



# *La relación dinero-producto, brecha del producto e inflación subyacente: Algunas aplicaciones de las funciones Wavelets*

***Erick W. Lahura Serrano\****

[elahura@bcrp.gob.pe](mailto:elahura@bcrp.gob.pe)

## **1. Introducción**

El objetivo del presente trabajo es ilustrar el uso de las funciones *wavelets* en el análisis empírico de variables y relaciones macroeconómicas, asociadas principalmente a temas de política monetaria. Para tal efecto, se presentan de manera general las características básicas de la teoría de *wavelets* y tres aplicaciones utilizando información para la economía peruana: (1) el análisis de la hipótesis de que el dinero causa en el sentido de Granger al producto real al considerar ciertos horizontes o escalas temporales; y dos propuestas de medidas alternativas para la medición de (2) la brecha del producto (*output gap*) y (3) la inflación subyacente (*core inflation*).

Los resultados muestran potenciales ventajas del uso de funciones *wavelets* como complemento de las herramientas econométricas para el análisis de series de tiempo no estacionarias. Por un lado, se concluye que la relación de causalidad en el sentido de Granger entre dinero y producto no es única, sino que depende de la escala temporal (asociada a ciertas frecuencias) analizada; específicamente, se encuentra evidencia a favor de la hipótesis planteada. Asimismo, las medidas de brecha de producto e inflación subyacente propuestas son consistentes con consideraciones teóricas y hechos importantes observados en la economía peruana, quedando como agenda de investigación futura el desarrollo de pruebas econométricas robustas para consolidar esta evidencia preliminar.

El trabajo está organizado en seis secciones. En la sección 2 se presenta a nivel de introducción la teoría de *wavelets* y su uso para el análisis multiresolución de señales. En la sección 3 se discuten algunas cuestiones prácticas sobre el uso de las *wavelets* para el análisis multiresolución de series de tiempo, como por ejemplo las características que deberían presentar la función *wavelet* elegida o la muestra a utilizar. En la sección 4 se presenta la aplicación de la teoría de *wavelets* al análisis de la relación de causalidad en el sentido de Granger entre el dinero y el producto, utilizando información para el caso peruano. En la sección 5 se plantea el uso de las *wavelets* para la construcción de indicadores alternativos de producto de tendencia, brecha del producto e inflación subyacente a partir del análisis multiresolución de las series PBI real e inflación para la economía peruana. Finalmente, en la sección 6 se presentan las principales conclusiones del trabajo y una posible agenda de investigación futura.

---

\* El autor es Analista del Departamento Análisis y Programación Financiera de la Gerencia de Estudios Económicos del BCRP. El autor agradece los comentarios y sugerencias de Máximo Vega Centeno (PUCP), Rafael Herrada (BCRP), Fernando Vásquez (BCRP) y Marco Vega (BCRP), así como el apoyo brindado por Hugo Perea (BCRP) en la Unidad de Modelos Econométricos. Asimismo, agradece a Donita Rodríguez (PUCP) por su excelente labor como asistente de investigación. Este trabajo forma parte de una agenda de investigación iniciada por el autor en marzo de 2002. La teoría y resultados presentados se basan principalmente en su Tesis de Licenciatura en Economía (Lahura, 2003).



## 2. Una introducción a la teoría de *wavelets* y el análisis multiresolución<sup>1</sup>

Las *wavelets* pueden ser comparadas con una cámara muy sofisticada, cuyos lentes proporcionan una vista panorámica de toda una ciudad y, además, permiten observar detalles como los árboles, las casas y la forma de las ventanas, puertas y cerraduras<sup>2</sup>. De esta manera, las *wavelets* permiten analizar el “todo” y sus “componentes” (o “detalles”); además, muchas veces es posible reconstruir el “todo” a partir de una suma simple de los componentes, lo cual se denomina formalmente *análisis multiresolución*.

Ramsey y Lampart (1998) proponen el uso de las *wavelets* para descomponer series de tiempo macroeconómicas en componentes asociados a diferentes escalas temporales (análisis multiresolución), para obtener de esta forma una visión más “detallada” de las series de tiempo y de las posibles relaciones entre ellas. Así, las funciones *wavelets* se constituyen en filtros (no lineales y no paramétricos) pues permiten extraer información asociada a diferentes escalas temporales (y frecuencias). Entre los trabajos más importantes en esta línea de investigación figuran Chew (2001), Gencay et al. (2002) y Almasri y Shukur (2003).

### 2.1. La teoría de *wavelets*: una introducción

La teoría de *wavelets* nace formalmente como teoría matemática a mediados de los años ochenta; sin embargo, en la práctica ha sido utilizada desde inicios de siglo, especialmente en la ingeniería. Sus antecedentes matemáticos se remontan al análisis de las frecuencias desarrollado por Joseph Fourier en el siglo diecinueve. La primera vez que se utilizó la palabra *wavelet* fue en 1910 en la tesis de Alfred Haar, pero no fue sino hasta 1984 en que Alex Grossman y Jean Morlet establecieron el concepto de “*wavelets*” en su forma teórica presente. Los principales algoritmos utilizados en el análisis de *wavelets* provienen del trabajo de 1988 de Stephane Mallat<sup>3</sup>.

La transformada de Wavelet (*TW*) es un instrumento matemático que permite describir una señal en el tiempo y en la frecuencia de manera similar a la Transformada de Fourier por Ventanas (*TFV*), pero con algunas diferencias importantes que en muchos casos la hace superior. Las principales propiedades de las *wavelets* que son útiles para el análisis econométrico de series de tiempo son:

- a) Pueden ser usadas en el análisis de series no estacionarias.
- b) Permiten localizar en el tiempo fenómenos específicos.
- c) Permiten obtener una buena aproximación de la señal original.

#### 2.1.1. Definición de wavelet

Una *wavelet*  $\psi(t)$  es una función que depende del tiempo y que presenta dos propiedades: (1) *condición de admisibilidad*; y (2) *energía unitaria*<sup>4</sup>. Una de las *wavelets* más conocidas en la literatura es la *wavelet de Haar*, la cual se define como:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 0,5 \\ -1 & 0,5 \leq x < 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (2.1)$$

<sup>1</sup> Esta sección y la siguiente se basan en Daubechies (1992), Gencay, et al. (2002), Kaiser (1994), Misiti, et al. (2002), Ogden (1997); Ramsey y Lampart (1998b), Schleicher (2002) y Lahura (2003).

<sup>2</sup> Esta analogía recoge la establece Schleicher, 2002.

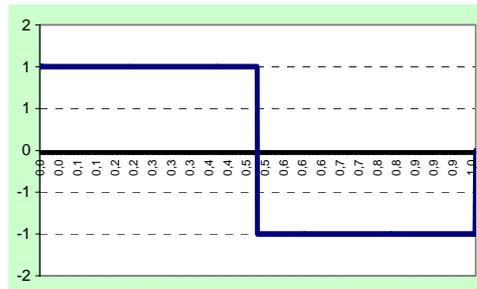
<sup>3</sup> Misiti, et al., 2002.

<sup>4</sup> Los interesados en la descripción formal de estas propiedades pueden remitirse a Gencay, et al. (2002).



En general, y como se puede apreciar en el gráfico 1, la condición de admisibilidad y la de energía unitaria determinan la forma de una *wavelet*: todas las desviaciones respecto del origen se cancelan, lo cual implica que una *wavelet* toma la forma de una *onda*.

**Gráfico 1**  
**La wavelet de Haar**

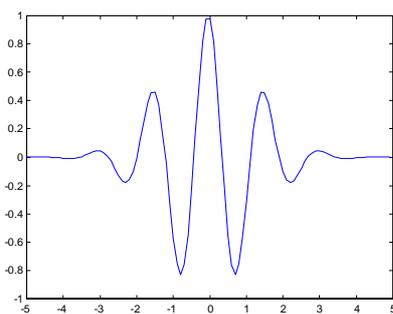


Un segundo ejemplo es la *wavelet de Morlet*, que se define como:

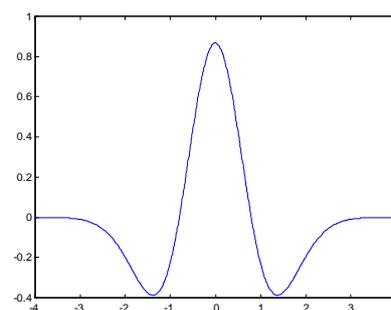
$$\psi^M(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega_0 t} e^{-t^2/2} \quad (2.2)$$

donde  $i = \sqrt{-1}$  y  $\omega_0$  es la frecuencia central de la *wavelet*. El gráfico 2 muestra la forma de la *wavelet* de Morlet.

**Gráfico 2**  
**Ejemplos de Wavelets**



*Morlet*



*Sombrero Mexicano*

Otro ejemplo conocido es la *wavelet sombrero mexicano*, definida como la segunda derivada de la función gaussiana:

$$\psi^{Mex}(t) = (1-t^2)e^{-t^2/2} \quad (2.3)$$

Su nombre proviene de la forma de la onda que genera, la cual es similar a un sombrero mexicano, como se muestra en el gráfico 2.



## 2.1.2. Familias de wavelet

A partir de una *wavelet*  $\psi(t)$  es posible generar una *familia de funciones wavelet*, *dilatando* y *trasladando*  $\psi(t)$ :

$$\Psi^{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (2.4)$$

El parámetro  $a$  se denomina *factor de escala* o *dilatación*, el cual expande el rango de la *wavelet*; así, cuando  $a$  es grande, la *wavelet* es una onda que se completa en un intervalo más amplio. El parámetro  $b$  se denomina *factor de traslación*, el cual mueve el rango de  $\psi$  en  $u$  unidades hacia la derecha. Así, **dilatando y trasladando una wavelet**  $\psi$ , es posible **generar una familia de funciones wavelet**  $\Psi^{a,b}$ , asociadas cada una a una escala y una ubicación temporal particulares. Cuando sucede esto, la *wavelet*  $\psi$  se denomina *wavelet madre*. Si la dilatación y traslación de una *wavelet* se hace a partir de valores discretos de  $a$  y  $b$ , como por ejemplo  $a = a_0^j$  y  $b = nb_0 a_0^j$ , se tiene que cada elemento de la familia de *wavelet* esta dado por:

$$\Psi_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{a_0^j}} \psi\left(\frac{t - kb_0 a_0^j}{a_0^j}\right) \quad (2.5)$$

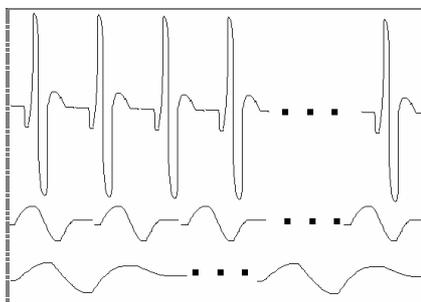
o alternativamente:

$$\Psi_{j,k} = a_0^{-j/2} \psi(a_0^j t - kb_0) \quad (2.6)$$

donde  $j$  y  $k$  toman valores enteros,  $a_0 > 1$  y  $b_0 > 0$ . Como se ilustra en el gráfico 3, los valores de  $j$  determinarán la amplitud de la *wavelet* y el factor de traslación:

- Las *wavelets angostas* o de *escalas pequeñas* (usualmente asociadas a frecuencias altas) corresponden a valores pequeños de  $j$ , lo cual implica que para cubrir todo el rango temporal sobre el que se define la señal, se trasladan a intervalos pequeños.
- Las *wavelets más amplias* o de *escalas grandes* (usualmente asociadas a frecuencias bajas) están asociadas a valores grandes de  $j$ , lo cual implica que para cubrir todo el rango temporal sobre el que se define la señal, se trasladan a intervalos más grandes.

**Gráfico 3**  
**Dilatación y traslación de una wavelet**



Fuente: Elaboración propia

Las características de las funciones *wavelets* permiten afirmar que si el componente frecuencial de la señal que se desea analizar cambia en el tiempo (es decir, si la señal es no estacionaria), se tiene que las *wavelets*



*permiten obtener una mejor representación de la señal* que la transformada de Fourier por ventanas<sup>5</sup>. Esto se explica por la capacidad que tienen las *wavelets* para adaptar su forma -a través de dilataciones y traslaciones- a las características de la señal; de esta forma, la TW puede capturar características de una señal que son particulares a un tiempo y frecuencia específicos.

## 2.2. El análisis multiresolución (AMR)

En esta sección se presenta la definición de Análisis Multiresolución de una señal y su relación con las transformadas de *wavelets*. Específicamente, se menciona que si existe un análisis multiresolución para una señal, entonces ésta puede descomponerse en elementos que dependen de dos tipos de funciones *wavelets*: una *wavelet* padre, que recoge componentes tendenciales o suaves de la señal, y una *wavelet* madre, a partir de la cual se recogen movimientos cíclicos asociados a diferentes escalas temporales (y frecuencias).

### 2.2.1. Definición de análisis multiresolución o AMR

El Análisis Multiresolución (AMR) o Aproximación Multiresolución, es la formalización matemática de la idea de obtener *aproximaciones sucesivas* de una *señal*:

$$\dots, S_j, S_{j-1}, S_{j-2}, \dots \quad (2.7)$$

tales que cada aproximación sea una mejor representación de la señal original; así,  $S_{j-1}$  denota una mejor aproximación de la señal que  $S_j$ . Esta idea se entiende fácilmente en un contexto donde la señal es una imagen, donde muchas veces es importante obtener la mayor nitidez o resolución posible.

Las diferencias entre las diversas aproximaciones sucesivas de una señal se denominan *detalles*:

$$D_j \equiv S_{j-1} - S_j \quad (2.8)$$

Dado esto, se tiene que una aproximación puede expresarse como la suma de una aproximación con menor resolución más un detalle adicional:

$$S_{j-1} = S_j + D_j \quad (2.9)$$

En general, si  $S_1$  es la mejor aproximación (la que posee mejor resolución) de la señal  $f(t)$ , entonces:

$$f(t) = S_1 + D_1 \quad (2.10)$$

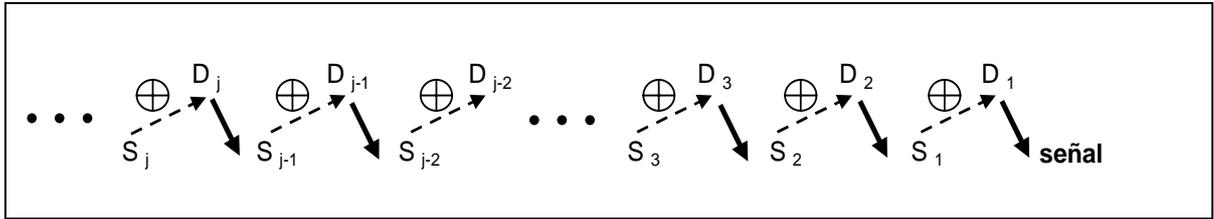
Dada la existencia de las aproximaciones multiresolución, es posible expresar cada una de ellas como la suma de una aproximación con menor resolución y un detalle, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} S_1 &= S_2 + D_2 \\ S_2 &= S_3 + D_3 \\ &\vdots \\ S_{j-1} &= S_j + D_j \\ S_{j-2} &= S_{j-1} + D_{j-1} \end{aligned} \quad (2.11)$$

<sup>5</sup> Una referencia completa sobre la transformada de Fourier por ventanas es Kaiser (1994).



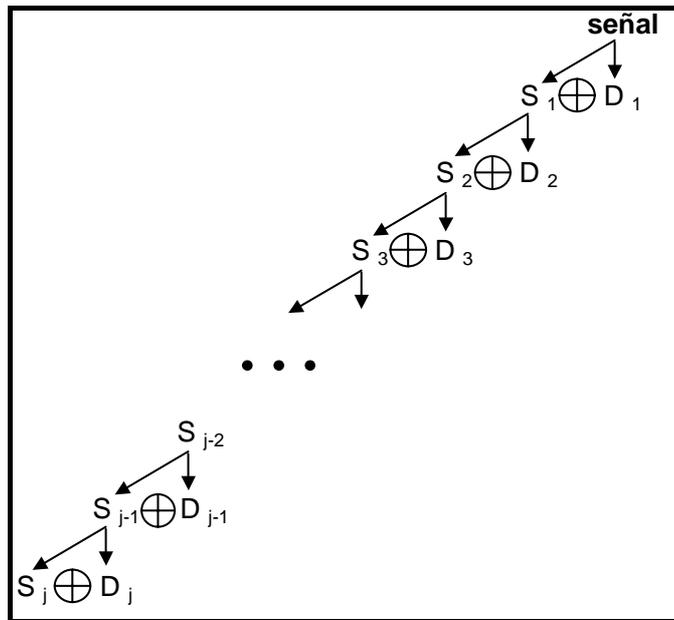
lo cual puede verse a través del siguiente esquema:



De esta manera, el análisis multiresolución permite expresar una señal  $f(t)$  como **la suma (ortogonal) de una aproximación inicial  $S_j$  y de diferentes detalles:**

$$f(t) = S_j + D_j + D_{j-1} + \dots + D_3 + \dots + D_1 \quad (2.12)$$

lo cual puede ser representado a través del siguiente árbol:



### 2.2.2. Análisis multiresolución y wavelets.

Uno de los resultados importantes de la teoría de *wavelets* es la existencia de una correspondencia entre el análisis multiresolución de una señal y una familia de *wavelets*. Específicamente, se tiene que si existe un análisis multiresolución para una señal representada por una función cuadrado integrable<sup>6</sup>, entonces es posible expresar  $S_j$  y  $D_j$  en función de dos familias de *wavelets*. Por un lado, los detalles  $D_j$ :

$$D_j = \sum_k d_{j,k} \Psi_{j,k}(t) \quad , j = 1, 2, \dots, J-1 \quad (2.13)$$

<sup>6</sup> Se denomina así a una función si la integral del valor absoluto de ella elevada al cuadrado es finita. La formalización de esta definición puede encontrarse en cualquiera de las referencias mencionadas al inicio de esta sección.



representan los componentes de la señal asociados a escalas menores a  $J$ . Formalmente, estos detalles se obtienen a partir de las transformadas de *wavelet* discreta, las cuales son proyecciones de la señal sobre una familia de *wavelets*  $\psi_{j,k}(t)$  generada a partir de traslaciones y dilataciones de una *wavelet madre*  $\psi$ , utilizando un factor de traslación  $k = 0, 1, 2, \dots$  y uno de dilatación  $a = 2^j$ , con  $j = 1, 2, 3, \dots$ . Por otro lado, la aproximación  $S_j$ :

$$S_j = \sum_k s_{j,k} \phi_{j,k}(t) \quad (2.14)$$

representa el componente de la señal asociado a la mayor escala de la señal  $J$ . Formalmente, este componente se obtiene a partir de la transformada de *wavelet* discreta, la cual es la proyección de la señal sobre una familia de *wavelets*  $\phi_{j,k}(t)$  generada a partir de traslaciones del nivel de dilatación  $J$  de una *wavelet*  $\phi$  utilizando el mismo factor  $k$ . La *wavelet*  $\phi$  se denomina *wavelet padre*, la cual se caracteriza por:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt = 1 \quad (2.15)$$

La *wavelet* padre se usa para capturar los componentes tendenciales suaves usualmente asociados a bajas frecuencias, lo cual requiere que la *wavelet* sea amplia en el tiempo; la *wavelet* madre se usa para capturar componentes asociados a escalas menores, que corresponden en general a frecuencias más altas que las de los componentes tendenciales. En otras palabras,  $S_j$  representa los componentes tendenciales de la serie, asociado a movimientos de larga duración o mayor escala temporal, mientras que los detalles  $D_j, D_{j-1}, \dots, D_j, \dots, D_1$  representan las desviaciones de esta tendencia, asociados a movimientos de corta duración o menor escala. De esta forma, se tiene que la señal puede ser expresada como:

$$f(t) = \sum_k s_{j,k} \phi_{j,k}(t) + \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(t) + \sum_k d_{j-1,k} \psi_{j-1,k}(t) + \dots + \sum_k d_{1,k} \psi_{1,k}(t) \quad (2.16)$$

donde  $J$  denota la *escala* de la *wavelet*. Las escalas grandes (valores grandes de  $j$ ) están relacionadas a niveles altos de dilatación de las *wavelets*, las cuales contienen movimientos suaves -o de larga duración- y de baja frecuencia de  $f(t)$ ; las escalas pequeñas (valores pequeños de  $j$ ) están relacionadas a niveles bajos de dilatación, usados para variaciones de menor duración y de mayor frecuencia. A esta descomposición de la señal  $f(t)$  en diferentes escalas temporales (asociadas a diferentes frecuencias), se denomina *descomposición tiempo escala* o *escala temporal*, y puede denotarse como:

$$\{S_j, D_j, D_{j-1}, \dots, D_1\} \quad (2.17)$$

El detalle 1 (escala 1) contiene información de los movimientos de la señal que se producen entre  $2^1$  y  $2^2$  períodos temporales, movimientos de corta duración temporal que pueden estar asociados a movimientos de alta frecuencia. En general, el detalle  $j$  contiene información de la señal asociada a movimientos que van de  $2^j$  hasta  $2^{j+1}$  períodos. Así, los detalles más grandes (escalas mayores), contienen información de movimientos de larga duración, usualmente asociados a movimientos de baja frecuencia. Esta descomposición en escalas que son potencia de 2 se denomina análisis multiresolución diádico.

Esta descomposición en escalas temporales hace a las *wavelets* comparables a una cámara con lentes de gran alcance: permiten obtener una visión general de todo el paisaje (componente suavizado) y, a la vez, permiten realizar acercamientos a partir de los cuales es posible identificar características particulares o detalles que a simple vista no son perceptibles (detalles). Este es uno de los resultados más importantes que serán utilizados en las aplicaciones a las variables y relaciones macroeconómicas de las *wavelets*.



### 3. Algunas cuestiones prácticas sobre el uso de *wavelets*

En esta sección se mencionan algunas cuestiones prácticas sobre el uso de las *wavelets* para el análisis multiresolución de series de tiempo, como por ejemplo las características que debería presentar la *wavelet* elegida o la muestra a utilizar.<sup>7</sup>

#### 3.1. Propiedades deseables en una familia de *wavelets*

El cuadro 1 muestra algunas propiedades de las principales familias de *wavelets*. En las aplicaciones, las propiedades que más se buscan en una familia de *wavelet* son las siguientes<sup>8</sup>: *ortonormalidad*, *soporte compacto*, *simetría*, *momentos que se anulan (asociado a la longitud del filtro)*, *existencia de una wavelet padre* y *análisis ortogonal*.

Cuadro 1

#### Algunas propiedades de las familias de *wavelets* más importantes

| PROPIEDAD                                       | morl | mexh | meyr | haar | dbN | symN | coifN | biorNr.Nd |
|---|------|------|------|------|-----|------|-------|-----------|
| Infinitamente regular                           | X    | X    | X    |      |     |      |       |           |
| Regularidad arbitraria                          |      |      |      |      | X   | X    | X     | X         |
| Ortogonal y de soporte compacto                 |      |      |      | X    | X   | X    | X     |           |
| Biorortogonal y de soporte compacto             |      |      |      |      |     |      |       | X         |
| Simétrica                                       | X    | X    | X    | X    |     |      |       |           |
| Asimétrica                                      |      |      |      |      | X   |      |       |           |
| Casi simétrica                                  |      |      |      |      |     | X    | X     |           |
| Número arbitrario de momentos que se desvanecen |      |      |      |      | X   | X    | X     | X         |
| Momentos que se desvanecen para $\phi$          |      |      |      |      |     |      | X     |           |
| Existencia de $\phi$                            |      |      | X    | X    | X   | X    | X     | X         |
| Análisis ortogonal                              |      |      | X    | X    | X   | X    | X     |           |
| Análisis Biorortogonal                          |      |      | X    | X    | X   | X    | X     | X         |
| Reconstrucción exacta                           |      | X    | X    | X    | X   | X    | X     | X         |
| Filtros FIR                                     |      |      |      | X    | X   | X    | X     | X         |
| Transformada continua                           | X    | X    | X    | X    | X   | X    | X     | X         |
| Transformada discreta                           |      |      | X    | X    | X   | X    | X     | X         |
| Algoritmo rápido                                |      |      |      | X    | X   | X    | X     | X         |
| Expresión explícita                             | X    | X    |      | X    |     |      |       |           |

Fuente: Elaboración propia, basada en Misiti y Otros (2002), p. 6-80 y 6-81.

<sup>7</sup> Existen muchas familias de *wavelets*, cada una con diferentes propiedades. En el manual del Matlab se pueden encontrar hasta 15 familias, entre las que destacan: Haar (haar), Daubechies (dbN), Symlets (symN), Coiflets (coifN), Biorortogonal (bioNr.Nd), Meyer (meyr), Mexicana (mexh), Morlet (morl), entre otras.

<sup>8</sup> Ver Lahura (2003) para una explicación de cada una de las propiedades.



### 3.2. Algunos problemas prácticos

Las funciones *wavelets* se usan para representar la información contenida en una señal, por lo cual deben permitir replicar sus características subyacentes. Así, por ejemplo, si los datos tuvieran la apariencia de ser una suma de funciones escalera, entonces sería adecuado usar la *wavelet* de Haar; mientras que si los datos son suaves, entonces se debería usar una *wavelet* con una longitud mayor.

Una pregunta importante es, *¿cuántos datos necesitamos para realizar una filtración utilizando wavelets?* El supuesto sobre el cual se realiza el análisis multiresolución es que el tamaño de muestra  $N$  tiene que ser una potencia de dos, es decir  $N = 2^j$ . Sin embargo, no necesariamente tiene que ser igual al número de detalles, sino que puede ser menor. Sin embargo, existe la posibilidad de aplicar la *transformación de wavelet discreta estacionaria*, que es aplicable a cualquier tamaño de muestra (Gençay, 2002).

Un problema práctico asociado al análisis multiresolución es que éste se basa en el análisis de escalas definidas para períodos de tiempo que son potencia de 2 (análisis diádico). Sin embargo, las estructuras económicas no necesariamente se reflejan en períodos de tiempo cuya duración sea potencia de 2 (2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 períodos etc.). Pollock (2003) propone una solución a este problema que actualmente sigue investigando.

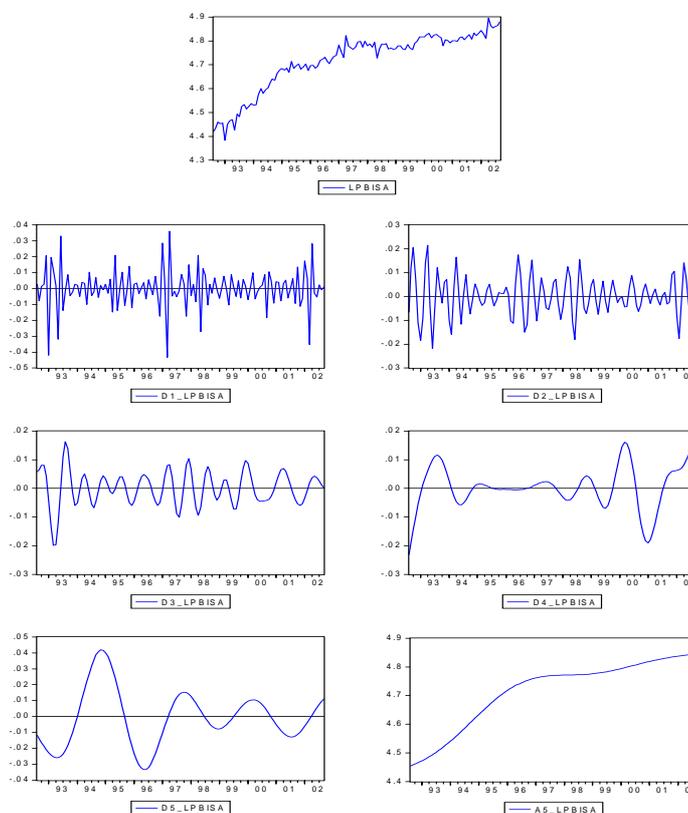
### 3.3. Aplicación del AMR a una serie de tiempo no estacionaria.

El gráfico 4 muestra el análisis multiresolución del logaritmo de la serie mensual del PBI real desestacionalizado (LPBISA). Este análisis multiresolución ha permitido descomponer el PBI real en un componente suave (A5\_LPBISA) y cinco detalles (D1\_LPBISA, . . . , D5\_LPBISA). Para esto se utilizó la *wavelet* madre Symlet(12) con  $j = 5$  y su correspondiente *wavelet* padre. Los detalles de la serie original presentan movimientos de diferente duración temporal; así, el detalle 1 (D1\_LPBISA) asociado a la escala 1 presenta movimientos de corta duración temporal (de 2 a 4 meses), mientras que el detalle cinco (D5\_LPBISA) asociado a la escala cinco presenta movimientos de larga duración (de 32 a 64 meses).



Gráfico 4

Análisis Multiresolución del logaritmo del PBI real



#### 4. Aplicación: la relación dinero-producto y causalidad en el sentido de Granger

En esta sección se presenta una aplicación de la teoría de *wavelets* al análisis de la relación de causalidad en el sentido de Granger entre el dinero y el producto, propuesta por primera vez por Ramsey y Lampart (1998), y posteriormente replicada por Chew (2001) y Gençay et al. (2002). Específicamente, se evalúa la hipótesis de que el dinero causa en el sentido de Granger al producto real cuando se toman en cuenta ciertos horizontes o escalas temporales, considerando la experiencia peruana reciente.

Uno de los conceptos más utilizados para el análisis de causalidad empírica entre variables económicas es el de *causalidad en el sentido de Granger* (Granger 1969), el cual se basa en el supuesto de que la variable “causa” se mueve antes que la variable “respuesta”, lo que implica una secuencialidad causa-efecto. Específicamente, dadas dos variables  $X$  e  $Y$ , si  $X$  causa en el sentido de Granger a  $Y$  solamente se puede afirmar que los movimientos de  $X$  permitirán *predecir estadísticamente* los movimientos de  $Y$ , más no se puede decir necesariamente que  $X$  cause a  $Y$  en el sentido de que  $X$  realmente influya en el comportamiento de  $Y$ . Sin embargo, Engle et al. (1983), muestran la importancia del concepto de causalidad en el sentido de Granger para determinar si una serie de tiempo es fuertemente exógena, en el sentido que esta pueda ser utilizada para predecir el comportamiento futuro de otra.



Uno de los resultados que se desprende de la teoría de *wavelets* y que Ramsey y Lampart (1998a, 1998b) utilizan como instrumento complementario de la econometría convencional de series de tiempo es el denominado *análisis multiresolución (AMR)* de series económicas a través del uso de funciones *wavelets*. Así, de manera alternativa al que se denominará “enfoque tradicional”, el análisis de la relación de causalidad en el sentido de Granger puede llevarse a cabo considerando la información contenida en cada uno de los detalles del análisis multiresolución de la series.

#### 4.1. El enfoque tradicional<sup>9</sup>

Tradicionalmente, la relación de causalidad entre dinero y producto ha sido estudiada empíricamente desde tres perspectivas: (1) el grado de predicción entre variables nominales y reales a través del análisis de una sola ecuación, (2) la existencia de relaciones estructurales significativas entre ellas, a través del análisis de modelos VAR reducidos y estructurales, y (3) la existencia de una relación de largo plazo, a través del análisis de un vector de cointegración y el modelo de corrección de errores asociado. En el caso (1), la relación se analiza en un contexto de corto plazo, mientras que en los casos (2) y (3) se analiza considerando el corto y el largo plazo.

Empíricamente el largo plazo se asocia al comportamiento tendencial de una serie, mientras que el corto plazo se asocia al comportamiento cíclico de la misma, medido como la diferencia entre la serie observada y la tendencia (denominada “brecha de una serie”). En términos de cointegración (Engle y Granger, 1987), la relación de largo plazo entre las series estaría determinada por el comportamiento de las tendencias estocásticas de las series (que se reflejaría en el denominado vector de cointegración), mientras que el comportamiento de corto plazo estaría determinado por las primeras diferencias de las series y las posibles desviaciones de sus trayectorias respecto de la relación de largo plazo.

Estas formas de analizar empíricamente la relación de causalidad entre variables económicas presentan algunos problemas potenciales. En primer lugar, las alternativas (1) y (2) asumen que las series son estacionarias, lo cual no es una característica de las series de tiempo macroeconómicas, por lo que se utiliza una transformación estacionaria de las series originales: la primera diferencia o la brecha. En el caso de la alternativa (3), parte del análisis de causalidad entre series no estacionarias se basa en las primeras diferencias de las mismas. Así, un problema consiste en que las series son no estacionarias, y que al utilizar transformaciones estacionarias de las mismas podría eliminarse información importante para determinar la relación de causalidad empírica entre las series.

En particular, al analizar las brechas de las series (desviaciones de la tendencia o de la trayectoria de largo plazo) o las primeras diferencias de las series, la ausencia de relación de causalidad entre las brechas o las primeras diferencias podría explicarse por la existencia de causalidad entre los diferentes componentes de las series y no entre ellas, con lo cual se tendría la posibilidad de diferentes relaciones de causalidad (una para cada componente de las brechas).

#### 4.2. Enfoque Alternativo: *Wavelets* y Análisis Multiresolución

Como se desprende de la literatura sobre el análisis tradicional de la relación de causalidad empírica entre el dinero y el nivel de actividad, no es posible establecer claramente la dirección de la causalidad, al menos en el corto plazo<sup>10</sup>. Una posible explicación de la ausencia de un consenso en los resultados teóricos y empíricos consiste en que el análisis basado en el corto y largo plazo (empíricamente asociados a horizontes temporales de corta y larga duración, respectivamente), no estaría rescatando la posible relación de causalidad entre dinero y nivel de actividad. Como lo afirman Ramsey y Lampart (1998b), desde los inicios de la teoría económica como disciplina independiente, muchos economistas han afirmado que el proceso de decisión

<sup>9</sup> Para una revisión de la literatura empírica sobre trabajos importantes donde se analiza la relación de causalidad entre dinero y producto, ver Lahura (2003).

<sup>10</sup> B. Hayo (1998) presenta una buena revisión de la literatura hasta esa fecha.



económica involucra diferentes períodos de tiempo, por lo cual la relación de causalidad entre variables económicas podría cambiar al analizar diferentes horizontes temporales:

*Marshall, Edgeworth, Schumpeter, Hicks, and others of the period realized that there were more time periods involved in economic decision making, but pedagogical advantages of just two periods dominated the relevance of many periods. In any event, it was recognized early in the profession that the time period of analysis, or as we would now term the matter, the timescale of analysis, is very important for determining those aspects of decision making that are relatively more important and those that are less important.* (Ramsey y Lampart 1998: 49)

Como se ha mostrado, las **funciones *wavelets*** permiten descomponer las series económicas en diferentes **detalles** asociados a diferentes **escalas temporales**, capturando en cada uno de ellos **movimientos cíclicos asociados a diferentes frecuencias**, lo cual se denomina **análisis multiresolución**. De esta forma, el estudio empírico de las relaciones económicas puede realizarse analizando por separado los diferentes componentes o detalles de las series, los cuales usualmente están agrupados en una brecha o en las primeras diferencias.

Ramsey y Lampart (1998a y 1998b) aplicaron esta metodología al análisis de relaciones entre variables económicas, encontrando resultados que la econometría de series de tiempo estándar no permitía alcanzar. Por un lado, muestran que es posible analizar diferentes niveles de relación entre consumo e ingreso, en términos de diferentes escalas temporales, y que el efecto del ingreso sobre el consumo cambia en cada escala temporal (Ramsey y Lampart 1998a). Por otro lado, analizan la causalidad en el sentido de Granger entre dinero e ingreso entre los diferentes detalles de las series (asociados a diferentes escalas temporales), y encuentran que la **relación de causalidad empírica cambia con la escala temporal analizada** (Ramsey y Lampart 1998b). Chew (2001), realiza el mismo análisis de Ramsey y Lampart (1998a), utilizando información de dinero e ingreso de países de la Unión Europea, llegando a resultados similares.

De esta manera, el uso de *wavelets* y del análisis multiresolución asociado parece proporcionar una alternativa para analizar empíricamente las relaciones de causalidad en el sentido de Granger entre variables económicas, pues como lo han mostrado Ramsey y Lampart (1998a y 1998b), es posible encontrar evidencia a favor de que la relación entre variables económicas no sea única y que involucre diferentes horizontes temporales. En términos de la relación entre dinero y nivel de actividad, esta posibilidad de diferentes relaciones de causalidad en el sentido de Granger proporcionaría información relevante sobre aspectos de política monetaria; en particular, como lo muestran Ramsey y Lampart (1998b) y Chew (2001), es más probable que movimientos en la cantidad de dinero de muy corta duración (de 2 a 4 meses, por ejemplo), sean respuesta a movimientos similares del nivel de actividad, mientras que movimientos en la cantidad de dinero de mayor duración (de 4 a 8 meses, por ejemplo), estén orientados a afectar de alguna manera el comportamiento del nivel de actividad.

La principal característica del *AMR* es que permite descomponer una serie de tiempo (estacionaria o no estacionaria), en un **componente tendencial suave** (que depende de una *wavelet* padre) y **diferentes componentes estacionarios** o detalles (que depende de una *wavelet* madre) de **diferente duración temporal o escalas temporales**, asociados a **diferentes frecuencias**. Una característica adicional es que la suma simple de los detalles y del componente suavizado permite reconstruir la serie original. De esta forma, la teoría de *wavelets* proporciona un método de filtración de series de tiempo, donde el componente cíclico o estacionario asociado no es único, sino que su número depende del grado de suavizamiento del componente tendencial.

Dada esta característica, el análisis empírico de la causalidad en el sentido de Granger entre dos (o más variables) puede realizarse entre los diferentes detalles de las series y no solamente entre las series en niveles (en caso sean estacionarias) o entre las primeras diferencias (o la brecha de las mismas, o alguna transformación que sea estacionaria). Así, el uso del *AMR* de una señal implica el uso de diferentes modelos de vectores autorregresivos o VAR para cada detalle de las series. Específicamente, si se desea analizar la relación de causalidad entre dos variables *X* e *Y*, el análisis de causalidad en el sentido de Granger entre los detalles 1 de las series implica el uso del siguiente sistema:



$$\begin{aligned}
 Y_t(D_1) &= \alpha_{11}(D_1)Y_{t-1}(D_1) + \alpha_{12}(D_1)Y_{t-2}(D_1) + \dots + \alpha_{1p}(D_1)Y_{t-p}(D_1) \\
 &\quad + \beta_{11}(D_1)X_{t-1}(D_1) + \beta_{12}(D_1)X_{t-2}(D_1) + \dots + \beta_{1p}(D_1)X_{t-p}(D_1) + v_{Yt} \\
 X_t(D_1) &= \alpha_{21}(D_1)Y_{t-1}(D_1) + \alpha_{22}(D_1)Y_{t-2}(D_1) + \dots + \alpha_{2p}(D_1)Y_{t-p}(D_1) \\
 &\quad + \beta_{21}(D_1)X_{t-1}(D_1) + \beta_{22}(D_1)X_{t-2}(D_1) + \dots + \beta_{2p}(D_1)X_{t-p}(D_1) + v_{Xt}
 \end{aligned}$$

donde, por ejemplo,  $\alpha_{1p}(D_1)$  es un parámetro que representa el efecto del rezago  $p$  del detalle 1 o  $D_1$  de la variable  $Y$  (denotada por  $Y_{t-p}(D_1)$ ), sobre el valor del detalle 1 o  $D_1$  de  $Y$  en  $t$  (denotada por  $Y_t(D_1)$ ). Para el detalle 2:

$$\begin{aligned}
 Y_t(D_2) &= \alpha_{11}(D_2)Y_{t-1}(D_2) + \alpha_{12}(D_2)Y_{t-2}(D_2) + \dots + \alpha_{1p}(D_2)Y_{t-p}(D_2) \\
 &\quad + \beta_{11}(D_2)X_{t-1}(D_2) + \beta_{12}(D_2)X_{t-2}(D_2) + \dots + \beta_{1p}(D_2)X_{t-p}(D_2) + v_{Yt} \\
 X_t(D_2) &= \alpha_{21}(D_2)Y_{t-1}(D_2) + \alpha_{22}(D_2)Y_{t-2}(D_2) + \dots + \alpha_{2p}(D_2)Y_{t-p}(D_2) \\
 &\quad + \beta_{21}(D_2)X_{t-1}(D_2) + \beta_{22}(D_2)X_{t-2}(D_2) + \dots + \beta_{2p}(D_2)X_{t-p}(D_2) + v_{Xt}
 \end{aligned}$$

y, en general, para el detalle  $j$ :

$$\begin{aligned}
 Y_t(D_j) &= \alpha_{11}(D_j)Y_{t-1}(D_j) + \alpha_{12}(D_j)Y_{t-2}(D_j) + \dots + \alpha_{1p}(D_j)Y_{t-p}(D_j) \\
 &\quad + \beta_{11}(D_j)X_{t-1}(D_j) + \beta_{12}(D_j)X_{t-2}(D_j) + \dots + \beta_{1p}(D_j)X_{t-p}(D_j) + v_{Yt} \\
 X_t(D_j) &= \alpha_{21}(D_j)Y_{t-1}(D_j) + \alpha_{22}(D_j)Y_{t-2}(D_j) + \dots + \alpha_{2p}(D_j)Y_{t-p}(D_j) \\
 &\quad + \beta_{21}(D_j)X_{t-1}(D_j) + \beta_{22}(D_j)X_{t-2}(D_j) + \dots + \beta_{2p}(D_j)X_{t-p}(D_j) + v_{Xt}
 \end{aligned}$$

Este grupo de modelos VAR sobre los cuales se basa el análisis de causalidad en el sentido de Granger entre dos variables  $X$  e  $Y$  muestra las siguientes ventajas del AMR de series temporales respecto del análisis econométrico tradicional:

- El AMR permite aprovechar la información contenida en las diferentes escalas temporales de la señal. De esta forma, para el caso de dos series  $X$  e  $Y$ , la causalidad ya no se analiza solo para los niveles (o las primeras diferencias), sino para cada par de detalles o escalas. Dado esto, el AMR haría posible verificar la hipótesis de que las *relaciones entre variables económicas* -en términos de predicción- *pueden cambiar de sentido si se analizan diferentes escalas temporales*. Como lo sugieren Ramsey y Lampart (1998b), la idea central es que las decisiones económicas muchas veces involucran *horizontes temporales con diferente duración*.
- El AMR puede aplicarse a cualquier tipo de serie temporal, *sea o no estacionaria, presente o no quiebres*. Dado que los detalles que se obtienen de cada serie son estacionarios, es posible aplicar directamente el contraste de causalidad en el sentido de Granger entre series *no estacionarias*, analizando los detalles de las mismas. En general, las *wavelet* se caracterizan por capturar los componentes no estacionarios y estacionales contenidos en las series.

Dadas estas ventajas del análisis multiresolución a través del uso de wavelets, es posible evaluar la hipótesis de que la relación de causalidad entre dinero (medido a través de algún agregado monetario relevante) e ingreso (medido a través de algún indicador del nivel de actividad económica) puede cambiar si se consideran diferentes horizontes temporales: en períodos cortos (escalas pequeñas), los movimientos en el nivel de actividad podrían preceder a los de la cantidad de dinero, mientras que en períodos de mediana duración (escalas mayores), los movimientos del dinero podrían preceder a los movimientos del nivel de actividad, mientras que en períodos mayor duración (escalas grandes), podría observarse una doble relación. De esta manera, el uso de wavelets para realizar un análisis multiresolución series de tiempo se constituye en un complemento potencial de la econometría de series de tiempo.



### 4.3. Datos

Para analizar la relación empírica entre el dinero y el producto tomando como criterio básico la posible existencia de causalidad en el sentido de Granger, se utilizó la información disponible en la base de datos mensual del BCRP, para el período mayo 1992 - diciembre 2002. De esta forma, se utilizó una muestra cuyo tamaño es potencia de 2 (en este caso  $n = 128 = 2^7$ ) para realizar la descomposición de las series a través del uso de funciones *wavelets*<sup>11</sup>. Sin embargo, el análisis se realizó utilizando la descomposición de las series para el período enero 1993 – diciembre 2001, caracterizado por un esquema de política monetaria con ancla nominal, donde el ancla o meta intermedia era la emisión primaria<sup>12</sup>.

Para aproximar empíricamente la variable dinero, se eligieron cinco agregados monetarios nominales: emisión primaria promedio del mes, circulante en moneda nacional, dinero en moneda nacional, liquidez en moneda nacional y liquidez en moneda extranjera (expresada en soles). El agregado monetario dinero está compuesto por el circulante y los depósitos a la vista; la liquidez en moneda nacional por el dinero en moneda nacional más los depósitos de ahorro, plazo y otros valores denominados en moneda nacional; la liquidez en moneda extranjera por los depósitos a la vista, ahorro, plazo y otros valores denominados en moneda extranjera. El producto fue aproximado a través del Producto Bruto Interno real a soles de 1994. Finalmente, para aproximar la variable nivel de precios, se utilizó el índice de precios al consumidor (IPC).

Las series fueron desestacionalizadas<sup>13</sup> y se utilizaron en logaritmos. Por un lado, el análisis de las series a través del enfoque tradicional se basó en los logaritmos de las series en niveles y en primeras diferencias, además de sus brechas. Por otro lado, para el enfoque de *wavelets* se filtraron los logaritmos de las series utilizando la función *wavelet* Symmlet.

Para realizar el contraste de causalidad en el sentido de Granger a través del enfoque tradicional, se utilizó el estadístico  $\chi^2$  sobre los coeficientes respectivos de un VAR cuyas variables son el PBI (nominal o real) y los diferentes agregados monetarios. Para la elección del número de rezagos óptimos del modelo VAR, solo se consideraron aquellos modelos VAR estables y que no presentaban algún patrón de autocorrelación significativo en los residuos. De esta forma, se buscó que el patrón de autocorrelación capture toda la dinámica que podría existir en el sistema además del dinero y nivel de actividad. La elección final del modelo se realizó a través de los contrastes tradicionales de determinación del número de rezagos óptimo: Akaike, Schwarz, Error de Predicción Final, Hannan –Quinn y Ratio de Verosimilitud.

### 4.4. Enfoque Tradicional: Evidencia Empírica

El primer paso fue analizar la hipótesis de existencia de raíz unitaria en las series. Las pruebas ADF y Phillip Perron mostraron que no es posible rechazar la hipótesis de raíz unitaria. Dado esto, se procedió a aplicar las pruebas de Zivot y Andrews (1992) y Perron (1997), para evaluar la posibilidad de que las series sean estacionarias con quiebre; los resultados mostraron evidencia a favor de la hipótesis de raíz unitaria. De esta manera, se concluyó que los logaritmos de las series en niveles son no estacionarios e integrados de orden 1. Dado este resultado, el enfoque tradicional consiste en analizar la causalidad en el sentido de Granger usando las primeras diferencias de las series, las brechas de las mismas o, en caso exista un vector de cointegración, usando un Modelo de Corrección de Errores (MCE).

---

<sup>11</sup> Dado que la filtración de las series a través de *wavelets* ha considerado 20 períodos adicionales a los analizados (12 previos y ocho posteriores), esto ayuda a eliminar posibles problemas en los extremos de cada una de las series filtradas.

<sup>12</sup> A partir de enero de 2002 la política monetaria sigue un esquema de Metas de Inflación (Inflation Targeting), donde la meta intermedia es la proyección de inflación.

<sup>13</sup> Las *wavelets* pueden capturar los componentes estacionales de las series. Sin embargo, se optó por trabajar con las series desestacionalizadas para poder comparar los resultados del análisis utilizando la econometría tradicional con el enfoque alternativo usando *wavelets*.



Para evaluar la existencia de vectores de cointegración de las series, se utilizaron las metodologías de Engle y Granger (1987) y la de Johansen (1991,1995)<sup>14</sup>. Ambas metodologías muestran evidencia a favor de vectores de cointegración al 1 y 5 por ciento de significancia, entre los diferentes agregados monetarios y el producto real. Debido a esto, se procedió a realizar el análisis de causalidad en el sentido de Granger bajo el supuesto de la existencia de un vector de cointegración y un modelo de corrección de errores correspondiente.

Para la muestra analizada, la existencia de una relación de cointegración entre el producto y los diferentes agregados monetarios en moneda nacional solamente se presenta bajo los siguientes supuestos: (a) no existe tendencia determinística en los datos, (b) el vector de cointegración no presenta intercepto ni tendencia, y (c) el modelo de corrección de errores no presenta intercepto. La existencia de una relación de cointegración entre el producto y la liquidez en moneda extranjera se presenta bajo los mismos supuestos, excepto el (b), pues en este caso fue necesario asumir que el vector de cointegración presenta intercepto pero no tendencia.

El cuadro 2 muestra los resultados del análisis de causalidad en el sentido de Granger en un contexto de cointegración, en donde el producto causa en el sentido de Granger a todos los agregados monetarios considerando las primeras diferencias, excepto para la emisión y la liquidez en moneda extranjera. Por un lado, la emisión y el producto se causan mutuamente en niveles, por lo que muestran evidencia de ser ambas endógenas. Por otro lado, se tiene que el PBI es débilmente exógeno al considerar el agregado monetario dinero. En el caso de circulante y liquidez en moneda nacional, existe evidencia de que el PBI es fuertemente exógeno. Finalmente, solo el agregado monetario liquidez en moneda extranjera es débilmente exógeno.

## Cuadro 2

### COINTEGRACIÓN Y CAUSALIDAD A LA GRANGER:

1993:01 - 2001:12<sup>1/</sup>

| Hipótesis Nula             | VEC    | Niveles |
|----------------------------|--------|---------|
| <b>PBIR no causa BASE</b>  | 0,4618 | SI      |
| <b>BASE no causa PBIR</b>  | 0,0592 | SI      |
| Rezagos                    | 12     | 12      |
| <b>PBIR no causa CIR</b>   | 0,0164 | SI      |
| <b>CIR no causa PBIR</b>   | 0,0651 | NO      |
| Rezagos                    | 14     | 14      |
| <b>PBIR no causa DIN</b>   | 0,0060 | SI      |
| <b>DIN no causa PBIR</b>   | 0,0472 | NO      |
| Rezagos                    | 14     | 14      |
| <b>PBIR no causa LIQMN</b> | 0,0000 | SI      |
| <b>LIQMN no causa PBIR</b> | 0,0645 | NO      |
| Rezagos                    | 24     | 24      |
| <b>PBIR no causa LIQME</b> | 0,5739 | NO      |
| <b>LIQME no causa PBIR</b> | 0,1010 | SI      |
| Rezagos                    | 21     | 21      |

<sup>1/</sup> En todos los casos, existe un vector de cointegración al 1% y 5% de significancia, excepto para el modelo con circulante (solo al 5%).

Estos resultados deben ser considerados con cuidado, pues los supuestos bajo los cuales se han obtenido no son consistentes con la naturaleza de los datos. En particular, el supuesto de ausencia de tendencias determinísticas en los datos no es adecuado, especialmente para los agregados monetarios. Asimismo, solamente cuando las series tienen media cero los supuestos (a), (b) y (c) son relevantes. Debido a esto, se

<sup>14</sup> En el caso del análisis de relaciones bivariadas entre cada agregado monetario con el producto, los resultados proporcionados por la metodología de Engle y Granger fueron similares a los de la metodología de Johansen, por lo cual la presentación de los resultados se basó en los estadísticos obtenidos por esta última metodología.



procedió a la búsqueda de vectores de cointegración con supuestos consistentes con la naturaleza de los datos (en particular la presencia de tendencias determinísticas); sin embargo, en todos los casos no fue posible encontrar vectores de cointegración. Esto tampoco fue posible considerando la relación entre cada agregado monetario, el PBI real y el deflactor del PBI.

Considerando los resultados arriba mencionados, se procedió a realizar el contraste de causalidad en el sentido de Granger utilizando las primeras diferencias de los logaritmos de las series y las brechas de las mismas. Los resultados del análisis de los agregados monetarios y el PBI real se muestran en el cuadro 3.

### Cuadro 3

#### SERIES ESTACIONARIAS Y CAUSALIDAD A LA GRANGER: 1993:01 - 2001:12

| Hipótesis<br>Nula          | Primeras<br>Diferencias | Brechas<br>HP   |
|----------------------------|-------------------------|-----------------|
| <b>PBIR no causa BASE</b>  | 0,0082                  | 0,0812          |
| <b>BASE no causa PBIR</b>  | 0,3290                  | 0,4044          |
| Rezagos                    | 4                       | 6 <sup>1/</sup> |
| <b>PBIR no causa CIR</b>   | 0,0181                  | 0,0899          |
| <b>CIR no causa PBIR</b>   | 0,1046                  | 0,0001          |
| Rezagos                    | 14 <sup>1/</sup>        | 22              |
| <b>PBIR no causa DIN</b>   | 0,0092                  | 0,1350          |
| <b>DIN no causa PBIR</b>   | 0,0339                  | 0,0017          |
| Rezagos                    | 20                      | 21              |
| <b>PBIR no causa LIQMN</b> | 0,3630                  | 0,0467          |
| <b>LIQMN no causa PBIR</b> | 0,0221                  | 0,0945          |
| Rezagos                    | 1                       | 21              |
| <b>PBIR no causa LIQME</b> | 0,4795                  | 0,4172          |
| <b>LIQME no causa PBIR</b> | 0,0029                  | 0,0145          |
| Rezagos                    | 24                      | 26              |

1/ Autocorrelación de primer orden.

Para el caso de las primeras diferencias de los logaritmos de las series (tasas de crecimiento), se concluye que el producto causa en el sentido de Granger al dinero cuando éste se mide como base, circulante, o circulante más depósitos a la vista (dinero); la causalidad se revierte cuando se consideran los agregados monetarios más amplios, tanto en moneda nacional como en moneda extranjera. Para el caso de las brechas, el dinero causa en el sentido de Granger al producto cuando se utiliza el circulante, circulante más depósitos a la vista (dinero) y liquidez en moneda extranjera; el único caso donde el producto causa en el sentido de Granger al dinero es cuando se mide como liquidez en moneda extranjera; cuando se considera la base, no se puede concluir nada acerca de la existencia de causalidad en el sentido de Granger.

En resumen, los resultados no muestran claramente la existencia de una relación de causalidad en el sentido de Granger entre el producto y los diferentes agregados monetarios, tanto en moneda nacional como extranjera. Estos resultados son similares a los que se obtienen incluyendo el deflactor del PBI real<sup>15</sup>.

<sup>15</sup> Sin embargo, es posible que exista una relación de largo plazo entre algunos componentes no estacionarios de la series, lo cual se denomina **cointegración oculta** (Granger y Yoon, 2002). En un trabajo próximo a ser publicado, el autor vincula el uso de *wavelets* y el concepto de cointegración oculta y encuentra la existencia de cointegración entre algunos componentes del análisis multiresolución de las series.



#### 4.5. Enfoque Alternativo: Evidencia Empírica

Como alternativa al enfoque tradicional, se realizó el análisis de causalidad en el sentido de Granger entre producto y los diferentes agregados monetarios, a través del análisis multiresolución de las series utilizando *wavelets*. Específicamente, las series fueron filtradas usando la función *wavelet* madre denominada Symmlet de orden 12 (Sym12) - y la *wavelet* padre asociada - caracterizada por ser ortonormal, de soporte compacto y casi simétrica. Se eligió una longitud de 12 para el filtro *wavelet* Symmlet, para que de esta forma la *wavelet* presente buenas propiedades en términos de regularidad<sup>16</sup>.

El análisis multiresolución se realizó considerando 6 detalles para cada serie:  $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6$  y un componente suavizado  $S_6$ . El detalle  $D_1$  contiene información de movimientos de la serie (usualmente de alta frecuencia) que ocurren entre  $2^1 = 2$  y  $2^2 = 4$  meses; el detalle  $D_2$  movimientos de la serie entre  $2^2 = 4$  y  $2^3 = 8$  meses, el detalle  $D_3$  movimientos de la serie entre  $2^3 = 8$  y  $2^4 = 16$  meses, . . . , el detalle  $D_6$  movimientos de la serie entre  $2^6 = 64$  y  $2^7 = 128$  meses.

Considerando los resultados del enfoque tradicional, donde no se encontró evidencia a favor de la existencia de una relación de largo plazo entre el producto real y el dinero nominal, la relación de causalidad en el sentido de Granger se analizó considerando una relación de corto plazo entre dinero y PBI real. Por ello, el análisis de causalidad en el sentido de Granger se realizó a través de un modelo de vectores autorregresivos o VAR sin restricciones.

El cuadro 4 presenta los resultados de la prueba de causalidad en el sentido de Granger entre diferentes agregados monetarios nominales y el PBI real (relación de corto plazo), utilizando cada uno de los detalles de las series obtenidos a partir del AMR de las mismas. Se puede observar que la relación de causalidad entre las variables dinero (medido a través de los diferentes agregados monetarios) y el producto (medido a través del PBI real) **no es única** y que **cambia con la escala temporal analizada**; sin embargo, el cambio en la relación de causalidad difiere entre agregados monetarios. Estos resultados se pueden resumir de la siguiente manera:

- a) Para todos los agregados monetarios, se tiene que el producto causa en el sentido de Granger al dinero cuando se analiza el detalle 1, que contiene movimientos de 2 a 4 meses de las series (escala 1).
- b) Al analizar los siguientes detalles (escalas mayores), la causalidad cambia, observándose causalidad unidireccional de dinero a producto y viceversa, doble causalidad y ausencia de causalidad.
- c) El caso más interesante es del agregado monetario *dinero*, definido como la suma de circulante más depósitos a la vista. En este caso, se tiene que al considerar movimientos de 2 a 4 meses (escala 1), el producto causa en el sentido de Granger al dinero; para movimientos de 4 a 8 meses (escala 2), la causalidad se revierte y el dinero causa en el sentido de Granger al producto; para movimientos de 8 a 16 meses (escala 3), nuevamente el producto causa en el sentido de Granger al dinero<sup>17</sup>; finalmente, al considerar movimientos de mayor duración (escalas 4 y 5), se tiene que existe doble causalidad entre producto y dinero<sup>18</sup>.

<sup>16</sup> Ver en la sección 2 la discusión sobre las propiedades deseables de una *wavelet* para su aplicación al análisis multiresolución.

<sup>17</sup> Aunque en este caso, existe autocorrelación generada por un proceso autorregresivo de orden 4, donde solo los rezagos 2 y 4 son significativos.

<sup>18</sup> Este resultado está en la línea de la evidencia presentada por Ramsey y Lampart (1998b), Chew (2001) y Gençay, et al. (2002).



## Cuadro 4

CAUSALIDAD A LA GRANGER USANDO WAVELETS: 1993:01 - 2001:12  
(Series mensuales con ajuste estacional)

| Hipótesis Nula             | D1<br>(2 a 4 m.) | D2<br>(4 a 8 m.) | D3<br>(8 a 16 m.) | D4<br>(16 a 32 m.) | D5<br>(32 a 64 m.) | D6<br>(64 a 128 m.) |
|----------------------------|------------------|------------------|-------------------|--------------------|--------------------|---------------------|
| <b>PBIR no causa BASE</b>  | 0,0157           | 0,0138           | 0,2558            | 0,0005             | 0,3396             |                     |
| <b>BASE no causa PBIR</b>  | 0,7242           | 0,0119           | 0,3445            | 0,0000             | 0,0018             | INESTABLE           |
| Rezagos                    | 16               | 23               | 9                 | 18                 | 19                 |                     |
| Autocorrelación            | NO               | NO               | SI                | NO                 | NO                 |                     |
| <b>PBIR no causa CIR</b>   | 0,0000           | 0,0000           | 0,0020            | 0,0017             | 0,0000             |                     |
| <b>CIR no causa PBIR</b>   | 0,2075           | 0,2754           | 0,0079            | 0,0000             | 0,0000             | INESTABLE           |
| Rezagos                    | 13               | 22               | 23                | 18                 | 27                 |                     |
| Autocorrelación            | NO               | NO               | SI                | NO                 | NO                 |                     |
| <b>PBIR no causa DIN</b>   | 0,0472           | 0,3146           | 0,0032            | 0,0000             | 0,0000             | 0,1856              |
| <b>DIN no causa PBIR</b>   | 0,9915           | 0,0004           | 0,2547            | 0,0000             | 0,0000             | 0,0000              |
| Rezagos                    | 23               | 18               | 13                | 23                 | 23                 | 9                   |
| Autocorrelación            | NO               | NO               | SI                | NO                 | NO                 | SI                  |
| <b>PBIR no causa LIQMN</b> | 0,0007           | 0,0289           | 0,2545            | 0,1518             | 0,3431             | 0,0000              |
| <b>LIQMN no causa PBIR</b> | 0,6918           | 0,2427           | 0,0000            | 0,0000             | 0,0000             | 0,0000              |
| Rezagos                    | 29               | 20               | 13                | 20                 | 13                 | 20                  |
| Autocorrelación            | NO               | NO               | SI                | NO                 | SI                 | NO                  |
| <b>PBIR no causa LIQME</b> | 0,0206           | 0,5486           | 0,0258            | 0,0001             | 0,1929             | 0,0001              |
| <b>LIQME no causa PBIR</b> | 0,9991           | 0,2839           | 0,0002            | 0,0000             | 0,0000             | 0,0000              |
| Rezagos                    | 10               | 14               | 5                 | 26                 | 6                  | 20                  |
| Autocorrelación            | SI               | SI               | SI                | NO                 | SI                 | NO                  |

De esta manera, a diferencia del enfoque tradicional, el enfoque alternativo a través del uso de *wavelets* y el análisis multiresolución permiten establecer la existencia de causalidad en el sentido de Granger en diferentes direcciones, dependiendo de las escalas de tiempo consideradas y del agregado monetario<sup>19</sup>. Así, los resultados muestran evidencia a favor de la hipótesis de que el dinero causa en el sentido de Granger al producto real al considerar ciertos horizontes o escalas temporales, lo cual sugiere el uso de los agregados monetarios como predictores del comportamiento del producto real.

## 5. Producto de tendencia, brecha del producto e inflación subyacente: otras posibles aplicaciones.

Como se ha mostrado, una serie de tiempo macroeconómica puede ser filtrada mediante el uso de funciones *wavelets*, dando origen a un análisis multiresolución que permite expresar una serie en componentes ortogonales asociados a diferentes escalas y frecuencias. Dado esto, ¿qué tipo de información podría extraerse del análisis multiresolución del PBI real? ¿y del análisis multiresolución de la inflación total? En esta sección, se plantea el uso potencial de las *wavelets* para la construcción de indicadores alternativos de producto de tendencia, brecha del producto e inflación subyacente a partir del análisis multiresolución de las series PBI real e inflación.

### 5.1. Producto de tendencia y brecha del producto

La brecha del producto es un concepto económico que hace referencia al componente de demanda agregada del nivel de actividad económica. Específicamente, la brecha del producto se define como:

<sup>19</sup> Esta diversidad de relaciones de causalidad en el sentido de Granger también se obtiene cuando se incluye en el análisis el nivel de precios.



$$Brecha = \frac{PBI \text{ real} - PBI \text{ potencial}}{PBI \text{ potencial}}$$

de donde se desprende que es un indicador de presión de demanda, al medir el exceso de demanda respecto del nivel de producción potencial de la economía. Cuando el PBI potencial se aproxima a través de una tendencia obtenida con filtros estadísticos, la brecha del producto se define en términos de un PBI de tendencia:

$$Brecha = \frac{PBI \text{ real} - PBI \text{ tendencia}}{PBI \text{ tendencia}}$$

La brecha del producto es un elemento importante para la toma de decisiones de política económica, pues permite determinar si la economía está en recesión (brecha negativa) o expansión (brecha positiva). En términos de una curva de Phillips, la brecha proporciona información sobre la existencia de presiones inflacionarias (brecha positiva) o deflacionarias (brecha negativa).

Gallegos y Jonson (2001), utilizan funciones *wavelets* para estimar el PBI de tendencia y la brecha del producto asociada; sin embargo, los autores no consideran satisfactorio sus resultados debido a que la serie de producto de tendencia obtenida se parece mucho al producto observado.

Considerando este resultado, y dado que no ha sido posible encontrar en la literatura el uso de *wavelets* en la construcción de un indicador de brecha del producto, en el presente trabajo se plantea realizar un análisis multiresolución de la serie del PBI real (incluso sin ajuste estacional) y determinar -tomando en cuenta criterios económicos y específicos a la economía analizada- cuáles de los detalles cíclicos deberían ser considerados como parte del ciclo económico, cuáles como movimientos transitorios y estacionales, y cuáles como parte de los movimientos tendenciales (los cuales son representados principalmente por el componente suavizado del análisis multiresolución)<sup>20</sup>.

Para ilustrar estas ideas, se realizó un análisis multiresolución de la serie trimestral del PBI real<sup>21</sup>, desde el segundo trimestre de 1990 hasta el cuarto trimestre del 2003. La descomposición de la serie se muestra en el gráfico 5.

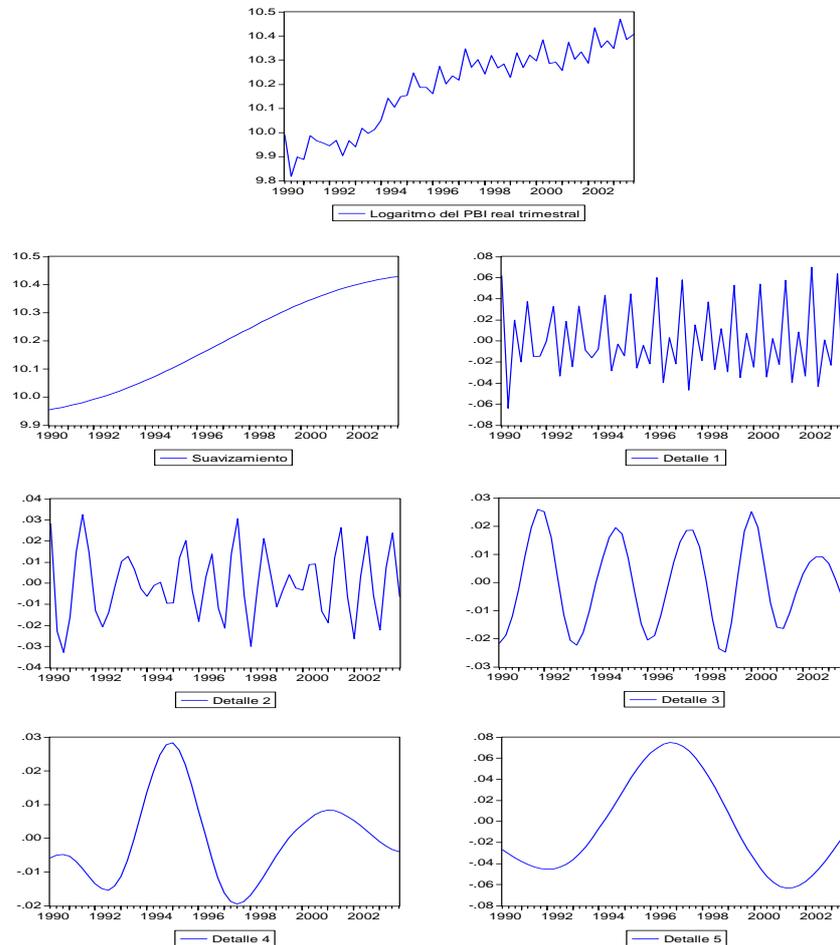
---

<sup>20</sup> Aparentemente, Gallego y Jonson no hacen esto, y por ello el suavizamiento que obtienen (que sería el PBI de tendencia), es muy parecido al PBI observado.

<sup>21</sup> Para esto se usó la wavelet madre Symlet(12).



**Gráfico 5**  
**Análisis Multiresolución del logaritmo del PBI real trimestral:**  
**1990-2003**



Los criterios que se consideraron para la construcción del producto de tendencia y la brecha fueron los siguientes:

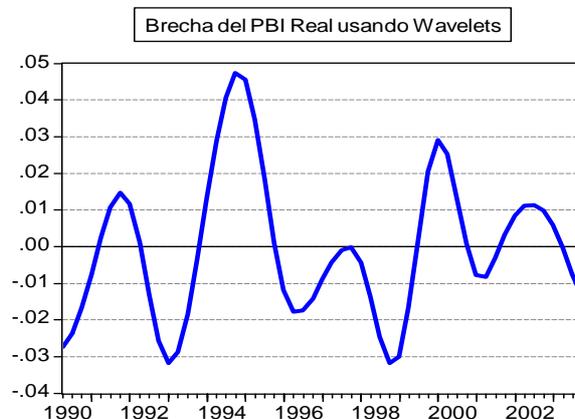
- Burns y Mitchell (1946), plantearon que los ciclos económicos están compuestos por fluctuaciones con un período de 6 a 32 trimestres. Siguiendo este criterio, Baxter & King (1999) sugieren la extracción de fluctuaciones de 2 a 8 años para obtener una buena representación de los ciclos económicos. Dado esto, el primer criterio consiste en incluir en la brecha del producto movimientos cíclicos entre 2 (8 trimestres) y 8 años (32 trimestres).
- El análisis de una serie de PBI real con ajuste estacional puede estar sesgado si el proceso de eliminación de componentes estacionales elimina parcial o totalmente algún componente cíclico importante. Dado esto, un segundo criterio consiste analizar la serie de PBI real sin ajuste estacional.

Así, bajo los criterios establecidos se tiene que:

- La brecha debería incorporar solamente el detalle 3 (movimientos cíclicos de 8 a 16 trimestres) y el detalle 4 (movimientos cíclicos de 16 a 32 trimestres). De esta manera, la brecha sería como se muestra en el gráfico 6.



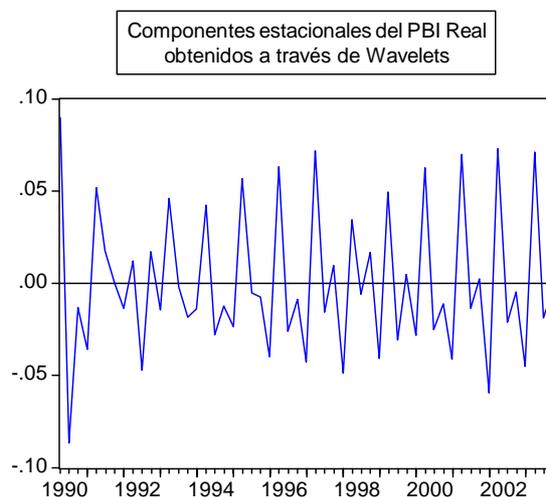
**Gráfico 6**  
**Brecha del PBI**



Es importante observar que esta brecha es consistente con la evolución de la economía peruana desde inicios de los años 90's. En particular, la brecha del producto obtenida a través de *wavelets* refleja las expansiones de la economía experimentadas a mediados de 1991, 1994-1995, 1999-2000 y 2002

- b) Los componentes estacionales estarían capturados principalmente por el detalle 1 (movimientos cíclicos de 2 a 4 trimestres), y en menor medida por el detalle 2 (movimientos cíclicos de 4 a 8 trimestres). El gráfico 7 muestra esta serie que contiene los componentes estacionales más importantes.

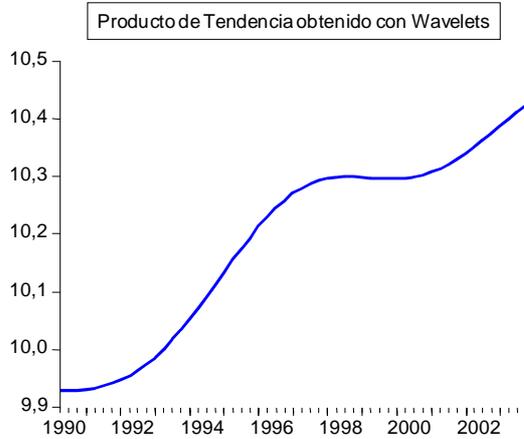
**Gráfico 7**  
**Componentes estacionales del PBI**



- c) El producto de tendencia estaría compuesto por el suavizamiento y el detalle 5, que equivale al suavizamiento de un análisis multiresolución de la serie considerando solo 4 detalles, como se muestra en el gráfico 8.

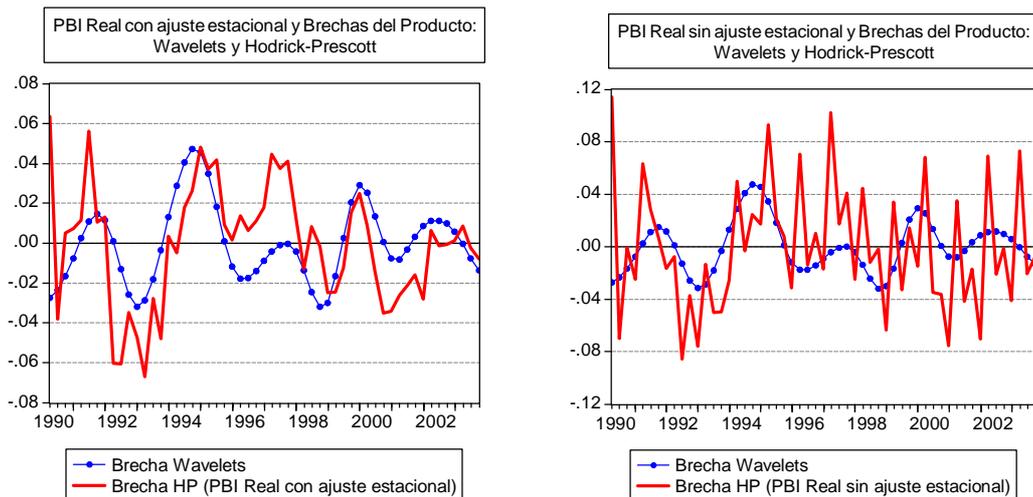


**Gráfico 8**  
**Producto de tendencia**



El gráfico 9 compara la brecha del producto obtenida a través del uso de *wavelets* y la obtenida con el conocido filtro Hodrick-Prescott (HP). Las brechas presentan en general el mismo comportamiento; sin embargo, en algunos períodos la brecha obtenida con *wavelets* indica que la economía está en expansión, mientras que la brecha obtenida con el filtro HP indica que está en recesión, y viceversa, especialmente durante 1996 y 1997. Este gráfico permite observar que la brecha obtenida a través de *wavelets* es suave a pesar que se ha considerado la serie sin ajuste estacional, lo cual no ocurre con la brecha obtenida a través del filtro HP: la brecha es muy errática cuando se utiliza la serie sin ajuste estacional.

**Gráfico 9**  
**Comparación de brechas del producto**



Sin embargo, para determinar la superioridad del uso de *wavelets* en la construcción de indicadores de PBI de tendencia y brecha de producto frente a otros filtros univariados -e inclusive multivariados como el VAR estructural o el filtro de Kalman multivariado- es necesario un análisis más riguroso, tanto desde el punto de vista estadístico y como económico.



## 5.2. Inflación Total y Subyacente

La inflación total se define usualmente como la tasa de crecimiento un índice de precios representativo de la economía que incluye los precios de los bienes más importantes para los consumidores. Este índice se denomina *índice de precios al consumidor* (IPC). Una característica del IPC es que incluye precios con diferente variabilidad, por lo que en la práctica el índice se descompone en dos: (a) IPC subyacente que incluye los precios con menor variabilidad, y (b) IPC no subyacente, que incluye los precios con mucha variabilidad. De esta forma, además de la inflación total, se cuenta con dos medidas adicionales de variación de precios: inflación subyacente o *core inflation* y la inflación no subyacente.

Teóricamente, la inflación presenta un componente persistente (poco volátil) y uno transitorio (más volátil). Por un lado, el componente persistente de la inflación es incorporado usualmente en las expectativas de los agentes, por lo que no necesariamente es perjudicial para la actividad económica (Friedman, 1963). Por otro lado, el componente transitorio de la inflación usualmente es no anticipado, y por lo tanto tendría mayores efectos negativos. Bajo estas consideraciones, Quah y Vahey (1995) definen la inflación subyacente como el componente de la inflación que no tiene efectos de mediano y largo plazo sobre el producto real. En este sentido, bajo la hipótesis de expectativas racionales, la inflación subyacente puede ser aproximada por la inflación total observada excluyendo de ella movimientos transitorios que usualmente son inesperados y por tanto tienen impacto sobre el nivel de actividad real.

Bajo estas consideraciones, se tiene que la inflación subyacente es un indicador de política importante, pues refleja las expectativas de los agentes. Así, en términos de política monetaria –y especialmente bajo un régimen de metas explícitas de inflación o *inflation targeting*– la variable relevante ante la cual debería reaccionar un banco central es la inflación subyacente, pues está asociado principalmente a consideraciones de demanda y no de oferta (como en el caso de la inflación no subyacente).

En la práctica la construcción de los índices depende de la decisión de los especialistas para determinar los precios con mayor y menor volatilidad, lo cual puede cambiar cada cierto tiempo. Sin embargo, es posible determinar los componentes subyacentes econométricamente considerando los efectos de corto y largo plazo de la inflación sobre el producto real, por ejemplo a través de un VAR estructural.

Gencay, et al. (2002), propone el uso de *wavelets* para la construcción de una serie de inflación subyacente. Específicamente, señala como indicador de inflación subyacente el suavizamiento del análisis multiresolución de la serie inflación. En el presente trabajo, se retoma y enriquece esta idea, y se propone una medida de inflación subyacente atendiendo a su definición. Para ilustrar esta propuesta, se realizó un análisis multiresolución de la serie trimestral de la inflación total del índice de precios al consumidor<sup>22</sup>, desde el primer trimestre de 1988 hasta el cuarto trimestre del 2003. La descomposición de la serie para la muestra 1993-2003 se muestra en el gráfico 10<sup>23</sup>.

La construcción de la inflación subyacente consideró toda la serie de inflación menos los detalles 1 y 2, que son los que contienen movimientos asociados a altas frecuencias. De esta manera, se recoge la definición de inflación subyacente propuesta por Quah y Vahey (1995), pues solamente se consideran movimientos de mayor escala y baja frecuencia de la inflación, es decir movimientos suaves asociados a factores de demanda, principalmente.

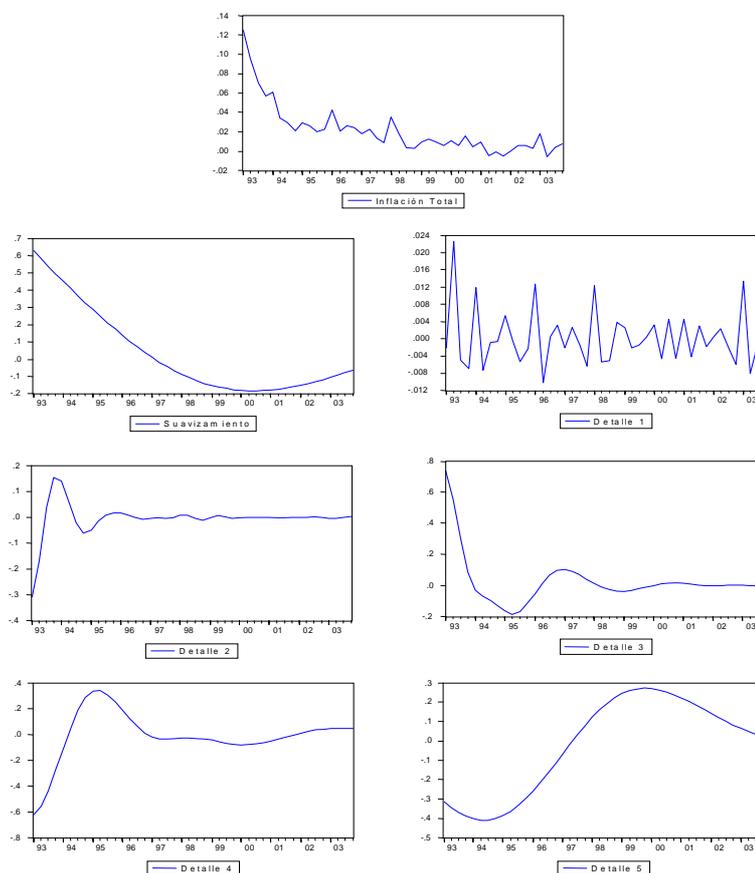
<sup>22</sup> Para esto se usó la wavelet madre Symlet(12).

<sup>23</sup> Se ha reducido la muestra para efecto de visualización de los gráficos.



### Gráfico 10

#### Análisis Multiresolución de la Inflación Total trimestral: 1993-2003



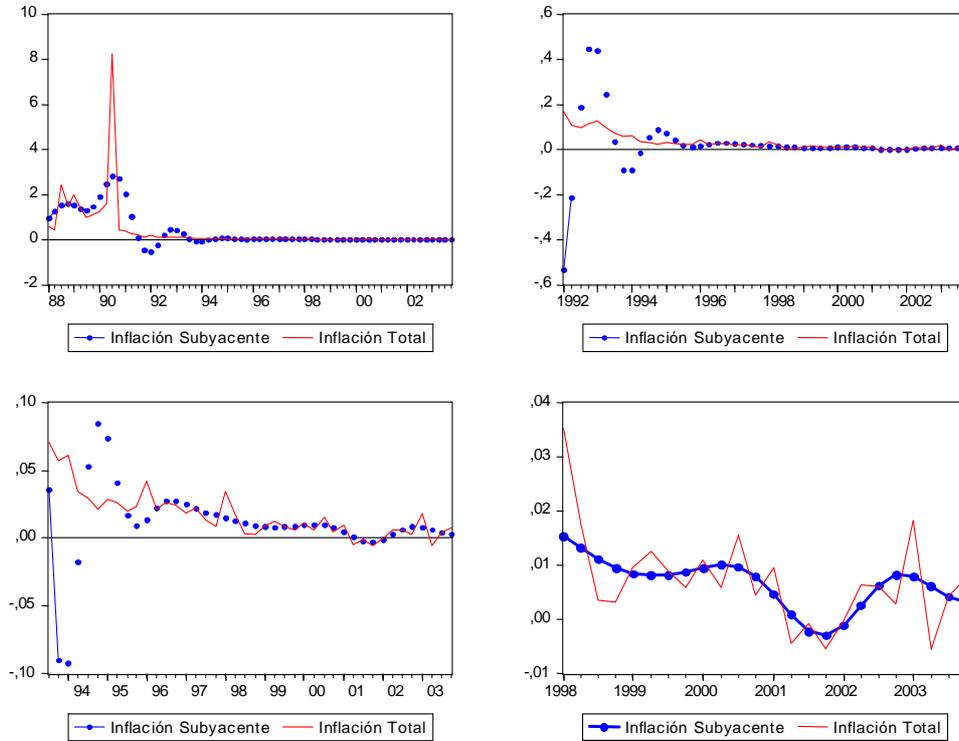
Los resultados muestran una serie de inflación subyacente que captura características importantes asociadas a las presiones de demanda convencionales que se han observado en la economía peruana. Por un lado, el gráfico 11 compara la inflación total y la medida de inflación subyacente propuesta, donde se observa una inflación con un comportamiento suave, pero que no necesariamente coincide con el de la inflación total. Por otro lado, el gráfico 12 compara las series de inflación subyacente y brecha del producto, obtenidas utilizando *wavelets*, donde se puede observar que la inflación subyacente recoge las presiones de demanda positivas observadas en el año 1994 (inflación positiva) y las presiones de demanda negativas del 2001 (inflación negativa).

Al igual que en el caso de la medida de brecha de producto propuesta, para determinar la superioridad del uso de *wavelets* en la construcción de indicadores de inflación subyacente frente a otras alternativas es necesario un análisis estadístico y económico más riguroso, además de la consistencia con algunos hechos estilizados que aquí se han mencionado.



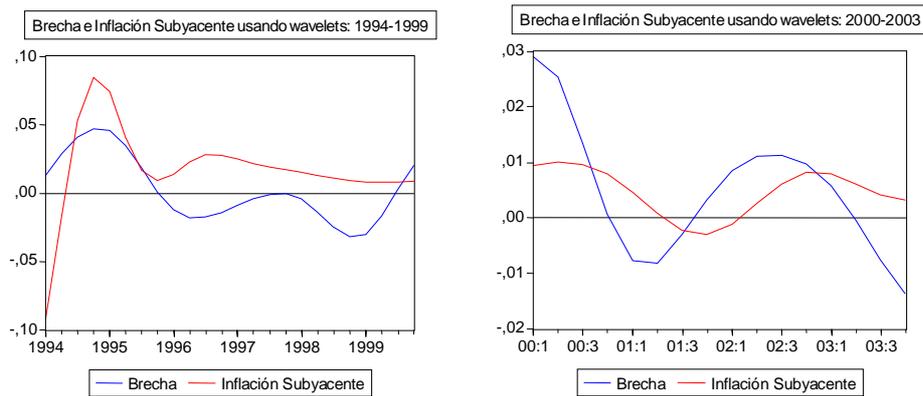
**Gráfico 11**

**Análisis Multiresolución de la Inflación Total e Inflación Subyacente**



**Gráfico 12**

**Brecha del Producto e Inflación Subyacente.**





## 6. Conclusiones

El objetivo del presente trabajo ha sido presentar e ilustrar de forma introductoria el uso de las funciones *wavelets* en el análisis empírico de variables y relaciones macroeconómicas. Para tal fin, se han presentado de manera general las características básicas de la teoría de *wavelets* y tres aplicaciones utilizando información para la economía peruana: (1) el análisis de la hipótesis de que el dinero causa en el sentido de Granger al producto real al considerar ciertos horizontes o escalas temporales; y dos propuestas de medidas alternativas para la medición de (2) la brecha del producto (*output gap*), y (3) la inflación subyacente (*core inflation*).

Por un lado, los resultados del análisis de la relación de causalidad entre dinero y producto real, a través de la descomposición de las series utilizando funciones *wavelets*, muestran evidencia a favor de la hipótesis de que el dinero causa en el sentido de Granger al producto real en ciertos horizontes o escalas temporales. Específicamente, se tiene que:

- a) Existe causalidad en el sentido de Granger entre el producto real y los diferentes agregados monetarios considerados; sin embargo, esta relación de causalidad no es única y depende de la escala temporal analizada.
- b) En el caso particular del agregado monetario *dinero*, definido como la suma de *circulante más depósitos a la vista*, se obtuvieron los siguientes resultados: al considerar movimientos de 2 a 4 meses (escala 1), el producto causa en el sentido de Granger al dinero; para movimientos de 4 a 8 meses (escala 2), la causalidad se revierte y el dinero causa en el sentido de Granger al producto; para movimientos de 8 a 16 meses (escala 3), nuevamente el producto causa en el sentido de Granger al dinero; finalmente, al considerar movimientos de mayor duración (escalas 4 y 5), se tiene que existe doble causalidad entre producto y dinero.

Dados estos resultados, se propone como parte de una agenda de investigación futura el análisis de la dinámica de la economía a través de un modelo VAR estructural utilizando series de tiempo filtradas a través de funciones *wavelets*. Dado que el análisis multiresolución permite estudiar los diferentes detalles de las series y no simplemente las primeras diferencias, su aplicación puede ayudar a entender mejor los problemas asociados al impacto de choques monetarios sobre el nivel de actividad.

Por otro lado, la propuesta de construcción de indicadores alternativos de producto de tendencia, brecha del producto e inflación subyacente muestran la posibilidad de aprovechar la información proporcionada por el uso de las funciones *wavelets* en el análisis multiresolución de series de tiempo no estacionarias y con componentes estacionales. En particular, para el caso peruano la aplicación de las *wavelets* ha permitido construir:

- a) Un producto de tendencia y una brecha del producto que reflejan características importantes observadas desde inicios de los años noventa. Sin embargo, para determinar la superioridad del uso de *wavelets* en la construcción de indicadores de PBI de tendencia y brecha de producto frente a otros filtros univariados -e inclusive multivariados como el VAR estructural o el filtro de Kalman multivariado- es necesario un análisis más riguroso, estadística y económicamente.
- b) Una serie de inflación subyacente que captura características importantes asociadas a las presiones de demanda convencionales que se han observado en la economía peruana; en particular, esta serie rescata las presiones de demanda positivas observadas en el año 1994 (inflación positiva) y las presiones de demanda negativas del 2001 (inflación negativa). Sin embargo, al igual que en el caso de la brecha de producto propuesta, la superioridad del uso de *wavelets* en la construcción de indicadores de inflación subyacente frente a otras alternativas dependerá de un adecuado análisis estadístico y económico, además de la consistencia con algunos hechos estilizados que aquí se han mencionado.

Finalmente, y considerando posibilidades de mejorar el uso de las funciones *wavelets*, sería importante estudiar la posibilidad de realizar un análisis multiresolución que no dependa de escalas que sean potencias de dos (análisis multiresolución diádico) sino un número cualquiera, permitiendo de esta manera una mejor descripción de los datos económicos. Pollock (2003) es el primer trabajo en esta línea de investigación para aplicaciones a la economía.



## 7. Bibliografía

**Almasri, Abdullah y Ghazi Shukur** (2003), An illustration of the causality relation between government spending and revenue using *wavelets* analysis on Finnish data. *Journal of Applied Statistics*. Vol 30, No. 5, p. 571-584.

**Baxter, Marianne y Robert G. King** (1999), Measuring Business Cycles: Approximate band-pass filters for economic time series. *The Review of Economics and Statistics*. Vol. 81, p. 573-593.

**Chew, Cyrene** (2001), Money and Income Relationship of European Countries by Time Scale Decomposition using *Wavelets*. New York University: Preliminary Paper, 39 p.

**Daubechies, Ingrid** (1992), Ten Lectures on *Wavelets*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 357 p.

**Engle, Robert F. y Clive W. Granger** (1987), Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing. *Econometrica*. Vol 55. No. 2, p. 251-276.

**Gallego, Francisco y Christian Jonson** (2001), Teorías y métodos de medición del producto de tendencia: un aplicación al caso de Chile. *Economía Chilena*. Banco Central de Chile. Volumen 4. N° 2, p. 27-58.

**Gençay, Ramazan y Otros** (2002), An Introduction to *Wavelets* and other Filtering Methods in Finance and Economics. San Diego: Academic Press, 359 p.

**Granger, Clive W.J.** (1963), Economic processes involving feedback. *Information and Control*. N° 6, p. 28-48.

**Granger, Clive W.J.** (1999), Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods. *Econometrica*. N° 36, p. 424-438.

**Hamilton, James** (1994), Time Series Analysis. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 799 p.

**Hendry, David F. y Grayham E. Mizon** (1999), The Pervasiveness of Granger Causality in Economics. EN: ENGLE, Robert. Cointegration, causality and forecasting: a festschrift in honour of Clive W. J. Granger. Oxford: Oxford University Press, 497 p.

**Johansen, Soren** (1998), Statistical Analysis of Cointegrated Vectors. *Journal of Economic Dynamics and Control*. Vol. 12, p 231-254.

**Johansen, Soren** (1991), Estimation and Hypothesis Testing of Cointegration Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Models. *Econometrica* 59, p. 1551-1580.

**Johansen, Soren** (1996), Likelihood Based Inference on Cointegration in the Vector Autoregressive Model. 2da ed. Oxford: Oxford University Press.

**Johansen, Soren and Katerina Juselius** (1990), Maximum Likelihood Estimation and Inference on Cointegration with Application to Demand for Money. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*. Vol. 52, p. 169-210.

**Kaiser, Gerald** (1994), A friendly guide to *wavelets*. Boston: Birkhäuser, 300 p.

**Kennedy, Peter** (2003), A guide to Econometrics. 5<sup>a</sup> ed. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 621 p.

**Lahura, Erick** (2003), La relación dinero-producto en el Perú, causalidad en el sentido de Granger y Cointegración: Una aplicación de la teoría de *Wavelets*. Lima: PUCP. Tesis de Licenciatura en Economía.



**Misiti, Michel** (2002) **y Otros**, *Wavelet Toolbox User's Guide*. Version 2. The Mathworks. (documento electrónico de <http://www.mathworks.com>).

**Ogden, R. Todd** (1997), *Essential Wavelets for Statistical Applications and data Analysis*. Boston: Birkhäuser, 206 p.

**Pollock, Stephen** (2003), *Adapting Discrete Wavelet Analysis to the Circumstances of Economics*. Queen Mary, University of London: Working Paper. Marzo, 25 p.

**Priestley, M.** (1996) , *Wavelets and time-dependent spectral analysis*. *Journal of Time Series Analysis*. Vol. 17, p. 85-103.

**Quah, Danny y Shaun Vahey** (setiembre-1995), *Measuring Core Inflation*. *The Economic Journal*. Vol. 105, No. 432.

**Ramsey, James B.** (1998), *The Contribution of Wavelets to the Analysis of Economic and Financial Data*. New York University: Unpublished paper, 14 p.

**Ramsey, James and Camille Lampart** (1998a), *The Decomposition of Economic Relationship by Timescale using Wavelets: Expenditure and Income*. *Studies in Non-Linear Dynamics and Econometrics*. Vol. 3, p. 23-42.

**Ramsey, James and Camille Lampart** (1998b), *Decomposition of Economic Relationship by Timescale using Wavelets: Money and Income*. *Macroeconomic Dynamics*. Vol. 2, p. 49-71.

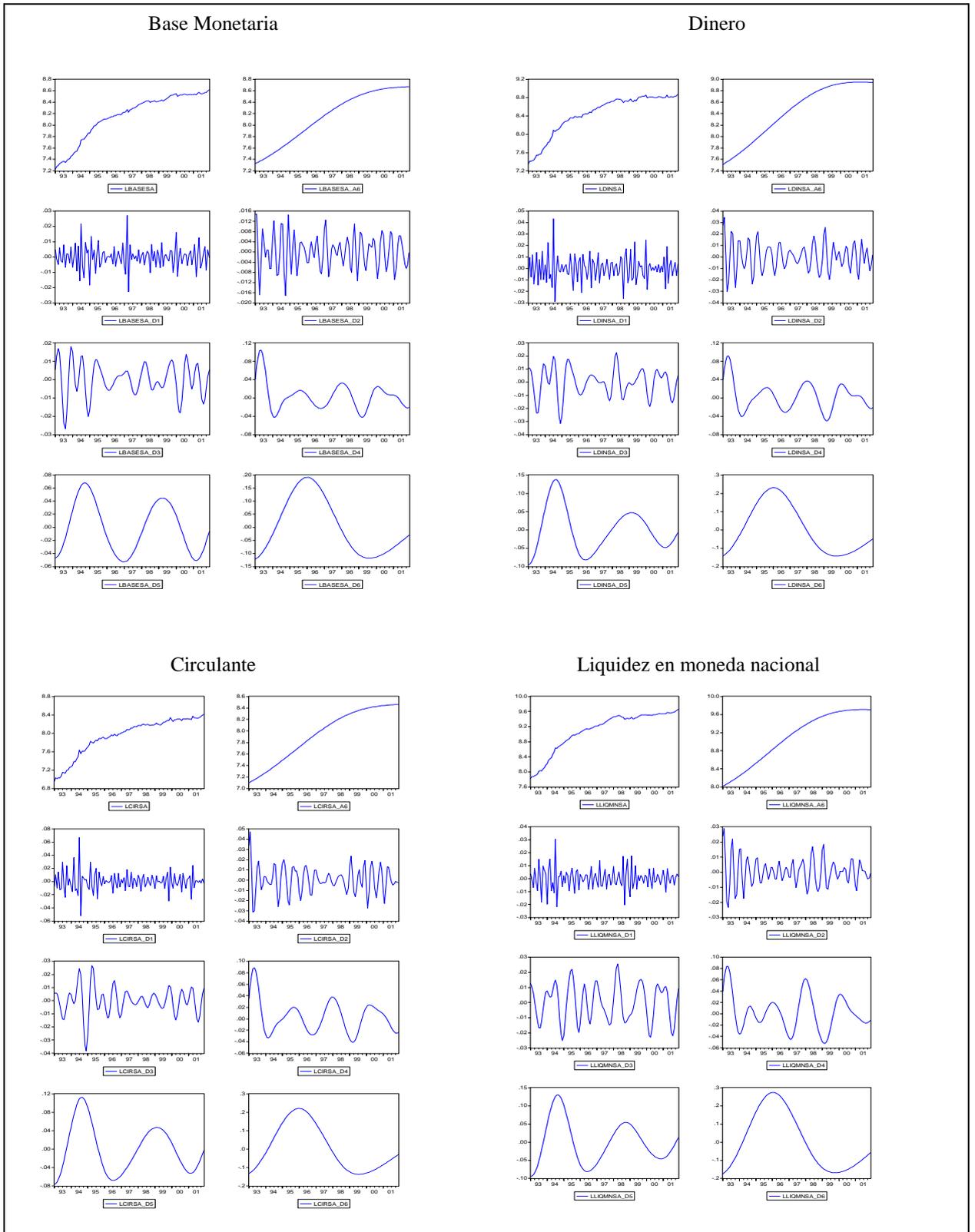
**Schleicher, Christoph** (1998), *An Introduction to Wavelets for Economists*. Bank of Canada: Working Paper 3, 32 p.

**Weaver, Joseph H** (1989), *Theory of Discrete and Continuous Fourier Analysis*. New York: Wiley, 307 p.

**Wiener, N.** (1956), *The theory of prediction*. En: Beckenbach, Edwin F. *Modern mathematics for engineer*. New York: McGraw-Hill, 514 p.

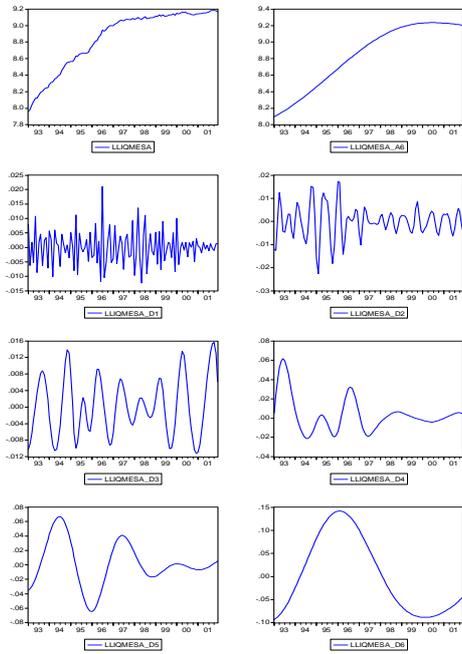


**ANEXO: Análisis multiresolución de las series.**

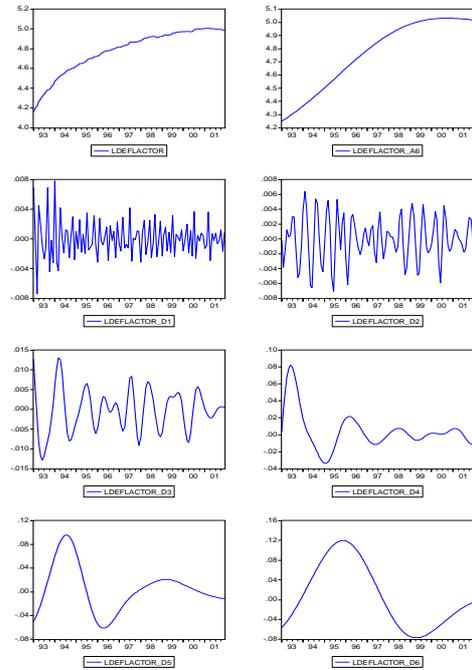




### Liquidez en moneda extranjera



### Deflactor del PBI



### PBI real

