lógica, assim como outros assuntos, De Morgan se correspondeu com vários cientistas. Curiosamente, dois deles tinham nomes quase idênticos e protagonizaram duas relações opostas quanto ao contato estabelecido com De Morgan. Tratam-se do Sir William Hamilton e Sir William Rowan Hamilton, ambos conhecidos como Hamilton. As diferenças entre ambos vão desde a sutileza do nome completo e do título de nobreza ao extremo das nacionalidades e das posições assumidas quanto às convicções pessoais e profissionais. Esclarecendo, temos que o primeiro dos Hamilton mencionado herdou o título de nobreza (baronete), era escocês, professor de Lógica e Metafísica da Universidade de Endiburgh, enquanto o segundo era irlandês, adquiriu o título de nobreza (cavaleiro) e foi professor de Astronomia da Universidade de Dublin. Além disso, o Hamilton escocês contribuiu para a doutrina lógica da quantificação do predicado, por outro lado, o segundo Hamilton, irlandês, colaborou com Matemática no campo dos Quatérnios da Álgebra Geométrica. Ambos os ramos foram de interesse de De Morgan; por este mesmo motivo, ele estabeleceu correspondência com os dois Hamilton, entretanto, apenas com o segundo as correspondências renderam bons frutos e duraram mais de vinte e quatro anos. Já com o Hamilton escocês elas finalizaram com o surgimento de uma polêmica controvérsia a respeito do plágio e a paternidade da doutrina da quantificação do predicado.

A mais notável das correspondências estabelecidas por De Morgan foi com George Boole (com quem estabeleceu estreita amizade). Entretanto, em virtude de recentemente ter sido acusado de plágio, De Morgan foi cauteloso em fazê-las. A exemplo, podemos destacar o fato de suas cartas com o amigo Boole terem sido interrompidas no momento em que ambos trabalhavam em seus livros pessoais sobre Lógica. Parte destas correspondências foi publicada na primeira biografia de De Morgan elaborada por Sofia Elizabeth Frend (filha de William Frend, amigo de De Morgan), sua esposa desde 1837. Mais recentemente o livro intitulado *The Boole-De Morgan correspondence* (1982) também traz correspondências relevantes entre estes personagens.

Além de Boole, citamos ainda o matemático Hamilton, a matemática Lady Ada Lovelace (1815-1852) – filha do Lord Byron e aluna de De Morgan – e o matemático Charles Babbage (1791-1871) como amigos de De Morgan. A respeito desta amizade surge um fato curioso. Segundo Casas ([200-]), Babbage, Ada Lovelace e De Morgan formaram uma sociedade de apostas de cavalos e usaram os conhecimentos que tinham de probabilidade para ganhar dinheiro em prol do financiamento da máquina de calcular de Babbage.

De Morgan sustentou uma nova visão de Álgebra demonstrando interesse pela renovação desta área, bem como, da Lógica. Como vimos, foi um escritor fecundo, defensor da tolerância religiosa e intelectual e ainda incentivador de jovens pesquisadores como George Boole. Este incentivo foi marcado, especialmente, a partir da criação de um jornal chamado *Cambridge Mathematical Journal* (editorado por De Morgan) que recebia a produção de diversos cientistas os quais muitas vezes eram estimulados e apoiados por De Morgan a partir de ricas correspondências.

Como exemplo de seu interesse pelo desenvolvimento da Mmatemática e de sua visão de vanguarda acerca desta ciência, De Morgan ajudou a fundar a *British Association for the Advancement of Science* (em 1831). Em 1866, foi eleito membro da *Royal Astronomical Society*. Neste mesmo período, seu filho, George Campbell De Morgan (1841-1867)[57], ajudou a instituir a Sociedade Matemática Londrina da qual De Morgan tornou-se o primeiro presidente e, em razão de suas habilidades como matemático, seu filho assumiu o posto de primeiro secretário.

A Sociedade Matemática Londrina foi fundada em 1865, entretanto, só adquiriu o caráter Real um século depois, em 1965. Teve seu encontro inaugural realizado na *University College* a qual passou, desde então, a sediar os demais encontros. Desde sua criação, almejou promover e expandir o conhecimento matemático. Deste modo, desenvolve atividades que compreendem várias publicações, encontros regulares, conferências e simpósios. Além disso, provê diversas pesquisas ligadas a diferentes grupos de universidades, garantindo, inclusive, suporte financeiro. Dentre as parcerias de destaque estão o Instituto de Física (que, desde 2004, publica *Compositio Mathematica* em nome da Fundação holandesa, proprietária do diário), a Academia Russa de Ciências e Turpion Ltd. (publica tratados de três periódicos russos: *Russian Mathematical Surveys*, *Izvestiya*: *Mathematics* e *Sbornik: Mathematics*) e ainda a Sociedade Matemática Americana (que publica a tradução inglesa dos Transactions of *Moscow Mathematical Society*). As tarefas da sociedade são coordenadas por oficiais e por

[57] Formado, com distinção, em matemática pela *University College* e *University of London*.

um Conselho, cujos componentes são eleitos, respectivamente, anualmente e bienalmente pelos membros da Sociedade. Aliás, sob este aspecto vale salientar que a Sociedade Matemática Londrina é formada por um número expressivo de membros. De acordo com London Mathematical Society ..., ([200-]), dos mais de 2500 matemáticos acadêmicos que trabalham no Reino Unido, aproximadamente 1500 são sócios da Sociedade Matemática Londrina e, além disso, há cerca de 1000 sócios adicionais ultramar.

A respeito desta Sociedade, salientamos ainda que a mesma foi palco de mais uma demonstração do rigor de De Morgan quanto a intolerância a qualquer objeção de neutralidade religiosa. Neste sentido, Macfarlane (1916, p. 22) retrata que:

> In the year 1866 the chair of mental philosophy, was recommended formally by the Senate to the Council; but in the Council there were some who objected to a Unitarian clergyman, and others who objected to theistic philosophy. A layman of the school of Bain and Spencer was appointed. De Morgan considered that the old Standard of religious neutrality had been hauled down, and forthwith resigned.

Curiosamente, além de pregar a liberdade religiosa, De Morgan também parece ter tido inclinação ao Unitarismo[58] (assim como Boole) o que seria mais uma razão para o pedido de demissão. A exemplo desta peculiaridade pessoal, outra particularidade de sua personalidade levou De Morgan a nunca ser membro da *Royal Society*. Isto porque, o mesmo acreditava que sua deficiência física instituía uma barreira a pesquisas de caráter observatório e experimental e, assim, o que não lhe propiciava nenhuma simpatia com os filósofos físicos da *Royal Society*. Devido ao mesmo motivo ele também recusou o grau honorário ofertado pela Universidade de Edinburgh.

Após dois anos do resigno de De Morgan ao posto na *University College*, seu filho faleceu e infelizmente, logo em seguida, sua filha também veio a óbito. Por fim, no dia 18 de março de 1871, segue-se fatalmente a natureza humana o falecimento do pai, De Morgan, que aos 65 anos, doou em seu testamento mais de 3000 livros de sua biblioteca para a Universidade de Londres. Além disso, diante do exposto, enfatizamos ainda que ele deixou uma gama densa de contribuições não só para a Matemática, como para a ciência em geral e para a humanidade.

---

[58] A terminologia Unitarismo deriva da doutrina central desta religião que tem como única personalidade divina o Deus Pai, em contraste com a concepção da Santíssima Trindade. Surgiu na Inglaterra durante os séculos XVI e XVII, tendo como fundador John Biddle. Na ocasião, teve como maior característica à forma de pensar que via Jesus Cristo puramente como uma figura humana. No início do século XIX, o *Unitarian Christianity* tornou-se uma religião bíblica aceitando milagres e tornando-se uma religião espiritual. (SOUSA, 2005).

4.3 O SISTEMA LÓGICO CONTIDO NO *FORMAL LOGIC* DE AUGUSTUS DE MORGAN (1847)

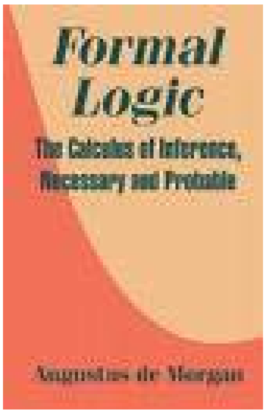


Ilustração 9 – Livro *Formal Logic*

Como vimos, o assunto, **Lógica**, floresce inicialmente para De Morgan por influência do professor (do *Trinity*), filósofo e historiador inglês William Whewell[59] (1794-1866) e, embora já tenha sido abordado nas correspondências com Boole, afirma-se enquanto sistema lógico defendido por De Morgan a partir do livro *Formal Logic* (1847). Este, por sua vez, é considerado por Macfarlane (1916) como um trabalho relevante primordialmente pelo fato de trazer o desenvolvimento do silogismo numericamente definido.

Esclarecendo, Macfarlane (1916, p. 29) resume a idéia do sistema lógico contido no *Formal Logic* (1847) da seguinte forma:

> The followers of Aritotle say and say truly that from two particular propositions such as *Some M´s are A´s,* and *Some M´s are B´s* nothing follows of necessity about the relation of the *A´s* and *B´s*. But they go further and say in order that any relation about the *A´s* and *B´s* may follow of necessity, the middle term must be taken universally in one of the premises. De Morgan pointed out that from *Most M´s are A´s* and *Most M´s are B´s* it follows of necessity that some *A´s* are *B´s* and he formulated the numerically definite syllogism which puts this principle in exact quantitative form.

De fato, as palavras de Macfarlane (1916) apontam para a percepção de que o sistema de De Morgan é válido no modo aristotélico e ainda ampliado, especialmente, quanto a quantificação dos termos. Veremos mais adiante que este foi o **carro chefe** da Lógica de De Morgan.

---

[59] Para mais detalhes, ver Snyder (2006).

Falando da estrutura do *Formal Logic* (1847) temos que De Morgan preparou-o inicialmente com um capítulo introdutório intitulado *First Notions*. Neste primeiro capítulo há uma espécie de iniciação do leitor na Lógica Aristotélica a fim de que, ao emergir de sua leitura, o mesmo esteja preparado para enxergar suas novas idéias, isto é, esteja, neste ponto, apto a assimilar as inovações propostas por De Morgan. Ressalta ainda que todo o conteúdo desta primeira parte da obra é uma compilação (com pequenas alterações) do tratado *First Notions of Logic (preparatory to the study of Goeometry)*, publicado 1829 e de autoria de De Morgan. Como a essência da Lógica Aristotélica já foi abordada em nosso capítulo anterior, não nos delongaremos na apresentação destes aspectos.

Em seguida, no segundo capítulo, De Morgan (2003, p. 26) parte para a preparação de sua inovação definindo a Lógica como sendo "[...] derived from a Greek word (*λόγος*) which signifies communication of thought, usually by speech." Desta forma, De Morgan deixa claro que seu trabalho abordará uma Lógica que trata do estudo da comunicação das ações mentais a qual se manifestará pela conexão entre pensamento e linguagem. Para tanto, segue abordando seu posicionamento com respeito à mente, a uniformidade dos seus processos, aliada à existência de coisas externas à sua percepção. Neste sentido, De Morgan considera que todas as coisas sob a terra possuem o poder de pensar acompanhado pelo efeito de objetos externos, de tal modo que o pensamento é entendido como toda ação mental inerente aos terrestres e sujeita ao estímulo externo do meio. Mesmo assim, diante destas discusses, De Morgan (2003, p. 27) salienta que "the purpose of the present treatise is only the examination of some of the manifestations of thinking power in their relation to the language in which are expressed" sem estar relacionado com a Metafísica.

A partir de então, o segundo capítulo se delonga a respeito da noção de objeto, idéia e nome, bem como suas relações intimamente ligadas ao *matter* (explanado no nosso capítulo anterior). Deste modo, De Morgan (2003, p. 31) diz que "an object communicates an idea: but it does not follow that every idea is communicated by an object," ou seja, um objeto seria uma coisa externa que aciona a nossa percepção mental com respeito a determinada idéia sobre algo. Entretanto, além da mente poder criar idéias de várias maneiras, ela também pode derivar (por combinações que não são achadas na existência externa) coleções novas de idéias. Por exemplo, um coelho visto por uma criança é – a sua referência quando sua professora pede para desenhar este animal em sua atividade – e continuará sendo sua noção deste elemento até que seja visto outro. Seguindo este raciocínio, De Morgan (2003, p. 34) afirma que "connected with ideas are the *names* given them. […] As it is, we give names to our ideas, meaning by a name not merely a single word, but any collection or words which conveys to one mind the idea in another." Daí deriva sua intenção primordial do trabalho, estudar as ações mentais através da linguagem. Neste sentido, é o nome que faz esta ligação ao representar os objetos acionados pelas ações mentais, sendo usado tanto para os objetos que produzem uma idéia quanto para as idéias que são produzidas. Portanto, todo **nome** tem uma referência a uma idéia, afirmativa ou negativa.

Neste mesmo capítulo, De Morgan (2003, p. 37) ainda acrescenta que "for every name which has a positive signification, another which merely implies all other things." Isto se dá através do prefixo *not* que denotará, desse modo, os nomes contrários ou contraditórios, por exemplo, cachorro e não-cachorro (aos quais serão atribuídos símbolos específicos para formalização da Lógica).

Mais concretamente, toda discussão explanada até agora, nesta parte do livro, tem como objetivo culminar na formação de sua simbologia. Assim, com respeito à relação das idéias apresentadas e à Lógica, De Morgan (2003, p. 38 – 39) afirma que "names may be represented by the letters of the alphabet: thus A, B, [...] The contraries may be represented by not-A, not-B, &c., but I shall usually prefer to denote them by small letter *a, b,* &c." Ainda, "A class of objects has a sub-class contained within it, the individuals of which are distinguished from all others of the class by something common to them and them only." Portanto, De Morgan apresenta a existência e notação de uma classe atrelada a do seu complemento em um dado universo.

Outras afirmações, apresentadas no segundo capítulo do *Formal Logic*, intrínsecas à construção da Lógica de De Morgan (2003, p. 42) são "the words *is* and *is not*, which imply the agreement or disagreement of two ideas, must exist, explicity or implicity, in every assertion" e ainda "in all assertions, however, it is to be noted, once for all, that *formal logic*, the object of this treatise, deals with *names* and not with either the *ideas* or *things* to which these names belongs." Daí a justificativa do título deste capítulo do trabalho de De Morgan (1847) – *On Objects, Ideas, and Names* – e de toda explanação feita até agora.

Mais especialmente, De Morgan (2003, p. 43) salienta que sua Lógica se preocupa em estudar as propriedades de uma dada proposição independente do que A ou B (seus termos) significam, assim "A and B, diversted of all specific meaning, are really names as names, independently of things." Deste modo, inferir uma conclusão é construir uma declaração do que tem sido concluído, ou seja, dar uma interpretação ao resultado obtido da análise da relação entre as premissas. Salientamos aqui um ponto em comum com o trabalho de Boole, haja vista que este pensamento, com relação à manipulação dos símbolos na lógica de De

Morgan, condiz as idéias inerentes ao formalismo de Boole que, como veremos, também defendia o trabalho com os símbolos sem estar atrelado ao significado dos mesmos, deixando a interpretação apenas para o final, quando todas as operações já haviam sido realizadas. Exemplos para tais situações podem ser notados quando abordarmos os silogismos dos mesmos.

Finaliza o segundo capítulo com o que ele chama de "humble position of the logic treated in this work" aludindo, desta forma, a relação das regras da Lógica com as humildes leis da Aritmética e suas aplicações. Em outras palavras, De Morgan quer dizer que trabalhar com as regras da Lógica é tão simples quanto trabalhar com as regras da Aritmética (DE MORGAN, 2003, p. viii). Contudo, nesta parte do *Formal Logic*, De Morgan apenas assena para esta intenção, mas não chega a formalizar nenhuma relação entre Matemática e Lógica.

Rumo a formalização da Lógica, o terceiro capítulo do *Formal Logic* chama-se *On the abstract Form of the Proposition.* Nele, De Morgan além de continuar defendendo a separação da Lógica da Metafísica (como já mencionado no capítulo anterior) também dá continuidade à formação da simbologia de seu sistema mediante a introdução da abstração do conceito de proposição.

Para tanto, no referido capítulo, De Morgan (2003, p. 47) reconhece que "writers on logic, from Aristotle downwards, have made a large and important step in substituting for specific names, with all their suggestions about them, the mere letters of alphabet, A, B, C, &c.," como podemos perceber no capítulo anterior através da Lógica de Whately. Entretanto, um melhoramento a este importante passo rumo a formalização da Lógica pode ser prolongado ao atentar para alguns detalhes destes símbolos gerais (letras). A saber, qualquer uma destas letras, por exemplo, A, é um símbolo que pode representar um nome, objeto ou idéia que contém muitos ou poucos elementos, enumeráveis ou não. Neste sentido, De Morgan (2003) **atrela o uso dos símbolos à quantificação dos mesmos**. Assim, o primeiro ponto de diferenciação da **nova** Lógica defendida por De Morgan (2003, p. 48) concretiza-se nas seguintes palavras "I shall take particular care to use numerical language, as distinguished from magnitudinal, throughout this work, introducing of course, the plurals Xs, Ys, Zs, &c." as quais revelam a primeira ligação, embora bastante sucinta, com a Matemática.

Na seqüência, o conteúdo essencial do próximo capítulo (quarto) do *Formal Logic* também aborda as proposições (introduzidas no capítulo anterior). Além disso, De Morgan (2003) resume a simbologia explanada até então, falando mais concretamente da definição de uma proposição como sendo uma declaração de concordância ou discordância entre dois nomes. Assim, novamente aborda o uso formal dos nomes[60]. Antes, porém, de destacar os demais pontos de relevância deste capítulo da obra, De Morgan (2003, p. 55) esclarece que "the universe of the proposition is the whole range of possible names" cujo símbolo pode ser representado pela letra U.

Para a construção da abordagem proposta neste momento De Morgan (2003, p. 55) diz: "*contrary* names, with reference to any one universe, are those which cannot both apply at once, but one or other of which always applies [...] Names which are contraries in one universe, are not necessarily so in a larger one." Simbolicamente, seja uma letra maiúscula o símbolo representante de um nome e sua respectiva letra minúscula o símbolo adotado para seu nome contrário. Vejamos o exemplo:

Universo: Seres humanos: U

$$\underbrace{\text{Masculino: X} \quad \text{e} \quad \text{Feminino: x}}_{\text{nomes contrários}}$$

Isto porque os dois nomes não serão verdadeiros ao mesmo tempo com relação a qualquer elemento do universo dos seres humanos. Contudo, vejamos outro exemplo:

Universo: Seres vivos: U

$$\underbrace{\text{Masculino} \quad \text{e} \quad \text{Feminino}}_{\text{deixam de ser, necessariamente, nomes contrários}}$$

Já que, ao levar em consideração, o universo dos seres vivos, nem todos são masculinos ou femininos, em virtude, por exemplo, da existência de seres assexuados. Note que, como não garantimos a contrariedade no universo dado, não adotamos letras maiúsculas e minúsculas para os respectivos nomes.

Posteriormente, De Morgan (2003) trata dos sinais que se referem às proposições afirmativas ou negativas como sendo determinados por uma *copula*, dita *are* e *are not, is* ou *is not,* respectivamente. Mais especialmente, outro ponto relevante consiste na quantidade relativa das proposições simples, oriunda da **quantificação dos seus termos** (sujeito e predicado). Esta, por sua vez, determina se as proposições são universais ou particulares através dos termos *all* e *some* os quais devem acompanhar, na proposição, o primeiro elemento essencial (sujeito) e não o segundo elemento da proposição (predicado). Numericamente, uma proposição universal é indicada pela compilação de todos os elementos

[60] Segundo De Morgan (2003, p. 54) nome é o símbolo relacionado a um ou mais objetos do pensamento e, conseqüentemente, os objetos exclusivos da lógica formal.

do universo do discurso, já uma particular é indicada por uma quantidade (embora relativa) menor que o todo do universo.

Ainda no quarto capítulo do *Formal Logic*, De Morgan (2003) fala das proposições convertíveis e não convertíveis como sendo determinadas pela ordem da proposição (isto é, têm relação com a escolha do sujeito e predicado). Vale salientar que a simples troca da ordem destes elementos não garante que uma proposição foi convertida em outra do mesmo tipo, já que, em alguns casos, o resultado da conversão pode ser uma proposição de um tipo diferente da original. Por exemplo:

A proposição: **Todo brasileiro é esperançoso**.

Pode ser convertida em: **Todo esperançoso é brasileiro.**

Neste caso, as duas proposições obtidas são distintas mesmo tendo-se que ambas estabelecem uma relação universal afirmativa entre seu sujeito e predicado. Contudo, podemos garantir que a **forma de conversão dará uma proposição do mesmo tipo** quando **tanto o sujeito quanto o predicado da proposição estabelecerem a mesma relação de quantidade**, isto é, forem ambos universais ou particulares. Por exemplo:

A proposição: **Alguns estudantes são adultos.**

Pode ser convertida em: **Alguns adultos são estudantes** (trocando a ordem do sujeito e predicado).

Em suma, De Morgan (2003, p. 58) diz "the universal negative, then, in which both terms are universal, and the particular affirmative, in which both are particular – are *necessarily convertible propositions*." Da mesma forma que "the universal affirmative, in which the subject is universal and the predicate particular, and the particular negative, in which the subject is particular, and the predicate universal – are not necessarily convertible, and are generally called *inconvertible*," como visto no primeiro exemplo.

Outro aspecto relevante do quarto capítulo consiste no abandono da distinção tradicional entre proposições contrárias e contraditórias[61], passando a adotá-las como sinônimas. Além disso, De Morgan (2003) introduz novas relações de oposição entre as proposições categóricas, bem como, novas notações simbólicas para as mesmas.

Simbolicamente, De Morgan (2003) propõe que uma escolha particular de ordem, sobre sujeito e predicado, seja supostamente estabelecida como um padrão de referência e por ordem alfabética. Assim, sempre teríamos XY, YZ ou XZ e seus respectivos contrários como sendo, por exemplo, xy, yx e xz. Agora, se pensamos não no sujeito e predicado das

[61] A relação de oposição entre as proposições categóricas já foi apresentada nas páginas 57 e 58 do capítulo anterior.

proposições, mas sim nelas mesmas como um todo, então De Morgan (2003) sugere que, por questão de simplificação na memorização, as quatro proposições categóricas sejam:

Sub-A = A' = X)Y significa Todo X é Y = Y)X

Sub-E = E' = X.Y significa Nenhum X é Y = Y.X

Sub-I = I' =XY significa Alguns X são Y = YX

Sub-O = O' = X:Y significa Alguns X não são Y = Y:X

Analogamente, fazendo o uso das contrárias teríamos:

Super-A = A'= x)y significa Todo x é y = y)x

Super-E = E' = x.y significa Nenhum x é y = y.x

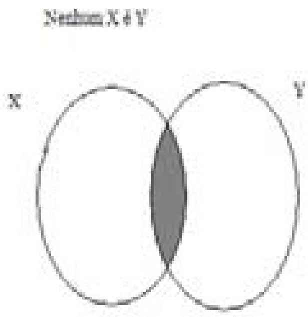
Super-I = I' = xy significa Alguns x são y = yx

Super-O = O' = x:y significa Alguns x não são y = y:x

Ressaltamos que os artifícios de memória sugeridos por De Morgan (2003), através de novas abreviações simbólicas, aludem ao que a Lógica Tradicional fez com as palavras mnemônicas.

Daí obtemos 16 modos de disposição das proposições simples os quais aludem, mesmo sucintamente, no trabalho de De Morgan (2003) à operações matemáticas. Portanto, do mesmo modo que a ordem dos fatores não altera o resultado na multiplicação aritmética, quatro destes modos são idênticos, a saber X.Y = Y.X e XY = YX, bem como, x.y = y.x e xy = yx. Com o auxílio dos diagramas de Venn, vejamos:

X.Y



=

Y.X

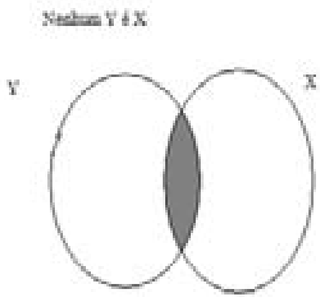


Ilustração 10 – Diagramas de identidade 1

XY YX

Alguns X são Y Alguns Y são X

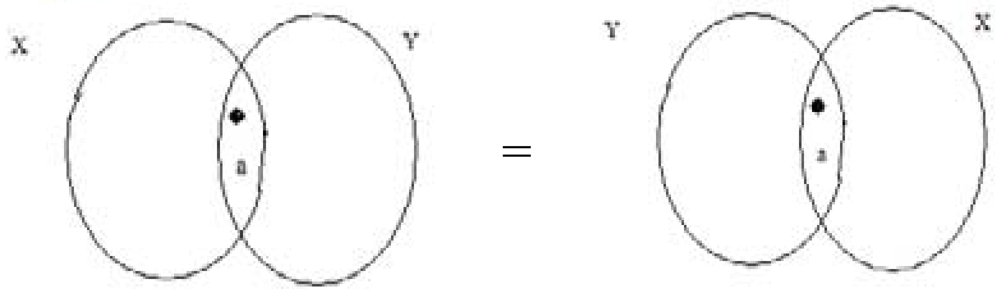


Ilustração 11 – Diagramas de identidade 2

Em outras palavras, há apenas seis proposições simples com X e Y, seis com x e y, seis entre X e y, bem como seis entre x e Y, totalizando vinte e quatro modos de formar uma proposição simples tomando X e Y como sujeito e predicado, respectivamente. Contudo, salientamos que nem todos são distintos. A fim de verificarmos tais identidades, De Morgan (2003, p. 61) sugere uma quantificação dos termos nos casos analisados. Para tanto, considera o universo do discurso com 12 elementos e afirma que o que será feito com esta quantidade, vale para outras quaisquer. Em seguida, analisa cada caso observando que a ocorrência de letras na mesma coluna indica nomes do mesmo objeto e que uma letra minúscula representa o contrário do que está representado pela maiúscula. Logo:

Sub-A = A' = X)Y = X.y = y)x

Todo X é Y Nenhum X é y (não-Y) Todo y (não - Y) é x (não - X)

U U U U U U U U U U U U

X X X X X x x x x x x x

Y Y Y Y Y Y Y Y y y y y

Note que, das cinco primeiras colunas, no universo U, tem-se: todo X é Y e nenhum X é y. Também temos, das quatro últimas colunas, que todo y é x. Deste modo garantimos as igualdades sugeridas acima. Observe que a distribuição das letras como dispostas acima, ainda revela outras situações possíveis no universo do discurso, mas elas não impedem a conclusão proposta pelas igualdades. Por exemplo, vemos que alguns x (não-X) são Y, bem como, nenhum y (não-Y) é X.

Analogamente,

$$\textit{Super}\text{-}A = A' = \underbrace{x)y}_{\text{Todo x (não - X) é y (não - Y)}} = \underbrace{x.Y}_{\text{Nenhum x (não - X) é Y}} = \underbrace{Y)X}_{\text{Todo Y é X}}$$

Lembramos que o universo do discurso tem 12 elementos e que a quantidade dos termos das proposições propostas pode ser aleatória neste universo, porém, sua escolha deve ser feita de modo a garantir a verdade da primeira proposição. Assim, vejamos mais uma disposição proposta por De Morgan (2003, p. 61):

U U U U U U U U U U U U
X X X X X X X X x x x x
Y Y Y Y Y y y y y y y y

Donde percebemos que as quatro últimas colunas garantem que Todo x é y, assim como, Nenhum x é Y. Já das cinco primeiras colunas nos certificamos que Todo Y é X.

Similarmente, De Morgan (2003, p. 61) mostra:

O' U U U U U U U U U U U U
X X X X X X X x x x x x
I' y y y y Y Y Y Y Y Y y y

O' U U U U U U U U U U U U
X X X X X x x x x x x x
I' Y Y y y y y y y Y Y Y Y

E' U U U U U U U U U U U U
X X X X x x x x x x x x
y y y y y y y Y Y Y Y Y

E' U U U U U U U U U U U U
X X X X X X X X x x x x
y y y y y Y Y Y Y Y Y Y

Observemos o primeiro caso fazendo uso dos diagramas de Venn. Para tanto, além de sombreado e vazio, como propõe Venn, adotamos mais uma convenção, a saber, delimitamos áreas hachuradas para representar não-X e não-Y. Assim, vejamos quais os diagramas de x (não-X) e y (não-Y), respectivamente.

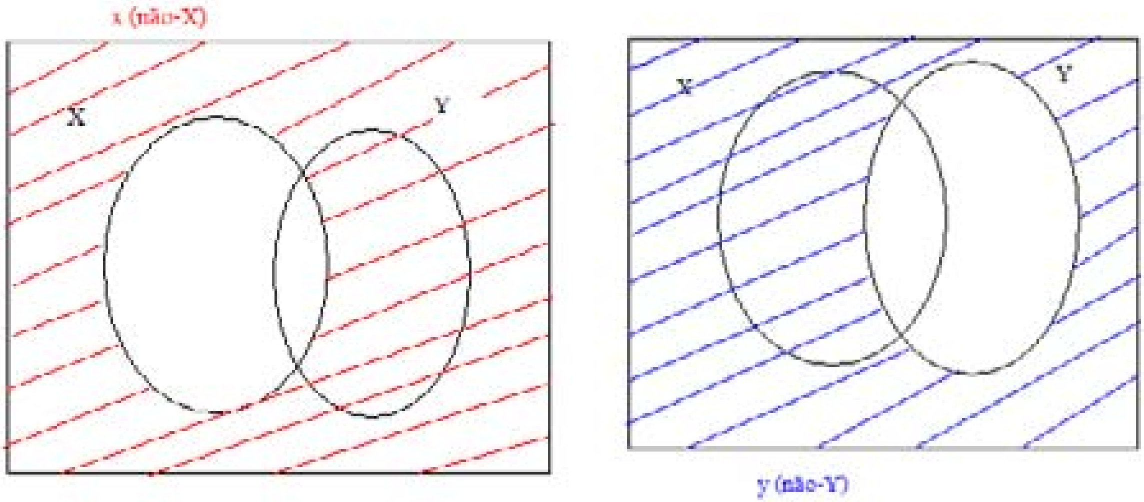


Ilustração 12 – Diagramas de x (não-X) e y (não-Y)

Voltando a análise das igualdades X)Y = X.y = y)x, temos:

X)Y X.y

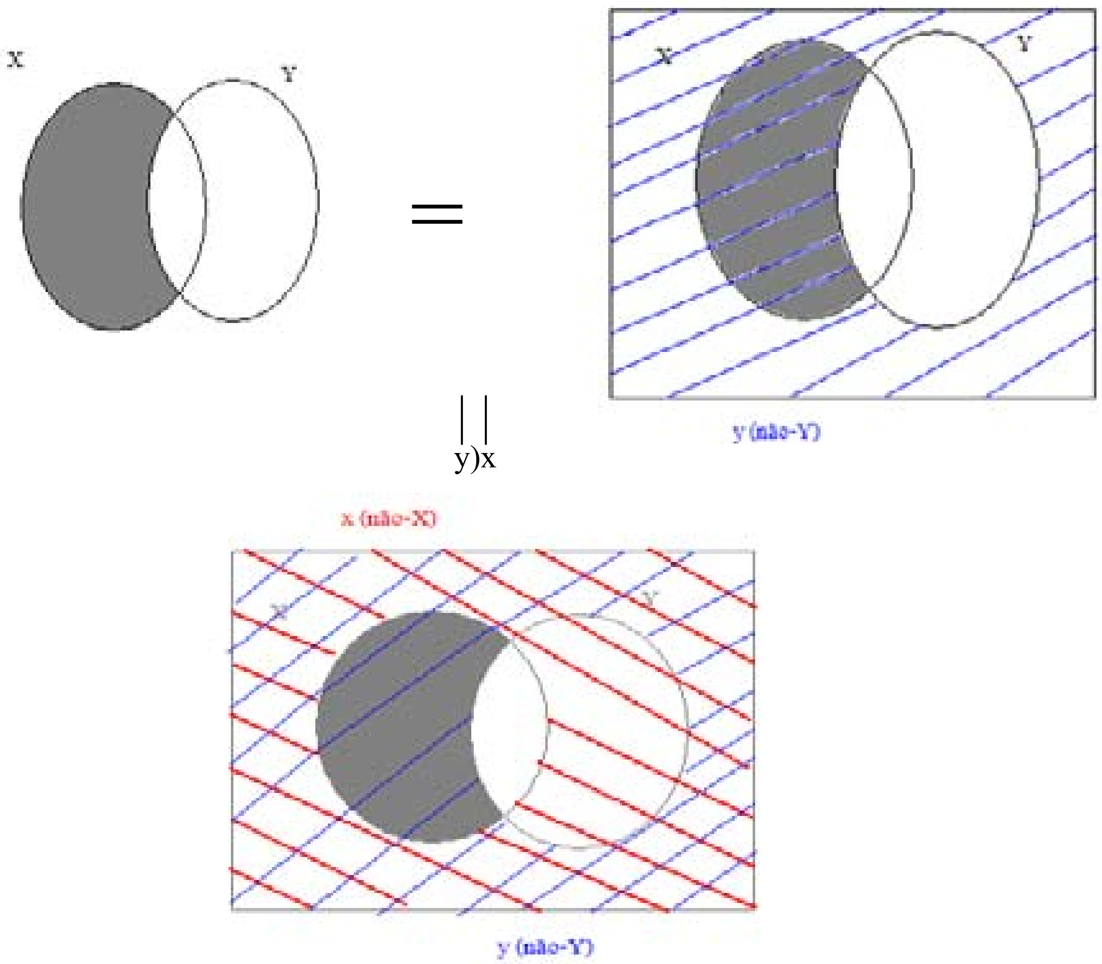


Ilustração 13 – Diagramas de identidade 3

Perceba que a igualdade dos diagramas é estabelecida em virtude de ambos levarem a mesma conclusão. No primeiro deles, temos X)Y indicando que todo X é Y e, deste modo, o que é X e não é Y não existe, por esse motivo a região é vazia, sombreada. Já o segundo diagrama representa X.y, ou seja, Nenhum X é y (não-Y). Assim, tem-se que a interseção de X com y (não-Y) é desconstituída de elementos, sombreada. Ora, mas vemos que isto também indica que o que é X e não é Y, é vazio. Por fim, o terceiro diagrama reflete uma igualdade aos dois primeiros, embora de forma menos evidente. Esclarecendo, y)x indica que Todo y (não-Y) é x (não-X), ou seja, o que é y (não-Y) e não é x (não-não-X = X) é vazio, isto é, a interseção de y (não-Y) e X não possui elementos e está sombreada.

Ainda tratando do conteúdo do quarto capítulo do *Formal Logic*, segue a apresentação das proposições complexas aliada ao tratamento da sua conversão, bem como sua distinção com relação às proposições simples. Neste sentido, De Morgan (2003) salienta que as proposições complexas são formadas por duas ou mais simples que, por sua vez, consistem nas proposições que meramente afirmam que os X são ou não são Y. Ressaltamos que, no cotidiano, a maioria das proposições é complexa, mas os livros de Lógica consideram apenas as simples, em virtude do tratamento das complexas ser abordado, de modo mais simplificado, mediante suas partes constituintes (duas simples). Deste modo, isto não significa que a abordagem da Lógica é limitada.

Vejamos um exemplo de proposição complexa e atentemos para suas partes constituintes como sendo duas proposições simples.

Ex: $\text{Todo } \underbrace{\text{brasileiro}}_{\text{sujeito}} \text{ é } \underbrace{\text{feliz}}_{\text{predicado}}$. Consiste numa proposição simples que pode ser parte de duas possíveis proposições complexas. A saber:

$\underbrace{\text{Todo brasileiro é feliz}}_{\text{proposição simples 1}} \text{ e } \underbrace{\text{todo feliz é brasileiro}}_{\text{proposição simples 2}}$. (proposição complexa 1) ou

Todo brasileiro é feliz e alguns felizes são não brasileiros. (proposição complexa 2)

Agora, observemos como De Morgan (2003) estrutura as conversões.

Primeiramente, De Morgan (2003, p. 63 – 64) define algumas operações de conversão, como segue:

S: símbolo que representa a mudança do sujeito por seu contrário, na proposição.

Ex: Se X representa as pessoas felizes, seu contrário é representado por x que significa as pessoas que não são felizes, ou seja, os infelizes.

P: símbolo que expressa a operação análoga à S, mas com relação ao predicado.

T: símbolo que indica a transformação da ordem da proposição, isto é, sujeito vira predicado ou predicado vira sujeito.

F: símbolo que opera na proposição mudando sua forma, isto é, de afirmativa para negativa ou vice-versa.

L: símbolo que não promulga alteração na proposição.

Diante destes, De Morgan (2003) observa, de forma empírica, que existem algumas destas operações que são equivalentes em certos casos específicos, por exemplo:

F = P (quando aplicado a X.Y = E' = Nenhum X é Y)

F aplicado a X.Y gera X)Y, já que F implica a mudança da forma de E' que é universal **negativa** para A' que é universal **afirmativa**.

P aplicado a X.Y gera X.y, haja vista que P indica a troca do predicado por seu contrário. Contudo, como verificado na página 85, X.y equivale a X)Y = A'.

Esquematizando:

F $\xrightarrow[\text{aplicado a}]{}$ X.Y $\xrightarrow[\text{resulta em}]{}$ X)Y.

P $\xrightarrow[\text{aplicado a}]{}$ X.Y $\xrightarrow[\text{resulta em}]{}$ X.y = X)Y.

Daí, De Morgan (1847, p. 64) ressalta que esta "perfect identity" de F e P permanece para todas as combinações em que T não entra. Caso a operação T esteja presente, a identidade gerada é outra. Neste caso temos:

ST = FT (quando aplicado a Y)X = A' = Todo Y é X)

ST aplicado a Y)X gera X)y, já que S implica a mudança do sujeito Y por seu contrário y, o que resulta em y)X e ainda T implica a mudança da ordem do sujeito pelo predicado, ou seja, y por X, resultando X)y = X.Y = E' (verificação análoga ao que foi feito nas páginas 85 e 86).

FT aplicado a Y)X gera X.Y, haja vista que F indica a troca da forma da proposição, isto é, Y)X que é universal **afirmativa** (todo Y é X) para Y.X que é universal negativa (Nenhum Y é X) e depois T vem mudar a ordem do sujeito e predicado da proposição anterior, resultando X.Y (nenhum X é X).

Esquematizando:

S $\xrightarrow[\text{aplicado a}]{}$ Y)X $\xrightarrow[\text{resulta em}]{}$ y)X e T $\xrightarrow[\text{aplicado a}]{}$ y)X $\xrightarrow[\text{resulta em}]{}$ X)y = X.Y

$$F \xrightarrow{\text{aplicado a}} Y)X \xrightarrow{\text{resulta em}} Y.X \text{ e } T \xrightarrow{\text{aplicado a}} Y.X \xrightarrow{\text{resulta em}} X.Y$$

Donde te[illegible] caso em [illegible]e na conv[illegible]da a ide[illegible] S e F.

Outra observação, mencionada por De Morgan (2003), é que cada operação, quando efetuada duas vezes, resulta na anulação desta mesma operação, isto é, ocorre como se nenhuma operação de conversão tivesse sido efetuada = L. Por exemplo, o contrário do contrário volta à origem, ou ainda, na Aritmética, o simétrico do simétrico de um número é o próprio número. Assim, PP = L e TT = L.

Seguem outros casos possíveis de conversão, mencionados por De Morgan (2003, p. 64) e verificados de modo similar aos anteriores. Vejamos:

SP = SF, PF = L, SPF = S

SPT = FPT, SFT = T, SPFT = PT

Note que, por exemplo, em PF = L temos na verdade ou PP = L ou FF = L, já que vimos que P = F.

Em virtude de elucidar todos os casos possíveis de equivalência oriundos destas conversões, De Morgan (2003, p. 64 – 65) apresenta duas tabelas:

L	**T**	**SP**	**SPT**	**L**
PF	**SFT**	**SF**	**PFT**	**PF**

P	**PT**	**S**	**ST**	**P**
F	**SPFT**	**SPF**	**SF**	**F**

Tais operações mudam proposições convertíveis em inconvertíveis e vice-versa.

Retornando a abordagem das proposições complexas e nos remetendo tanto às conversões recentemente postas quanto à simbologia adotada anteriormente para as proposições categóricas, De Morgan (2003) considera o caso em que todas as proposições universais são falsas e todas as particulares são verdadeiras, sendo a junção destes casos uma **proposição particular complexa.** Escrevendo o + entre os símbolos das particulares, a proposição complexa resultante é representada pelo símbolo P (não confundir com o P adotado para a conversão em que o predicado é trocado pelo seu contrário na proposição)[62] , como segue:

$$P = O' + O_{'} + I' + I_{'} .$$

Considerando agora que uma universal seja verdadeira, temos:

$$A_{'} + O', \qquad A_{'} + A', \qquad A' + O_{'}$$

$$E_{'} + I', \qquad E_{'} + E', \qquad E' + I_{'},$$

Lembrando que estes são os casos possíveis e distintos, já que $A' + A_{'} = A_{'} + A'$ e $E_{'} + E' = E' + E_{'}$. Para abarcar estes casos de identidade, De Morgan (2003, p. 66) introduz um novo símbolo para complexas **idênticas**. Trata-se do símbolo D. Portanto, tem-se:

$$D = A_{'} + A'$$

Donde temos que Todo X é Y e Todo Y é X, o que resulta que **X = Y**. Mas, há ainda as possibilidades chamadas de **subidênticas** e **superidênticas**, respectivamente.

$$D_{'} = A_{'} + O'$$

Implicando que Todo X é Y e alguns Y são X, o que significa que há mais Y que X, isto é, **Y > X**.

$$D' = A' + O_{'}$$

Que indica que existem mais Y que X, ou seja, **X > Y**.

Similarmente, o símbolo C é indicado para proposições **contrárias**, isto é:

$$C = E_{'} + E'$$

De onde tem-se que Nenhum X é Y e Nenhum Y é X, ou seja, X ≠ Y. Analogamente, obtem-se as **subcontrárias** e **supercontrárias**, como sendo respectivamente:

$$\underbrace{C_{'} = E_{'} + I'}_{\text{NÃO COMPLETAM O UNIVERSO}} \quad \text{e} \quad \underbrace{C' = E' + I_{'}}_{\text{EXCEDEM O UNIVERSO}} .$$

Afim de completar a linguagem é assumido, sem símbolo específico, por De Morgan (1847):

$$\underbrace{A_{'} \text{ e } I_{'}}_{\text{SUBAFIRMATIVAS}} \qquad \underbrace{A' \text{ e } I'}_{\text{SUPERAFIRMATIVAS}}$$

[62] A escolha deste símbolo para esta situação pode ser considerada uma falha, embora leve, no formalismo de De Morgan em virtude do mesmo símbolo ter sido empregado recentemente com outro significado (operação de conversão) completamente distinto do atual.

$$\underbrace{E_{\prime} \text{ e } O_{\prime}}_{\text{SUBNEGATIVAS}} \qquad \qquad \underbrace{E' \text{ e } O'}_{\text{SUPERNEGATIVAS}}$$

Como forma de exercitar toda esta linguagem e idéias apresentadas, De Morgan (2003, p. 69) declara os seguintes resultados expostos em forma de tabela:

	$D_{\prime}$ afirma $A_{\prime}$ e $O_{\prime}$			$A_{\prime}$ afirma $D_{\prime}$ ou D		
	D	–	$A_{\prime}$ e A'	A	–	$D_{\prime}$ ou D ou D'
	D'	–	A' e $O_{\prime}$	A'	–	D' ou D
	$C_{\prime}$	–	$E_{\prime}$ e I'	$E_{\prime}$	–	$C_{\prime}$ ou C
	C	–	$E_{\prime}$ e E'	E	–	$C_{\prime}$ ou C ou C'
	C'	–	E' e $I_{\prime}$	E'	–	C' ou C
Negação de	$D_{\prime}$	–	$A_{\prime}$ ou $O_{\prime}$	$O_{\prime}$ nega		$D_{\prime}$ e D
–	D	–	O' ou $O_{\prime}$	O	–	$D_{\prime}$ e D, ou D' ou D
–	D'	–	$A_{\prime}$ ou O'	O'	–	D' e D
–	$C_{\prime}$	–	E' ou $I_{\prime}$	$I_{\prime}$	–	$C_{\prime}$ e C
–	C	–	I' ou $I_{\prime}$	I	–	$C_{\prime}$ e C ou C' e C
–	C'	–	$E_{\prime}$ ou I'	I'	–	C' e C

Da primeira linha e primeira coluna destes resultados, por exemplo, obtemos que uma subidentidade requer uma subafirmação universal e uma supernegação particular. Ainda na primeira coluna, mas quarta linha, deduzimos que uma contrariedade é uma sub e supernegação universal. Da mesma forma, se observamos a segunda coluna e primeira linha, temos que uma subafirmação universal é ou uma subidentidade ou a própria identidade. Bem como, a sétima linha da segunda coluna fornece o resultado de que uma subnegação particular nega uma subidentidade ou a própria identidade. Analogamente, seguem os outros resultados.

De um modo geral, De Morgan (2003, p. 69) diz que “every subidentical of a name is the subcontrary of its contrary; every subcontrary is the subidentical of the contrary.” Daí, propõe encarar a palavra **contrária** como representante do sinal negativo e **idêntica** pelo sinal positivo. Deste modo, a afirmação acima se põe análoga à regra do jogo dos sinais, oriunda da multiplicação aritmética. Recordando, De Morgan (2003, p. 69) afirma: “every subidentical ($D_{\prime}$) of a name is the subcontrary ($C_{\prime}$) of its contrary (C'),” ou seja:

$$\underbrace{(D_{\prime})}_{+} \text{ com } \underbrace{(C_{\prime})}_{-} = \underbrace{(C')}_{-}.$$

Bem como De Morgan (1847, p. 69) também diz que: “every subcontrary ($C_{'}$) is the subidentical ($D_{'}$) of the contrary (C).” Com os sinais:

$$\underbrace{(C_{'})}_{-}\ \text{com}\ \underbrace{(D_{'})}_{+} = \underbrace{(C)}_{-}\,.$$

Ressaltamos aqui, uma sucinta analogia com a Aritmética.

Considerando as várias relações complexas como uma transição contínua de uma para outra, De Morgan propõe duas outras espécies de operações que permitem o desfecho nestas transições, a saber, ele define:

(+): operação que indica o acréscimo de X nos casos possíveis do universo (significa a troca de *x* por X) uma quantidade de vezes suficiente para o resultado.

(−): retirada de X (troca de X por *x*) um número necessário de vezes.

Posteriormente, De Morgan (2003) divide as transições em sete blocos distintos, pela relação inicial ou pelo fato do X começar dentro ou fora de Y (na investigação).

Bloco 1: Transições com X dentro dos limites de Y e cuja relação inicial é $D_{'}$.

$D_{'}$ (+) D (+) D' $D_{'}$ (+) P (+) C'

$D_{'}$ (+) P (+) D' $D_{'}$ (+) P (+) $C_{'}$

Verifiquemos a primeira situação utilizando o processo sugerido por De Morgan (2003, p. 61), mas não acurado neste caso. Para tanto, consideremos o universo com doze elementos e os X, x, Y e y dispostos no universo de modo a satisfazer $D_{'}$ = $A_{'}$ + O'.

U U U U	U U U U	U U U U
X X X X	*x x x x*	*x x x x*
Y Y Y Y	Y Y Y Y	*y y y y*

$A_{'}$: Todo X é Y   O' : Algum Y é não X (*x*)

Fazendo (+), ou seja, utilizando o processo de mudança contínua de *x* por X, chegamos a D = $A_{'}$ + A', como segue:

U U U U	U U U U	U U U U
X X X X	X X X X	*x x x x*
Y Y Y Y	Y Y Y Y	*y y y y*

$A_{'}$: Todo X é Y e A' : Todo Y é X

Observe que o número suficiente de vezes foram quatro. Agora, novamente fazendo uso da operação (+) um outro número de vezes, chegamos a D' = A' + $O_{'}$.

U U U U U U U U U U U U
X X X X | X X X X | X | *x x x*
Y Y Y Y | Y Y Y Y | *y* | *y y y*

A' : Todo Y é X $O_{'}$: Algum X é não Y (*y*)

Note que, agora, apenas uma mudança de *x* por X foi suficiente, embora, pudéssemos ter feito isto duas, três ou até quatro vezes, sem prejuízo ao resultado (permanecendo o mesmo).

Em razão de exercitarmos e compreendermos melhor estes resultados, analisemos a situação acima mediante os diagramas de Venn. Retomando a relação desejada temos:

$D_{'}$ (+) D (+) D'

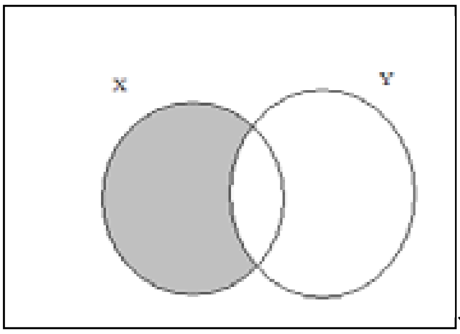


Ilustração 14 – Diagrama de $A_{'}$

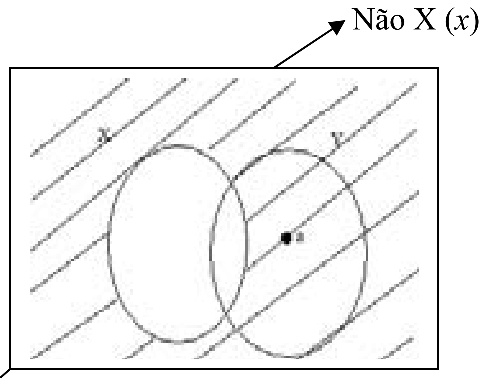


Ilustração 15 – Diagrama de O'

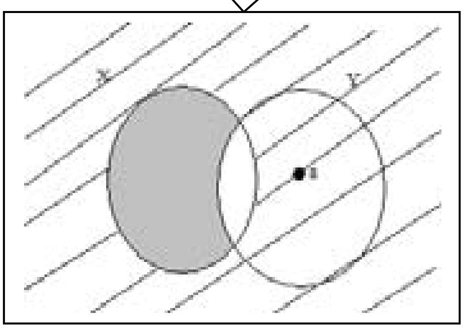


Ilustração 16 – Diagrama de $D_{'}$

Fazendo o acréscimo de X, isto é, trocando não-X (*x*) por X, temos:

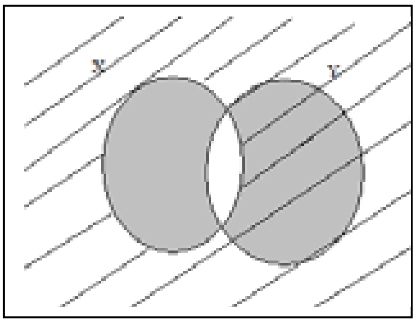


Ilustração 17 – Diagrama de D

Observe que ao trocarmos não-X (*x*) por X, na verdade, retiramos o *x* existente em Y e aí ficou vazio. Em seguida, realizando esta operação novamente, tem-se:

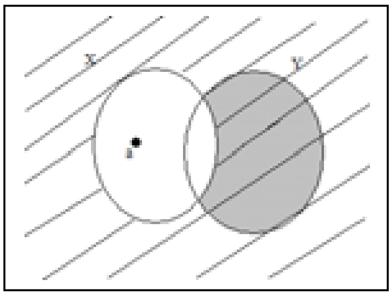


Ilustração 18 – Diagrama de D'

Perceba que, neste caso, ao acrescentarmos X (trocarmos não-X (*x*) por X), este conjunto deixou de ser vazio.

Bloco 2: Transições com X fora dos limites de Y e cuja relação inicial é $C_{'}$.

$C_{'}$ (+) C (+) C' $\qquad$ $C_{'}$ (+) P (+) C'

$C_{'}$ (+) P (+) C' $\qquad$ $C_{'}$ (+) P (–) $D_{'}$

Examinemos a primeira situação utilizando o mesmo processo do Bloco 1. Assim, consideremos também o universo com doze elementos e os X, x, Y e y dispostos no universo de modo a satisfazer $C_{'}$ = $E_{'}$ + I'.

U U U U U U U U U U U U

X X X X *x x x* *x x x x x*

y y y y *y y y* Y Y Y Y Y

$E_{'}$: Nenhum X é Y   I' : Algum não-Y (*y*) é não-X (*x*)

Fazendo (+), ou seja, utilizando o processo de mudança contínua de *x* por X, chegamos a C = $E_{'}$ + E', como segue:

U U U U U U U U U U U U

X X X X X X X *x x x x x*

y y y y *y y y* Y Y Y Y Y

$E_{'}$: Nenhum X é Y   E' : Nenhum não-X (*x*) é não-Y (*y*)

Veja que, neste caso, a operação (+) foi feita três vezes. Além disso, note pela disposição dos elementos acima que, já temos C' = E' + $O_{'}$. Contudo, se realizarmos a operação (+) sobre este resultado, por exemplo mais uma vez, ainda teremos C' = E' + $O_{'}$.

U U U U U U U U U U U U

X X X X X X X X *x x x x*

y y y y *y y y* Y Y Y Y Y

$O_{'}$: Algum X é não-Y (*y*)   E' : Nenhum *x* é *y*

Note que, agora, apenas uma mudança de *x* por X foi suficiente, embora, pudéssemos ter feito isto duas, três ou até quatro vezes, sem prejuízo ao resultado (permanecendo o mesmo).

Bloco 3: Transições com X dentro e fora dos limites de Y e cuja relação inicial é P.

P (+) D'   P (+) C'   P (–) $D_{'}$ P (–) $C_{'}$

Analisemos o terceiro caso através do diagramas de Venn. Sabendo que:

P = $O_{'}$ + I' + O' + $I_{'}$

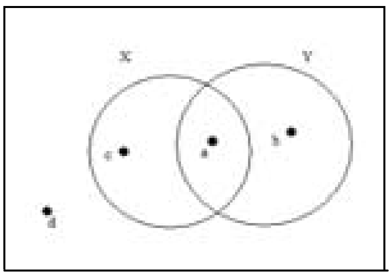


Ilustração 19 – Diagrama de P

Realizando a operação (–) de retirada de X um número suficiente de vezes, temos:

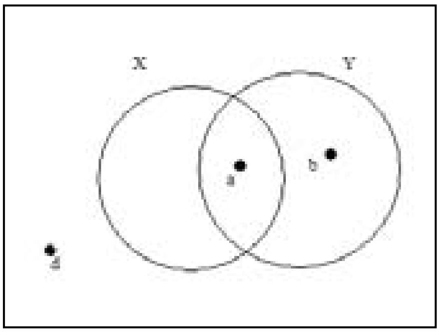


Ilustração 20 – Diagrama 2 de $D_{,}$

Ressaltamos que, neste caso, basta retirar um X (c) para obtermos $D_{,}$. Entretanto, se retirarmos mais um, digamos (d), ainda continuamos com o mesmo resultado, $D_{,} = A_{,} + O'$ (Todo X é Y e algum Y é não-X).

Resolvemos omitir a verificação dos demais blocos em virtude de não sermos demasiadamente longos, embora ressaltemos que as mesmas seguem de modo análogo aos casos verificados. Deste modo, nos limitamos a apenas citar tais resultados expostos por De Morgan (2003, p. 71 – 72).

Bloco 4: Quando (–) segue $D_{,}$ ou D, $C_{,}$ ou C.

$D_{,}$ (–) D'   D (–) $D_{,}$ $C_{,}$ (–) C'   C (–) $C_{,}$

Bloco 5: Transições começando com U.

U (–) D'   U (–) C'

Bloco 6: Transições cuja relação inicial é D' ou C'.

D' (–) D (–) $D_{,}$ D' (–) P (–) $C_{,}$
D' (–) P (–) $D_{,}$ D' (–) P (+) C'
C' (–) C (–) $C_{,}$ C' (–) P (–) $D_{,}$
C' (–) P (–) $C_{,}$ C' (–) P (+) D'

Bloco 7: Quando (+) segue D' ou D, C' ou C.

D' (+) D'   D (+) D'   C' (+) C'   C (+) C'

Destacamos aqui, uma certa falha ou fragilidade do formalismo de De Morgan em virtude da imprecisão destas operações ao trabalhar a quantificação dos termos propostos. Embora vejamos que funciona para os casos propostos, notamos que sua validade depende da adequação do número de termos escolhidos para cada caso. Além disso, novamente aparece o símbolo confuso P[63].

Finalmente, De Morgan (2003, p. 72) encerra a abordagem das proposições em seu formalismo dizendo que “the following considerations will further serve to illustrate the want of the extension of the doctrine of propositions made in this chapter, and also the completeness of it.” Trata-se, pois, da apresentação das condições de necessidade e suficiência da Lógica Tradicional sob a ótica de seu sistema. Contudo, observe que o próprio De Morgan (2003) ressalva a crença da força de seu trabalho.

Assim, considere os símbolos N, S, I e C. De Morgan reporta-os respectivamente como as iniciais de necessário, suficiente, impossível e contingente. A saber, o primeiro significa que não podemos fazer sem; o segundo, se refere ao que tem que preceder; o terceiro, com o qual nós podemos fazer e; por fim, o último símbolo indica o que pode seguir. Enfatizamos que contingente, quer dizer possível ou impossível. Ressaltamos, os símbolos dos contrários ao dois primeiros, isto é, aqueles que significam não-necessário e não-suficiente como sendo representados pelas letras minúsculas, *n* e *s*, bem como, P o contrário de I, isto é, indica possível. Vale salientar que o C permanece, já que seu contrário é ele mesmo.

Neste sentido, De Morgan (2003, p. 73 – 74) traz duas tabelas que buscam compendiar alguns dos resultados sobre as proposições simples, em paralelo a estas idéias.

		XY	X*y*	*xy*	*x*Y
$A_{\prime}$	X)Y	N	I	S	C
$E_{\prime}$	X.Y	I	N	C	S
A'	Y)X	S	C	N	I
E'	*x* . *y*	C	S	I	N

		XY	X*y*	*xy*	*x*Y
$O_{\prime}$	X)Y	*n*	P	*s*	C
$I_{\prime}$	X.Y	P	*n*	C	*s*
O'	Y)X	*s*	C	*n*	P
I'	*x* . *y*	C	*s*	P	*n*

Donde, por exemplo, obtemos na primeira linha da tabela das universais que: se X)Y então para ser X é necessário ser Y e impossível ser *y*, assim como, para ser *x* é suficiente ser *y* e

[63] Recordamos que ao longo da abordagem das proposições proposta por De Morgan (2003), este símbolo ora representou uma operação de conversão (indicada pela mudança do predicado da proposição pelo seu contrário), ora significou uma proposição complexa (formada pela veracidade das quatro proposições categóricas particulares).

contingente (possível ou impossível) ser Y. Da tabela das particulares, ao observarmos a primeira linha temos que: se X)Y então para ser X é não-necessário ser Y e possível ser *y*, assim como, para ser *x* é não-suficiente ser *y* e contingente (possível ou impossível) ser Y.

Similarmente, De Morgan (2003, p. 74) propõe outra tabela para as relações complexas.

	XY	X*y*	*xy*	*x*Y
D'	Ns	I	Sn	P
C'	I	Ns	P	Sn
D'	Sn	P	Ns	I
C'	P	Sn	I	Ns
D	Ns	I	NS	I
C	I	NS	I	NS
P	NsP	nsP	nsP	nsP

Destacamos novamente a utilização do símbolo P com mais um significado diferente dos apresentados na página 97 do presente trabalho e ressaltamos, deste modo, mais uma vez seu uso confuso dentro do sistema formal proposto por De Morgan (2003).

Os próximos três capítulos (quinto, sexto e sétimo) tratam do silogismo. Nesta parte do trabalho, De Morgan (2003) apresenta o que será considerado da Lógica Aristotélica, mas não se restringe a estas definições, apreciando com propriedade tanto seus méritos quanto suas falhas, sobretudo, quando se refere ao *dictum omni*. Deste modo, De Morgan (2003) tece comentários a fim de construir um posicionamento crítico sob o assunto. Assim, inicialmente De Morgan (2003, p. 76) afirma que:

> Syllogism is the inference of the relation between two names from the relation of each of those names to a third. Three names therefore are involved, the two which appear in the conclusion, and the third or *middle term*, with which the names, or terms, of the conclusion are severally compared. The statements expressing the relations of the two *concluding* terms to the *middle* term, are the two *premises*.

Note que, ao apresentar a definição de silogismo juntamente com o conceito de premissas, termos médios e termos da conclusão, De Morgan (2003) ressalta o **papel dos nomes** como sendo essenciais à formação de seu silogismo. Acrescenta ainda que este silogismo pode ser de dois tipos, simples e composto. Por silogismo simples De Morgan (2003) entende aquele que envolve três proposições simples. Já o silogismo complexo é encarado como o que tem três proposições complexas, sendo as duas primeiras, as premissas, e a última, a conclusão.

Diferente da Lógica Tradicional, que opta por começar com um silogismo simples e daí produzir um complexo, De Morgan (2003, p. 77) escolhe começar pelo complexo em razão de pensar que "the complex syllogism is easier than the simple one" e ainda que "the use of the complex syllogism will, as we shall see, give an independent and systematic derivation to these strengthened syllogisms, as well as to the rest." Provavelmente, tal defesa também venha do fato de que o silogismo complexo é formado por proposições complexas que, por sua vez, são as que aparecem em maior número no dia-a-dia, isto é, torna-se mais fácil identificar as relações silogísticas do cotidiano e tratar as relações lógicas *in natura,* do que ter que decodificá-las à forma simples para então poder estudar as relações lógicas e obter algum resultado.

Frente a esta dicotomia vejamos alguns exemplos destes silogismos. Em seguida, vejamos um modo interessante de analisar o caso complexo.

Silogismo simples: as premissas e a conclusão estão entre as proposições $A_{\prime}$, $E_{\prime}$, $I_{\prime}$, $O_{\prime}$, A', E', I', O'.

Ex: $A_{\prime}$ $E_{\prime}$ $E_{\prime}$

X)Y + Y.Z = X.Z

Em outras palavras,
Se Todo X é Y
Se Nenhum Y é Z

Então Nenhum X é Z.

De Morgan (2003, p. 86 – 87) ressalta que a ordem de referência é sempre XY, YZ, XZ e posteriormente anuncia dois resultados. Primeiro, "a particular premise cannot be followed by a universal conclusion." Segundo, "from two particular premises no conclusion can follow." Posteriormente, define um silogismo universal como sendo aquele em que tanto as premissas quanto a conclusão são universais (caso do exemplo acima) e um silogismo particular como sendo aquele em que uma das premissas é particular.

Silogismo complexo:

Ex: $D_{\prime}$ $D_{\prime}$ $D_{\prime}$

($A_{\prime}$ + O') ($A_{\prime}$ + O') ($A_{\prime}$ + O')

[X)Y+Y:X] + [Y)Z e Z:Y] = [X)Z e Z:X]

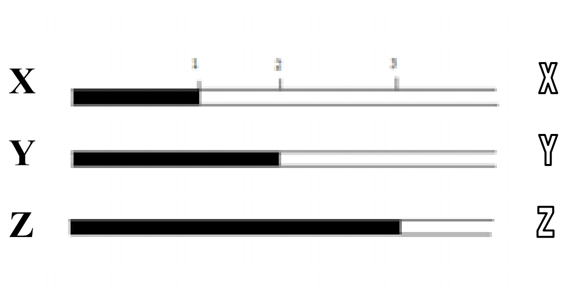
Em outras palavras,
Se X é subidêntico a Y e
Y é subidêntico a Z.

Então X é subidêntico a Z.
Ou ainda que:
Um subidêntico de um subidêntico é um subidêntico.

Antes de observarmos como De Morgan (2003) examina este tipo de silogismo, façamos uma breve explanação acerca dos **diagramas de análise silogística** elaborados por ele. Segundo De Morgan (2003), cada diagrama será composto por três linhas, umas sobre as outras, as quais representarão os termos do silogismo, isto é, X ou *x*, Y ou *y* e Z ou *z*, respectivamente. Tais linhas apresentam-se parcialmente cheias ou vazias, de acordo com a identidade ou contrariedade dos termos, ou seja, se são idênticos dever estar igualmente cheias ou igualmente vazias, se são contrários, uma estará cheia e a outra vazia ou vice-versa. O diagrama pode ser lido, pela direita ou pela esquerda (representando o caso contrário). É suposto que o universo das proposições é a amplitude inteira. Por fim, pontos que estão uns sobre os outros representam o mesmo objeto de pensamento.

Assim, vejamos a análise do exemplo de silogismo complexo usando os diagramas de De Morgan (2003, p. 79 – 80).

D, D, D,



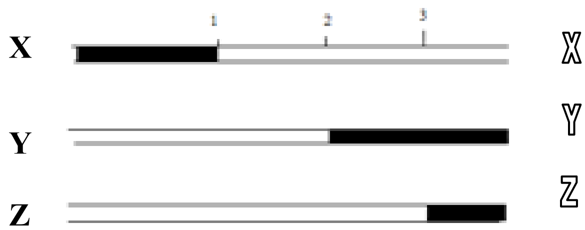
D' D' D'

Ilustração 21 – Diagrama de D, D, D,

Esclarecendo, ao observarmos o diagrama pela esquerda, temos que X é um subidêntico a Y [X)Y e Y:X] e que Y é um subidêntico a Z [Y)Z e Z:Y], donde conclui-se que X é um subidêntico de Z [X)Z e Z:X]. Ao contrário, se vemos o diagrama pela direita, obtemos que X é um superidêntico de Y [Y)X e X:Y] e Y é um superidêntico de Z [Z)Y e Y:Z], portanto, a conclusão resultante é que X é um superidêntico de Z [Z)X e X:Z].

Vejamos outro exemplo apresentado por De Morgan (2003, p. 78).

C, D' C,



C' D, C'

Ilustração 22 – Diagrama de C, D' C,

Neste caso, De Morgan (2003) interpreta que, pela esquerda, X é subcontrário de Y (linha menos cheia e mais vazia) e Y é superidêntico de Z (ambos linha cheia). Logo, conclui-se que X é subcontrário de Z (linha cheia e vazia). Já, pela direita, obtém-se que X é supercontrário de Y (linha mais vazia e menos cheia) e Y é subidêntico a Z (ambos linha cheia). Portanto, chegamos à conclusão de que X é supercontrário de Z (linha vazia e cheia). Contudo, perceba que há uma pequena confusão na interpretação de Y com Z (pela esquerda e direita), mas isto não interfere na conclusão final. Seguindo seu raciocínio a interpretação correta seria: pela esquerda, que X é subcontrário de Y, Y é subidêntico a Z e, conseqüentemente, X é subcontrário a Z. Analogamente, pela direita teríamos que X é supercontrário a Y, Y é superidêntico a Z e, assim, X é supercontrário a Z.

A respeito do silogismo condicional, De Morgan (2003, p. 109) observa que "a *conditional* proposition is only a grammatical variation of the ordinary one" e por isso mesmo, um silogismo condicional pode sempre ser reduzido à forma categórica, assim como esta última pode ser reduzida à primeira. Contudo, De Morgan (2003, p. 109) ainda relata que "the particular propositions might be given conditionally in various ways, but the transformations is not so common." Por exemplo, a proposição condicional: **Se é brasileiro, então é latino americano** pode ser reduzida à forma categórica: **Todo brasileiro é latino americano**. Contudo, a proposição particular **Alguns alunos são estudiosos** pode assumir as formas condicionais: **Se aluno, então pode ser estudioso** ou **Se aluno, então estudioso não deve ser negado disto**.

Outra ressalva de De Morgan (2003, p. 109) consiste em afirmar que "the conditional form a grammatical convenience for the expression of dependence of propositions on one another, and of names which require complicated forms of expression." Assim sendo, as formas condicionais contendo a partícula *if* são mais simples que suas formas categóricas correspondentes.

Seguindo suas advertências quanto à forma condicional, De Morgan (2003, p. 109) diz que "a conditional may be either *necessary*, or *sufficient*, or both." Sendo do primeiro caso, a condição sem a qual a coisa não pode ser e, do segundo caso, aquela com a qual a coisa deve ser ou existir.

Diante do exposto, De Morgan (2003, p. 109) toma um gancho para abordar a incompletude da redução da forma condicional à categórica ou vice-versa, isto porque, para ele "the reduction of conditional to categorical forms, though just, and, for inference, complete, is not the representation of the whole of what passes in our minds." De fato, De

Morgan (2003) acredita que não é necessário enfatizar a redução de um silogismo condicional a um categórico, mesmo admitindo a conexão entre estas formas. É justamente na identificação das falhas ou limitações que De Morgan (2003) encontra o gancho para apresentar sua inovação em direção a formalização da Lógica enviesada pela Matemática.

Um outro aspecto ressaltado pelo autor consiste na apresentação do universo das proposições como sendo ligado à idéia condicional. Neste sentido, De Morgan (2003, p. 109 – 110) afirma que “precedente to all propositions, there are the numerical conditions which prescribe the limits of the universe under consideration,” sendo tais condições restrições sobre os argumentos a serem analisados no discurso. Atentamos que tal raciocínio alude ao sistema silogístico numérico que será proposto por De Morgan (2003). Como exemplo, considere a primeira condição a que indica que existem 12 elementos nesse universo, como segunda condição assuma que destes 12 elementos, 5 são X e, por fim, como terceira condição, sejam deste universo, 10 elementos Y. Deste modo, qualquer proposição inferida sobre este universo carregará sobre seu argumento estas três condições em conjunto, isto é, ao verificarmos se a proposição 2XY é espúria ou não, temos que tomar como referência as três condições acima (Lembre que XY indica **Alguns X são Y**). Logo, é possível analisar a proposição indagando se 2 X entre os 5 num universo de 12 elementos que contêm 10 Y serão achados entre esses 10 Y? Se for possível, a proposição acima é verdadeira.

Ainda ligada à idéia de condição está a existência ou não dos termos de uma proposição como sendo um determinante a sua verdade ou falsidade. Neste sentido, De Morgan (2003, p. 111) diz “existence as objects, or existence as ideas, is tacitly claimed for the terms of every syllogism” em virtude de sua relevância para a investigação da verdade ou falsidade das proposições. Por isso, De Morgan (2003) acredita ser importante, primeiro, verificar a existência ou não dos termos e, somente quanto esta for resolvida, partir em seguida para a investigação de como essa existência afeta a proposição. Daí, De Morgan (2003, p. 111 – 112) conclui que “the affirmative proposition requires the existence of both terms: the negative proposition , of one; being necessary true if the other term do not exist, and depending upon the matter, as usual, if it do exist.” Para esclarecer vejamos o exemplo:

Silogismo: A, A, A, (Proposição afirmativa)

	Forma condicional	**Forma categórica**
	Se X e Y ambos existem,	Todo X é Y
	Se Z também existe	Todo Y é Z
Então:	Se X, Y, Z todos existem	Todo X é Z.

Observe que a proposição da conclusão teve sua veracidade dependente da existência dos termos envolvidos no silogismo. Olhando para a forma categórica, perceba que o termo médio desaparece de forma tácita, por isso, a conclusão pode ser re-enunciada como Todo X é Z, se Y existe.

Silogismo: E' A' E' (Proposição negativa)

	Forma condicional	**Forma categórica**
	Se X existe e Y não existe,	Nenhum X é Y
	Se Y e Z ambos existem	Todo Y é Z
Então:	Se X existe, Y e Z ambos não existem	Nenhum X é Z.

Note, novamente, que a proposição da conclusão teve sua veracidade dependente da existência ou não dos termos envolvidos no silogismo. Analogamente ao primeiro exemplo, o termo médio omitido na forma categórica poderia ser explícito, levando a conclusão a ser re-enunciada como **Nenhum X é Z**, se Y não existe. Fazendo um paralelo das duas formas em cada caso acima, poderíamos ter também:

Todo X é (Y, se Y existe)	Nenhum X é (Y, se Y não existe)
Todo (Y, se Y existe) é Z	Todo (Y, se Y existe) é Z
Então: Todo X é Z.	Então: Nenhum X é Z.

Do primeiro caso podemos ainda retirar o *dilemma* (visto com mais detalhes a seguir): Ou todo X é Z, ou Y não existe.

Esta ponte entre a identificação de falhas e apresentação de inovações reside, por exemplo, no ataque a pedra angular da Lógica Aristotélica, o *dictum omni*[64], o qual remete à citação enfaixada anteriormente por Macfarlane (1916), na página 75 desta tese. Seguindo esta análise De Morgan (2003, p. 115) propõe um postulado mais extensivo ao *dictum omni*. Vejamos:

> For every term used universally *less* may be substituted, and for every term used particularly, *more*. The species may take the place of the genus, when all the genus is spoken of: the genus may take the place of the species when some of the species is mentioned, or the genus, used particularly, may take the place of the species used universally. Not only in syllogisms, but in all the ramifications of the description of a complex term.

[64] De Morgan (2003, p. 127) enuncia o *dictum de omni et nullo* da seguinte forma: “that what is distributively affirmed or denied of all, is distributively affirmed or denied of every some which that all contains.”

De fato, a anunciação acima se refere à formação e uso das premissas e contém o *dictum* já que garante a inércia da qualidade da afirmação, ou seja, ao reduzir a quantidade universal para menos, ela continua sendo afirmada ou negada da mesma forma que ao ampliar a quantidade particular para mais, sua afirmação ou negação permanece. Como exemplo, a proposição **Alunos que não são brasileiros,** pode ser substituída por **Adolescentes que não são nordestinos**.

Posteriormente, De Morgan (2003) trata da notação dos nomes conjuntivos e disjuntivos a fim de alavancar uma discussão sobre os silogismos conjuntivos, disjuntivos e o *dilemma*. Para tanto, o referido autor começa por elencar os símbolos úteis ao tratamento de tais circunstâncias. Deste modo, sejam P, Q e R os símbolos representantes de certos nomes:

·PQR indica a conjunção dos três, ou seja, significa algo dito sobre todos ao mesmo tempo.

·P,Q,R representa a disjunção de todos os três, isto é, significa algo sobre um ou mais dos três.

·PQ,R concebe a conjunção de P e Q e a disjunção destes com R. Em outras palavras, indica algo que é ou ambos P e Q (juntos), ou R (em separado).

·O contrário de PQR seria denotado por p,q,r. Assim, enquanto PQR quer dizer P e Q e R, temos que p,q,r quer dizer p ou q ou r.

·A contradição de P,Q,R é dada por pqr, significando p e q e r, enquanto, P,Q,R afirma P ou Q ou R.

· Já o contrário de PQ,R pode ser denotado por (p,q)r, ou seja, (p ou q) e r.

De Morgan (2003) ainda acrescenta o hífen para fazer X-Y um termo distinto da proposição XY. Assim, afirmar X-Y P-Q quer dizer X-Y e P-Q, ou seja, alguns XY são PQ. Contudo dizer XYP-Q significa X e Y e P-Q, isto é, alguma coisa é X, Y e PQ.

Outra notação necessária a esta abordagem consiste na representação de termos complexos. Portanto, se queremos indicar ambos X e, ou P, ou Q e um dos dois R ou S denotamos por X{P,Q(R,S)}. Sendo seu contrário denotado por x,p(q,rs) que equivale a x,pq,prs.

De posse destas notações De Morgan (2003) introduz os silogismos copulativos. A saber, temos os silogismos disjuntivo, conjuntivo e o *dilemma*. Para o autor, os dois últimos não têm sua distinção bem definida e por isso mesmo acredita ser melhor aplicar o termo argumento disjuntivo incluindo também o *dilemma*. No silogismo conjuntivo os nomes são considerados conjuntamente já no disjuntivo os nomes ou proposições são considerados disjuntivamente.

Tendo, até agora, se limitado a tratar do seu formalismo silogístico apontando, pontualmente em paralelo, para algumas adições ao sistema tradicional, De Morgan (2003) ousa um pouco mais e concretiza, no capítulo VII, a análise crítica do silogismo aristotélico, atacando alguns de seus princípios em favor da validade e enaltecimento de suas idéias. Assim, De Morgan (2003) aponta para a exclusão de certos princípios tradicionais ao lado da inclusão de novas idéias, não deixando de lado a manutenção de outros resultados categóricos.

Para De Morgan (2003, p. 127) o cerne da Lógica Aristotélica é o estudo das formas de inferência. A força do trabalho e do indivíduo, Aristóteles, é tal que seus escritos permaneceram inquestionáveis por muito tempo. De tal modo que, para os seguidores de Aristóteles "everything not used by the teacher was forbidden to the leaner," por isso, "they were adopted, and have in all time dictated the limits of the syllogism." Em suma, "his followers have worshipped his defects as well as his excellencies," confiando cegamente em seu mestre.

Contudo, De Morgan (2003, p. 127) diz: "I cannot find that Aristotle either limits his reader in this manner, or that he anywhere implies that he has exhausted all possible modes of syllogizing." Logo, acredita que é possível otimizar o sistema tradicional assumindo seus defeitos sem desperdiçar seus pontos altos em favor de abarcar outros possíveis modos silogísticos não favorecidos no silogismo aristotélico. Para tanto, é necessário reconhecer a existência de, ao menos, dois princípios tradicionais distintos de exclusão os quais impõem limitações à Lógica Aristotélica. O primeiro refere-se ao *dictum de omni et nullo* e o segundo, trata da exclusão dos termos contrários.

Com respeito ao *dictum*, a crítica reside na condição por ele imposta. A saber, segundo o referido princípio tradicional, em todo silogismo o termo médio deve ser universal em uma das premissas para garantir que a afirmação ou negação na outra premissa possa ser feita sobre alguma ou todas as coisas sobre as quais a afirmação ou negação tem sido feita na primeira.

Com relação ao segundo princípio criticado, De Morgan (2003) diz que sua exclusão do sistema é merecida, haja vista que a existência dos termos contrários se faz necessárias em várias situações silogísticas. Além disso, a supressão dos termos contrários exclui, do sistema silogístico, as proposições E' e I', pois elas não podem ser expressas sem os contrários (x e y) ou a referência a coisas não consideradas (nomeadas) por X e Y. Não obstante, assim como no caso do *dictum*, a supressão destes termos impõe limitações à Lógica.

Contudo, De Morgan (2003) chama atenção para uma possível justificativa desta exclusão. Segundo o autor, Aristóteles considera estes termos como indefinidos em virtude de que estes indicariam, ao mesmo tempo, alguma coisa que existe e não-existe. Para De Morgan (2003), se houvesse a concepção de distinção entre idéia e objetivo (como ele propõe), Aristóteles teria notado que estes termos pertencem igualmente tanto a coisas que (objetivamente) existem quanto a coisas que não-existem. De Morgan (2003, p. 128) cita, **homem,** por exemplo, como pertencente a Aquiles e os sete campeões de Cristandade, se eles já existiram em realidade objetiva ou não; e **não-homem**, pertence, em qualquer caso, aos cavalos deles. Por fim, De Morgan (2003) ainda argumenta que a referida exclusão provavelmente teria sido feita em favor de ter uma noção definida da extensão do campo de argumento, também chamado de universo das proposições.

Vale salientar que, a análise de De Morgan (2003) não se faz em detrimento à Lógica Tradicional já que há um respeito aos padrões arquétipos, porém, De Morgan (2003) assume sua ousadia de enfrentamento em defesa e convicção de suas idéias.

Aparte destas exclusões, De Morgan (2003) relata as formas de declarar no sistema tradicional em paralelo ao seu sistema. Deste modo, mostra a **seleção** do silogismo aristotélico entre os do seu trabalho.

Inicialmente, De Morgan (2003, p. 129) afirma que "the standard of order which is neglected as to the proposition by itself, is adopted in the syllogism in the following manner. The *predicate* of the conclusion is called the *major* term, and the subject of the conclusion the *minor* term." De fato, a ordem dos termos das premissas define a própria conclusão do silogismo e neste processo, o termo médio tem extrema relevância. Das possibilidades de combinação destes termos surgem quatro figuras silogísticas[65], sendo as três primeiras dadas por Aristóteles e a última introduzida por Claudius Galen[66] ([131]-[201]).

Interessante é que De Morgan (2003, p. 130 – 131), em sua análise, resolve apresentar as formas silogísticas categóricas em paralelo com as várias formas silogísticas estudadas até então do seguinte modo:

		Fundamental			
$A_{\prime}\ A_{\prime}\ A_{\prime}$	$A'\ A'\ A'$	Y)Z + X)Y = X)Z	AAA	I	*Barbara*
$O'\ A_{\prime}\ O'$	$A'\ O_{\prime}\ O_{\prime}$	Y:Z + Y) X = X:Z	OAO	III	*Bokardo*
$A_{\prime}\ O'\ O'$	$O_{\prime}\ A'\ O_{\prime}$	Z)Y + X:Y = X:Z	AOO	II	*Baroko*
$I_{\prime}\ A_{\prime}\ I_{\prime}$	$A'\ I_{\prime}\ I_{\prime}$	Y)Z + XY = XZ	AII	I	*Darii*
–	–	Y)Z + YX = XZ	AII	III	*Datisi*

[65] As quatros figuras silogísticas já foram abordadas no capítulo anterior sob a ótica de Whately (1875).
[66] Segundo Parker (2008), Galen ([131]-[201]) foi um intelecto talentoso nascido em Pérgamo (Ásia menor). Além disso, Galen ([131]-[201]) foi professor, farmacêutico e filósofo, estudando, em especial, Aristóteles. Contudo, por volta dos 17 anos foi estudar na escola de medicina de Alexandria, Egito, como seu pai desejava.

–	–	Z Y + Y)X = XZ	IAI	IV	*Dimaris*
–	–	YZ + Y)X = XZ	IAI	III	*Disamis*
$E_{\prime}\ A'\ E_{\prime}$	$A_{\prime}\ E_{\prime}\ E_{\prime}$	Y.Z + X)Y = X.Z	EAE	I	*Celarent*
–	–	Z.Y + X)Y = X.Z	EAE	II	*Cesare*
–	–	Z)Y + Y. X = X.Z	AEE	IV	*Camenes*
–	–	Z)Y + X.Y = X.Z	AEE	II	*Camestres*
$E_{\prime}\ I_{\prime}\ O'$	$I_{\prime}\ E_{\prime}\ O_{\prime}$	Y.Z + XY = X:Z	EIO	I	*Ferio*
–	–	Z.Y + XY = X:Z	EIO	II	*Festino*
–	–	Y.Z + YX = X:Z	EIO	III	*Ferison*
–	–	Z.Y + YX = X:Z	EIO	IV	*Fresison*
			Weakened		
$A_{\prime}\ A_{\prime}\ I_{\prime}$	$A'\ A'\ I_{\prime}$	Z)Y + Y)X = XZ	AAI	IV	*Bramantip*
			Strengthened		
$A'\ A_{\prime}\ I_{\prime}$	$A'\ A_{\prime}\ I_{\prime}$	Y)Z + Y)X = XZ	AAI	III	*Darapti*
$A'\ E_{\prime}\ O_{\prime}$	$E_{\prime}\ A_{\prime}\ O'$	Y.Z + Y)X = X:Z	EAO	III	*Felapton*
–	–	Z.Y + Y)X = X:Z	EAO	IV	*Fesapo*

Deste modo, organiza tais formas de silogismo atrelando suas derivações, formas de expressão, símbolos ordinários, figuras em que estão inseridas e as palavras mnemônicas – chamadas por De Morgan (2003) de *magic words* – também representantes dos modos silogísticos.

Como já mencionado, Aristóteles não concebeu a 4ª figura (Whately igualmente recusa), pois a considerava apenas uma inversão da 1ª. Contudo, De Morgan (2003, p. 131) salienta que "every mood of every figure can (with two exceptions) in one way or another, be reduced to a mood of the first figure" e, neste caso, as consoantes (com exceção da primeira) mostram a maneira de como fazer esta redução a partir das operações de conversão. Provavelmente, pelo mesmo motivo de Aristóteles, a 4ª figura não aparece com freqüência nos trabalhos de Lógica, mesmo após sua introdução por Galen ([131]-[201]).

Realmente, quando aparecem, seus modos silogísticos são tidos como modos indiretos da 1ª figura. Para De Morgan (2003, p. 132 – 133):

> If the order of the premises be inverted, so as to make the first figure appear, the major and minor terms will appear wrongly placed in the conclusion. The words used for these indirect moods of the first figure were usually the first and following ones in
>
> *Barbara, Celarent, Darii, Ferio, Balralip-ton*
> *Celantes, Dabitis, Fapesmo, Frisesom-orum*
>
> the final syllables in Italics being only euphonic.

haja vista que uma transposição das premissas gera a disposição da 1ª figura.

A partir de então, De Morgan (2003) apresenta a sugestão sobre duas figuras subdivididas (1ª e 4ª). Em outras palavras, propõe inclusões ao sistema tradicional mediante a subdivisão das quatro figuras categóricas juntamente com seu uso.

Com este fim, De Morgan (2003) propõe, inicialmente, que as devidas figuras sejam consideradas coincidentes e que a noção arbitrária de arrumação, através dos termos maior e menor, desapareça. Desta afirmação, pode parecer que a união da primeira e quarta figuras também exigiria a união da segunda e terceira. Assim, o primeiro par conteria todos os modos nos quais o termo médio ocupa lugares diferentes nas duas premissas e o segundo par teria os modos nos quais o termo médio tem o mesmo lugar em ambas as premissas. Segundo De Morgan (2003), o modo mais hábil de divisão seria este, onde cada uma das duas subdivisões principais deveria ser ela mesma subdividida em duas. Assim sendo, De Morgan (2003, p. 133) diz que “the root of the distinction of figure is undoubtedly the distinction between the two forms XY and YX, X.Y and Y.X.” Em contrapartida, o referido autor afirma que existem muitos estudiosos que condenam a distinção destas figuras, particularmente, Immanuel Kant (1724-1804) seria um defensor da coincidência das mesmas. Aparte desta discussão, De Morgan (2003) esclarece que a distinção posta é imaterial para seu trabalho em virtude deste se preocupar apenas com o que pode ser deduzido, e até que ponto de quantidade.

Para encerrar a discussão, De Morgan (2003, p. 134 – 136) mostra que assume a manutenção de certos princípios aristotélicos destacando a coleção das figuras silogísticas separadamente em detalhes a fim de observar suas várias peculiaridades. Com respeito a tal disposição temos:

		First Figure.	
Barbara	Y)Z + X)Y = X)Z	*Celarent*	Y.Z + X)Y = X.Z
Darii	Y)Z + XY = XZ	*Ferio*	Y.Z + XY = X:Z
		Second Figure.	
Cesare	Z.Y + X)Y = X.Z	*Camestres*	Z)Y + X.Y = X.Z
Festino	Z.Y + XY = X:Z	*Baroko*	Z)Y + X:Y = X:Z
		Third Figure.	
Darapti	Y)Z + Y)X = XZ	*Felapton*	Y.Z + Y)X = X:Z
Disamis	YZ + Y)X = XZ	*Bokardo*	Y:Z + Y)X = X:Z
Datisi	Y)Z + YX = XZ	*Ferison*	Y.Z + YX = X:Z
		Fourth Figure.	
Bramantip	Z)Y + Y)X = XZ	*Camenes*	Z)Y + Y.X = X.Z
Disamris	ZY + Y)X = XZ	. . . .	
	Fesapo	Z.Y + Y)X = X:Z	
		Fresison	Z.Y + YX = X:Z

Adiante e ainda em respeito à Lógica Tradicional, De Morgan (2003, p. 136) salienta as regras de Henry Aldrich[67] ([1648]-1710) versificadas da seguinte forma:

> Distribuas medium: nec quartus terminus adsit:
> Utraque nec praemissa negans, nec particularis:
> Sectetur partem conclusio deteriorem;
> Et non distribuat, nisi cum praemissa, negetve.

Os versos acima sugerem seis regras comentadas por De Morgan (2003). A primeira regra diz respeito à distribuição do termo médio. Neste sentido, De Morgan afirma que dos três termos do silogismo apenas dois devem aparecer na conclusão. A segunda regra refere-se à distribuição universal do termo médio sempre em uma das premissas. A terceira regra consiste da não existência de silogismo aristotélico quando ambas as premissas são negativas. Similarmente, a quarta regra alude ao fato de que ambas as premissas não devem ser particulares. Com relação ao verso *Sectetur partem conclusio deteriorem*, podemos deduzir que o negativo deve ser compreendido como mais fraco ou mais baixo que o afirmativo, da mesma forma que o particular é tido como mais fraco que o universal; assim sendo, se há uma premissa que é negativa ou particular, a conclusão é tão fraca quanto negativo ou como particular. Por fim, a sexta regra traz que a conclusão não será negativa se não houver uma premissa negativa e, de modo análogo, a conclusão não será afirmativa sem que haja uma premissa afirmativa.

Note que a partir da primeira regra as demais se seguem naturalmente. Inclusive, creditamos que algumas delas poderiam ser fundidas. Por exemplo, a primeira com a segunda, a terceira com a quarta, bem como, a quinta com a sexta. Entretanto, vale salientar que a ordem que De Morgan (2003) aborda as cláusulas da poesia, não é a ordem de apresentação.

De Morgan (2003) comenta que a primeira regra é verdadeira em seu sistema, desde que os termos contrários sejam admitidos. Assim, quando ela afirma que existem três termos no silogismo e que apenas dois deles aparecem na conclusão em virtude do termo médio ser eliminado, está falando de um caso particular do silogismo de De Morgan o qual passa a ser abarcado universalmente se este critério for admitido tanto para os termos quanto para seus contrários. A possibilidade desta admissão, segundo De Morgan, não fere a regra como

[67] De acordo com Connor e Robertson (2005c), Aldrich ([1648]-1710) foi um teólogo e filósofo inglês que também se interessou por matemática, música, arquitetura e tarefas eclesiásticas. Dentre suas publicações está um compêndio sobre lógica intitulado *Artis logicae* (1691) que, por sua vez, tornou-se um texto de referência sobre o assunto na Inglaterra durante cerca de 150 anos. A partir de então foi superado por livros mais modernos como o de Richard Whately (1787-1863), em 1826. Não obstante, até mesmo Whately (1787-1863) utilizou a obra de Aldrick ([1648]-1710) como referência para seu trabalho.

concebida se admitimos corretamente a concepção de contrário como um nome ou objeto, como explanado anteriormente. Relembramos que sua omissão, por Aristóteles, explica-se por sua consideração como um nome indefinido ou impreciso.

Com relação à segunda regra, a validade no sistema de De Morgan (2003) é suprimida em virtude de que ele não vê motivo para usar o termo médio aplicado universalmente de modo distinto que particularmente. Para De Morgan (2003) este termo é sempre distribuído, seja no caso particular seja no caso universal. Assim, ao dizer **Alguns alunos são estudiosos**, ele distribui certos alunos entre os estudiosos e se fossem **Todos os alunos são estudiosos**, todos eles seriam distribuídos. Logo, na concepção do autor, esta regra deve ser verdadeira sem restrição a quantidade. Porém, há uma ressalva desta regra quando os termos contrários são admitidos, pois, neste caso, a veracidade não é universal. Segundo De Morgan (2003, p. 137), a exceção pode ser vista em: A, A' I' ou X)Y + Z)Y = *xz* que quer dizer que: se todos os X forem Y e todos os Z forem Y então existem coisas que não são X nem Z, a saber, as que não são Y, mas, aqui o termo médio não está no universo da proposição. Além disso, De Morgan (2003, p. 138) sugere que a referida regra seja substituída por: "the distribuas medium is, that all pairs of universals are conclusive, but a universal and a particular require that the middle term should also be a universal and a particular, that is, universal in one and particular in the orther."

Enquanto na terceira regra não há silogismo aristotélico, De Morgan (2003) salienta que no sistema em que as contrárias são admitidas existem oito silogismos nos quais ambas as premissas são negativas. Isto não quer dizer que de um par de premissas negativas possamos obter conclusão alguma, mas se ao menos uma delas for substituída com o termo contrário, a conclusão é alcançada.

Assim como no sistema aristotélico a quarta regra deve ser preservada no sistema de De Morgan (2003). Em outras palavras, o fato de exigir que ambas as premissas não sejam particulares relaciona completamente que a quantidade deve ser preservada em todo sistema que não admite nenhuma relação definida.

Já a quinta regra deve ser preservada no sistema de De Morgan (2003) quando os termos contrários forem introduzidos. Já no caso das negativas serem concebidas, a regra dita com uma premissa negativa dá uma conclusão negativa e duas negativas gera uma conclusão negativa.

Finalmente, os comentários de De Morgan (2003) com relação a sexta regra residem no fato de que a distinção entre positivas e negativas só aparece quando os termos contrários são introduzidos. Além disso, tem-se que nenhum termo será universalmente tomado na conclusão se não for tomado nas premissas, caso contrário, teríamos uma conclusão a partir do que não foi introduzido nas premissas.

Destarte, para encerrar, com mais clareza, a análise da Lógica Aristotélica, De Morgan (2003) faz uso das regras de Alderich ([1648]-1710) como representante do sistema tradicional e tece comentários com relação à validade em seu sistema. A forma proposta propicia uma visão do que De Morgan (2003) aceita ou não da Lógica Aristotélica em seu sistema, isto é, a partir daí percebemos suas manutenções, exclusões e inclusões propostas ao sistema tradicional em favor da otimização de suas idéias. Note que, neste cenário de discussão, o ponto-chave das observações diz respeito à exclusão dos termos contrários feita por Aristóteles.

Parece que ao analisar as regras aristotélicas, De Morgan (2003) constrói com mais solidez seu sistema ou caminha para a solidificação do mesmo. Por este motivo, estabelece no próximo capítulo (VIII) a essência do *Formal Logic* ao abordar o **silogismo numericamente definido**, testificando as inovações de De Morgan (2003) em direção a formulação da Lógica. Por este motivo, o abordaremos paulatinamente.

Até então, a única quantificação dos nomes (ou termos) era feita sobre dois aspectos gerais: **todos** e **alguns** (um ou mais e talvez todos). Nesta última, notamos uma certa ambigüidade e, para De Morgan, seria uma limitação imposta à Lógica se somente estes dois aspectos forem levados em consideração.

Portanto, a fim de formular uma expansão à Lógica e para tentar quebrar a impressão que ela esteja estabelecida sobre bases imprecisas – com suposições imperfeitas, ambigüidades e conhecimentos não apurados sobre as formas construídas – De Morgan propõe uma quantificação dos termos a partir de seu silogismo numericamente definido. Este, por sua vez, consiste na definição de quantas coisas precisamente estamos falando num certo discurso através da atribuição de um valor numérico ao termo representante de tal.

Assim, De Morgan faz uso das **proposições numericamente definidas** como sendo aquelas em que se atribui um valor numérico que quantifique seu termo de acordo com sua afirmação, e utiliza-se destas para compor seu silogismo. Deste modo, um **silogismo numericamente definido** é aquele em todas as suas proposições são numericamente definidas (simples ou compostas, convertíveis ou não).

Um exemplo de uma proposição numericamente definida é apresentado por De Morgan (2003, p. 142):

> Suppose the whole number of Xs and Ys to be known: say there are 100Xs and 200Ys in existence. Then an affirmative proposition of the sort in question is seen in ´45Xs (or more) are each of them one of 70Ys´: and a negative proposition in ´45Xs (or more) are no one of them to be found among 70Ys´.

Neste cenário vale destacar que o próprio De Morgan afirma que **definido** para ele faz referência ao menor limite (ínfimo do cálculo ou análise matemática). Assim, numa quantidade atribuída a um termo podem ser considerados mais, como no exemplo 45 é o menor limite da quantificação. Vale salientar que tudo está sob um grau de precisão **definido** por De Morgan.

Observe que do mesmo universo quantificado por De Morgan podemos retirar as mesmas conclusões mediante outras quantificações. Logo, se é conhecido o número total de elementos de X e Y, ou seja, se quantificamos o universo do discurso como sendo 100 elementos X e 200 Y, então uma proposição afirmativa seria: 60X (ou mais) são cada um deles um dos 112Y; e uma proposição negativa: Nenhum dos 60X (ou mais) estão entre os 112Y.

Daí, verificamos que um número ou quantidade é que **define** um termo (nome). Entretanto, ao considerar a quantificação atribuída ao termo dentro de seu universo, De Morgan não está considerando uma seleção dos elementos, ou seja, ao tomar os 45 X, não se está falando de alguns com propriedades distintas dos demais 55X e sim tratando de qualquer um dos vários X. Analogamente, ao considerar os 60X podem ser quaisquer dentre os 100X e não alguns com propriedades específicas e diferentes dos demais 40X. A este respeito De Morgan (2003, p. 142) esclarece que “this degree of definiteness is one step higher than which I here propose to consider […].” Contudo, De Morgan não fica preso a números em sua quantificação e passa a atribuir símbolos que representem estas quantidades nas proposições.

Vejamos o exemplo citado por Macfarlane (1916, p. 29) como representante da inovação pertinente ao sistema silogístico numericamente definido por De Morgan:

> Suppose that the number of the *M´s* is *m*, of the *M´s* that are *A´s* is *a*, and of the *M´s* that are *B´s* is *b*; then there are at least (*a*+*b*-*m*) *A´s* that are *B´s*. Suppose that the number of souls on board a steamer was 1000, that 500 were in the saloon, and 700 were lost; it follows of necessity, that at least 700 + 500 – 1000, that is, 200, saloon passengers were lost.

Analogamente, no exemplo de De Morgan, se 45 define os X que estão entre os 70Y e se cada X é nomeado M, Y são N, e o resto dos X e Y são respectivamente P[68] e Q, então todo X é ou M ou P e todo Y é ou N ou Q. De modo mais geral, tomando X, Y e Z como sendo os termos de um silogismo, suas respectivas quantificações podem ser representadas respectivamente por: ξ o número de X, η o número de Y, ζ o número de Z e, por fim, υ representante do número de exemplares do universo. Desta simbologia, De Morgan propõe as notações: mXY e mX:nY, a primeira denota uma das duas proposições, ou m X são encontrados entre os Y, ou m Y são encontrados entre os X; já a segunda, denota uma das proposições, ou existem m X que não são qualquer um dos n Y, ou n Y que não são qualquer um entre os m X.

Se conhecermos apenas η, dos quatro símbolos propostos, podemos deduzir três premissas:

$$mXY + nYZ$$
$$mXY + nZ{:}sY$$
$$mX{:}rY + nZ{:}sY$$

Sobre a primeira, deduzimos que entre os n Y encontramos m X e n Z, donde tem-se que nem m nem n excedem n. Daí, obtemos a igualdade:

$$mXY + nYZ = (m + n - n)\ XZ$$

Com relação à segunda, temos duas possibilidades: uma é que m e s juntos excedem n e, então, $(m + s - n)$ dos Y tem propriedades em comum aos X e a n Z. Assim, surge a igualdade: $mXY + nZ{:}sY = (m + s - n)X{:}nZ$; a outra é que $n + s$ são maiores que n. Neste caso, há s Y que não são nenhum dos Z, haja vista que n é maior que $n - s$, que corresponde ao numero de Y restante, isto é, a $n - (n - s)$. Assim, a segunda premissa é igual a: $mXY + nZ{:}sY = mX{:}\ (n + s - n\ )Z$.

A respeito destas, De Morgan salienta, no apêndice de seu trabalho, que será visto o modo como todo silogismo aristotélico pode ser construído sobre o primeiro caso e a primeira inferência do segundo. Além disso, que nenhuma inferência pode ser deduzida da terceira, haja vista que ambas as premissas são negativas e irredutíveis a uma forma positiva pelo uso de contrários. Revela-se, neste ponto, uma preocupação do autor em mostrar como o

[68] Note o símbolo P já utilizado, com significado diferente, várias vezes por De Morgan aqui aparece com mais um sentido (representando uma quantidade numérica que quantifica o termo Y).

silogismo aristotélico se encaixa em sua proposta e como a Lógica Aristotélica é válida em seu sistema.

Agora, se υ representa o número de exemplares no universo, ξ e η sendo o número de X e Y respectivamente, podemos gerar as seguintes notações:

ξ é maior que η	$(\xi - \eta)\mathrm{X}: \eta\mathrm{Y}$	ou $(\xi - \eta)\mathrm{X}y$
η é maior que ξ	$(\eta - \xi)\mathrm{Y}: \xi\mathrm{X}$	ou $(\eta - \xi)\mathrm{Y}x$

$m + \eta$ maior que ξ e que η dá

$$m\mathrm{X}: \eta\mathrm{Y} = (m + \eta - \eta)\mathrm{X}: \eta\mathrm{Y} = (m + \eta - \xi)\mathrm{Y}: \xi\mathrm{X}$$

Delas, obtemos a formalização numérica das proposições categóricas como já postas (com sub e supercontrárias) e a partir de então, pode-se tratar qualquer silogismo composto por tais proposições. Vejamos como De Morgan (2003, p. 151) faz a representação das suas proposições categóricas a partir desta notação:

$\mathrm{A}_{\prime}$	$\mathrm{X})\mathrm{Y} = \xi\mathrm{XY}$	$= (\upsilon-\eta)yx$	$= \xi\mathrm{Y}: (\upsilon-\xi)x$
$\mathrm{O}_{\prime}$	$\mathrm{X}:\mathrm{Y} = m\mathrm{X}: \eta\mathrm{Y}$	$= m\mathrm{X}y$	$= m\mathrm{y} : (\upsilon-\xi)x$
A'	$\mathrm{Y})\mathrm{X} = \eta\mathrm{XY}$	$= (\upsilon-\xi)xy$	$= \eta\mathrm{X}: (\upsilon-\eta)y$
O'	$\mathrm{Y}:\mathrm{X} = m\mathrm{Y}: \xi\mathrm{X}$	$= m\mathrm{Y}x$	$= mx: (\upsilon-\eta)y$
$\mathrm{E}_{\prime}$	$\mathrm{Y}.\mathrm{X} = \xi\mathrm{X}y$	$= \eta\mathrm{Y}x$	$= \xi y: (\upsilon-\xi)x = \eta x : (\upsilon-\eta)y$
$\mathrm{I}_{\prime}$	$\mathrm{XY} = m\mathrm{XY}$	$= m\mathrm{X}: (\upsilon-\eta)y = m\mathrm{Y}: (\upsilon-\xi)x$	
E'	$x.y = mxy$	$= mx: \eta\mathrm{Y}$	$= my: \xi\mathrm{X}$

Ao tratar as proposições sob estas formulações, De Morgan ainda observa que o exame das leis fundamentais de inferências silogísticas não precisa ser feito sobre outras formas que não sejam as positivas. Além disso, De Morgan (2003, p. 161) apresenta todos os casos de silogismo representados a partir da formulação destas proposições. Como exemplo, temos:

I.	$m = n$	$\mathrm{A}'\mathrm{I}_{\prime}\mathrm{I}_{\prime}$
	$m = n, \quad n = \zeta$	$\mathrm{A}'\mathrm{A}'\mathrm{A}'$
	$n = n$	$\mathrm{I}_{\prime}\mathrm{A}'\mathrm{I}_{\prime}$
	$n = n, m = \xi$	$\mathrm{A}_{\prime}\mathrm{A}_{\prime}\mathrm{A}_{\prime}$
	$m = n, n = n$	$\mathrm{A}'\ \mathrm{A}_{\prime}\ \mathrm{I}_{\prime}$
	$m = \xi, n = \zeta$	$\mathrm{A}_{\prime}\mathrm{A}'\ \mathrm{I}_{\prime}$

Tais silogismos de quantidade numérica, cujas condições de inferência pertencem a todos os casos imagináveis, são representados pelas formas gerais cujos símbolos numéricos são tomados da Álgebra. De uma outra forma, este exemplo aliado aos demais apresentados por De Morgan (2003), estabelecem a completude de seu sistema de silogismo.

Resumindo, os dois primeiros capítulos sobre silogismo (V e VI) tratam do formalismo silogístico elaborado por De Morgan o qual aponta, pontualmente em paralelo, para algumas adições ao sistema tradicional. Já o próximo capítulo (VII) concretiza a análise do silogismo aristotélico atacando alguns de seus princípios (como o *dictum*). Por fim, o capítulo VIII do *Formal Logic* (1847) testifica as inovações do formalismo de De Morgan (2003) em relação à Lógica mediante o silogismo numericamente definido. A este respeito vale salientar que as novidades residem na quantificação dos termos a serem manipulados no silogismo a fim de obtermos uma dada conclusão, mas não há uma elaboração de um método geral para obtenção dos resultados, como veremos que Boole conseguiu.

Ainda falando do conteúdo do *Formal Logic*, seu nono capítulo aprecia a aplicabilidade da Lógica e do seu sistema ao estudo da probabilidade, mostrando que esta nova Lógica caminha para a acepção que a mesma possui várias aplicações.

Infelizmente, é a inovação citada e almejada por De Morgan, a pivô da controvérsia, mencionada anteriormente, com o filósofo Hamilton. A este respeito Macfarlane (1916) entende que De Morgan verdadeiramente acreditou que a quantificação proposta por ele era de caráter diferente da proposta por Hamilton. Entretanto, Hamilton insistiu em afirmar que houve plágio da parte de De Morgan, tanto que, por anos, a polêmica foi abordada nas colunas do periódico *Athenaum*. Além disso, o próprio De Morgan fecha o seu livro com um apêndice abordando justamente tal polêmica.

4.4 RECAPITULANDO E COMENTANDO

Diante do que foi exposto a respeito dos principais capítulos do *Formal Logic* (1847), isto é, da essência da obra, remetemo-los agora ao prefácio do livro, onde De Morgan posiciona-se com propriedade quanto aos aspectos mais notórios de seu trabalho. Tomamos também a liberdade de comentar, em paralelo, os itens enfaixados pelo autor frente ao que constatamos ao analisar a obra, confrontando o que ele almejava e o que realmente foi posto nela. Assim sendo, vejamos os seguintes aspectos:

1) Ressalta que "the system given in this work extends beyond that commonly received, in several directions" e, deste modo, enfatiza que sua lógica expande a tradicionalmente aceita. (DE MORGAN, 2003, p. iii).

Este aspecto é verificado a partir do novo silogismo numérico proposto por De Morgan, bem como, na quantificação do predicado. Além disso, apenas no que diz respeito à formulação da Lógica. Neste, a expansão que pode aqui ser atribuída ao trabalho de De

Morgan frente a Lógica Aristotélica vigente, refere-se a mais uma nova roupagem dos elementos arquétipos a partir de símbolos e manipulações simbólicas. Deste modo, ao observamos a Lógica posta no *Formal Logic* e ao mesmo tempo a presente na obra de Whately, a clara distinção entre elas diz respeito à formalização da Lógica Aristotélica e a introdução da quantificação do predicado atrelada a elaboração do silogismo numérico. Enquanto o segundo permanece fiel ao discurso de Aristóteles, o primeiro prefere atribuir aos elementos tradicionais símbolos e manipulações formais no tocante a manipulação dos resultados.

2) Assume o papel da **copula** (*is* e *is not*) como sendo um termo abstrato em seu trabalho. Esta copula implica a agregação ou dissociação entre duas idéias, que são expressas por nomes (essenciais às proposições e ao silogismo), com símbolos específicos. Analogamente, *are* e *are not* são sinais que se referem à proposição afirmativa ou negativa.

3) Define precisamente o tratamento dos nomes, em sua Lógica Formal, ao afirmar que eles estão sempre em conexão com seu contrário ou contraditório (aqui considerados idênticos). Deste modo, alude para a utilização de um símbolo X e seu complemento x (como Boole usa $\overline{X}$). Neste sentido, De Morgan chega a oito formas distintas de predicação, entretanto, estas passam a ser seis, em virtude de duas delas serem consideradas idênticas.

Neste ponto, também ressalva que os escritores de Lógica, desde Aristóteles, já deram um pequeno passo quando assumiram letras como A, E, I e O para as proposições categóricas, mas lembra também que isto pode ser melhorado mediante sua proposta, a qual incrementa esta intenção com a quantificação dos termos.

4) De Morgan trata as proposições complexas como sendo a união de duas simples. Afirma que ao introduzir as proposições contrárias, o número de formas silogísticas aumenta para 32.

Defende o abandono da distinção tradicional entre proposições contrárias e contraditórias e as adota como sinônimas. Com isto, traz novas relações de oposição que não aparecem na Lógica Tradicional vigente como, por exemplo, no livro de Whately. Surge então, as sub e supercontrárias e seus símbolos como $A_{\prime}$ e $A^{\prime}$.

5) Enfatiza que sua notação simplificada permite representar todo silogismo através de três letras. A exemplo, temos que De Morgan (2003, p. iv) acrescenta que estes símbolos, ao serem investigados, evidenciam os seguintes aspectos: “What syllogism is represented; whether it be valid or invalid; how it is at once to be written down; what axiom the inference

contains, or what is the act of the mind when it makes that inference (chapter XIV).” Assim, faz sua notação respeitando o modo tradicional a partir de sua inclusão no novo sistema.

6) Nomes compostos são considerados quando a composição é conjuntiva ou disjuntiva. Silogismos compostos são tratados de forma a serem redutíveis aos comuns através da inversão destes nomes compostos. Logo, assume a flexibilidade da estrutura silogística, como Boole, mas não chega a desenvolver um método geral como Boole conseguiu (por exemplo, de eliminação do termo médio). Daí surgem as proposições complexas (no quarto capítulo).

Ainda com respeito ao tratamento das proposições, De Morgan constrói operações de conversão e as representa pelos símbolos S, P, F e T. Com isto, estabelece a tabela de relações entre as mesmas. Sobre este ponto, não podemos dizer que consiste numa inovação, propriamente dita, ao modo tradicional, mas uma forma diferente de fazer. Assim, enquanto Whately utiliza três operações de conversão: simples, contraposição e limitação; De Morgam faz uso de quatro. Desta forma, De Morgan tem mais de inferências, mais possibilidades de conversão de proposições e, conseqüentemente, abarca mais silogismos.

Chamamos atenção aqui para uma fragilidade da proposta de De Morgan a qual consiste no uso do símbolo P que aparece como representante de uma operação de conversão, outras vezes ao longo do trabalho, com diferentes significados. A saber, P também aparece como representante de uma proposição complexa (união de duas simples através do sinal +), como o contrário de I (impossível), como um nome qualquer em conjunção de outros e, por fim, como um quantificador do termo Y.

Outros símbolos surgidos são: D (representante de proposições complexas idênticas) e C (para proposições complexas contrárias).

Outro ponto relevante é uma sucinta analogia com a Aritmética ao definir a palavra, contrária, pelo sinal – e a palavra, idêntica, pelo sinal + (na regra geral da página 89). Porém, estes mesmos sinais também são ambíguos no formalismo, pois logo em seguida, aparecem como indicando operações imprecisas de retirada de X (ou troca por *x*) e acréscimo de X (troca de *x* por X), respectivamente.

7) Contudo, o aspecto primordial diz respeito à investigação da teoria dos silogismos numéricos. Como vimos, nela é feita uma inferência sob a hipótese de quantidade numérica em ambos os termos da proposição.

Este seria o ponto mais próximo à relação de Matemática e Lógica. Contudo, como vimos, De Morgan não chega a matematizá-la por meio de seu formalismo e sim se limita à quantificação dos termos perante sua análise. Neste aspecto seu trabalho claramente condiz com sua posição na controvérsia de Hamilton e o coloca como certo na polêmica, ou seja, De Morgan propôs a quantificação dos termos na Lógica.

Ainda a respeito do silogismo de um modo geral, De Morgan (1847) traz uma inovação ao tradicional ao propor começar a abordagem por proposições complexas (mais encontradas no dia-a-dia) e não por simples (decodificadas do cotidiano).

Em seu formalismo, mais uma inovação são os diagramas de análise com barras preenchidas ou não.

8) Com respeito à aplicabilidade, De Morgan (2003, p. v) fala que "the old doctrine of modals is made to give place to the numerical theory of probability" e, ainda que "I mean that I should maintain, against those who would exclude the theory of probability from logic." Deste modo, ao acreditar na inclusão da teoria da probabilidade na Lógica, De Morgan revela a defesa de uma lógica com diferentes aplicações. Contudo, vale salientar que ele não assume que a Lógica seja interpretada sob esta teoria e, sim, apenas aplicada a ela.

9) De Morgan (2003, p. v) explana em direção a capacidade da Lógica estudar as operações da mente ao dizer: "I have, of course, been obliged to express, in my own manner, my own convictions on points of mental philosophy ... my views of the phenomena of thought, or others, be made the basis of the explanation," trazendo, deste modo, esta competência para seu trabalho. Vale ressaltar que este mesmo pensamento envolveu o trabalho de Boole, mas com outra roupagem.

Entretanto, esta intenção não se mostra explícita em momento algum da obra, como Boole o fez.

10) Por fim, aparte da discussão inerente ao eixo lógico, De Morgan deixa de lado o prumo principal de sua discussão no *Formal Logic* (1847) e aborda a controvérsia com Hamilton. Isto, por sua vez, revela a preocupação ou o intenso incômodo de De Morgan com a questão a ponto de abordá-la em seu trabalho.

O fato é que, independente de ter ou não razão, parece que esta confusão feriu De Morgan profundamente quanto ao encantamento sentido pelo assunto **Lógica**. Como conseqüência da decepção e por não gostar – como deixa transparecer em suas correspondências – de envolver-se em controvérsias (assim como Boole), De Morgan abandonou a Lógica. Mais ainda, a análise do conteúdo de sua obra nos leva a concordar com a concepção de Kneale, M. e Kneale, W. (1980) ao creditar que esta interrupção não seria apenas de caráter sentimental, mas sim, devida ao reconhecimento de que seu sistema, embora contribuinte, não era tão brilhante quanto esperava.

De fato, as entrelinhas do texto posto no *Formal Logic* (1847) revelam um sistema que toma forma mais como arrumação do sistema tradicional do que uma inovação propriamente dita. Neste sentido, os aspectos inovadores mais notórios se restringem apenas ao silogismo numericamente definido, entretanto, a Matemática deste se limita apenas a uma quantificação dos termos, não se concretizando como um cálculo matemático como Boole fez. Além disso, elementos como novos símbolos e a admissão de aplicabilidade da Lógica se apresentam como inovadores do trabalho, mas limitados em sua própria estrutura básica e por sua Lógica Formal.

Portanto, cremos que esse reconhecimento pode ter emergido provavelmente pelo fato de De Morgan achar o outro sistema contemporâneo (de Boole) mais completo. Neste sentido, Benjamin Peirce (1809-1880) (apud KNEALE, M.; KNEALE, W., 1980, p. 434) fala do trabalho de De Morgan:

> Este sistema ainda deixa alguma coisa a desejar. Além disso, a álgebra lógica de Boole tem uma tal beleza que vale a pena averiguar se não pode ser generalizada a todo domínio da lógica formal, em vez de ser restrita à parte mais simples e menos útil da disciplina, a lógica dos termos absolutos, que, no tempo em que ele escreveu, era a única parte conhecida da lógica formal [...].

Porém, a genialidade de De Morgan quanto a Lógica ficaria apenas adormecida, aflorando, posteriormente, a partir da inspiração suscitada pelo contato com os trabalhos de Boole referentes à Lógica. Tanto o foi que Boyer (1974) diz que De Morgan foi um dos que continuou o trabalho de Boole.

Deste modo, subseqüente à publicação do *Formal Logic* (1847) e ao encerramento da disputa com o filósofo Hamilton, De Morgan inicia o trabalho no ramo da Lógica de Relativos, mediante contribuições aos *Transactions* da *Cambridge Philosophical Society*. De acordo com Macfarlane (1916, p. 30) “this is the true field for the logician of the twentieth century” cuja maior importância está no melhoramento da linguagem e do processo de pensamento o qual ocorre a todo tempo na vida prática. Em suma, exemplificamos a importância das famosas leis de De Morgan as quais são explanadas por Boyer (1974, p. 430) nas seguintes palavras: “Se x e y são subconjuntos de um conjunto S, então o complementar da união de x e y é a intersecção dos complementares de x e y, e o complementar da intersecção de x e y é a reunião dos complementares de x e y.” Traduzindo-as simbolicamente Kneale, M. e Kneale, W. (1980, p. 415) apresentam:

$$\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}$$

$$\overline{x + y} = \overline{x}\,\overline{y}$$

onde $\overline{x}$ é composto de todos os elementos que não pertencem a classe x e, deste modo, representa o complemento da classe x. Os referidos autores ainda acrescentam que estes dois princípios, designados por leis de De Morgan, são derivados de uma tese de A. Geulincx (1624-1669)[69] referente à Lógica Proposicional. Nas palavras de Kneale, M. e Kneale, W. (1980, p. 319) esta teoria diz que "é necessário e suficiente para a verdade de uma proposição disjuntiva que uma das suas partes seja verdadeira."

Realmente, a partir de então, De Morgan alça vôos ainda mais altos e, são estes trabalhos posteriores que consolidam o seu papel importante na história da Lógica Matemática.

Voltando ao ano de 1847 e perseguindo a trilha da renovação da Lógica enfatizamos que, juntamente com o *Formal Logic* (1847), surge o livro *The Mathematical Analysis of* Logic (1847) e, posteriormente, a obra An *Investigation of the Laws of Thought* (1854) de George Boole. Esta, por sua vez, é considerada a obra prima do referido autor e concretiza o seu sistema lógico inaugurado em 1847. Para a apreciação do seu conteúdo reservamos o capítulo seguinte.

[69] Filósofo e lógico, professor da Universidade de Louvain, na Bélgica (durante 12 anos) e, posteriormente, professor da Universidade de Leiden, Holanda. Geulincx escreveu todas as suas obras em latim e morreu antes que seu principal livro, *Ethica e Metaphysica,* fosse publicado. (GEULINCX, 2008).

CAPÍTULO 5: A LÓGICA DE GEORGE BOOLE

Foto 10 – Boole

Fonte: The Internet ..., (2008)

5 A LÓGICA DE GEORGE BOOLE

5.1 CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

Augustus de Morgan e George Boole publicaram seus livros sobre Lógica quase que simultaneamente, mas por caminhos diversos. Ambos almejavam trazer uma nova visão para esta ciência. A fim de elucidarmos suas semelhanças e diferenças, bem como, o motivo de um deles ter sido considerado superior ao outro, destinamos esta parte da pesquisa para conhecer o segundo deles, George Boole. Para tanto, além das fontes que serão citadas ao longo deste capítulo, teremos como fonte primordial o livro de MacHale (1985) e o de Sousa e Fossa (2007), especialmente, no que diz respeito aos dados biográficos e a Lógica do primeiro livro. Buscamos mostrar as novas nuances trazidas à Lógica, advindas da matematização proposta por Boole em paralelo à formalização defendida por De Morgan, à luz do padrão aristotélico defendido por Richard Whately, ainda no século XIX.

5.2 INFORMAÇÕES BIOGRÁFICAS DE GEORGE BOOLE

Foto 11 – George Boole.
Fonte: Kerber (2004).

Fruto do casamento – em 1806 – do sapateiro John Boole (1777-1848) e Mary Ann Joyce (1780-1854), nasceu aos 02 de novembro de 1815, na cidade inglesa de Lincoln[70],

[70] Lincoln era uma cidade bucólica, localizada no norte da Inglaterra (ver Mapa 2), que foi colonizada por romanos em 48 a.C. e cresceu em torno do comércio e exportação de lã. Posteriormente, desenvolveu atividades relacionadas à olaria, ferraria, joalheira e sapataria, bem como, as profissões de açougueiro, padeiro, cervejeiro e

George Boole (ver Foto 11). Posteriormente, a família foi completada com o nascimento os irmãos Mary Ann (1818-1887), William (1819-1888) e Charles (1821-1902).

Foto 12 – casa de Boole em Lincoln
Fonte: BBC (2008).

Em meio a um ambiente familiar que primava pelo respeito, tolerância e, particularmente, amor à ciência, cresceu o jovem Boole. De fato, muitas destas influências familiares revelam-se inerentes a sua personalidade. No tocante à ciência, por exemplo, Boole inspirou-se e foi influenciado por seu pai – um verdadeiro apaixonado por estudos, especialmente, os relacionados a instrumentos ópticos, a ponto de abandonar sua loja de botas e sapatos para trabalhar em suas pesquisas, algumas, inclusive contando com a participação de Boole.

Além da instrução obtida do seu pai, Boole teve pouca escolaridade formal. À parte desta instrução, gostava muito de ler e dominou com pouco auxílio várias línguas modernas e clássicas. Ao longo de sua vida, Boole aprendeu grego, latim, francês, alemão e italiano. Sob este aspecto, Sousa (2005) ressalva sua inclinação e habilidade às atividades clássicas em virtude de ter escrito e traduzido algumas poesias. Por infortúnio, um destes trabalhos foi o centro de uma controvérsia, mas ao mesmo tempo, testificou a genialidade do jovem Boole. Trata-se, pois, da tradução do poema grego *Ode à Primavera*, de Meleager[71], publicada no jornal local, o *Lincoln Herald*. O trabalho foi assinado apenas com as letras **G.B.**, mas o editor do jornal acrescentou a informação que a autoria era de um jovem de quatorze anos. A polêmica girou justamente em torno desta questão. De fato, as páginas do jornal publicaram

---

carpinteiro. Não obstante, em meio às transformações inerentes ao século XIX, Lincoln participou das mudanças acarretadas pela revolução industrial e tornou-se um pólo industrial, a exemplo da metrópole londrina. Conseqüentemente, também sofreu as mudanças que isto acarreta. De fato, diversas firmas de engenharia foram abertas acompanhadas pelo inevitável êxodo rural. Em decorrência, também sofreu com o maior nível de poluição, com a superpopulação e a insalubridade. Para mais detalhes, ver Lambert (2003) ou Enciclopédia, (1962).

[71] Escritor grego do primeiro século antes de Cristo.

críticas da parte de um cidadão de Bracebridge[72], que assinava como P.W.B. Este, por sua vez, não acreditou que a tradução fosse da autoria de um jovem de tão tênue idade. Embora o trabalho de Boole tenha sido eventualmente reconhecido, a polêmica parece tê-lo marcado, pois a partir de então ele se mostrou receoso de envolver-se em disputas.

Ao longo de sua vida Boole teve um verdadeiro amor à ciência junto com uma legítima ambição de obter uma vida financeiramente melhor para si e a sua família. Em razão do amor pela ciência, mencionamos, inicialmente, a participação nas atividades do pai, seu gosto pela leitura e o envolvimento com as atividades literárias. Com relação ao anseio em melhorar financeiramente, destacamos que Boole alimentou o desejo de seguir uma carreira religiosa. Um dos motivos, por exemplo, é o fato dele ter se instruído em algumas das línguas citadas acima. Contudo, este anseio a tal profissão não chegou a concretizar-se por dois motivos. Primeiramente, pelo fato de Boole questionar algumas doutrinas da igreja anglicana[73] – igreja oficial da Inglaterra na sua época. Especialmente, duvidava da doutrina da Santíssima Trindade que considera o Pai, o Filho e o Espírito Santo como uma unidade. O segundo motivo é apontado por MacHale (1985) como sendo a falência dos negócios de seu pai. Isto porque, diante desta situação, Boole, como filho mais velho, sentiu a necessidade de ajudar. Para tanto, aos 16 anos, tinha que seguir em busca de uma profissão mais imediata. De fato, Boole tornou-se responsável pelo sustento tanto dos pais quanto dos três irmãos menores.

Assim sendo, em julho de 1831, Boole passou a ser assistente na pequena escola particular do Sr. Heigham, localizada em Doncaster (ver Mapa 2), a algumas milhas ao norte de Lincoln. Uma das vantagens oriunda de sua primeira experiência no magistério consiste no avanço proporcionado nos rudimentos da Matemática, em razão dos auxílios nas aulas do professor Heigham. Outro aspecto relevante reside no respeito dos alunos, conquistado por Boole, não somente pela dedicação mostrada no ensino de Matemática, mas especialmente, pela forma humanística com que encarou essa tarefa.

---

[72] Uma pequena cidade ao sul de Lincoln.

[73] Boole teve inclinações ao Unitarismo, uma seita caracterizada pela rejeição a doutrina da santíssima trindade. Contudo, não chega a ser considerado um membro efetivo, pois não freqüentou o templo e nunca se afiliou formalmente a referida seita – nem a qualquer outra igreja –, mas seguiu os princípios Unitaristas em virtude destes irem ao encontro de suas convicções pessoais no tocante à liberdade de religião e à tolerância a todas as formas sinceras de fé religiosa. Salientamos ainda que as convicções religiosas de Boole condizem com o cenário da Inglaterra durante o século XIX. Nessa época, haviam surgido vários grupos protestantes que pleitearam reformas da igreja católica e/ou propuseram doutrinas alternativas a essa igreja. (ENCICLOPÉDIA ..., 1962). Destacamos ainda que, na verdade, Boole foi, como veremos mais adiante, penalizado devido às suas convicções religiosas, mas, talvez sabiamente, nunca fez desta questão motivo de disputas e, portanto, escapou de conseqüências maiores.

Porém, **nem tudo são flores** nesta primeira experiência docente de Boole, pois, mesmo não querendo se envolver em controvérsias, algumas das suas atitudes religiosas escandalizaram os alunos, na maioria metodistas, desta escola. Aparentemente, os referidos alunos desconfiaram que a sua atenção estava voltada para problemas matemáticos durante as atividades dominicais. Apesar do respeito dos alunos para com Boole, isto causou tanta revolta que acabou levando o professor Heigham a demiti-lo, em 1833.

Desempregado e diante da necessidade de sua família, Boole encontrou oportunidade na escola do Sr. Marrat – localizada em Liverpool (ver Mapa 2). Contudo, isto implicou no afastamento de Boole de sua cidade natal. Ganhando três vezes mais que no primeiro emprego e em decorrência do certo destaque do Sr. Marrat, ao escrever um livro de Mecânica, a estadia em Liverpool teria sido interessante para Boole, não fosse a desorganização de Marrat, que muito incomodava Boole e fez com que ele se demitisse logo.

Desta vez, Boole teve mais sorte em conseguir um novo emprego perto de casa, embora ainda em outra cidade. Assim sendo, tornou-se professor de Matemática na Academia de Robert Hall (?-1838), localizada em Waddington (ver Mapa 2) a quatro milhas de Lincoln. Nesta cidade, Boole ficou feliz em estar perto de sua família. Contudo, o salário era baixo e ainda não havia liberdade para pôr em prática as idéias sobre educação, adquiridas pela sua experiência.

Como diz Sousa (2005, p. 28):

> Boole teve uma postura de vanguarda com relação ao ensino, pois via a matemática como ciência e arte, bem como acreditava que a beleza desta ciência deveria ser acessível a todos, desde que bem abordada e apresentada àqueles que ainda não a conhecia. Desta forma, a matemática deveria ser vista como uma forma de pensar necessária para a formação de pessoas conscientes e críticas e assim, servir como um instrumento de inclusão social e não de exclusão.

De fato, ao longo de sua carreira como professor, Boole parece ter buscado aproximar dos seus alunos os conceitos ensinados, ao trazer para suas aulas experiências semelhantes às que havia feito com seu pai, o que parece ter estimulado fortemente o interesse dos estudantes.

Mapa 2 – Mapa da Inglaterra 2

Fonte: Pictures …, (2003)

Assim sendo, impulsionado por crescentes obrigações financeiras e instigado para colocar em prática suas convicções quanto ao ensino, Boole decidiu, em 1842, abrir sua própria escola, em Lincoln.

Neste mesmo período, Boole começou a se envolver com questões sociais, associando-se ao Instituto de Mecânica de Lincoln[74], onde seu pai era curador. Nesta instituição, Boole trabalhou como professor voluntário de Matemática, Ciências e Estudos

[74] O Instituto de Lincoln foi um de vários Institutos de Mecânica, com fins semelhantes, a serem estabelecidos na Inglaterra na época. Fundado em 1833, tinha como objetivo principal à promoção da educação de adultos, especialmente com respeito às ciências (ver SMITH, 1997). Além disso, foi concebido como um lugar que promoveria o desenvolvimento pessoal do trabalhador e, conseqüentemente, também favoreceria o melhoramento da sociedade como um todo.

Clássicos, bem como, foi encarregado de fazer um relatório sobre a relativamente grande, porém desatualizada, biblioteca do Instituto.

Como reconhecimento da erudição do jovem Boole, ele foi escolhido para fazer um discurso sobre **A Genialidade e as Descobertas de Isaac Newton** (1643-1727), a ser proferido na ocasião da apresentação ao Instituto de um busto de mármore[75] deste cientista. Apesar da sua admiração pelo grande cientista inglês, Fossa e Sousa (2004b) destacam que Boole não fez um mero elogio à genialidade de Newton, mas, além disso, fez uma análise da sua obra, apontando tanto para a suas inovações, quanto para suas limitações. Ressaltamos ainda que, em razão da qualidade apresentada, o referido discurso foi publicado em forma de folheto e distribuído em Lincoln e Londres – atestando Boole como um jovem e promissor cientista.

Quatro anos após a abertura da sua própria escola, Boole aceitou o convite de assumir a direção da Academia de Waddington, em virtude do falecimento de Robert Hall – ex-patrão de Boole nesta instituição – e pela necessidade de expandir sua própria escola até que, em 1840, Boole adquiriu um local apropriado em Lincoln onde poderia abrir uma escola maior. Devido à experiência adquirida em Waddington seus irmãos Mary Ann e William assumiram algumas das tarefas relacionadas com o ensino na nova instituição e o próprio Boole também cresceu enquanto professor, pesquisador e administrador. De fato, o aprofundamento nos assuntos matemáticos foi impulsionado por seus anseios pedagógicos e fizeram com que Boole produzisse vários artigos originais sobre a Matemática, os quais foram publicados em conceituados jornais ingleses.

Contudo, apesar do alto nível da sua produção – mas por ter sido basicamente autodidata na Matemática e por não ter feito qualquer curso universitário – Boole não foi aceito de imediato no círculo fechado dos cientistas ingleses do seu tempo.

Por felicidade, porém, Duncan F. Gregory (1813-1844), editor do recém-fundado *Cambridge Mathematical Journal*, reconheceu o valor dos artigos de Boole e publicou-os no seu jornal. Além disto, Gregory se tornou amigo de Boole, incentivando-o e aconselhando-o nesse início da sua carreira científica. A exemplo, Boole publicou o artigo *On a General Method in Analysis* nas *Transactions of the Royal Society,* em 1844. No mesmo ano, tornou-se o primeiro matemático a receber uma medalha de ouro[76] pela *Royal Society*, consolidando, deste modo, sua carreira como um pesquisador desta ciência.

---

[75] O busto foi apresentado por Lord Yarborough, patrono do Instituto.

[76] A *Royal Medal* é um prêmio ainda concedido atualmente pela *Royal Society* aos trabalhos considerados mais relevantes para o avanço das ciências naturais ou para contribuições distintas nas ciências aplicadas (feitos

Salientamos que, antes mesmo da premiação, Boole já havia construído uma amizade com Gregory, De Morgan (1806-1871) e o algebrista Arthur Cayley (1821-1895). Agora, como conseqüência do seu feito, estabeleceu contatos com um grupo maior de cientistas, incluindo George Biddell Airy (1801-1892), Charles Babbage (1792-1871), Michael Faraday (1791-1867), William Herschel (1738-1822), George Peacock (1791-1858), William Whewell (1794-1866), William Thomson (Lord Kelvin, 1824-1907) e George Everest (1790-1866)[77].

Em razão de suas habilidades científicas, Boole foi encorajado, pelos amigos, a candidatar-se à docência em uma das unidades do *Queen´s College*[78] (ver Foto 12). Seguindo o protocolo da época, Boole reuniu testemunhos[79] –atestando suas habilidades científicas e pedagógicas – e instaurou sua candidatura junto o setor administrativo da instituição recém-criada. Contudo, não foi contratado de imediato devido a problemas na implementação da proposta para Queen's, mesmo tendo recebido testemunhos de importantes cientistas como Thomson, Cayley, Graves, Kelland e De Morgan.

Tempos depois, re-instaurou sua candidatura e, devido à perda de seu pai, deixou-o paradoxalmente feliz a notícia de ter sido nomeado, em 1849, o primeiro professor de Matemática do *Queen's College*, Cork (ver Fotos 13, 14 e o Mapa 3).

---

dentro da comunidade britânica). As referidas láureas podem ser concedidas para qualquer idioma e para as seguintes variedades de disciplinas: em ciência e tecnologia, nas ciências sociais e nas ciências humanas. Assim sendo, há cerca de dez tipos diferentes de medalhas que tem a premiação variando anualmente, bienalmente ou trienalmente, de acordo com a categoria. Mais de um prêmio pode ser concedido ao mesmo nome Além disso, os prêmios não são limitados apenas a seus membros, entretanto, a escolha dos medalhistas é feita pelos membros da sociedade. (THE ROYAL ..., [200-]).

[77] Airy e Herschel eram astrônomos, Babbage (conhecido pelo seu trabalho em computação) e Peacock matemáticos; Faraday e Thomson eram físicos, Whewell filósofo e cientista e Everest explorador e tio da sua futura esposa Mary Everest.

[78] Situado no sudoeste da Irlanda, atualmente o *Queen´s College* é conhecido por *University College*. Considerada a primeira Universidade católica da Irlanda, foi fundada pela rainha Victoria no ano de 1845 para o avanço da educação irlandesa e como uma alternativa sectária à *Trinity College* em Dublin (ver Mapa 3), que era controlada pela igreja anglicana. (Ver HISTORY OF QUEEN´S, 2003). A Universidade, composta por três unidades localizadas em Cork, Galway e Belfaste, hoje em dia, é tida como uma universidade progressiva e dinâmica que mistura o velho e o novo, especialmente, por sua arquitetura acentuada pelos edifícios de pedra de lima imponentes do quadrângulo principal e complementada pela adição das várias edificações recentes.

[79] Documentos escritos parecidos com cartas de recomendação.

Foto 13 – *Queen´s College*

Fonte: Ireland in Summer ([200-]).

Foto 14 – *Queen´s College* 2

Fonte: Darwall (1999).

Aliás, sentimentos paradoxos marcaram a estadia de Boole em Cork. Contudo, podemos afirmar que os bons superaram os infortúnios. A saber, o *Queen´s College* passou por várias controvérsias que incomodaram Boole, mas também durante sua estadia em Cork, Boole conseguiu publicar seus livros, conheceu sua esposa, teve cinco filhas e construiu uma família feliz até a desventura de sua morte.

Mapa 3 – Mapa da Irlanda
Fonte: Maps of World.com ([200-])

Esclarecendo, o encontro com Mary Everest[80] (ver Foto 15) ocorreu em decorrência da amizade estabelecida com John Ryall, vice-presidente e professor de grego dessa instituição. Em razão do interesse da sobrinha em assuntos matemáticos, Ryall pediu para que Boole tutorasse a jovem.

Foto 15 – Mary Boole
Fonte: Mary ... , (2003)

[80] O sobrenome Everest é freqüentemente relacionado ao monte que foi medido pelo tio de Mary, George Everest, agrimensor militar que trabalhou muitos anos na Índia.

Desde então, Boole e Mary cultivaram uma amizade e aos poucos foram estreitando as relações a ponto de decidirem se casar, em 1855. Apesar da diferença de idade, a vida conjugal do casal foi muito marcada por uma unidade de propósitos e de espírito, o que fez com que eles fossem muitos felizes. Como fruto deste matrimônio, tiveram cinco filhas Mary Ellen (1856-?), Margaret (1858-1953), Alicia (1860-1940), Lucy (1862-1905) e Ethel Lilian (1864-1960). Boole foi um pai carinhoso e juntamente com Mary proporcionaram às filhas a harmonia familiar que acreditavam fundamental para o desenvolvimento das crianças. De fato, todas as filhas tiveram a vida sob fortes bases intelectuais e científicas. Casaram-se com pesquisadores, tiveram filhos que despertaram para a beleza da ciência ou elas mesmas, a exemplo de Alicia, dedicaram-se ao desenvolvimento da Matemática.

Frente à harmonia conjugal, Boole continuou incentivando sua esposa nos rudimentos da Matemática, inclusive, aceitando-a num seminário ministrado por ele no *Queen's College*. Porém, esta abertura a participação de uma mulher na universidade, um tanto de vanguarda, foi a pivô da primeira controvérsia passada por Boole nesta instituição. Em suma, devido a pressões da comunidade, Mary foi barrada da sala de aula. Curiosamente, os alunos de Boole não compactuaram com este impedimento e, para que Mary continuasse participando das aulas, sugeriram que os seminários fossem ministrados na própria residência de Boole. Deste modo, Mary pôde continuar a participar do seminário.

Porém, a maioria dos conflitos presenciados por Boole, no *Queen´s College*, diziam respeito a questões administrativas, especialmente, pela interferência do presidente Robert Kane (1809-1890) – que era católico – nas atividades dos outros professores – a maior parte protestante. Como a maioria dos outros professores, Boole via tais acusações como abusos de poder da parte de Kane. Mesmo assim, devido a atitudes que ele havia desenvolvido desde sua juventude, Boole tentava evitar se envolver em tais controvérsias. A exemplo, citamos a censura do presidente Kane ao livro *An Historical Analysis of Christian Civilisation*, publicado pelo Prof. Raymond de Vericour e considerada uma obra anti-católica. Outro fato conflituoso foi a acusação de negligência nas tarefas acadêmicas do Prof. Chistopher Lane. Boole também recebeu críticas de Kane, pois ele mesmo considerava que Boole dava muita ênfase sobre a Álgebra e pouca sobre a Geometria nas suas aulas. Contudo, na medida em que se envolveu mais com tarefas administrativas (trabalho de comitês e, eventualmente, um posto equivalente ao de pró-reitor), tornou-se também mais difícil manter-se distante das controvérsias envolvendo tais questões.

À parte destas discussões, lembramos que a estadia de Boole na Irlanda[81] foi marcada também pela otimização de suas pesquisas. Como frutos de sua produção científica, surgem os livros *The Mathematical Analysis of Logic* – publicado em 1847 – e, sua obra prima, *An Investigation of the Laws of Thought on which are Founded the Mathematical Theory of Logic and Probabilities* – publicada em 1854 (cujos conteúdo analisaremos posteriormente). Além disso, durante esses anos, Boole continou a pesquisar e escrever artigos científicos. Em conseqüência, recebeu vários prêmios e honras, sendo, por exemplo, eleito como presidente da Sociedade Cuvierian, uma instituição irlandesa que promovia as artes e ciências, recebendo a LL.D. (doutor de lei) de *Trinity College*, Dublin, e o grau de doutor *honoris causa* da Universidade de Oxford.

Mais ainda, sua produção intelectual é completada com a publicação de dois outros livros, cujos conteúdos fundamentais agora residem sobre questões relativas às equações diferencias. O primeiro deles é intitulado *A Treatise on Differential Equations* (1859). Esta obra é o resultado das preocupações de Boole em dar boas aulas. Realmente, Boole considerava que havia uma carência de um bom livro texto sobre o assunto. Deste modo, elaborou a obra de modo que cada capítulo trouxesse considerações preliminares que direcionavam o leitor, bem como vários exemplos e exercícios resolvidos. Assim, devido ao cuidado com que foi elaborado, o livro foi muito popular entre os alunos e tornou-se um clássico neste ramo, sendo utilizado até o início do século XX. A quarta obra é chamada *A Treatise on the Calculus of Finite Differences* (1860). Esse livro, sendo um texto sobre diferenças finitas, é considerado uma obra-prima da pedagogia da matemática. Nele, Boole esclareceu a diferença entre equações diferenciais (por exemplo, $\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$) e equações de diferenças finitas (por exemplo, $\frac{\Delta U_x}{\Delta x} = \frac{U_{x+\Delta x} - U_x}{\Delta x}$) e ainda ilustrou o uso de operadores em relação a estas.

[81] Enfatizamos que os anos em que Boole morou na Irlanda foram tempos também difíceis e conflituosos para essa terra, haja vista que ela passou pela longa e dolorosa luta para a independência da dominação inglesa, enfrentou conflitos religiosos entre protestantes e católicos e sofreu com a existência de uma praga que destruiu a colheita da batata, o produto principal da agricultura irlandesa. A reação de Boole à situação foi a mesma que ele havia mostrado em Lincoln: adotava ações individuais baseadas na caridade cristã, sem aceitar qualquer forma de postura radical contra as instituições sociais. Assim, além do Instituto de Mecânica, Boole também colaborou com uma casa para meninas desafortunadas e trabalhou com um grupo de cegos, inventando um sistema, parecido com o Braille, para permiti-los a ler. Porém, salientamos que ele não **levantava bandeira** e sim, era uma questão de caridade cristã.

Salientamos que Boole já havia voltado à atenção para esta área em suas primeiras produções científicas e, neste momento, retorna provavelmente em decorrência da ligação destes assuntos com suas aulas no *Queen´s College*. O fato é que Boole continuou com intensa atividade intelectual até o final de sua vida, interrompida por infortúnios eventos. A respeito desta desventura, Macfarlane (1916, p. 53) narra: “One day in 1864 he walked from his residence to the College, a distance of two miles, in a drenching rain, and lectured in wet clothes. The result was a feverish cold which soon fell upon his lungs and terminated his career[…].” Assim, Boole, no trajeto para o *Queen´s College*, foi surpreendido por uma chuva forte, ministrou aula com roupas molhadas e desenvolveu uma pneumonia que o levou a morte, no dia 08 de dezembro de 1864, aos 64 anos, na sua própria casa em Ballintemple (Cork), Irlanda.

Foto 16 – Lápide
Fonte: Rochkind (2007)

Mary Boole (1931, p. 47) registra algumas das últimas palavras do seu marido: “Our youngest child had been taken to pay a visit to his room every day. On the last day of his life he asked me to bring her. “Let me see her again”, he said. *Meine Engelchen, sie ist eine Erscheinung.*” Minha anjinha, ela é uma visão – palavras retas de um grande homem e cientísta.

Curiosamente, Boole parece ter tido uma intuição que morreria em breve. Segundo sua esposa, ele mostrava uma constante preocupação com o futuro das cinco filhas e em instruí-la sobre o que fazer na sua ausência. Além disso, nas suas conversas com Mary, Boole imaginava como seria a vida de sua esposa quando as crianças tivessem crescido e pudessem ajudá-la e confortá-la. Neste sentido Mary Boole (1931, p. 36-37) ressalva que,

> He was very fond of picturing in our conversations what my life would be when the children grew old enough to be a help and comfort to me. But if I brought him into the picture he would stop me at once. "No my child", he would say, "you will be very happy but I shall not be there." He used constantly to talk to me of what I ought to do about different things in the event of his death. He would allow no shrinking from the subject but seemed to wish to accustom me to the idea of being happy without him.

Ainda mais, pouco antes do seu falecimento, visitou vários amigos que não via há algum tempo.

Como reconhecimento de suas contribuições, Boole recebeu várias homenagens póstumas. Uma delas foi através de uma janela erguida, no final de 1866, na Aula Máxima do *Queen´s College*.

Foto 17 – Janela em homenagem a Boole
Fonte: Watson e Palacios (2006).

Os vitrais trazem painéis cujos tópicos homenageiam várias personalidades. Os tópicos e respectivos representantes prestigiados são: Religião e Música, representados por Santo Augostinho, Santo Stephen e o rei Davi; Navegação, representada por Colombo e Vasco da Gama; Fama, representado por uma figura feminina sentada e engrinalda de folhas de baía; Medicina, representada por Harvey, Hipócrates e Galen; Engenharia e Arquitetura, representados por Archimedes, Phidias e (talvez) Leonardo da Vinci; Astronomia, representada por Copernicus, Hipparchus e Galileo; Matemática, representada por Bacon, Napier e Newton; O painel central representa a Lógica com Euclides e Aristóteles ilustrados em pé ao lado Boole, que está sentado e escrevendo sobre uma mesa; Filosofia, representada por Pascal, Leibniz e Descartes; Geografia, representado por Strabo e Ptolomy (MACHALE, 1985). Assim, vemos que cada painel representa uma arte ou ciência através de um ou mais personagens. Trata-se, pois de uma maneira artística de identificar os principais fundadores e contribuintes da humanidade.

Outro tributo ocorreu, em 1957, quando uma das crateras da lua recebeu o nome de George Boole, reafirmando sua imortalidade como matemático.

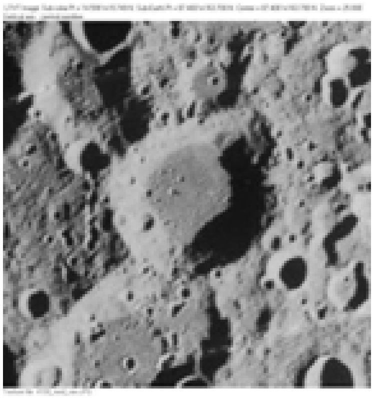


Foto 18 – Cratera da lua em homenagem a Boole
Fonte: Cratera (2007).

Segundo Lunar (2007), as coordenadas da cratera nomeada por Boole são 63,7N de latitude e 87,4W de longitude e 63 de diâmetro.

Mais recentemente, em 1982, a importância de seus méritos foi consagrada mediante o batismo da biblioteca do *Queen´s College* com seu nome. Na ocasião, o corpo de governo da *University College*, Cork (antigo *Queen´s College*, Cork) resolveu nomear a biblioteca, recém construída, por *The Boole Library* (ver Figuras 19, 20 e 21). Vale salientar que esta biblioteca recebeu grandes e relevantes contribuições de Boole.

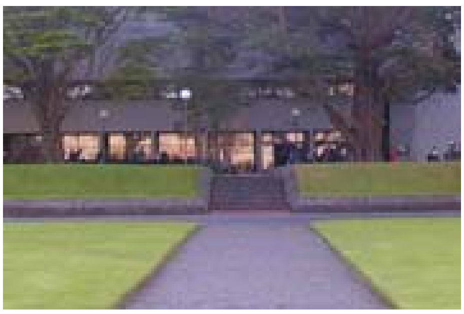


Foto 19 – Vista de frente da biblioteca[82]

Foto 20 – Entrada da biblioteca[83]

[82] Disponível no site: http://booleweb.ucc.ie/info/PhotoTour/Photo_Tour.htm (LIBRARY..., 2004a).
[83] Disponível no site: http://booleweb.ucc.ie/info/PhotoTour/Photo_Tour2.htm (LIBRRARY..., 2004b).

Foto 21 – Recepção da biblioteca[84]

Frente a sua relevância, apresentamos alguns julgamentos sobre Boole. De acordo com J. L. Synge, emérito professor do *Dublin Institute for Advanced Studies* (apud MACHALE, 1985), Boole foi um gênio e homem muito humano. De acordo com MacHale (1985), Boole e a idade áurea da matemática (século XIX) consistem numa combinação perfeita para o surgimento da grande descoberta. Ou seja, Boole, foi um grande homem envolvido por um espírito de época.

Posta a apreciação da vida de George Boole inserida no contexto histórico, busquemos compreender agora sua Lógica. Para tanto, reservamos a próxima seção.

5.3 A LÓGICA DE BOOLE

5.3.1 O sistema lógico contido no primeiro livro de George Boole (1847)

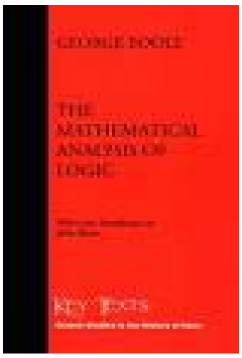


Ilustração 22 – *The Mathematical Analysis of Logic*
Fonte: Boole (1998)

[84] Disponível no site: http://booleweb.ucc.ie/info/PhotoTour/Photo_Tour4.htm (LIBRARY..., 2004c).

A Lógica de Boole, especialmente, a presente nesta obra, tem como objetivo chegar à modelação do raciocínio dedutivo mediante um cálculo puramente matemático. Sob este aspecto reside fundamentalmente à inauguração da Lógica Matemática, isto porque ao adotar um método simbólico que prima pelo uso de símbolos como representantes das proposições lógicas, ao reger a manipulação destes símbolos por leis análogas às da Aritmética e baseadas no processo mental de eleição[85] e ao elaborar seu sistema tomando como base equações matemáticas, Boole consegue matematizar à lógica e quebrar com o padrão aristotélico.

Ressaltamos que, embora a idéia de colocar a Lógica sob base da Matemática seja inaugurada por Boole, o método simbólico utilizado no desenvolvimento da sua Lógica faz parte de um movimento maior na história da matemática inglesa. De fato, o diferencial de Boole se revela pelo aproveitamento das discussões imbuídas neste movimento em de seu trabalho.

Esclarecendo, podemos dizer que em meio ao diálogo da Matemática com as transformações sociais deste período (como explanado no capítulo 2 desta tese), houve um interesse pelo desenvolvimento da Álgebra, especialmente, a inglesa. De fato, um grupo de matemáticos ingleses como Augustus De Morgan (1806-1871), Duncan Gregory (1813-1844), Peacock e William Rowan Hamilton (1805-1865) interessou-se em quebrar com o isolamento inglês[86] durante o século XIX. A exemplo, observamos que Peacock deu a primeira axiomatização da Álgebra e Hamilton caracterizou uma Álgebra não comutativa. Além disso, frente à história da instrução matemática de Boole, percebemos que ele não trabalhou como que num vaso fechado como a maioria de seus contemporâneos e também almejou renovar os fundamentos da álgebra inglesa, incluindo a Lógica. Isto porque, Boole esteve aberto à matemática de outros continentes, foi influenciado por autores franceses e alemães e, conseqüentemente, assimilou os referidos métodos nos seus trabalhos.

---

[85] Vale salientar que a função mental de eleição consiste na habilidade de selecionar de uma dada coleção de objetos, aqueles que têm uma determinada propriedade, formando assim a subclasse dos objetos com a referida propriedade. Para Boole, é exatamente essa função da nossa mente que fundamenta todo o nosso raciocínio dedutivo e, portanto, é um alicerce apropriado para o seu sistema.

[86] Devido à disputa sobre a prioridade da descoberta do Teorema Fundamental do Cálculo (Newton ou Leibniz), os matemáticos ingleses viveram uma espécie de isolamento. Deste modo, haviam recusado usar a notação mais propícia de Leibniz e conseqüentemente se atrasaram em relação aos matemáticos do continente, que incorporaram manipulações algébricas na análise. Entre os primeiros proponentes ingleses da aceitação dos referidos métodos estavam Charles Hutton (1737-1823) e seu protegido Peter Barlow (1776-1862). Além destes, houve um pequeno grupo de alunos de Cambridge (Analytical Society), liderados por George Peacock (1791-1858), John Hershel (1792-1871) e Charles Babbage (1792-1871), com propostas semelhantes. Como conseqüência de toda esta atividade houve o estabelecimento da álgebra abstrata como um campo legítimo de investigação matemática e a eventual re-emergência da análise inglesa.

Particularmente, em meio à nova Álgebra inglesa proposta por este grupo, havia discussões em torno da aceitação dos números negativos e imaginários e o uso de símbolos. Realmente, embora a Aritmética dos números complexos tenha sido essencialmente elaborada por Rafael Bombelli (1526-1572) no século XVI, a aceitação destes números ditos **impossíveis** ainda era problemática no início do século XIX.

Atrelados a questão de aceitação dos números negativos e impossíveis, surgiram grandes questionamentos sobre a legitimidade de métodos simbólicos, iniciados por François Viète (1540-1603) ainda no século XVI. Vários matemáticos contemporâneos de Boole alegaram que raciocinar com símbolos facilmente leva ao erro, pois, para eles, era necessário estar sempre atento aos seus significados. Por outro lado, houve um movimento no sentido de incorporar os métodos continentais no cálculo e análise britânicos. Boole, por sua vez, parece ter aproveitado este movimento em favor da divulgação de suas idéias, haja vista que o sistema lógico proposto no livro *The Mathematical Analysis of Logic* (1847) claramente prima por nossa habilidade de manipular símbolos sem estarmos atentos aos seus significados.

Frente aos anseios de Boole, o sistema lógico contido na obra *The Mathematical Analysis of Logic* é dotado de um formalismo rico em símbolos e analogias com a aritmética elementar, sustentados pelo pilar básico que são as operações mentais. Vejamos que símbolos são estes:

a) Letras minúsculas (*x, y, z, ...*) e maiúsculas (X, Y, Z, ...) como símbolos literais (eletivos).

Os referidos símbolos representam, respectivamente, o processo mental de separar ou eleger os elementos das classes (ato eletivo característico do raciocínio na mente humana) e um elemento arbitrário de uma classe, ou equivalentemente, a classe destes elementos.

b) Sinais operacionais como +, -, oriundos da analogia com a Álgebra numérica.

Com relação aos sinais acima citados, temos a representação das operações da mente pelas quais as concepções das coisas são combinadas ou resolvidas. A adição representa a união de classes, obtida através da eleição dos elementos das duas classes. Já a multiplicação é a interseção de classes, expressa por meio de justaposição. Assim como a primeira operação, essa se refere ao um ato de eleição fundamentado no raciocínio, ou seja, xy é obtido elegendo os y e deles elegendo os x. Por fim, temos a diferença que é encarada como o complemento de classes, obtido pela eleição dos elementos (dentro do universo considerado) que não pertencem a uma dada classe. Desta forma, 1–X corresponde ao conjunto de elementos que não têm a propriedade X.

c) O sinal de igualdade (=), concebida como identidade.

Donde tem-se que classes iguais são aquelas que têm os mesmos elementos.

d) O símbolo 1, representando a classe universal.

e) O símbolo 0, designando a classe nula ou vazia.

O crucial para a matematização da Lógica é que esses símbolos combinam-se em equações análogas às que ações algébricas e obedecem às leis fundamentais da Álgebra como a distributividade e a comutatividade, acrescidas de uma especial, chamada de lei de idempotência (ver página seguinte). Além disso, a modelação matemática de nosso pensamento concretiza-se pelo fato de tudo isto estar baseado no processo mental de eleição. De fato, para Boole, estas operações são sujeitas a leis específicas, pois, quando o intelecto humano raciocina, esse processo está sujeito a certas leis. Assim, seu sistema formal busca expressar proposições por símbolos e combinações de símbolos fazendo uso de leis lógicas que reflitam as leis do processo mental, cuja base de raciocínio está no ato de eleição (a operação fundamental do raciocínio). Para tanto, Boole (1998, p. 16-17) elenca tais leis como axiomas básicos de seu sistema da seguinte forma:

> 1st. The result of an act of election is independent of the grouping or classification of the subject.
>
> 2nd. It is indifferent in what order two successive acts of election are performed.
>
> 3rd. The result of a given act of election performed twice, or any number of times in succession, is the result of the same act performed once.

A fim de percebermos a íntima relação destes axiomas com a função mental de eleição, bem como, a analogia com a Aritmética, propomos os seguintes esclarecimentos:

Primeiramente, temos o axioma análogo à **lei da distributividade**, expresso formalmente pela equação:

$$x(u+v) = xu+xv.$$

Consiste em considerar que é indiferente eleger de um grupo, como um todo, os que têm a propriedade X ou selecionar, de dois subgrupos, os que têm a referida propriedade e juntar os resultados. Isto é, seja o grupo original composto de duas partes u e v. Assim, podemos considerar o todo como $(u+v)$. Se, desse todo, retiramos os elementos que têm a propriedade X, teremos o subconjunto $x(u+v)$. Alternativamente, podemos considerar as partes u e v independentemente, retirando de cada uma os X, obtendo assim os dois subconjuntos xu e xv. Por fim, reunimos os dois subconjuntos e obtemos $xu+xv$.

Intuitivamente, o axioma reflete que as duas maneiras de proceder nos levam ao mesmo resultado.

O segundo dos axiomas relaciona-se com a **lei comutativa** da Aritmética, expresso da seguinte maneira:

$$xy = yx.$$

Fazendo uso do processo mental de eleição, a expressão *xy* significa que elegemos inicialmente os *y* e dele elegemos os *x*. Mas, se elegermos inicialmente os *x* e dele elegemos os *y,* obteremos o mesmo resultado, isto é, os dois processos de eleição são equivalentes.

Já o terceiro dos axiomas apresentados acima se refere à **lei de idempotência**, ou, na expressão de Boole, a **lei do índice**, a qual tem como expressão:

$$\underbrace{xx\ldots x}_{\text{n vezes}} = x^n = x.$$

Esclarecendo, a lei pode ser interpretada como: interseção de uma classe com ela mesma resulta na própria classe. De fato, tudo que está contido em X e também em X é contido em X; o contrário também é verdadeiro, pois tudo que está contido em X está contido tanto em X quanto em X. Como posto na expressão acima, deve ser evidente que o processo pode ser repetido tantas vezes quanto quisermos e, assim, obtemos o resultado de que a eleição de X, *n* vezes, é simplesmente X. Em termos de cálculos matemáticos, a referida lei permite a simplificação de equações pela redução do grau das mesmas a equações lineares. Mas, também permite a elevação da potência de uma variável, o que poderá ser útil quando queremos fatorar uma expressão. Vale salientar que esta lei é valida na álgebra numérica apenas para os valores x=0 ou x=1, contudo à parte desta desanalogia ressaltamos que foi a sua inclusão no formalismo de Boole que permitiu concretizar a matematização da Lógica. Além disso, os valores 0 e 1 são os únicos números permitidos para as variáveis em seu sistema. Destacamos ainda que, na Lógica Moderna, a referida lei corresponde à proposição **P e P sse P (P ^ P ⇔ P).**

Enfatizamos ainda que Boole também supôs, em seu formalismo, que as propriedades de igualdade e as propriedades operacionais da Aritmética valem para a manipulação dos símbolos eletivos. Desta forma, ele utilizava, por exemplo, o simétrico de um elemento nas suas manipulações de equações eletivas. Também multiplicava as mesmas pela quantidade –1 para obter equações equivalentes.

Diante do exposto, podemos perceber que a função mental de eleição é um elemento tão fundamental para Boole que ele a usou nas próprias definições das operações matemáticas do seu sistema. Desta forma, Boole analisou o pensamento como uma seqüência de atos de eleição e elaborou um formalismo sob estas bases. Por este motivo, afirmamos que Boole pretendeu fazer uma modelagem matemática do nosso pensamento.

Além do simbolismo e operações apresentados, Boole dotou seu sistema de funções eletivas e equações eletivas, a fim de facilitar as manipulações algébricas de seu sistema.

Desta forma, ele conseguiu elaborar equações – cujos membros são formados por funções eletivas – que podem ser simplificadas através de manipulações algébricas e fez uso das referidas funções – as expressões nas quais os símbolos eletivos são envolvidos – para expandir expressões em termos das suas condições de verdade. Por exemplo: $\phi\ (xyz) = y\ \{1 - z\ (1 - x)\}$ é uma função eletiva e $y\ \{1 - z\ (1 - x)\} = 0$ é uma equação eletiva.

Por fim, Boole ainda usou um símbolo especial, *v,* para representar subconjuntos tidos como não vazios e, assim, completar seu sistema. Porém, como veremos no paralelo com De Morgan a seguir, é sob este mesmo símbolo que recaem críticas ao trabalho de Boole. Mesmo assim, adiantamos que esta falha não se sobrepõe aos méritos de Boole neste trabalho, pois suas contribuições sobrelevam os erros.

Uma das primeiras preocupações de Boole, no *The Mathematical Analysis of Logic*, foi mostrar que o seu sistema poderia tratar adequadamente a teoria aristotélica. Para tanto, após o simbolismo, os axiomas e operações apresentados, Boole mostrou como expressar proposições categóricas como equações eletivas.

Recapitulando, conforme a taxonomia descrita no capítulo 3, há quatro tipos de proposições categóricas, a saber:

A: Todo X é Y (universal afirmativa)

E: Nenhum X é Y (universal negativa)

I: Algum X é Y (particular afirmativa)

O: Algum X não é Y (particular negativa).

No sistema lógico de Boole, essas quatro proposições são representadas por equações matemáticas como segue:

A: $x(1-y) = 0$.

E: $xy = 0$.

I: $v = xy$.

O: $v = x(1-y)$.

Vejamos exemplos para as proposições universais. Assim, sejam X a classe dos brasileiros e Y a classe dos latino-americanos. A proposição de tipo A, **Todos os brasileiros são latino-americanos,** significa que a interseção da classe de brasileiros com a classe de tudo que não é latino-americano (na lógica moderna, X$\cap$não-Y) é vazia. Lembramos que, no sistema de Boole, a interseção é representada pela multiplicação, enquanto 0 indica a classe vazia; desta forma fica claro que a equação $x(1–y) = 0$ representa o fato de que a referida classe é vazia. Analogamente, a proposição de tipo E, **Nenhum brasileiro é um latino-americano**, significa que a interseção da classe de brasileiros e a classe dos latino-americanos (segundo a lógica moderna, X$\cap$Y) é vazia. Isto é representado, no sistema de Boole, pela equação $xy = 0$.

No caso das proposições particulares tomemos como exemplo a proposição de tipo I, **Alguns brasileiros são latino-americanos**, que significa que há pelo menos um elemento na interseção da classe de brasileiros e a classe de latino-americanos (representado pelo formalismo moderno como X$\cap$Y). Agora temos um problema, pois Boole tinha apenas dois valores numéricos, o zero – que representa o vazio e, portanto, não é aplicável no presente caso – e a unidade – que representa o universo. Mas, é claramente inapropriado dizer, nesse caso, que a interseção é igual a 1, pois isto significaria que ela é tudo que existe. A fim de resolver esta questão e casos similares em que haja a necessidade de representar a existência de uma quantidade indefinida de elementos que não necessariamente completa o universo, Boole inventou um novo símbolo, v, que quer dizer, como indicamos acima, que uma classe tem elementos.

Para esclarecermos o significado de tal símbolo vejamos a equação $v = xy$ a qual significa que a subclasse X$\cap$Y não é vazia, o seja, no exemplo acima, que há algo que é brasileiro e também latino-americano. De modo semelhante, a proposição, **Alguns brasileiros não são latino-americanos,** quer dizer que a classe X$\cap$não-Y não é vazia e, portanto, é representada pela equação $v = x(1–y)$.

Voltemos a nossa atenção agora à maneira em que a **conversão** é abordada no sistema de Boole. Lembramos que no referido sistema, as proposições categóricas recebem um tratamento matemático mediante o uso de equações. Desta forma, as regras de conversão serão deduzidas dessas equações através de manipulações matemáticas.

No caso da conversão simples, Boole observa que as proposições dos tipos E e I são simétricas em x e y e, portanto, essas variáveis podem ser permutadas. Deste modo, se X representa a classe dos alunos estudiosos e Y representa os alunos reprovados, a proposição **Nenhum aluno estudioso é reprovado** ($xy = 0$) é convertida em **Nenhuma pessoa**

reprovada é uma pessoa estudiosa ($yx = 0$). Semelhantemente, $v = xy$ é convertida em $v = yx$.

Em relação à conversão por limitação, considere a proposição **Todo graduado tem emprego** convertida em **Alguns graduados tem emprego**. Estipulando que X representa a classe dos graduados e Y significa a classe dos empregados, temos $x(1–y) = 0$, ou seja, $(1–y)x = 0$. A solução desta equação é $x = vy$, o que fica evidente quando substituímos esse valor para x no lado esquerdo da equação original: $(1–y)x = (1–y)vy = (1–y)yv = (y–y^2)v = (y–y)v = 0v =0$. Mas, $x = vy$ significa que X é algum Y, a proposição do tipo I. Para proposições do tipo E, temos $xy = yx = 0$. A solução desta equação é a proposição do tipo O, $x = v(1–y)$, ou seja X é algum não-Y. A solução proposta pode ser verificada pelo mesmo expediente usado no caso anterior: substituir o valor de x no lado esquerdo da equação original e verificar que essa se reduz a zero.

Para a conversão por negação, consideremos que sejam X a classe de mães e Y a classe de mães amáveis. Então, a proposição (de tipo A) **Toda mãe é amável** é representada pela equação $x(1–y) = 0$. Observamos que $x(1–y) = (1–y)x = (1–y)(0+x) = (1–y)(1–1+x) = (1–y)[1– (1–x)]$. Mas, por hipótese, $x(1–y) = 0$. Logo, $(1–y)[1– (1–x)] = 0$. Isto é, no caso que estamos considerando, **Todo não-amável é não-mãe**, ou, mais coloquialmente, **Quem não é amável não é mãe**. Similarmente, proposições do tipo O são transformadas em $v = (1–y)[1– (1–x)]$.

Diante do exposto podemos constatar que todas as regras de conversão da Lógica Tradicional são deriváveis no sistema de Boole. Contudo, Boole sentiu a necessidade de ampliar as regras de conversão em virtude de ter observado que a doutrina tradicional sobre a conversão não era completa, pois existiam certas conversões legítimas que não são contempladas na referida doutrina. A exemplo, destacamos que na época de Boole, alguns lógicos não admitiam a conversão por negação, pois não admitiram **não-X** e **não-Y** como termos categóricos. Boole, no entanto, apoiado pelo seu formalismo, achou que esses termos são fidedignos. Além disto, ele exemplificou isto com a proposição **Nenhum X é Y**, o que é obviamente equivalente a **Todo Y é não-X**.

Tendo em vista à questão da incompletude das conversões tradicionais, Boole cria uma nova conversão (que veremos a seguir) haja vista que seu formalismo permitiu uma visão mais nítida sobre a estrutura do argumento envolvido. Neste sentido, torna possível realizar uma troca de variáveis, substituindo x por $1–y$ e y por $1–x$. Em virtude de fazer com que estrutura das proposições fiquem evidentes, bem com, para preservar o uso explícito na negação e, ao mesmo tempo, simplificar a notação, representaremos a classe negativa não-X por $\overline{\mathrm{X}}$. Assim, por exemplo, podemos usar a conversão por negação para transformar,

Todo X é Y $\quad x(1-y) = 0$

em $\quad$ Todo não-Y é não-X $\quad (1-y)\,[1-(1-x)] = 0.$

Com a nova convenção, temos que

Todo X é Y $\quad x(1-y) = 0$

se transforma em $\quad$ Todo $\overline{\mathrm{Y}}$ é $\overline{\mathrm{X}}$ $\quad \overline{y}\,(1-\overline{x}) = 0.$

Note que tanto as expressões quanto as equações das proposições têm a mesma forma.

Completada as suas operações de conversão, Boole (1998, p. 30), investigando vários novos tipos de conversão e os demonstrando através de equações eletivas, propõe uma lista das conversões permitidas:

> 1st. An affirmative Proposition may be changed into its corresponding negative (A into E, or I into O), and *vice versa,* by negation of the predicate.
> 2nd. A universal Proposition may be changed into its corresponding particular Proposition, (A into I, or E into O).
> 3rd. In a particular-affirmative, or universal-negative Proposition, the terms may be mutually converted.

Estas, por sua vez, foram sistematizamos por Sousa (2005, p. 167) conforme a tabela:

<table>
<tr><th>Proposição</th><th>Equação</th><th>Conversão</th><th>Tipo de conversão</th></tr>
<tr><td rowspan="3">A

Todo X é Y.</td><td rowspan="3">$x = xy$

$x(1-y) = 0$</td><td>$(1-y)[1-(1-x)] = 0$

Todo $\overline{\mathrm{Y}}$ é $\overline{\mathrm{X}}$.</td><td>contraposição</td></tr>
<tr><td>$x(1-y) = 0$

Nenhum X é $\overline{\mathrm{Y}}$.</td><td>novo</td></tr>
<tr><td>$v = xy$

Algum X é Y.</td><td>limitação</td></tr>
</table>

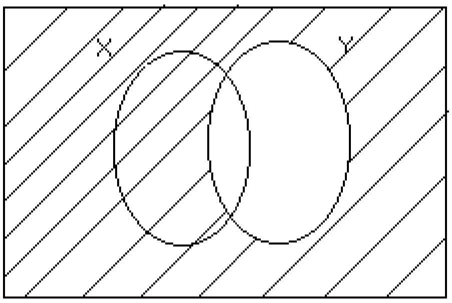
E Nenhum X é Y.	$xy = 0$	$yx = 0$ Nenhum Y é X.	simples
		$v = x(1-y)$ Algum X não é Y.	limitação
I Algum X é Y.	$v = xy$	$v = yx$ Algum Y é X.	simples
		$v = x[1 - (1-y)]$ Algum X não é $\overline{Y}$.	novo
O Algum X não é Y.	$v = x(1-y)$	$v = (1-y)[1 - (1-x)]$ Algum $\overline{Y}$ não é $\overline{X}$.	contraposição

A respeito das conclusões de Boole no tocante às regras de conversão, Sousa e Fossa (2007, p. 47) tecem a seguinte análise:

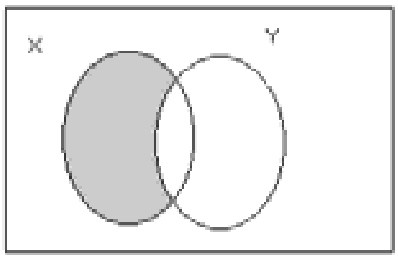
> É interessante observar que o próprio Boole incluiu, na sua discussão das regras de conversão, várias referências no sentido de que as suas **novas regras** são válidas, mesmo que mudem o tipo da proposição. Não parece, no entanto, que isto seria uma objeção contra o seu procedimento, pois a conversão por limitação também muda o tipo da proposição. Desta forma, parece haver alguma confusão da parte de Boole aqui. O que parece fundamental para alguns lógicos da época parece ser uma expectativa de que a conversão resultaria em uma nova proposição (do mesmo tipo ou não) que compara as mesmas classes quanto a proposição original. Isto é muito claro na conversão simples, pois tanto **Nenhum X é Y** quanto **Nenhum Y é X** comparam as classes X e Y. Quando convertemos **Todo X é Y** em **Nenhum X é** $\overline{Y}$**,** no entanto, a comparação original entre as classes X e Y é transmudada numa comparação entre as classes X e $\overline{Y}$. Deste ponto de vista, as regras de Boole podem ser consideradas como regras de transformações, nas quais as de conversão estão contidas.

Neste ponto, lembramos o tratamento dado por De Morgan às operações de conversão. Como explanado no capítulo anterior, assim como Boole, De Morgan também não se detém apenas às três conversões arquétipas (limitação, negação e contraposição) e as amplia para quatro tipos de conversões, entretanto, suas operações são completamente diferentes das propostas por Boole. A saber, De Morgan considera as operações S (mudança do sujeito por seu contrário, na proposição), P (análoga à S, mas com relação ao predicado) T (transformação da ordem da proposição) e F (na proposição mudando sua forma, isto é, de afirmativa para negativa ou vice-versa). Deste modo, consegue expandir o número de inferências, de proposições possíveis e conseqüentemente de silogismos abarcados em seu sistema, assim com Boole. O fato é que, neste aspecto, os dois ampliaram de modo diferente a Lógica Aristotélica.

Vejamos como Sousa e Fossa (2005, p. 169) ilustram uma das novas regras de Boole a partir do uso dos diagramas de Venn. Para tanto, seja a proposição do tipo E, **Nenhum X é não-Y**. Deste modo, devemos sombrear a região do diagrama que representa a interseção de X e não-Y. Para tanto, inicialmente, localizamos não-Y.



A região hachurada é não-Y.



A interseção de X e não-Y é vazia.

Ilustração 23 – Diagrama de não-Y

Ilustração 24 – Diagrama de X e não-Y

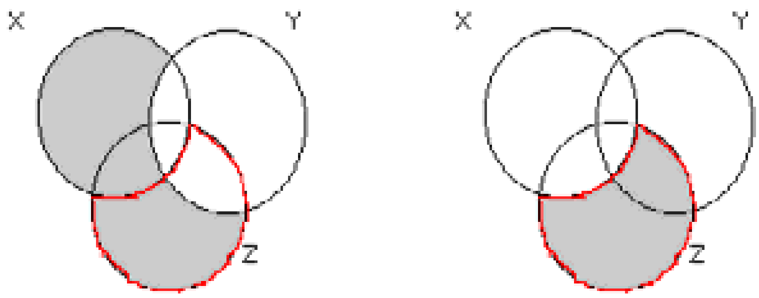
Em seguida, sombreamos a interseção de não-Y e X. O resultado é o diagrama de **Todo X é Y**, confirmando que as duas proposições são equivalentes.

Com relação à **doutrina do silogismo**, recordamos que foi inventada por Aristóteles e desenvolvida, especialmente, na Idade Média. Nela um sistema lógico destaca certos argumentos como válidos e outros como inválidos. Desde então, o referido sistema se tornou o padrão de raciocínio correto e, portanto, quando se queria mostrar a validade de um argumento, era necessário investigá-lo usando o silogismo. Nos moldes tradicionais, vemos que isto acabou sendo muito impróprio, pois nem toda proposição é uma proposição categórica e nem todo argumento é silogístico. Mesmo assim, o prestígio do sistema aristotélico levou Boole (bem com De Morgan) a mostrar que seus métodos eram adequados para tratar as inferências silogísticas. Revela-se, pois, o respeito de Boole e De Morgan para com a Lógica Aristotélica o que explica, por exemplo, a intenção de ambos em ampliar o sistema tradicionalmente válido sem denegri-lo.

Para ilustrar como os métodos de Boole são usados para investigar a validade de silogismos, vejamos alguns exemplos com o auxílio dos diagramas de Veen.

Ex: Investigar (AAA na 2ª. figura).

Neste caso, a premissa maior é **Todo Y é X**. Isto quer dizer que, em seu diagrama devemos sombreamos todo o círculo X, exceto a sua interseção com Y. Semelhantemente, a premissa menor, **Todo Z é Y**, indica que todo o círculo Z, exceto a interseção com Y está vazio e, portanto, é sombreado.



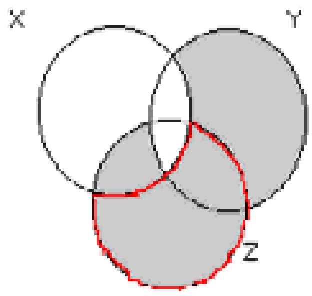
Premissas Conclusão

Ilustração 25 – Diagramas de premissas e conclusão

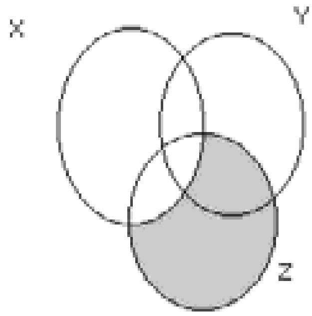
Como sombreamos, na mesma figura (agora na parte à direita), toda parte do círculo Z exceto a sua interseção com X, podemos concluir que **Todo Z é X**. Quando comparamos os dois diagramas, vemos que o da conclusão contém uma região (Z e Y, mas não-X) sombreada que não está sombreada no diagrama das premissas. Logo, a conclusão afirma algo (que a região está vazia) que não é justificado pelas premissas e, portanto, o modo não é válido.

Como explanado no capítulo 3, os modos silogísticos tradicionalmente aceitos como válidos podem ser representados por palavras mnemônicas (desenvolvidas na Idade Média). Analisemos agora alguns destes modos, na ótica do método de Boole em comparação com o sistema tradicional e vejamos como ambas as abordagens diferem da Lógica Moderna. Para tanto, continuaremos a usar X para o termo maior, Y para o médio e Z para o menor.

Inicialmente, tomemos o modo da primeira figura em que todas as proposições são de tipo A, ou seja, **Barbara**. Os diagramas de Venn para as premissas e a conclusão são as seguintes:



Premissas: Todo Y é X.
Todo Z é Y.



Conclusão: Todo Z é X.

Ilustração 26 – Diagramas 2 de premissas e conclusão

De acordo com os diagramas, tudo que é afirmado na conclusão (que as duas regiões (Z, não-X, não-Y) e (Z, Y, não-X) estão vazias) é também afirmado nas premissas e, portanto, usando os diagramas de Venn e a doutrina tradicional de conversão, mostramos a validade de **Barbara** no sistema tradicional.

Analisando **Barbara** através do método de Boole, temos que as premissas são representadas pelas seguintes equações eletivas:

Todo Y é X. $y(1-x) = 0$
Todo Z é Y. $z(1-y) = 0$

Ressaltamos que o referido método consiste em deduzir uma conclusão de algumas premissas representando-as como equações eletivas. Em seguida, eliminando, de uma forma ou de outra, os símbolos que aparecem em mais do que uma premissa e, por fim, obtendo o resultado que representará a conclusão, ou seja, uma proposição que é uma conseqüência lógica das premissas.

Deste modo, seguindo com a análise de **Barbara**, procedemos em transformar as duas equações em uma só equação eliminando o y, visto que a conclusão deve ser uma equação eletiva contendo os símbolos z e x. De acordo com Boole, a maneira mais simples de fazer isto é escrever as equações das premissas de modo que o y apareça como um fator do primeiro membro da primeira equação e como um fator do segundo membro da segunda equação (ou vice-versa). Para tanto, distribuímos o z na segunda equação e passamos o termo negativo para o segundo membro, mudando sua qualidade, exatamente como se faz na álgebra numérica. Deste modo, obtemos:

$$y(1-x) = 0 \;\Rightarrow\; y(1-x) = 0$$

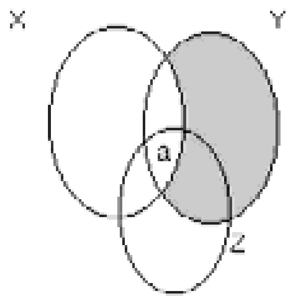
$$z(1-y) = 0 \;\Rightarrow\; z = zy.$$

Em seguida, os membros correspondentes das duas equações são multiplicados, omitindo os y (como se fosse a regra algébrica de cancelamento). Daí, chegamos a:

$$(1-x)z = 0z = 0,$$

o que corresponde à conclusão de que **Todo Z é X**. Portanto, como derivamos a conclusão das duas premissas, o argumento também é válido segundo o método de Boole.

Entretanto, nem sempre os modos tradicionalmente válidos e cuja veracidade também pode ser obtida no sistema Boole, são aceitos na lógica moderna. É o caso, por exemplo, de **Darapti**, um dos modos tradicionalmente válidos da terceira figura. Neste caso, embora tenha duas premissas universais (**Todo Y é X** e **Todo Y é Z**), sua conclusão (**Algum Z é X**) é particular. A fim de deduzir essa conclusão, convertemos a premissa menor, usando o método tradicional de conversão por limitação, o que resulta em **Algum Y é Z**. Com ajuda dos diagrama de Venn temos as premissas representadas por:



Premissas: Todo Y é X
Algum Y é Z (convertida).

Ilustração 27 – Diagramas de premissas

De tal diagrama, completamos a verificação de validade deste modo silogístico segundo a Lógica Tradicional. Isto porque, o referido diagrama revela que há somente duas subclasses que contêm elementos que são tanto Y quanto Z. Uma delas, no entanto, está vazia. A outra, a interseção de X, Y e Z, contém o elemento a (que é Y e Z). Assim sendo, a consiste em algo que é da classe Z bem como da classe X e é exatamente isto que a conclusão afirma.

Na ótica do método de Boole, a validade também é verificada. De fato, ao escrevemos as premissas de **Darapti** como equações eletivas do tipo:

Todo Y é X. $y(1-x) = 0$

Todo Z é Y. $y(1-z) = 0$

Podemos resolver a segunda premissa e isolar o y em membros opostos em cada equação dispondo-as da seguinte maneira:

$$y(1-x)=0 \;\Rightarrow\; y(1-x)=0 \;\Rightarrow\; y(1-x)=0$$
$$y(1-z)=0 \;\Rightarrow\; y=vz \qquad\;\; \Rightarrow\; vz=y.$$

Novamente, multiplicamos as duas equações, omitindo y e chegamos à equação:

$$vz(1-x)=0,$$

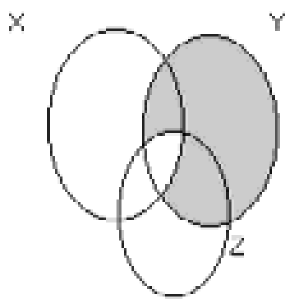
ou seja, **Algum Z é X**, mostrando que o silogismo é válido.

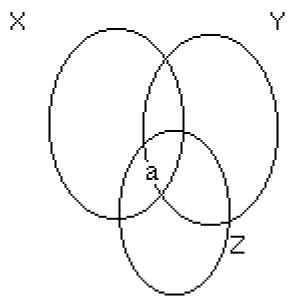
Todavia, este mesmo modo silogístico não é válido na Lógica Moderna em decorrência da não aceitação da conversão por limitação usada, para este caso, tanto por Boole quanto pela Lógica Tradicional.

A este respeito esclarecemos que a equação $y(1-z) = 0$ significa que a interseção da classe Y e a classe não-Z está vazia ($Y\cap\overline{Z} = \phi$). Isto que dizer que os Y são alguns dos Z. Como Boole interpreta vz como **alguns Z**, a **solução** dessa equação é $y=vz$. A conclusão é $vz(1-x)=0$, ou seja, $vz = vzx$, que é claramente uma outra forma a simbolizar **Algum Z é X**.

Outra ressalva consiste na resolução da segunda equação, $y(1-z) = 0$, donde Boole concluiu $y=vz$. Isto é, como explicamos acima, ($Y\cap\overline{Z} = \phi$) $\Rightarrow$ há algum $\underline{a}\in Y\cap Z$, o que corresponde à conversão por limitação usada na demonstração tradicional.

Vejamos, usando diagramas de Venn, porque a conversão por limitação não é lícita na Lógica Moderna.





Premissas: Todo Y é X.
Todo Y é Z.

Conclusão: Algum Z é X.

Ilustração 28 – Diagramas 3 de premissas e conclusão

Como enfatizado por Sousa e Fossa (2007, p. 54):

> A conclusão não especifica se a é um elemento da interseção de todos os três círculos ou da interseção de Z com X. Desta forma, os lógicos colocam o referido símbolo, assim por dizer, em cima do muro. Para nossos propósitos, porém, isto não importa. O que importa é que há informação na conclusão que não é autorizada pelas premissas e, portanto, para a lógica moderna, o argumento não é válido.

Assim, finalizamos sumariamente o silogismo do livro *The Mathematical Analysis of Logic*, ressaltando que Boole dividiu os silogismos em quatro categorias, dependendo dos artifícios usados para demonstrá-los e de acordo com a presença ou não do símbolo v.

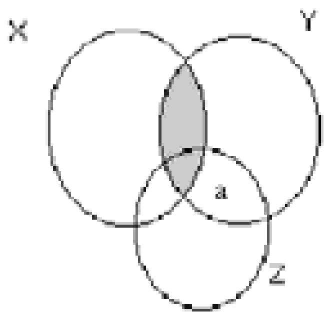
A primeira categoria consiste em silogismos cujas demonstrações não contêm o símbolo v, por exemplo, por **Barbara**. Essa categoria não é problemática.

Na segunda categoria, o símbolo v aparece na demonstração através da resolução de uma equação, como aconteceu no caso de **Darapti**. Todos os silogismos dessa categoria são inválidos para a Lógica Moderna, pois têm duas premissas universais e uma conclusão particular.

A terceira categoria inclui o símbolo v em uma das equações eletivas representando uma das premissas. Contudo, não é necessário resolver a equação universal. Todos os silogismos dessa categoria têm uma premissa universal, uma particular e uma conclusão particular, por conseguinte, não há o tipo de dificuldade encontrada na segunda categoria. Particularmente temos Ferio (primeira figura):

Nenhum Y é X.
Algum Z é Y.
Portanto, algum Z não é X.

Segundo o diagrama de Venn as premissas são:



Premissas: Nenhum Y é X.
Algum Z é Y.

Ilustração 29 – Diagrama 2 de premissas

Daí chegamos a uma conclusão claramente autorizada pelas premissas, pois o diagrama mostra que há algo que é Z, mas não X.

Seguindo o método de Boole a demonstração expressa-se, primeiramente pelas equações:

Nenhum Y é X. $\Rightarrow$ $yx = 0$

Algum Z é Y. $\Rightarrow$ $vz = vy$.

Em seguida, multiplicamos ambas e obtemos a equação:

$$vzx = 0,$$

ou seja, **Algum Z não é X**.

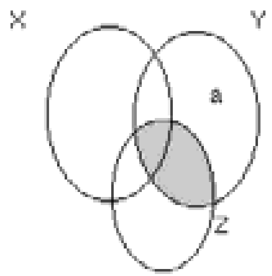
A quarta e última categoria de silogismos é aquela em que o símbolo *v* aparece nas duas premissas. Todos os silogismos dessa classe são inválidos tanto tradicionalmente, quanto para Boole e para a Lógica Moderna.

Destacamos que há uma regra sobre proposições negativas que consiste em considerar que se a conclusão é negativa, uma das premissas deve ser negativa. Neste sentido, nenhum silogismo tradicionalmente válido tem duas premissas negativas. Ainda a respeito do silogismo, destacamos que Boole sanciona alguns tipos de conversão não reconhecidos pela Lógica Tradicional – e esses incidem sobre termos negativos –, daí é de esperar que a sua Lógica legitimaria alguns silogismos com duas premissas negativas, como podemos notar no seguinte exemplo de silogismo (da primeira figura):

Algum Y não é X	(tipo O)	$\Rightarrow\ vy = v(1\text{-}x)$
Nenhum Z é Y	(tipo E)	$\Rightarrow\ 0 = zy.$
Portanto, algum $\overline{X}$ é $\overline{Z}$	(tipo I).	

Multiplicando, obtemos $0 = v(1-x)z$, ou seja, **Algum** $\overline{X}$ é $\overline{Z}$. Obviamente, as nossas observações sobre termos como $\overline{X}$ e $\overline{Z}$, feitas anteriormente, são aplicáveis aqui.

Usando um diagrama de Venn, vejamos um exemplo de como o método de Boole sanciona a validade de argumentos não-silogísticos e, assim, amplia o alcance da Lógica.



Premissas: Algum Y não é X.
Nenhum Z é Y.

Ilustração 30 – Diagrama 3 de premissas

A existência do elemento a confirma que é a conclusão é autorizada, pois claramente a indica que existe algo que é não-X (isto é, $\overline{X}$) e também não-Z (isto é, $\overline{Z}$). Salientamos ainda que, como o argumento proposto tem cinco termos (X, Y, Z, $\overline{X}$ e $\overline{Z}$) em vez dos três associados a um silogismo, talvez fosse melhor não chamá-lo de um silogismo.

Numa avaliação razoável à luz da Lógica Moderna, a teoria booleana do silogismo pode ser considerada uma doutrina falha em alguns aspectos, por exemplo, o uso do símbolo *v*, criticado pelo próprio De Morgan (como veremos). Contudo, ao proferirmos uma análise mais criteriosa, testificamos que essas falhas têm pouca importância frente à sua grande inovação, a matematização da Lógica. Isto porque, consideramos que as contribuições advindas de seu trabalho em favor desta nova Lógica sobrelevam estas falhas. De fato, em defesa de um método simbólico, o próprio Boole (1998, p. 59) destacou:

> The nature of the symbols x, y, z, indicates that the Proposition belongs to those which we have before designated as *Categorical*. Very different from the above is the Proposition, Either all the inhabitants are Europeans, or they are all Asiatics. Here the disjunctive particle separates Propositions. The case is that contemplated in (31) of the present Chapter; and the symbols by which it is expressed, although subject to the same laws as those of (*a*), have a totally different interpretation.
> The distinction is real and important. Every Proposition which language can express may be represented by elective symbols, and the laws of combination of those symbols are in all cases the same; but in one class of instances the symbols have reference to collections of objects, in the other, to the truths of constituent Propositions.

Deste modo, propiciou um formalismo que, além de expandir a Lógica Tradicional, também simplificou a manipulação de seus resultados, especialmente, com a analogia das leis lógicas e as leis da Aritmética. Além disso, usando suas equações eletivas para investigar outros tipos de argumentos, desenvolveu um sistema poderoso capaz de abordar argumentos não-silogísticos e demonstrar a sua validade (ou invalidade).

Portanto, ao abordar o **silogismo hipotético**, Boole observou corretamente que não se trata das relações entre classes, mas relações entre proposições. Por exemplo, ao analisarmos a equação, $x(1-x) = 0$, em termos da teoria de classes e da teoria de proposições, temos que:

* Em termos da teoria de classes (conjuntos) podemos dizer que se elegemos X e dele elegemos os não-X obteremos a classe vazia.

* Tratando agora, a referida equação, em termos de proposições, salientamos que o símbolo eletivo *x* elege os casos ou circunstâncias do universo nos quais a proposição X é verdadeira. Deste modo, $1-x$ elege os casos ou circunstâncias nas quais X é falsa. Para tanto, também ressaltamos que Boole interpretou o símbolo 1 como representando o **universo hipotético**, ou seja, o **universo de discurso** ou o domínio da interpretação. A multiplicação das expressões acima indica a conjunção das mesmas, ou seja, o correspondente entre proposições da interseção de classes. Desta forma, como Macfarlane (1916) corretamente

relata, a referida lei, $x(1–x) = 0$, é considerada por Boole como uma expressão do princípio da não-contradição.

Destacamos ainda que a demonstração da referida equação é omitida por Boole em seu trabalho, provavelmente, em razão de sua simplicidade. De fato, podemos verificá-la em decorrência da lei dos índices. Vejamos:

$$x(1–x) = x–x^2 = x–x = 0.$$

Uma forte simplicidade obtida pelo método de Boole, consiste na análise de proposições compostas em termos de proposições simples apenas mediante a dualidade dos valores 1 e 0 (verdadeiro e falso). Para tanto, Boole (1998, p. 52) dá a seguinte regra:

> Rule. Consider what are those distinct and mutually exclusive cases of which it is implied in the statement of the given Proposition, that some one of them is true, and equate the sum of their elective expressions to unity. This will give the equation of the given Proposition.

Salientamos que o par de valores (1 e 0) faz parte também de analogias posteriores com a teoria da informação. Ressalvamos ainda que a análise de Boole é bastante semelhante ao desenvolvimento da Lógica Moderna do Cálculo Sentencial, o que é feito em termos de funções de verdade. Isto atesta também que suas idéias eram de vanguarda. No tocante às proposições, temos que: dado duas proposições, X e Y, há apenas quatro casos possíveis, que são representados pelas seguintes expressões eletivas:

X verdadeira, Y verdadeira	xy
X verdadeira, Y falsa	$x(1–y)$
X falsa, Y verdadeira	$(1–x)y$
X falsa, Y falsa	$(1–x)(1–y)$.

Caso haja mais proposições, os casos serão aumentados de forma análoga.

Sabendo que o símbolo x elege os casos em que X é verdadeiro, podemos afirmar que a proposição X é uma proposição verdadeira através de uma equação eletiva, $x = 1$ (ou, equivalentemente, $1–x = 0$). Da mesma forma, se queremos afirmar que X é uma proposição falsa, temos a equação $x = 0$ (ou $1–x = 1$). Procedendo do mesmo modo, $xy = 1$ quer dizer que as duas proposições X e Y são simultaneamente verdadeiras, ou seja, que a sua conjunção é verdadeira.

Além disso, a disjunção (exclusiva) quando X é verdadeira e Y falsa e também quando X é falsa e Y verdadeira. Pela regra de Boole, a soma das expressões eletivas desses dois casos deve ser igual à unidade (valor atribuído à veracidade). Em termos de equações temos:

$$x(1–\mathrm{y}) + (1–x)y = 1,$$

simplificando, tem-se:

$$x–2xy+y = 1.$$

Com relação à disjunção inclusiva, acrescentamos mais um caso que faz com que a disjunção seja verdadeira, a saber, tanto X quanto Y são verdadeiras. Em termos de equações isto significa que somamos xy à equação para a disjunção exclusiva, ou seja:

$$xy + x–2xy+y = 1,$$

donde obtemos a equação:

$$x–xy+y = 1.$$

Segundo Sousa e Fossa (2007, p. 58):

> O próprio Boole, no entanto, não segue a regra proposta em toda instância, pois às vezes é mais fácil determinar o que falsificaria a proposição e pôr essa soma igual ao zero. O caso da disjunção inclusiva é um bom exemplo disto, pois é falsa em apenas um caso, quando as duas partes proposicionais são falsas. Assim a equação é $(1–x)(1–y) = 0$, o que reduz à equação dada anteriormente. Um outro caso importante é o da proposição condicional **Se X, então Y.** Essa proposição será falsa somente no caso que X é verdadeira e Y falsa. Assim, temos $x(1–y) = 0$.

Para mais esclarecimentos do método de Boole, ver os exemplos de Sousa e Fossa (2007, p. 59 – 61).

Em razão da crença de que a exposição nesta obra não foi suficientemente clara para apresentar sua Lógica, o próprio George Boole externou, no *postscript* de sua primeira edição, que não estava completamente satisfeito. Acreditava e sentia a necessidade que seu primeiro trabalho fosse expandido e reformulado em um outro livro mais completo. Este, por sua vez, foi intitulado *An Investigation of the Laws of Thought* e publicado em 1854. A respeito da apresentação e análise de seu conteúdo destinamos a próxima seção.

5.3.2 O sistema lógico contido no 2º livro de Boole (as reformulações e expansão do 1º)

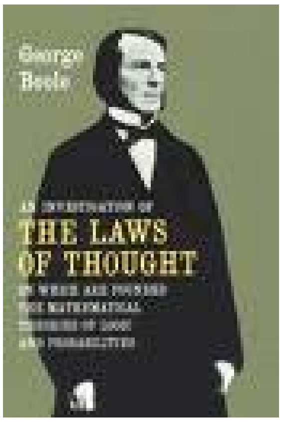


Ilustração 31 – *The Laws of Thouht*
Fonte: Boole (1958)

No que se refere ao conteúdo do livro, *The Laws of Thought* (1854), podemos dizer que consiste numa expansão da primeira obra de George Boole, não só em quantidade (número de páginas aumenta de 82 para 424) como em qualidade (generalização dos métodos e aplicações contidas no primeiro livro). De fato, ao estudarmos este trabalho percebemos mais claramente a lógica como sendo o que ele chamou de **as leis do pensamento**, regidas por operações mentais matematizadas. Uma justificativa é apresentada pelo próprio Boole (1958) ao afirmar, no prefácio de sua obra, que "It exhibits the results, matured by some years of study and reflection, of a principle of investigation relating to the intellectual operations, the previous exposition of which was written within a few weeks after its idea had been conveiced." No que segue, Boole trata da preparação do leitor a obra, especialmente, quanto às bases necessárias para seu entendimento. Neste sentido, apresenta várias referências de apoio, como Whately no aspecto da lógica tradicional e De Morgan sobre probabilidade.

Assim sendo, os nove primeiros capítulos, basicamente, compilam o sistema contido no *The Mathematical Analysis of Logic* (1847). Para tanto, aborda inicialmente a natureza e objetivo do trabalho, os sinais e leis que compõem o sistema, a derivação destas leis, divisão das proposições, o princípio de raciocínio simbólico, bem como, as possibilidades de interpretação, eliminação, redução e métodos de abreviação dos resultados.

Ressaltamos que Boole, já no início da obra, destaca que seu desígnio não é *a novel*, especialmente no que se refere à aproximação da Lógica e a Teoria de Probabilidades, visto a própria evolução destas ciências. Assim, na concepção de Boole é plenamente concebível investigar as leis das operações da mente pelas quais o raciocínio é executado; dar uma expressão a elas na linguagem simbólica de um Cálculo, e sob esta fundação estabelecer a ciência da Lógica com método próprio e geral para a aplicação da doutrina matemática de Probabilidades.

No capítulo X, intitulado *Conditions of a Perfect Method*, Boole, apropriando-se do sistema de leis e métodos apresentados, abre espaço para explanar acerca das condições de constituição de um método primoroso. Nos capítulos precedentes as Proposições Primárias foram discutidas extensamente e deste ponto em diante há uma preparação para as Proposições Secundárias. Assim, trata-se de um intervalo de transição entre essas duas grandes divisões da ciência da Lógica visto que toda proposição pode ser considerada como pertencente a uma ou outra das duas grandes classes, a saber, Proposições Primárias e Proposições Secundárias.

Para Boole (1958, p. 150) "that a perfect method should not only be an efficient one, as respects the accomplishment of the objects for which it is designed, but should in all its parts and processes manifest a certain unity and harmony." De fato, a perfeição atribuída ao método proposto não consiste apenas de eficiência, mas também da manifestação de uma certa unidade e harmonia. Este pensamento seria, pois, um reflexo do progresso da matemática aplicada haja vista que ela tem apresentado outros exemplos notáveis de redução de sistemas de problemas ou equações ao domínio de alguma lei central.

No que segue, capítulo XI e XII, há uma abordagem deste método às proposições secundárias, ou seja, aquelas sobre, ou relacionadas a, outras proposições consideradas como verdadeiras ou falsas. Segundo sua condição de perfeição, esta investigação, embora esteja feita sob os sujeitos distintos de pensamento, não difere quanto às leis formais por eles reveladas nem aos métodos ou processos fundados sob essas leis. Desta forma, confirma a harmonia e uniformidade do método. Como exemplos de proposições secundárias Boole (1958, p. 160) cita "It is true that the sun shines" e "It is not true that the planets shine by their own light." Pertencem também a esta categoria as proposições condicionais; as disjuntivas; aquelas que afirmam a verdade ou a falsidade simultânea de proposições; ou aquelas de caráter composto (mesclando elemento disjuntivo e o elemento condicional), pois em todos os casos podemos emitir julgamentos quanto a sua veracidade ou falsidade. Especialmente, Boole (1958, p. 161) diz "I would in the first place remark, that it is in the form of secondary propositions, as least as often as in that of primary propositions, that the reasoning of ordinary life are exhibited." Realmente, em decorrência da vastidão de exemplos abarcados, isto é, devido suas variadas aplicações, bem como a analogia harmoniosa que compartilha com a teoria das Proposições Primárias, este estudo merece atenção.

No tocante a analogia com as primárias há que se considerar que as leis formais, a que as operações da mente estão sujeitas, são idênticas em expressão em ambos os casos e, conseqüentemente, os processos matemáticos que são fundados sob essas leis são também idênticos. Por este motivo, os métodos que já investigamos na parte anterior do trabalho continuarão a serem disponíveis nas novas aplicações com algumas adaptações. Assim, enquanto as leis e processos do método permanecem inalterados, a regra de interpretação deve ser adaptada às novas condições. Para tanto, no tratamento das secundárias, classes de coisas são substituídas por proposições e, para as relações de classes e indivíduos, são consideradas as conexões de proposições ou de eventos.

Posteriormente, os dois capítulos seguintes do livro destinam-se a analisar casos clássicos como **a demonstração da existência e atributos de Deus**, do Dr. Samuel Clarke e da *ethica ordine geometrico demonstrata,* de Spinoza.

Em seguida, abre um parêntese para explanar a relação do seu trabalho com o de Aristóteles (capítulo XV). Para nossos propósitos, merecido destaque é dado a esta parte da obra, pois reflete um julgamento do próprio Boole quanto às inovações propostas frente a padrão tradicionalmente concebido. Além disso, também revela o respeito de Boole ao trabalho de Aristóteles. De fato, já no início do capítulo, Boole esclarece que o sistema lógico de Aristóteles, modificado em seus detalhes, mas inalterado em suas características essenciais, ocupa um lugar tão importante na educação das academias, que parece apropriado abordar, na referida obra, sua natureza e fazer uma breve discussão dos problemas principais que ele ocasiona.

Nas palavras de Boole (1958, p. 226) a tarefa proposta é feita:

> [...]in no narrow or harshly critical spirit [...]. My object, indeed, is not to institute any direct comparison between the time-honoured system of the schools and that of the present treatise; but, setting truth above all other considerations, to endeavour to exhibit the real nature of the ancient doctrine, and to remove one or two prevailing misapprehensions respecting its extent and sufficiency.

Realmente, Boole segue argumentando em favor do que ele considera a verdadeira constituição de cada trabalho, o seu e o de Aristóteles.

Neste sentido, Boole coloca que a idéia de classificação é assim um elemento ubíquo nos referidos sistemas, já que ambos se preocupam com a análise da veracidade ou falsidade de inferências. Além disso, tradicionalmente a Lógica é apresentada como sendo divisível em dois grandes ramos, um sobre o tratamento de proposições categóricas e o outro com proposições hipotéticas ou condicionais. Similarmente, o sistema de Boole propõe a distinção entre proposições primárias e secundárias. Embora, como já explanado, a maioria dos exemplos concretos se encaixe na segunda categoria, a discussão da teoria das proposições categóricas se sobrepõe, particularmente porque em todos os tratados usuais da Lógica, ela se encontra muito mais completa e elaborada que a das proposições hipotéticas. Por este mesmo motivo é ocupada parcialmente com distinções escolásticas antigas, parcialmente com as os cânones de inferência dedutiva. Contudo, neste livro de Boole, um cuidado especial é dado à segunda categoria.

Com relação às proposições categóricas, Boole recorda que são quatro na lógica tradicional, mas que recentemente mais quatro foram acrescidas no *Formal Logic* (1847) de De Morgan. Contudo, estas oito formas são suscetíveis de serem reduzidas a seis distintas. Na formulação do sistema booleano estas se apresentam como:

1. Todo Y é X, $y = vx$.
2. Nenhum Y é X, $y = v(1-x)$.
3. Algum Y é X, $vy = vx$.
4. Algum Y é não-X, $vy = v(1-x)$.
5. Todo não-Y é X, $1 - y = vx$.
6. Nenhum não-Y é X, $1 - y = v(1-x)$.
7. Algum não-Y é X, $v(1-y) = vx$.
8. Algum não-Y é não-X, $v(1-y) = v(1-x)$.

Os processos da Lógica Formal, em relação ao referido sistema de proposições, são descritos como sendo de dois tipos, a saber, Conversão e Silogismo. Com relação ao primeiro, já foi mencionado que, tanto Boole quanto De Morgan sugeriram ampliações distintas ao modelo tradicional. Postas as leis de conversão, o silogismo booleano segue como uma matematização do aristotélico. Além disso, o sistema lógico de Boole permite a análise de argumentos não silogísticos, como explanado na seção anterior.

A fim de examinar as formas gerais às quais todo silogismo pode ser reduzido, Boole deduz, na primeira proposição deste capítulo, as regras gerais de silogismo. Para tanto, considera inicialmente a condição de inferência em que um dos termos médios, pelo menos, é universal. Neste caso, a regra de inferência consiste em igualar os extremos. Posteriormente, analisa a condição de inferência em que pelo menos um extremo é universal. Neste sentido, a regra consiste em mudar a quantidade e qualidade do referido extremo e igualar o resultado ao outro extremo. Por fim, avalia a condição de inferência em que os dois termos médios são universais. Nesta situação, a regra é mudar a quantidade e qualidade de um extremo e igualar o resultado ao extremo não mudado.

Para encerrar, Boole considera que seu sistema lógico fornece os meios para resolver a questão se o silogismo é na verdade o tipo fundamental de raciocínio, bem como, se o estudo das suas leis tem a mesma extensão que o estudo da lógica dedutiva. Na visão do autor, se este for o caso, alguma indicação disto será encontrada nos sistemas de equações em que está engajado a analisar. Mais ainda, para Boole, não se pode conceber que o silogismo seja o único processo essencial de raciocínio haja vista que seu sistema permite argumentos não silogísticos.

Na seqüência, temos um outro grande momento da obra, um **divisor de águas** do trabalho. Isto porque nos demais capítulos a Lógica, que foi matematizada nos primeiros, passa a ser vista sob várias interpretações, especialmente, sob a Teoria de Probabilidades. Destacamos que, a partir do capítulo XVI, a Lógica de Boole permite interpretações diferentes e não só é aplicada a várias situações como De Morgan propõe.

A fim de esclarecer esta nuance própria da Lógica Matemática defendida por Boole, ele inicialmente tece considerações acerca da teoria de Probabilidades como um objeto independente de especulação.

Tomando como referência o trabalho *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et matière civile* (1837) do matemático francês Siméon Denis Poisson (1781-840), Boole apresenta as **definições** fundamentais da ciência. Primeiro, a definição da probabilidade de um evento como sendo a razão que temos para acreditar que ele aconteceu, ou acontecerá. A segunda definição diz que a medida da probabilidade de um evento é a razão do número de casos favoráveis ao evento em relação ao número total de casos, favoráveis ou contrários, e todos igualmente possíveis. Daí seguem várias definições de probabilidade até conceber o objeto legítimo da Teoria de Probabilidades.

Segundo Boole (1958, p. 245):

> Probability, it has been said, consists in the expectation founded upon a particular kind of knowledge, viz., the knowledge of the relative frequency of occurrence of events. Hence the probabilities of events, or of combinations of events, whether deduced from a knowledge of the particular constitution of things under which they happen, or derived from the long-continued observation of a past series of their occurrences and failures, constitute, in all cases, our data.

De fato, a probabilidade de um evento (ou sua combinação), sendo o objeto procurado, pode ser deduzida da constituição particular de coisas sob as quais elas acontecem ou não. Contudo, sua interpretação lógica é cabível quando substituímos os **eventos** pelas **proposições** que afirmam que os mesmos ocorreram, ou ocorrerão, e ao considerarmos o elemento da probabilidade numérica como tendo referência à **verdade** dessas **proposições** e não à **ocorrência** dos **eventos** nelas mencionados.

Antes, porém, vale esclarecer que a combinação de eventos também pode ser entendida como um evento e ainda que este pode ser classificado como simples e composto, bem como as proposições.

Com intuito de esclarecer estes aspectos e partir para sua constituição sob as bases de sua lógica matemática, Boole resume os princípios que têm sido aplicados à solução de questões de probabilidade, tomando como referência Laplace[87]. Vejamos:

PRINCÍPIO 1: A dicotomia entre a ocorrência ou não de um evento pode ser representada pela dualidade entre um símbolo e seu complemento. Por exemplo, se p é a probabilidade da ocorrência de um evento, $1-p$ será a probabilidade de sua não ocorrência.

PRINCÍPIO 2: A probabilidade da ocorrência da combinação de dois eventos independentes é o produto das probabilidades desses eventos. Por exemplo, sejam p a probabilidade de chover e q a probabilidade deu ir à praia, então, $p.q$ ou pq é a probabilidade de que eu vá a praia num dia de chuva.

PRINCÍPIO 3: A probabilidade da ocorrência da combinação de dois eventos dependentes é igual ao produto da probabilidade de um deles pela probabilidade de que, se o primeiro ocorre, o segundo acontecerá também. Por exemplo, Seja p a probabilidade de fazer sol e q a probabilidade de que se não chover eu irei à praia. Agora, p é verdadeira, então pq também será, ou seja, fez sol, então eu irei à praia.

PRINCÍPIO 4: A probabilidade que se um evento, E, ocorrer, um evento, F, também ocorrerá, é igual à probabilidade da ocorrência da combinação dos dois eventos E e F, dividida pela probabilidade da ocorrência de E. Sendo p a probabilidade do evento E e q a probabilidade do evento F, então, a probabilidade resultante é dada por $\frac{p+q}{p}$.

[87] Pierre-Simon Laplace (1749-1827), matemático francês. Sua *Téorie analytique de probabilités* foi publicada originalmente em 1812.

PRINCÍPIO 5: A probabilidade de ocorrência de um ou outro de dois eventos que não podem ocorrer conjuntamente é igual a soma das sua probabilidades individuais. Analogamente, sejam X e Y duas proposições, a união X + Y representa o conjunto de elementos ou eventos de X, Y ou de ambos.

PRINCÍPIO 6: Se um evento observado pode resultar de qualquer uma das *n* causas exclusivas que são *à priori* igualmente prováveis, a probabilidade de uma dada causa é uma fração cujo numerador é a probabilidade do evento, sob a hipótese da existência da referida causa, e cujo denominador é a soma das probabilidades similares relativas a todos as *n* causas.

PRINCÍPIO 7: A probabilidade de um evento futuro é a soma dos produtos formados por multiplicar a probabilidade de cada causa pela probabilidade de que, se a referida causa existir, o mencionado evento futuro ocorrerá.

O oitavo princípio é uma compilação dos precedentes.

Frente à apresentação dos princípios básicos da Teoria de Probabilidades e as suas primeiras analogias à Lógica, Boole (1958) introduz, no capítulo seguinte (XVII) o que ele chama de **método geral para solução de problemas na teoria de probabilidades**.

O referido método consiste de conclusões deduzidas da definição essencial posta acima, acrescida de algumas outras combinadas dos princípios postos. A fim de elucidarmos os resultados, considere:

p como a probabilidade que um evento x acontecerá,

$1-p$ será a probabilidade que o mencionado evento não acontecerá,

m é o número de casos favoráveis ao evento x,

n é o número de casos possíveis,

$n-m$ é o número de casos desfavoráveis ao evento x.

Agora vejamos as conclusões propostas por Boole:

I. Quando é certo que um evento ocorrerá, a probabilidade do mesmo, no sentido matemático dado acima, é 1. Pois, os casos que são favoráveis ao evento, e os que são possíveis, são, nesse caso, os mesmos.

De fato, por definição,

$$\frac{m}{n} = \text{probabilidade que } x \text{ acontecerá} = p.$$

$$\frac{n-m}{n} = \text{probabilidade que } x \text{ não acontecerá.}$$

Mas $$\underbrace{\frac{n-m}{n}}_{\text{probabilidade de } x \text{ não ocorrer}} = 1 - \underbrace{\frac{m}{n}}_{\text{probabilidade de } x \text{ ocorrer}} = 1 - p.$$

II. A probabilidade da ocorrência de quaisquer dois eventos é o produto da probabilidade de um desses eventos pela probabilidade que, se esse mesmo evento ocorrer, o outro também ocorrerá. Matematicamente,

Se m o número de casos favoráveis ao acontecimento do primeiro evento,

n é o número de casos, igualmente possíveis, desfavoráveis ao mesmo; então

a probabilidade do primeiro evento é, por definição, $\frac{m}{n+m}$.

Dos m casos favoráveis ao primeiro evento, sejam t casos favoráveis à conjunção dos primeiro e segundo eventos, então, por definição, $\frac{t}{m}$ é a probabilidade de que, se o primeiro evento acontecer, o segundo também acontecerá. Multiplicando essas frações, temos

$$\frac{m}{m+n} \times \frac{t}{m} = \frac{t}{m+n}.$$

Mas o numerador da fração resultante, $\frac{t}{m+n}$, é o número de casos favoráveis à conjunção dos eventos, e seu denominador é o número, $m+n$, de casos possíveis. Representa, portanto, a probabilidade da ocorrência dos dois eventos.

Assim, se p for a probabilidade de qualquer evento x, e q a probabilidade de que, se x ocorrer, y ocorrerá, a probabilidade da conjunção xy será pq.

III. A probabilidade de que, se um evento x ocorrer, o evento y ocorrerá, é uma fração cujo numerador é a probabilidade da sua ocorrência conjunta e denominador a probabilidade da ocorrência do evento x.

Essa é uma conseqüência imediata do 2º Princípio.

IV. A probabilidade da ocorrência de um de uma série de eventos exclusivos é igual à soma das suas probabilidades separadas.

A fim de demonstrarmos temos:

sejam n o número de casos possíveis

m_1 o número desses casos favoráveis ao primeiro evento;

m_2 o número de casos favoráveis ao segundo, &c. Então,

as probabilidades separadas dos eventos são $\frac{m_1}{n}, \frac{m_2}{n}$, &c.

Agora, como os eventos são exclusivos por hipótese, nenhum dos casos favoráveis a um desses eventos é favorável a qualquer outro; e, portanto, o número de casos favoráveis a algum elemento da série será m_1 + m_2 .... Conseqüentemente, a probabilidade de que algum elemento da série acontecerá será $\frac{m_1 + m_2 \ldots}{n}$. Ora, mas isto é a soma das frações, $\frac{m_1}{n}, \frac{m_2}{n}$, &c. Conseqüentemente, o princípio é manifesto.

A quinta conclusão do método proposto por Boole é deduzida da definição de que dois eventos são ditos independentes quando a probabilidade da ocorrência separada deles não é afetada por nossa expectativa da ocorrência, ou não, do outro, juntamente com o segundo princípio posto acima. Assim,

V. A probabilidade da ocorrência de dois eventos independentes é igual ao produto das probabilidades separadas dos mesmos.

De fato, sendo considerado que:

p é a probabilidade de um evento *x*,

q a de um evento *y* considerado como independente de *x*, então:

q é também a probabilidade de que, se *x* ocorrer, *y* ocorrerá.

Assim, pelo Princípio II, *pq* é a probabilidade da ocorrência de *x* e *y*.

Sob as mesmas circunstâncias, a probabilidade que *x* ocorrerá e *y* não ocorrerá é dada por $p(1–q)$. Visto que *p* é a probabilidade que *x* ocorrerá e $1–q$ a probabilidade que *y* não ocorrerá.

Desta maneira, $(1–p)(1–q)$ será a probabilidade que ambos os eventos não acontecerão.

A respeito da teoria das probabilidades deve-se ainda considerar que:

* A distinção entre eventos simples e compostos não é fundada na natureza dos próprios eventos, mas sob o modo em que estão apresentados ao mente. Sua concepção está ainda atrelada à linguagem.

* Se esta distinção entre eventos, como simples ou compostos, não é fundada sob sua natureza real, mas sob os acidentes da linguagem, não pode afetar a questão da sua dependência ou independência mútua. Mais ainda, quando as probabilidades dos eventos são dadas, mas não há qualquer informação respeitando sua dependência, a mente os considera como independentes.

* Agora, se possuímos alguma informação definida sobre suas combinações possíveis, os princípios acima ainda são válidos. Finalmente, não importa se eles sejam simples ou compostos, as fontes do conhecimento de suas probabilidades e de suas relações, ou os métodos pelos quais as mesmas são conhecidas, são indiferentes. Além disso, não há

conseqüência se a informação sobre o evento é obtida através dos seus dados, ou deduzida por inferência lógica, isto é, se as conclusões obtidas serão feitas a partir da consideração do evento propriamente dito (na teoria de probabilidades) ou se encarado como proposições.

* Finalmente, qualquer que seja a natureza dos eventos cujas probabilidades são dadas, sempre podemos, por uma aplicação do Cálculo da Lógica, determinar a expressão do último evento como uma combinação definida daqueles, e determinar definitivamente todas as relações conectando aqueles entre si.

Postos estes axiomas, Boole explicita sua Lógica sob a interpretação da Teoria de Probabilidades. De fato, encara as investigações da referida teoria como baseadas no uso do Cálculo de Lógica, explicitando certos termos e modos de expressão que são derivados dessa aplicação, da seguinte forma:

Evento simples x $\rightarrow$ ocorrência dada pela equação $x = 1$

Evento composto $\phi(x, y, z, ...)$ em relação eventos simples $x, y, z \rightarrow \phi(x, y, z, ...)=1$.

Também pode ser considerado como uma função lógica eletiva. A ocorrência de suas partes independentes é dada pelas equações $x = 1$, $y = 1$.

Se x é a proposição **Fez sol** e y é a proposição **Vou à praia**, então a equação

$$x(1-y) + y(1-x) = 1$$

representaria a proposição **ou chove ou eu vou à praia**, mas não ambos.

Note que a lei de dualidade é satisfeita para cada caso, pois a interseção de ocorrência e não ocorrência de um evento, ao mesmo tempo, é vazia. Ou seja, $x(1-x) = 0$.

Quanto ao tratamento dos eventos, Boole (1958) esclarece que devemos proceder na ordem natural de pensamento, de eventos simples e incondicionados, para eventos compostos e condicionados.

Como complemento de seu método, Boole (1958) coloca as combinações possíveis de dois eventos simples, x e y, cujas probabilidades respectivas são p e q. Deste modo, segue:

EVENTOS.		PROBABILIDADES.
xy,	Ocorrência de ambos x e y,	pq.
$x(1-y)$,	Ocorrência de x sem y,	$p(1-q)$.
$(1-x)y$,	Ocorrência de y sem x,	$(1-p)q$.
$(1-x)(1-y)$,	Não ocorrência de ambos x e y,	$(1-p)(1-q)$.

Para Boole (1958) os eventos expressos por dois ou mais componentes quaisquer são mutuamente exclusivos. A única combinação possível deles é **disjuntiva,** expressa na linguagem ordinária pela conjunção **ou,** na linguagem da lógica simbólica pelo sinal +. Ora a probabilidade da ocorrência de um evento pertencente a um grupo de eventos mutuamente exclusivos é a soma das suas probabilidades separadas, e é expressa conectando as expressões dessas probabilidades separadas pelo sinal +. Realmente, se concebemos a ocorrência de **ou o evento *x* sem o evento *y*, ou o evento *y* sem o evento *x***, sua expressão simbólica é $x(1-y) + y(1-x)$, e sua probabilidade, determinada pelos Princípios IV e V, é $p(1-q) + q(1-p)$.

Boole ainda segue apresentando mais detalhes da construção da teoria de probabilidades sob a base de seu cálculo da Lógica até que, ao fim do capítulo, apresenta duas regras gerais construídas nesta analogia. A saber:

CASO I. – *Quando todos os eventos são incondicionados.*

CASO II. – *Quando alguns dos eventos são condicionados.*

Estas, pois, sintetizam as explanações postas ao longo do capítulo.

De posse deste método, os próximos capítulos, do livro *The Laws of Thought*, tratam de ilustrações elementares de sua utilidade, de condições estatísticas em que pode ser aplicado, bem como, dos problemas de causa e sobre a probabilidade de julgamentos permissíveis.

Ao fim do trabalho, Boole tece alguns comentários sobre a constituição do intelecto. Deste modo, encerra suas leis do pensamento sob bases filosóficas e até epistemológicas.

5.4 FAZENDO UM PARALELO

Frente à exposição da Lógica de Boole mediante a apreciação do conteúdo de suas duas obras sobre o assunto, *The Mathematical Analysis of Logic* (1847) e *An investigation of the Laws of Thought* (1854) e, posto que já tecemos comentários acerca do conteúdo do *Formal Logic* (1847) de Augustus de Morgan, propomos neste momento fazer um paralelo entre estes trabalhos buscando elucidar as origens da Lógica Matemática.

Num aspecto geral, podemos afirmar que De Morgan expandiu a Lógica Aristotélica trazendo algo mais, no entanto ainda preso a ela. Boole criou um novo sistema que, respeitando o tradicional, foi capaz de colocar a Lógica sob bases matemáticas.

De fato, ambos os sistemas respeitaram a tradição aristotélica, buscando enfrentá-la sem denegri-la, haja vista que tanto Boole quanto De Morgan reservaram parte de suas obras ao tratamento dos casos aristotélicos, ou seja, a veracidade de suas idéias aplicadas às arquétipas. Realmente, neste sentido De Morgan destinou o capítulo VII do *Formal Logic* (1847), intitulado *On the Aristotelian Syllogism* e Boole construiu particularmente o capítulo

XV, chamado *Of the Aristotelian Logic*, do seu livro *The Laws of Thought* (1854), além de várias introduções ou explanações sobre o assunto nos capítulos introdutórios de sua primeira obra, *The Mathematical Analysis of Logic* (1847).

No tocante aos símbolos, ressaltamos que Boole é mais preciso que De Morgan, pois este último tem ambigüidades relevantes como os vários sentidos do símbolo P (por exemplo, como proposição composta ou como operação de conversão). Já Boole, mesmo não sendo ambíguo, também tem um certo símbolo problemático, *v* (que se refere a uma classe indefinida de objetos). A este respeito o próprio De Morgan, nas correspondências com Boole, comenta que "[...] there are unexplained difficulties about *v* and about division by *y*." (DE MORGAN apud SMITH, 1982, p. 26).

Destas correspondências também aludimos vários paralelos dos dois trabalhos. Contudo, salientamos que as cartas sobre o assunto, lógica, só foram possíveis após a publicação da primeira obra de ambos, em virtude de evitar acusações de plágio como De Morgan havia sofrido.

De fato, no livro *The Boole-De Morgan correspondence*, Smith, G. C. (1982) reuniu várias correspondências trocadas entre Boole e De Morgan durante os anos de 1842 a 1864. Estas, por sua vez, relatam desde os primeiros encontros entre os dois, aos assuntos de trabalho como lógica, probabilidade, religião, leis do pensamento, homeopatia, equações diferenciais, controvérsias e assuntos pessoais como casamento.

No tocante a nossos objetivos, o segundo capítulo, intitulado *Mathematical logic and Ireland*, é especial, porque coliga as correspondências trocadas sobre Lógica. Trata-se, pois, da publicação de vinte e seis cartas enviadas por ambos.

A primeira carta, número 10 do livro, foi enviada por Boole a De Morgan em 8 de janeiro de 1847 e refere-se a um encontro entre eles durante a ida de Boole ao *British Museum,* em Londres. Vale salientar que a exemplo deste, a maioria dos encontros entre os dois ocorreram quando Boole foi visitar De Morgan, já que este último não gostava de sair de Londres. Também nesta carta, Boole apresenta a De Morgan um teorema que ele tinha intuito de publicar.

Com relação às cartas 11, 12 e 13, todas se referem ao conteúdo dos livros *Formal Logic* e *The Mathematical Analysis of Logic*. Particularmente, a carta 11 foi enviada por De Morgan a Boole em 31 de maio de 1847. Na ocasião, De Morgan (apud SMITH, 1982, p. 22) comenta que "would rather not see your investigations till my own are quite finished ... you might have the same fancy as myself", o que revela a preocupação de De Morgan quanto a independência de seu trabalho e o de Boole.

Como prometido, na carta 12, enviada em 28 de novembro de 1847, De Morgan, agora tendo publicado seu livro, tece comentários comparativos entre o seu trabalho e o de Boole. Porém, primeiramente faz questão de elucidar que seu livro já está pronto e publicado. Nas palavras de De Morgan (apud SMITH, 1982, p. 24) "I am much obliged to you for your tract, which I have read with great admiration. I have told my publisher to send you a copy of my logic which was published on Wednesday." De fato, as referidas palavras revelam a admiração da parte de De Morgan ao trabalho de Boole e a preocupação em enfatizar a data de publicação de seu livro, 24 de novembro de 1847.

O mais notável no conteúdo desta carta é que, após as ressalvas aferidas por De Morgan, este tece julgamentos relevantes acerca do conteúdo do *The Mathematical Analysis of Logic* e do *Formal Logic*. A saber, tais avaliações dizem respeito a notações e terminologias dos trabalhos, a independência dos mesmos (como já citado) e a certos problemas no de Boole (símbolo v e divisão por y). Neste sentido, De Morgan (apud SMITH, 1982, p. 25) diz:

> There are some remarkable similarities between us. Not that I have used the connexion of algebraical laws with those of thought, but that I have employed mechanical modes of making transitions, with a notation which represents our head work.
>
> For instance, to the notation of my Cambridge paper I add
>
> *XY* name of everything which is *both X* and *Y*.
>
> *X,Y* name of everything which is either *X* or *Y*.
>
> Take your instance of p. 75
>
> $$x = y(1-z) + z(1-y).$$
>
> I express your data thus
>
> 1 …*X*)*Zy*,*Yz*　　*Zy*,*Yz*)*X* …　2

Outra ressalva de De Morgan (apud SMITH, 1982, p. 26) é:

> This is far from having the elegance of yours; but your system is adapted to identities, in mine an identity is two propositions. Perhaps I should pass from
>
> *X*)*Zy*,*Yz*
>
> to　　*Z*)*X*, *Xy*
>
> more readily than your would. But I am not sure.
>
> In fact there hang a multitude of points upon this question whether complex or simple forms are to come first.

A carta segue com as considerações acerca do símbolo problemático v e a divisão por y. A respeito do símbolo v, De Morgan (apud SMITH, 1982, p. 26) coloca que Boole "have recourse to verbal monitions about the meaning of v," ou seja, o referido símbolo não está completamente livre de interpretação e necessita da mesma para ser manipulado. Com relação à divisão por y, De Morgan (apud SMITH, 1982, p. 26) explana:

> The process of division is not per se allowable.
> $xz=yz$ does not give $x=y$. Take page 35.
>
> $y=vx$
> $0=zy$
> $y \times 0=vxzy$ admitted
> $0= vxzy$ do.
>
> Now you may separate
>
> $V.ZXY$ in my notation
> No VZ is XY
> But not No VZ is X
> and yet $VX.ZY$ give $VX.Z$
>
> There is something to explain about the division by y.
> I think with Mr. Graves that $y=vx$ is the primitive form. But v is not a definite elective symbol, make it what you know it to be, and I think the difficulty vanishes
>
> $y=yx$
> $0=zy$
> $y \times 0=zxy^2$
> $0= zxy$
>
> Now some Zs are not Xs, the ZYs. But they are *nonexistent*. You may say that *nonexistents* are not Xs. A nonexistent horse is not even a horse; and, (*à fortiori*?) not a cow. This is not suggested by your paper; but appears in my system.

Ainda sobre os dois trabalhos, Smith (1982, p. 23) comenta: “The notation used by De Morgan rapidly became obsolete and will appear quite strange. Boole´s notation, however, is close to that of present-day mathematical logic.” De fato, Boole ao escrever $x + y$ como sendo a união exclusiva entre x e y alude a $X \cup Y$, da mesma forma, ao escrever xy alude a $X \cap Y$. Contudo, diferencia-se ao usar o símbolo v como indicativo da quantidade algum. Smith (1982, p. 23) ainda completa que “De Morgan used different symbolic notations at different periods.” Realmente, percebemos e comentamos que, no *Formal Logic*, De Morgan tem simbologias ambíguas. De Morgan usa x como contrário de X; X)Y como sendo Todo X é Y; X,y como {X,y} como X ou y; e Xy como X e y.

Smith, G. C. (1982) ainda diz que tanto Boole quanto De Morgan usaram uma linguagem extensa que considera as partes não vazias de um grupo, isto é, não existem grupos vazios, o que é uma inovação ao modo aristotélico. Contudo a idéia de grupo universal está presente de modo claro apenas no trabalho de Boole ao usar a palavra **universo** como sendo toda classe de objetos concebíveis.

Um dia após o envio da carta 12, De Morgan envia a carta número 13 avisando que não poderá enviar seu trabalho a Boole neste dia, mas mandará em breve.

Na carta 14, enviada em 24 de agosto de 1848, Boole agradece a De Morgan o envio de uma cópia de artigo sobre equações diferenciais. A carta 15, datada de 8 de dezembro de

1848, Boole (apud SMITH, 1982, p. 17) mostra a direção que suas pesquisas tem tomado e diz “I have been quietly and steadily working at Logic,” confirmando o empenho no assunto.

Com relação à carta 15, foi enviada por Boole a De Morgan, em 8 de dezembro de 1848. Seu conteúdo trata do agradecimento de Boole à De Morgan quanto ao testemunho proferido para sua candidatura no *Queen´s College*. Boole também ressalva que embora não tendo obtido sucesso, está pensando em reinstalá-la de forma mais resumida.

Aos 3 de abril de 1849, De Morgan envia a carta 16 à Boole apontando novos julgamentos sobre a lógica deste último. Em suas palavras, De Morgan (apud SMITH, 1982, p. 31) diz:

> The Irish question is not yet *settled* – I know.
>
> I have considered a little the problem of – not name and contrary –*X* and *x*, – but any number of names – a proposition in which the alternatives are more than *X* and not-*X*. I looked at it enough to see the possibility of wider classes of numerically definite distributions and logical syllogisms arising therefrom – but I never had the curiosity to investigate more than some simple case of three alternatives – I hope you will go on with it.
>
> I hope you will expand your view of probabilities – which I am not sure I understand. I look for plenty of logical symbolization from you.

Percebemos falhas sutis apontadas por De Morgan, no tocante à simbologia de um nome e seu contrário, ao número de casos silogísticos abarcados e a compreensão da interpretação lógica a probabilidade.

As cartas 17 e 18, enviadas respectivamente nos dias 12 e 21 de abril de 1949, indicam que a probabilidade entrou como ramo de pesquisa de Boole, pois ele envia artigos sobre o assunto para De Morgan. Já na carta 19, datada de 10 de junho de 1849, De Morgan agradece o envio dos artigos mandados por Boole.

Como conseqüências das cartas anteriores, na carta 20, enviada em 13 de agosto de 1849, Boole (apud SMITH, 1982, p. 17) diz que ele “has been applying the Logic lately in some new fields and perceive nothing like failure or inconsistency.” De fato, Boole defende neste momento que a lógica pode ser interpretada em campos novos sem inconsistência alguma. Refere-se, pois, que a lógica matemática criada por ele, possui diferentes interpretações. Nesta carta também, Boole comunica a De Morgan que sua eleição para professor do *Queen´s College*, Cork, foi oficialmente anunciada.

Conseqüentemente, aos 14 de agosto de 1849, na carta 21, De Morgan parabeniza Boole pelo ingresso na universidade e diz que, dentre as unidades do *Queen´s College*, ele realmente fica mais bem situado em Cork.

Na carta 22, datada de 3 de setembro de 1849, Boole diz que ao viajar a negócios em Londres, gostaria de aproveitar para visitar De Morgan. No dia seguinte, através da carta 23, De Morgan diz que ficaria feliz com a visita do amigo.

Meses depois, em 8 de novembro de 1849, Boole envia a carta 24 a De Morgan contando sobre sua estadia em Cork, descrita como confortável.

Na carta 25, datada de 8 de junho de 1850, De Morgan avisa a Boole que ele não tem novidades particulares sobre matemática ou lógica a não ser o trabalho do Port Royal Logic de Arnauld, cuja tradução para o inglês foi recentemente feita por T. S. Baynes. A seu respeito De Morgan (apud SMITH, 1982, p. 37) menciona: "I mention these things – because I never heard of them myself till the other day – but you may have more of logical acquaintance & correspondence than I have. Do you know of anything written upon the use of the negative in Greek – which may resolve this."

Por fim, Boole envia, em 17 de outubro de 1850, uma carta 26 a De Morgan narrando a respeito da desconfortante situação de conflito religioso na Inglaterra e os reflexos na administração do *Queen´s College*. Em particular, narra a controvérsia passada pelo professor De Vericour. Vale salientar que Boole não gostava de envolver-se em controvérsias e tal narração ao amigo revela-se como que um desabafo. À parte desta discussão, Boole (apud SMITH, 1982, p. 38) conclui que "[…] a real phenomenon in the mind whether rightly called Liberty or not which distinguishes it from the system of external Nature and which admits of being as exactly defined by its properties as any other phenomenon." Assim, Boole remete ao assunto de sua investigação atual, a relação entre as leis do pensamento, lógica e probabilidade.

A respeito da formalização dos trabalhos comentados, podemos acrescentar que ambos conseguiram, de formas diferentes, ampliar as três operações de conversão tradicionais (limitação, simples e negação) para quatro. De Morgan define as operações: S (mudança do sujeito por seu contrário, na proposição), P (análoga à S, mas com relação ao predicado) T (transformação da ordem da proposição) e F (na proposição mudando sua forma, isto é, de afirmativa para negativa ou vice-versa), enquanto Boole assume as três tradicionais acrescidas de uma nova (sem nome especial) marcada pela admissão de termos como $\overline{Y}$. Vale salientar que em ambos os casos a ampliação do número de conversões proporciona um aumento no número de inferências, argumentos, proposições e silogismos possíveis.

Quanto às proposições categóricas, De Morgan traz mais quatro além das já existentes. Contudo, estas são reduzidas a seis em razão da igualdade de duas. Quanto a este aspecto, o próprio Boole (1958, p. 227) reconhece o feito de De Morgan ao afirmar que “to these forms, four others have recently been added, so as to constitute in the whole eight forms susceptible, however, of reduction to six, and subject to relations which have been discussed with great fulness and ability by Professor De Morgan, in his Formal Logic.” Contudo, Boole não se restringe a este reconhecimento e busca adaptar o resultado de De Morgan às suas idéias. Deste modo, Boole apropria-se das novas formas categóricas e as matematiza, além disso, consegue expandir os argumentos lógicos analisados, concebendo os não-silogísticos.

Porém, no tocante à matematização da Lógica a distinção entre Boole e De Morgan é ainda maior. A Matemática está presente no trabalho de De Morgan através de seu silogismo numericamente definido e na quantificação dos termos. Mas, no sistema de Boole a Matemática envolve toda a Lógica, tornando-a completamente refeita, matematizada com as leis do pensamento análogas às leis da Aritmética, com exceção da lei da idempotência.

Por fim, outro aspecto diferencial dos dois trabalhos reside no fato do de De Morgan conceber a Lógica com diferentes aplicações e o de Boole ver a Lógica sob diferentes interpretações – a Probabilidade, por exemplo.

CAPÍTULO 6: CONCLUSÃO

Foto 22 – Pôr-do-sol no rio Potengi

Fonte: Banstur (2008)

6 CONCLUSÃO

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2005, p. 10), diversos estudos em educação têm mostrado que investigar consiste "uma poderosa forma de construir conhecimento." Concernente a este pensamento, acreditamos que investigações históricas a partir do levantamento do conhecimento que esclarecem as bases de uma Ciência ou ramo de pesquisa são imprescindíveis para seu re-avivamento e fortalecimento. Nas palavras de Mendes (2001, p. 18) a Matemática é vista "como uma ciência que também se desenvolve a partir da sua própria história" e tendo em vista sua ligação com a Lógica, desde a definição, creditamos ser necessário um aprofundamento no desenvolvimento da Lógica Matemática à luz da história a fim de proporcionar um melhor entendimento desta teoria.

Realmente, frente à importância da ligação da Lógica com a Matemática, oriunda da própria gênese do conceito desta última, nossa investigação buscou elucidar a aproximação destas ciências mediante os primeiros registros das origens da Lógica Matemática, no século XIX.

Levando em consideração o argumento de MacHale (1985), sobre as condições de grandes descobertas como sendo oriundas da convergência entre a teoria de espírito de época[88] e a teoria de grandes homens, nosso estudo acena para esta direção, ou seja, conhecer o meio em que a Lógica Matemática foi desenvolvida, bem como, o trabalho e a vida dos que estiveram envolvidos ou contribuíram para seu surgimento.

Neste sentido, a fim de construir um estudo sobre as origens da Lógica Matemática, primeiramente aludimos ao contexto em que foi concebida. As condições do meio, do desenvolvimento da Matemática, das discussões sobre métodos simbólicos que propiciaram o aparecimento de trabalhos, quase simultâneos, como o de De Morgan e Boole.

Neste sentido, o séc. XIX é tido como um período de intensas transformações que fortemente marcaram a sociedade e, conseqüentemente, a Ciência. O marco principal dos acontecimentos deste período reside na Revolução Industrial, ocorrida, especialmente na Inglaterra que além de dispor recursos naturais, como o ferro e o carvão, também reuniu grandes capitais acumulados, uma burguesia (cujos interesses predominavam no parlamento) pronta para investir nas técnicas de produção e ainda uma quantidade de trabalhadores livres, que precisavam vender sua força de trabalho em troca de um salário. Além disso, o poderio inglês contou com Ato de Navegação e a Revolução Gloriosa que dinamizaram o comércio e impulsionaram a produção.

Diante da expansão da indústria, muitas mudanças também se refletiram na Europa. Particularmente citamos a dicotomia imposta pelo capitalismo (riqueza X pobreza) industrial que também impulsionou a ciência na direção do lado prático das coisas. Paralelamente, o aperfeiçoamento da indústria fez com que surgissem a cada instante novas máquinas, novos produtos, novos gostos e modas, novas tecnologias. No tocante à vida econômica, social,

---

[88] Segundo o MacHale (1985), *spirit of age* consiste num momento que estava **maduro** para uma invenção particular ou descoberta e que qualquer cientista ou matemático que viveu durante este período poderia muito bem fazer inovações. Já o discurso do *Great Man* ou homem gênio é uma teoria que reivindica que descobertas e invenções são devidas simplesmente a gênios individuais. No entanto, o referido autor salienta que as grandes descobertas ocorrem na verdade quando estas duas teorias se encontram, ou seja, quando um homem gênio é envolvido por um espírito de época.

política e cultural da humanidade as transformações se deram no modo de viver e de pensar das pessoas que foi modificado rápida e radicalmente.

A ligação entre esta gama de mudanças históricas e a produção matemática é enfatizada no fluxograma da página 26. Sumariamente, fazemos uma analogia entre as mudanças nos meios de produção (próprios do processo de industrialização) e o surgimento das máquinas com a valorização da ciência, o surgimento de escolas técnicas e academias militares e o aparecimento da Matemática Aplicada. Similarmente, comparamos a divisão do processo de trabalho e especialização das tarefas com a especialização da Matemática. Por fim, atribuímos um paralelo entre a revolução nos transportes e meios de comunicação com a redistribuição geográfica da Matemática e a divulgação dos trabalhos (novos jornais e periódicos) próprios da idade áurea da Matemática.

A fim de completarmos nosso panorama histórico, ampliamos o período de investigação e tecemos comentários sobre a Lógica ao longo dos tempos. Para tanto, fizemos um exame das contribuições de Aristóteles, comentamos o aporte dado pelos estóicos e megáricos, apresentamos os subsídios deixados pelos estudiosos do período escolástico e finalmente, proferimos acerca dos resultados dos matemáticos dos séculos XIX e XX (que se caracterizam por tentativas de quebrar com o padrão aristotélico, mesmo respeitando sua tradição). De tudo isso, fica a força da tradição aristotélica até o século XIX, onde ainda é respeitada, mas inovada.

Contudo, como Vergani (2003) salienta, as inovações não acontecem abruptamente e sim, as novas idéias surgem em meio a fortes tradições, com avanços e até retrocessos ou tentativas de refutações, tanto que, no século XIX, os livros de referência sobre Lógica, como o de Whately, ainda defendiam fortemente o modo aristotélico.

Frente a estas circunstâncias, nosso estudo sobre as origens da Lógica Matemática, caminhou então em direção à apreciação da obra de Whately. Este, por sua vez, foi um matemático inglês que nasceu em 1787, estudou em Oxford e instruiu-se nos rudimentos das ciências tornando-se teólogo, filósofo, lógico, pedagogo e reformador social. Além disso, assumiu o posto de arcebispo de Dublin, em 1831. Desenvolveu relevantes trabalhos para estas variadas áreas até sua morte em 1863. Especialmente, Whately foi respeitado no padrão aristotélico mesmo por aqueles que buscaram expandir a Lógica como De Morgan e Boole, tanto que ambos fizeram referências aos *Elemets of Logic*, de Whately, em seus trabalhos inovadores. Na referida obra, Whately reuniu os elementos da Lógica Aristotélica que considerava essenciais a uma primeira abordagem do assunto por parte dos estudantes. Pode ser considerado o primeiro tratado inglês a fornecer uma defesa vigorosa da Lógica como um campo de estudo, sendo extremamente influente em seu período e por mais quase duas décadas.

Como já explanado, mesmo frente a força da tradição aristotélica, o século XIX confluiu condições propícias para trabalhos que caminharam em direção a quebra do padrão aristotélico sobretudo mediante sua formalização e, especialmente, sua matematização. Esta última sendo de considerável relevância, pois culminou com o surgimento de uma nova Lógica, a Lógica Matemática e, desta forma, consistiu um marco na história desta ciência.

Nesta direção, De Morgan publica um trabalho relevante em favor da formulação da Lógica e consegue em alguns aspectos expandi-la. De fato, este importante matemático, professor e editor indiano, nascido em 1806, em meio a suas produções intelectuais, aborda a lógica através da publicação do livro *Formal Logic*, em 1847. Sua produção intelectual é fruto de sua graduação no *Trinity College*, das experiências enquanto professor da Universidade de Londres, de seus interesses particulares e, especialmente, da troca de informações com outros relevantes matemáticos como George Peacock (1791-1858), William Whewell (1794-1866) e George Boole (1815-1864) até o fim de sua vida em 1871. Ressaltamos também que De Morgan foi incentivador de jovens pesquisadores a partir da criação de um jornal chamado *Cambridge Mathematical Journal* (editorado por De Morgan) e ajudou a fundar a *British Association for the Advancement of Science* (em 1831). Ao analisarmos o conteúdo do *Formal Logic* podemos destacar os seguintes pontos:

- O sistema lógico proposto por De Morgan expande o tradicionalmente aceito a partir do novo silogismo numérico proposto, bem como, pela quantificação do predicado.
- Consegue, mediante seu formalismo, dar uma nova roupagem dos elementos arquétipos a partir de símbolos e manipulações simbólicas propostas.
- Define precisamente o tratamento dos nomes em conexão com seu contrário através dos símbolos X e *x* e, com isto, chega a seis formas distintas de predicação. Conseqüentemente, o número de formas silogísticas aumenta para 32.
- Também traz novas relações de oposição, como por exemplo, as subcontrárias e supercontrárias e seus símbolos como $A_{\prime}$ e $A^{\prime}$.
- No tratamento das proposições, De Morgan expande as operações de conversão de três para quatro. De fato, enquanto Whately utiliza três operações de conversão: simples, contraposição e limitação; De Morgam faz

uso das operações S, P, F e T e, assim, tem mais inferências, mais possibilidades de conversão de proposições e, conseqüentemente, abarca mais silogismos. Porém, é no uso de um destes símbolos que nosso estudo chama atenção para uma certa fragilidade da proposta de De Morgan. Isto porque, por exemplo, o símbolo P aparece com diferentes significados ao longo do trabalho (como representante de uma operação de conversão, como representante de uma proposição complexa, como o contrário de I, como um nome qualquer em conjunção de outros e, por fim, como um quantificador do termo Y).

- Um ponto relevante é a analogia sutil entre sua Lógica e a Aritmética ao usar os sinais de + e − como representantes de idêntico e contrário, respectivamente. Entretanto, sob estes símbolos também residem ambigüidades já que ao longo do formalismo pararem também como representante da operação de acréscimo de X (troca de *x* por X) e retirada de X (ou troca por *x*).
- O ponto mais próximo à relação de Matemática e Lógica consiste na investigação da teoria dos silogismos numéricos. Mesmo assim, De Morgan não chega a matematizar a Lógica e se limita à quantificação dos termos perante sua análise, especialmente, na análise da validade dos silogismos (para tanto, dispõe de uma outra novidade que são os diagramas de análise com barras preenchidas ou não). Neste aspecto, há uma inovação ao tradicional ao propor começar a abordagem primeiramente pelas proposições complexas (mais encontradas no dia-a-dia) e não através das simples (decodificadas do cotidiano).
- Por fim, De Morgan defende uma Lógica com diferentes aplicações a partir da Teoria da Probabilidade na Lógica.

Particularmente, quando estes pontos são vistos em paralelo com o trabalho de Whately percebemos as mudanças no tocante à Lógica Tradicional.

Contudo, as mudanças mais relevantes ocorrem com a matematização da Lógica proposta nos trabalhos *The Mathematical Analysis of Logic* (1847) e *The Laws of Thought* (1854), de George Boole. Este, por sua vez, foi um matemático inglês praticamente autodidata que nasceu em 1815, teve afeição para atividades clássicas (poesias e traduções), pregou a liberdade de religião (tendo inclinação ao Unitarismo), fundou sua própria escola (buscando trazer o conhecimento mais próximo de seus alunos), envolveu-se com questões sociais (sem levantar bandeira, contribuindo ao Instituto de Mecânica e à Casa de detenção feminina), desenvolveu pesquisas sobre campos diversos da Matemática (especialmente ligados às Equações Diferenciais e à Lógica) e foi professor do *Queen's College* (Cork), onde permaneceu até sua morte em 1864 (recebeu diversos prêmios).

Em dois de seus mais importantes trabalhos, Boole conseguiu modelar matematicamente nosso pensamento por meio do Cálculo de Oroposições lógicas e, assim, deu origem ao que hoje conhecemos como Lógica Matemática. Num paralelo com o trabalho de De Morgan, nosso estudo aponta que:

- Ambos os sistemas respeitaram a tradição aristotélica, buscando enfrentá-la sem denegri-la, haja vista que tanto Boole quanto De Morgan reservaram parte de suas obras ao tratamento dos casos aristotélicos.
- Com relação à simbologia, temos que embora Boole tenha o símbolo problemático *v* (não está completamente livre de interpretação ao representar a existência de algum elemento na classe), seu sistema ainda é mais preciso que o de De Morgan, pois este último tem ambigüidades relevantes como os vários sentidos atribuídos ao símbolo P.
- Tanto Boole quanto De Morgan usaram uma linguagem extensa que considera que não existem grupos vazios, o que é uma inovação ao modo aristotélico.
- De formas diferentes, ambos conseguiram ampliar as três operações tradicionais de conversão para quatro. Conseqüentemente, aumentaram o número de inferências, argumentos, proposições e silogismos possíveis.
- No tocante às proposições categóricas, De Morgan consegue ampliá-las para seis e Boole faz uso destas matematizando-as, ou seja, exprimindo equações que as representam.
- Boole assume que a Lógica pode ser interpretada em campos novos (teoria da probabilidade) sem inconsistência alguma, enquanto De Morgan considera que sua Lógica formalizada pode ter aplicação à Probabilidade.
- Com relação à Matemática, verificamos que está presente no trabalho de De Morgan através de seu silogismo numericamente definido e na quantificação dos termos. Contudo, a Lógica de Boole é toda permeada pela matemática. De fato, em suas obras a Lógica passa a ser refeita a partir de sua

matematização com as leis do pensamento análogas às leis da Aritmética, com exceção da lei da idempotência.

Deste modo, as origens deste ramo residem na proposta destas obras as quais serviram de base para trabalhos futuros. Estes, por sua vez, conduzem a novas visões sobre a Lógica Moderna, cujas aplicações têm encontrado crescimento exponencial, sobretudo, no campo da informática.

Em suma, ao avaliar os trabalhos produzidos no contexto das origens da Lógica Matemática, concluímos que durante o século XIX:

1. O padrão aristotélico era respeitado;
2. Duas obras buscaram enfrentar este padrão;
3. Destas obras, uma delas consegue conceber a Lógica como uma nova estrutura matemática (Boole) e a segunda consegue formulá-la sem modificar a estrutura padrão (De Morgan);
4. Os trabalhos de Boole aludem a uma nova Lógica;
5. O trabalho de De Morgan expande a Lógica Tradicional.

Portanto, as origens da Lógica Matemática ocorreram em 1847 com a obra *The Mathematical Analysis of Logic* e concretizou-se em 1854, com o livro *The Laws of Thought* (ambos de George Boole), embora também faça parte de um movimento maior envoltório pelo espírito de época que impulsionou o estudo de métodos simbólicos e formais a exemplo da obra de De Morgan que ampliou o método tradicional.

Perante nosso estudo, ressaltamos as palavras de Mendes, Fossa e Valdés (2006, p. 12) ao afirmarem que “conhecer é um processo extremamente dinâmico e jamais finalizado (processo histórico), sujeito ao contexto natural, cultural e social.” De fato, em nossa pesquisa buscamos levantar conhecimento histórico que se propõe ser usado em educação como fonte de novas investigações sobre a Lógica Matemática e, deste modo, não consideramos como um fim da investigação, mas como o desfecho de uma etapa que deve ser reiniciada em busca do conhecer, num ciclo contínuo de produção do conhecimento promotor da valorização do saber.

REFERÊNCIAS

ACTON Institute for the study of religion & liberty. 1993. Disponível em: <http://www.acton.org/publicat/randl/liberal.php?id=96>. Acesso em: 18 mar. 2006.

A HISTÓRIA do mundo. 2007. Disponível em: <http://www.historiadomundo.com.br/imangens/idademoderna_industrias.gif>. Acesso em: 17 abr. 2008.

A NOVA Geometria. **Johann Bolyai.** [200-]. Disponível em: <http://educacaomatematica.vilabol.uol.com.br/hismat/a_nova_geometria.htm>. Acesso em: 28 mar. 2007.

ASTROMÍA. Fotos Historia de la Astronomia. 2005. Disponível em:<http://www.astromia.com/fotohistoria/trinity.htm>. Acesso em: 06 mar. 2007.

AUGUSTUS De Morgan. In: Wikipedia: e'enciclopedia.libera. [200-].Disponível em: <http://it.wikipedia.org/wiki/Augustus_De_Morgan>. Acesso em: 21 jan. 2007.

BAMPTON lectures. In: WIKIPEDIA: the free encyclopedia. [200-]. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/Bampton_lecturer>. Acesso em: 30 abr. 2007.

BANSTUR. **Galeria de fotos.** 2008. Disponível em: <http://www.banstur.com.br/galeria/rn_natal/rn_natal_por_do_sol_potengi08.jpg>. Acesso em : 19 abr. 2008.

BBC. **Where I live in Lincolnshire**. 2008. Disponível em: <http://www.bbc.co.uk/lincolnshire/asop/people/images/booles_house150.jpg>. Acesso em 20 abr. 2008.

BERTRAND Arthur William Russell. In: WIKIPEDIA: the free encyclopedia. [200-]. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Bertrand_Russell>. Acesso em: 29 ago. 2007.

BIOGRAPHY of Richard Whately. [200-] . Disponível em: <http://www.sacklunch.net/biography/W/RichardWhately.html>. Acesso em: 18 mar. 2006.

BISPO, A. A.; HÜLSKATH, H. **Ingleses na História Cultural do Brasil e da Índia**. 2006. Disponível em: < http://www.revista.brasil-europa.eu/111/Ingleses-India-Brasil.htm>. Acesso em: 13 mai. 2008.

BOOLE, George. **The mathematical analysis of logic.** Toronto: Thoemmes Press, 1998.

______. **The laws of thought.** Toronto: Thoemmes Press, 1958.

BOOLE, Mary Everest. **Collected Works.** E. M. Cobham (Ed.). London: The C. W. Daniel Company, 1931.

BOYER, Carl B. **História da matemática.** São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1974.

______. **História da matemática.** 2.ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.

BRAGA FILHO, Washington. **Sobre as máquinas térmicas.** [2007]. Disponível em: <http://leblon.mec.puc-ruo.br/~wbraga/fentran/termo/hist4.htm>. Acesso em: 23 ago. 2007.

BRISTOL. In: WIKIPEDIA. [2007]. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/Bristol>. Acesso em: 30 abr. 2007.

CAMBRIDGES Website. [200-]. Disponível em: <http://www.ukswebsite.co.uk/photos/cam1.JPG>. Acesso em: 06 mar. 2007.

CARMO, Sonia Irene Silva de. **História:** passado e presente: a consolidação do capitalismo e o Brasil império. São Paulo: Atual, 1997, v. 3.

CASAS, Maria Victoria Veguín. Augustus de Morgan. **Ábaco:** revista digital, [200-]. Disponível em: <http://www.matematicas.profes.net/apieaula2.asp?id_contenido=46931>. Acesso em: 17 jan. 2007.

______. **De Morgan**. Disponível em: < http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/References/De_Morgan.html >. Acesso em: 19 nov. 2005.

CHARLES Babbage. In: WIKIPEDIA: the free encyclopedia. [200-]. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/Charles_Babbage>. Acesso em: 23 ago. 2007.

COSTA, Newton Carneiro Afonso da. **Ensaio sobre os fundamentos da lógica.** 2.ed. São Paulo: HUCITEC, 1980.

COSTA, Nielce M. Lobo da. **Introdução à lógica matemática:** sobre a história da lógica. 3.ed. São Paulo: G.E.E.M., 1977. Disponível em: <http://www.colegiodante.com.br/interfaces/WebQuest/weblogica/Historicologica.htm>. Acesso em: 24 abr. 2007.

CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. 1996a. Disponível em: <http://www-history.mcs.st_Andrews.ac.uk/Mathematicians/Peacock.html>. Acesso em 23 ago. 2007.

______. 1996b. Disponível em: <http://www-group.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biograpies/De_Morgan.html>. Acesso em 15 jun. 2005.

______ . 1999. Disponível em: <http://www-groups.dcs.st_and.ac.uk/~hsitory/Mathematicians/Hilbert.html>. Acesso em 23 ago. 2007.

______. 2005a. Disponível em: <www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Skolen.html>. Acesso em: 23 ago. 2007.

______. 2005b. Disponível em: < http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/References/De_Morgan.html >. Acesso em: 19 nov. 2007.

______. 2005c. Disponível em: <www-history.mcs.st.andrews.ac.uk/Mathematicians-Aldrich.html>. Acesso em: 18 jan. 2008.

______. 2006. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lowenheim.html>. Acesso em: 29 ago. 2007.

CRATERA. 2007. Disponível em: <http://epod.org/coppermine/albums/userpics/normal_Boole_LO-IV-190M_LTVT.jpg>. Acesso em: 16 abr. 2008.

CRIPTOGRAFIA Numaboa. (2005). Disponível em: <http://www.numaboa.com/content/view/333/100/>. Acesso em: 23 ago. 2007.

CROUZET, Maurice. **História geral das civilizações:** o séc. XIX: o apogeu da civilização Européia. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 1996. v. 13.

DARWALL, Stephen. **Hume conference University College, Cork**. 1999. Disponível em: <http://www-personal.umich.edu/~sdarwall/airquad.jpg>. Acesso em: 12 mai. 2008.

DE MORGAN, Augustus de. **Formal Logic.** Hawaii: University Press of the Pacific, 2003.

DE MORGAN INDUSTRIES CORPORATION. **De Morgan**: Bufon´s needle problem. 2003. Disponível em: <http://www.demorgan.com/BuffonsNeedleProblem.htm>. Acesso em: 17 jan. 2007.

E-ESCOLA: universidade técnica de Lisboa. **Augustin Louis Cauchy.** [200-]. Disponível em: <www.e-escola.pt/site/personalidade.asp?per=18>. Acesso em 28 mar. 2007.

EDWARD Copleston. In: ENCYCLOPEDIA Britannica. Local: Editora, 1911.v. 07.

ELI WHITNEY. In: WIKIPEDIA: the free encyclopedia. 2007. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Eli_Whitney>. Acesso em: 23 ago. 2007.

ENCICLOPEDIA Britânica. v. 08, 1962.

ESTUDO legal.com. [200-]. Disponível em: <http://estudolegal.com.br/associação.htm>. Acesso em: 16 set. 2005.

FERNANDES, Carlos. **Só biografias:** James Hargreaves. 2002a. Disponível em: <http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/JamesHarg.html>. Acesso em: 23 ago. 2007.

______. **Só biografias:** Edmund Cartwright. 2002b. Disponível em: <http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/EdmunCat.htm>. Acesso em: 23 ago. 2007.

FOSSA, John A. Dois momentos notáveis na vida da matemática: o nascimento e a maioridade. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004. Recife. **Anais...,** Recife: UFPE, 2004.

______. George Boole: O Eudoxo do Século XIX. In: SEMANA DE MATEMÁTICA DA UERN, 1. 2003. **Anais ...** Mossoró (RN), 2003.

FOSSA, John A.; SOUSA, Giselle Costa de. A idade de ouro da matemática e a era booleana. In: SEMINÁRIO PESQUISA DO CCSA, 10., 2004a. **Anais ...,** Natal: EDUFRN, 2004. p.1 - 4.

______ . As Vidas Paralelas de George Boole**.** In: CARVALHO, Luiz Mariano e Carlos A. de Moura (Eds.). In COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA, 2., 2004b. **Anais ...** Rio de Janeiro: IME-UERJ, 2004b. 1 CD-ROM.

______ . Newton, Grosseteste e Walsh Compondo o Interesse de Boole pela História Local. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 6., 2005. **Anais...** Brasília. 2005.

______. **Uma introdução à vida e obra de Goerge Boole.** Guarapuava: SBHMat, 2007.

GEORGE Betham. In: WIKIPEDIA: the free encyclopedia. [200-a]. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/George_Bentham>. Acesso em: 28 mar. 2007.

GEORGE Stephenson. In: WIKIPEDIA: the free encyclopedia. [200-b]. Disponível em: <http://www.pt.wikipedia.org/wiki/George_Stephenson>. Acesso em: 23 ago. 2007. P. 21

GEULINCX. Disponível em: <http://209.85.135.104/translate_c?hl=pt-BR&sl=en&u=http://www.spiritus-temporis.com/arnold-geulincx/&prev=/search%3Fq%3DArnold%2BGeulincx%2Bbiography%26hl%3Dpt-BR>. Acesso em: 28 mar. 2008.

GOMÉZ, Mário. In: STANFORD encyclopedia of philosophy. 2006. Disponível em: <http://plato.stanfork.edu/entries/tarski/>. Acesso em: 29 ago. 2007.

GRUP of Logic, Language and Computation. **Knowledge Representation and the Reasoging Against.** 2004. Disponível em: <http://www.lalecladeescape.com/w0/imagens/stories/pers/augustus_de_morgan.jpg>. Acesso em: 17 abr. 2008.

HALESWORTH. [2007]. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki-Halesworth>. Acesso em: 30 abr. 2007.

HEGENBERG, Leônidas. **Lógica:** o cálculo sentencial. 2.ed. rev. São Paulo: EPU, 1977.

HENRY Bessemer. In: WIKIPEDIA: the free encyclopedia. 2007. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/w/index.php?tittle=Henry_Bessemer&oldik=6656381>. Acesso em: 23 ago. 2007.

HISTORY of Queen´s. 2003. Disponível em: <www.university/wegpages/history.htm>. Acesso em 19 dez. 2003.

IRELAND in Summer. [200-]. Disponível em: <http://www.irelandinsummer.com/location.php?id=2>. Acesso em: 12 mai. 2008.

IRVINE, A. D. In: STANFORD encyclopedia of philosophy. Disponível em: <http://plato.stanford.edu/entries/whitehead>. Acesso em: 29 ago. 2007.

JOHN Kay. In: WIKIPEDIA: the free encyclopedia. 2007. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/John_Kay_(flying_shuttle)>. Acesso em: 23 ago. 2007.

KANT, Immanuel. **Crítica da razão pura.** 2.ed. São Paulo: Editora Martin Claret, 2003.

KERBER, Manfred. **Introduction to artificial intelligence.** 2004. Disponível em: <http://www.cs.bham.ac.uk/~mmk/Teaching/AI/figures/boole.jpg>. Acesso em: 12 mai. 2008.

KNEALE, William; KNEALE, Martha. **O desenvolvimento da lógica**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1980.

KURT Gödel. In: WIKIPEDIA: the free encyclopedia. [200-]. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Kurt_G%C3%B6del>. Acesso em: 23 ago. 2007.

LAMBERT, Tim. **A brief history of Lincoln**. 2003. Disponível em: <www.geocities.com/localhistories/Lincoln.html>. Acesso em: 16 nov. 2003.

LIBRARY University College Cork**.** Disponível em: <http://booleweb.ucc.ie/info/PhotoTour/Photo_Tour.htm>. Acesso em: 06 out. 2004a.

______. Disponível em: <http://booleweb.ucc.ie/info/PhotoTour/Photo_Tour2.htm>. Acesso em: 06 out. 2004b.

______. Disponível em: < http://booleweb.ucc.ie/info/PhotoTour/Photo_Tour4.htm >. Acesso em: 06 out. 2004c.

LONDON Mathematical Society... [200-]. Disponível em: <http://www.lms.ac.uk/contact/lms_history.pdf>. Acesso em: 02 mar. 07.

LOUIS Jacques Mande Daguerre. In: WIKIPEDIA: the free encyclopedia. [200-]. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Louis_Jacques_Mand%C3%A9_Daguerre>. Acesso em: 23 ago. 2007.

LOURES, Carlos. **Vidas lusófonas.** 2007. Disponível em: <http://www.vidaslusofonas.pt/napoleão_bonaparte.htm>. Acesso em: 23 ago. 2007.

LUFT, Celso Pedro. **Minidicionário Luft.** 20. ed. São Paulo: Editora Ática, 2001.

LUNAR Development Corporation. **The crater company.** 2007. Disponível em: <http://www.lunardevcorp.com/catalog/crater_b.shtml>. Acesso em: 20 br. 2008.

MACFARLANE, Alexander. **Lectures on ten British mathematicians of the nineteenth century.** London: Chapman and Hall Limeted, 1916.

MACHALE, Desmond. **George Boole:** His Life and Work. Dublin: The George Boole Press, 1985.

MAPS of World.com. [200-]. Disponível em: <http://www.mapsofworld.com/ireland/maps/map-ireland.jpg>. Acesso em: 12 mai. 2008.

MARTINS, Alda et al. **George Cantor.** 2001. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm25/cantor.htm>. Acesso em: 25 abr. 2007.

MARY Everest Boole. 2003. Disponível em: <http://www.agnesscott.edu/lriddle/women/boole.htm>. Acesso em: 25 mai. 2003.

MATEMÁTICA. In: LUFT, Celso Pedro. **Minidicionário Luft.** 20. ed. São Paulo: Ática, 2001.

MATEMÁTICA. In: XIMENES, Sérgio. **Minidicionário de língua portuguesa.** São Paulo: Ediouro, 2004.

MCBRIDE. **Our locations**: our sites around Europe. [2004]. Disponível em: <http://www.mcbride.co.uk/what_we_do/locations.html>. Acesso em: 30 abr. 2007.

MENDES, Iran Abreu. **O uso da história no ensino da matemática:** reflexões teóricas e experiências. Belém: EDUEPA, 2001.

MENDES, Iran Abreu; FOSSA, John A.; VALDÉS, Juan E. Nápoles. **História como um agente de cognição na Educação Matemática.** Porto Alegre: Sulina, 2006.

MONTALVÃO, Alberto et al. **Escola viva:** programa de pesquisa e apoio escolar: o tesouro do estudante. São Paulo: Meca, 1998.

MORTARI, Cezar A. **Introdução à lógica.** São Paulo: Editora UNESP: 2001.

NAGEL, Ernest. **Studies in the history of ideas:** impossible numbers: a chapter in the history of modern logic. Columbia University Press, 1935. v. 3.

NASSAU William Senior. In: ENCYCLOPEDIA Britannica. 1911.v. 24.

NATIONAL Park Service: The Giant Sequóia of the Sierra Nevada. 2007. Disponível em: <http://www.nps.gov/history/history/online_books/science/hartesveldt/images/fig3.jpg>. Acesso em: 19 abr. 2008.

NÉRICI, Imideo Giuseppe. **Introdução à lógica.** 5.ed. São Paulo: Nobel, 1978.

NIKOLAI Ivanovich Lobachevsky. [200-]. 'Disponível em: <http://www.lobachevsky.com>. Acesso em: 28 mar.2007.

NETSABER Biografias. Disponível em: <http://www.netsaber.com.br/biografias/ver_biografias_c_1733.html>. Acesso em: 23 ago. 2007.

NÓBREGA FILHO, Raimundo **G. Boole:** Investigação das Leis do Pensamento. Disponível em:<www.di.ufpb.br/raimundo/Revolução/doscomputadores/Histpages.html>. Acesso em: 22 mar. 2003.

OXFORD Dictionary of national Biography. **HighBeam Encyclopedia**. Disponível em: <http://www.encyclopedia.com/doc/1E1-E-Bampton.html>. Acesso em: 08 mai. 2007.

PARKER, Dave at. al. **Zephyrus:** interactive education on the web. Disponível em: <http://www.zephyrus.co.uk/galen.html>. Acesso em: 18 jan. 2008.

PENNY Cyclopaedia. In: WIKIPEDIA. [2007]. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/Penny_Cyclopaedia>. Acesso em: 02 mar. 2007.

PHILOSOPHISCHES archiv der universitatKonstanz. [200-]. Disponível em: <http://www.uni-Konstanz.de/FuF/Philo/philarchiv/bestaended/Carnap.htm>. Acesso em: 23 ago. 2007.

PICTURES of England. Disponível em: <www.picturesofengland.com/mapofengland/counties-map.html>. Acesso em: 01 dez. 2003.

PILETTI, Nelson. **História e vida integrada.** São Paulo: Ática, 2004. v. 3.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

RICHARD Whately 1787 - 1863. [200-a]. Disponível em: <http://cepa.newschool.edu/het/profiles/whately.htm>. Acesso em: 18 mar. 2006.

RICHARD, Whately. In: **Encyclopaedia Britannica.** [200-b]. Disponível em: <http://www.britannica.com/eb/article-9076737>. Acesso em: 18 mar. 2006. c.3

ROBERT Fulton. In: WIKIPEDIA: the free encyclopedia. [200-]. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/w/index.php?tittle=Robert_Fulton&oldid=6727727>. Acesso em: 23 ago. 2007.

ROCHKIND, Jonathan. **Roll over, George.** 2007. Disponível em: <http://weibel-lines.typepad.com/weibelines/images/2007/12/11/boole_0047.jpg>. Acesso em: 17 abr. 2008.

RUIZA, Miguel et. al. **Biografías y vidas.** Disponível em: <http://www.biografiasyvidas.com/biografia/m/marx_Karl.htm>. Acesso em: 29 ago. 2007.

SCHMIDT, Dora. **Historiar:** fazendo, contando e narrando a história. São Paulo: Scipione, 2002. v. 2.

SCHMIDT, Mario Furley. **Nova história crítica.** São Paulo: Nova Geração, 1999. v. 3.

SMITH, David E. **Mathematical monographs:** history of modern mathematics. 4. ed. London: Chapman and Hall limeted, 1906.
SMITH, G. C. **The Boole-De Morgan correspondence:** 1842-1864. Oxford: Clarendon Press, 1982.

SMITH, Mark. **George Birkback and the London Mechanics Institute**. 1997. Disponível em: <www.infed.org/walking/wa-birb.htm>. Acesso em: 20 nov. 2003.

SNYDER, Laura J. In: STANFORD encyclopedia of philosophy. 2006. Disponível em: <http://plato.stanford.edu/entries/whewell>. Acesso em: 29 ago. 2007.

SOUSA, Giselle Costa de; ANJOS, Marta Figueredo dos. Um olhar que não se apegue à generalização. In: SEMINÁRIO DE PESQUISA DO CCSA, 10., 2006. Natal. **Anais...** Natal: UFRN, 2006.

SOUSA, Giselle Costa de. **Uma reavaliação do pensamento lógico de George Boole à luz da história da matemática.** 2005 (dissertação). Programa de Pós-Graduação em Educação. UFRN. Natal, RN, 2005.

STRUIK, Dirk J. **A concise history of mathematics.** 3. ed. New York: Dover Publications, 1967.

SUFFOLK. In: WIKIPEDIA: the free encyclopedia. [200-]. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/Suffolk>. Acesso em: 30 abr. 2007.

THE BAMPTON GALLERY. [200-]. Disponível em: <www.bamptongallery.co.uk.location.htm>. Acesso em: 07 set. 2007.

THE INTERNET Enclyclopedia of science. Disponível em: <http://www.daviddarling.info/imagens/Boole_George.jpg>. Acesso em 17 abr. 2008.

THE ROYAL Society: medals. [200-]. Disponível em: <http://www.royalsoc.ac.uk/awards/medals>. Acesso em: 16 fev. 2004.

TIBÚRCIO, Carlos Eduardo. **Leonhard Euler.** [200-]. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~calculo/módulos/history/euler/euler.html>. Acesso em: 28 mar. 2007.

UNIVERSITY OF BRISTOL. 2006. Disponível Eem:<http://www.bristol.ac.uk/university/maps/bristol-uk-small.html>. Acesso em: 30 abr. 2007.
UNIVERSITY London. [200-]. Disponível em: <http://www.jenskleemann.de/wissen/bildung/media/e/e9/university_college_london__front_quad_.jpg >. Acesso em: 02 mar. 2007.

VERGANI, Teresa. **A surpresa do mundo:** ensaios sobre cognição, cultura e educação. Natal: Editorial Flecha do Tempo, 2003.

WATSON, Alan; PALACIOS, Carolina. **Photos 2006 England.** 2006. Disponível em: <http://www.watson-palacios.org/photos/2006-england/CIMG1838.jpg>. Acesso em: 19 abr. 2008.

WHATELY, Richard. **Elements of logic.** London: Kessinger publishing, 1875.

WHATELY. Disponível em:
<http://100negsfree4.com/dictionary/theology/wpic/whitely.jpg>. Acesso em: 19 abr. 2008.

XIMENES, Sérgio. **Minidicionário de língua portuguesa.** São Paulo: Ediouro, 2004.