



# El crecimiento económico colombiano: datos nuevos y modelos viejos para interpretar el período 1925-2000\*

Carlos Esteban Posada P.♦ y Andrea Rojas A.♥

## Resumen

En este documento presentamos y utilizamos una base de datos demográficos y macroeconómicos colombianos del período 1925-2000. Del examen de estos datos sobresalen algunos rasgos interesantes. Entre estos se destacan la transición demográfica, iniciada a mediados del siglo XX, y las desaceleraciones de las tasas de crecimiento del capital humano, de los productos por trabajador y por habitante y de la productividad multifactorial en el último cuarto del siglo. Además, bajo ciertos supuestos calculamos: a) la brecha entre la tasa de inversión en capital físico y la tasa teórica de ahorro de equilibrio (según el modelo de Solow), b) el nivel de equilibrio de la tasa de rendimiento real del capital físico de estado estacionario, c) el salario real integral de equilibrio del año 2000 y d) los acervos de los capitales humano y total.

## Abstract

*In this paper we present several statistics for 1925-2000 about macroeconomics and demographics in the Colombian case. According with the review of data, we can mention some interesting features. These include the demographic transition, which started in mid-twentieth century, and deceleration in growth rates of human capital, per worker and per capita output and total factor productivity in the last quarter century. Additionally, we estimate: a) the gap between the investment rate (in physical capital) and the theoretical equilibrium (Solow) saving rate, b) the steady state equilibrium real interest rate, c) the equilibrium real wage corresponding to the year 2000, and d) the human and total capital stocks.*

Palabras claves: población, tasas de natalidad y mortalidad, crecimiento económico, capital humano, productividad multifactorial, eficiencia laboral.

Clasificación JEL: J11, J24, O11, O16, O40, O47

---

\* Borrador para comentarios. Este documento es de la exclusiva responsabilidad de sus autores y, por tanto, no compromete al Banco de la República, a sus directivas ni a su Junta Directiva. Agradecemos los comentarios y sugerencias de Jorge Tamayo, Maria Teresa Ramírez y Remberto Rhenals a versiones anteriores.

♦ Investigador, Unidad de Investigaciones Económicas, Banco de la República.

♥ Estudiante de economía de la Universidad Javeriana (Bogotá) en pasantía en el Banco de la República.

## I. INTRODUCCIÓN

Es bien conocida la existencia de interrelaciones entre hechos y teorías. En el campo de la historia macroeconómica colombiana de largo plazo los intentos de validación de los modelos de crecimiento económico han conducido a estimaciones de múltiples variables; a su turno, el avance en la producción de estadísticas ha sido de alta importancia en el origen y en el mantenimiento del interés por someter a prueba las teorías del desenvolvimiento de la economía.

El presente documento revisa y actualiza varias series requeridas para estudiar el crecimiento económico colombiano del siglo XX (específicamente, el período 1925-2000). Adicionalmente presenta una nueva estimación de un índice de capital humano, variable importante de algunos modelos de crecimiento económico. La base de datos que construimos fue utilizada para interpretar el crecimiento económico del país en dicho período. Las investigaciones de varios analistas, como consta en la lista de referencias, fueron los elementos básicos del presente trabajo. Nosotros esperamos que éste contribuya a estudios adicionales que mejoren nuestro conocimiento de la dinámica de largo plazo de la economía colombiana.

Este documento consta de ocho secciones incluyendo esta introducción. En la sección II se presenta la serie de producción real (PIB) a precios de 1994 y las series de población total, natalidad, mortalidad y población económicamente activa. En la sección III se presenta una estimación de un índice de capital humano. En vista del acervo de datos mencionado en las secciones II y III, en esta sección también ofrecemos una interpretación hipotética del “despegue económico” colombiano del siglo XX y de su transición demográfica a la luz del modelo de Lucas (2002) de crecimiento económico y capital humano. En la sección IV se propone una nueva estimación del capital físico total, también a precios de 1994, y sus dos grandes componentes: capital fijo e inventarios. Los datos presentados en esta sección dan pie a una comparación entre la tasa de inversión (inversión en capital físico) y una tasa teórica de ahorro; de esta comparación surge una hipótesis de sub-inversión en la mayoría de los años corridos entre 1925 y principios de los años noventa. En esta misma sección estimamos, con base en ciertos supuestos, los niveles de dos variables: la tasa de rendimiento real del capital físico de estado estacionario y el salario real del año 2000. En la sección V se estima un índice de capital total elaborado con base en los capitales humano y físico. En la sección VI se realiza un cotejo superficial de las predicciones de cuatro principales modelos teóricos de crecimiento económico con la evidencia empírica colombiana a fin

de explorar la posibilidad de descartar uno o varios de estos modelos por su eventual impertinencia. En la sección VII se presentan nuestros cálculos de la productividad multifactorial y de la eficiencia laboral a partir de ejercicios de “contabilidad del crecimiento” teniendo en cuenta tanto el capital físico como el capital humano en vista de que nos pareció que no debía rechazarse un modelo de crecimiento que tiene en cuenta ambos capitales. La sección VIII resume y concluye. El Anexo 1 contiene la base de datos. El Anexo 2 presenta dos de los modelos teóricos utilizados, uno de ellos en la sección III y otro en la sección VI.

## II. PRODUCCIÓN Y POBLACIÓN

### 1. PIB real

Como serie del producto interno bruto (PIB) real a precios de 1994 se adoptó la calculada por GRECO (2002) desde 1925 hasta 1997. Desde 1997 hasta 2000 se utilizaron las cifras oficiales de cuentas nacionales (DANE).

Gráfico 1. PIB real

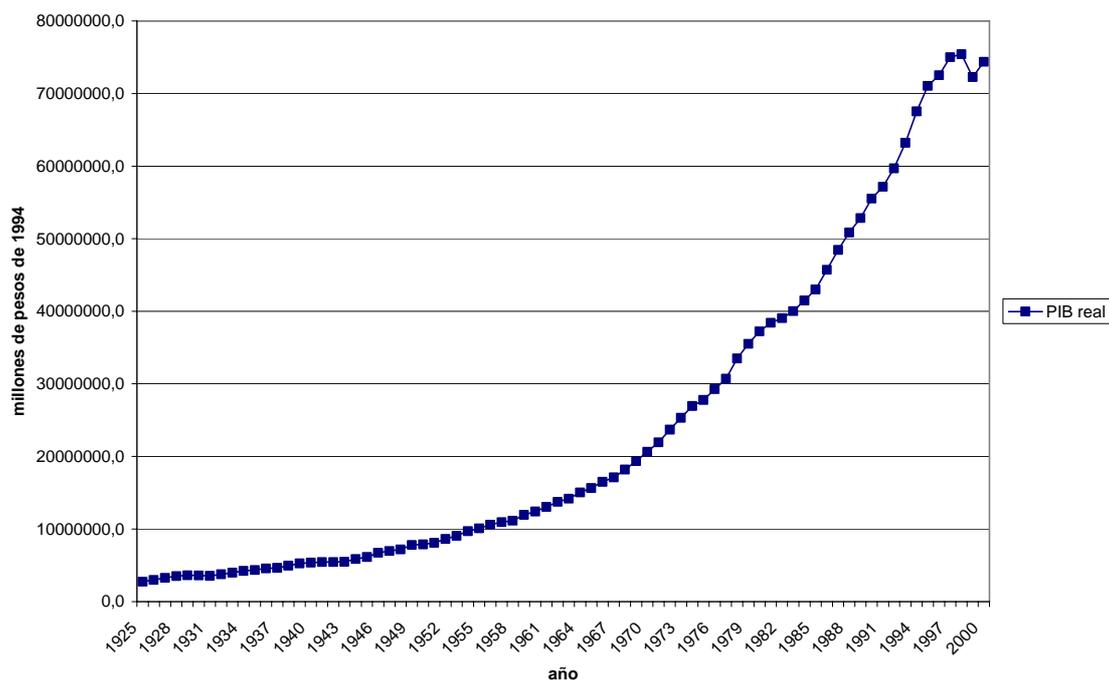
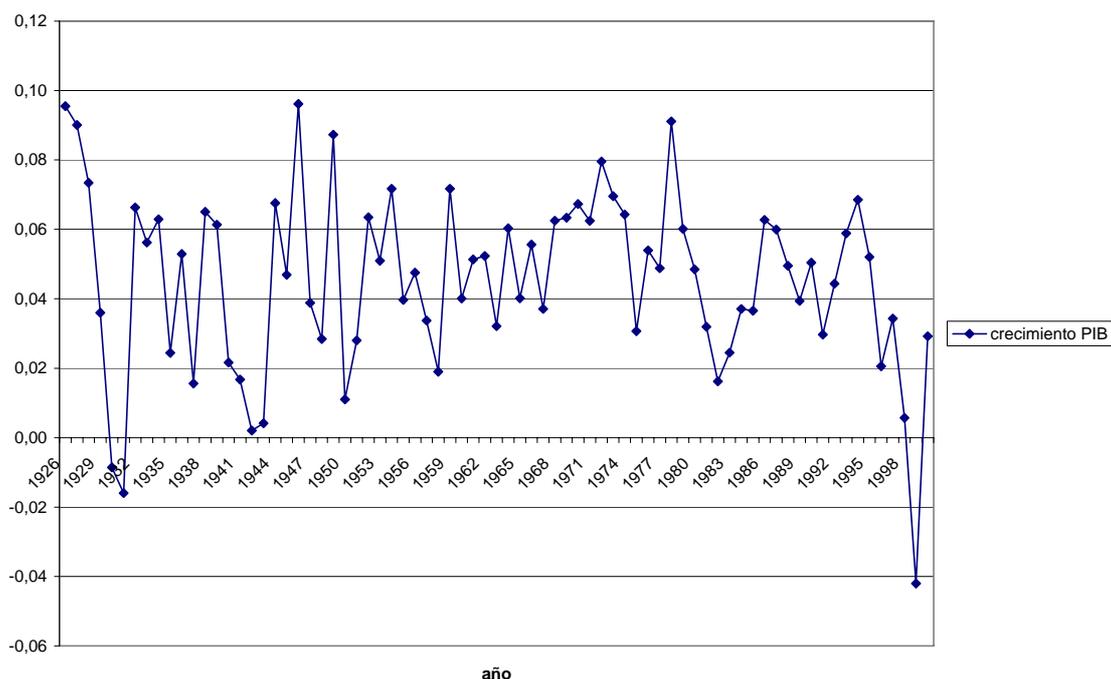


Gráfico 2. Crecimiento PIB



## 2. Población total y población económicamente activa

En cuanto a población total se analizaron los datos del DANE provenientes del último censo (2005) y la serie calculada por Flórez (2000), tal como se presentó esta serie en GRECO (2002). Decidimos tomar los datos del DANE de los últimos cuatro censos (1973, 1985, 1994, 2005)<sup>1</sup> y a partir de estos datos calcular las tasas inter-censales de crecimiento. Por ejemplo:

$$Pob.Total_{1993}(1+G)^T = Pob.Total_{2005}$$

Por tanto:

$$G = \left( \frac{Pob.Total_{2005}}{Pob.Total_{1993}} \right)^{\frac{1}{T}} - 1$$

Para calcular la población total con dichas tasas de crecimiento se sigue la fórmula:

$$Pob.Total_{1992} = \frac{Pob.Total_{1993}}{G_{1993_{inter-censal}} + 1}$$

Para los años restantes (1925-1972) se aplicó el método anterior pero se tomaron las tasas de crecimiento de la serie del GRECO<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> <http://www.dane.gov.co/censo/files/presultados.pdf>

<sup>2</sup> Las líneas de tendencia en los gráficos son apenas sugestivas.

Gráfico 3. Población total

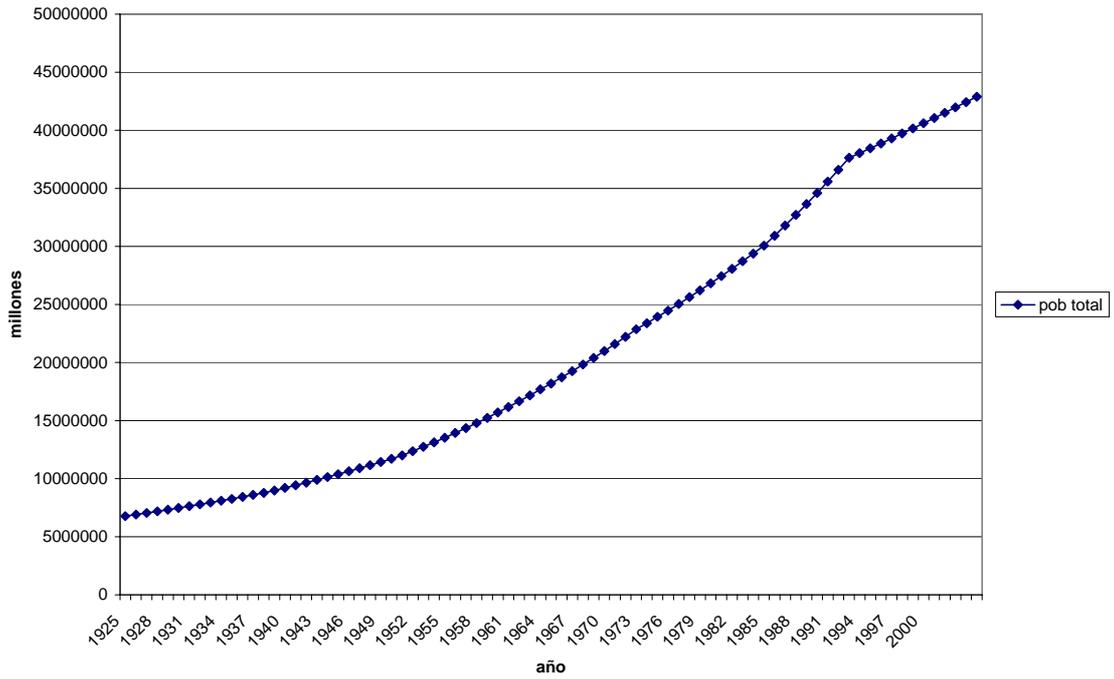
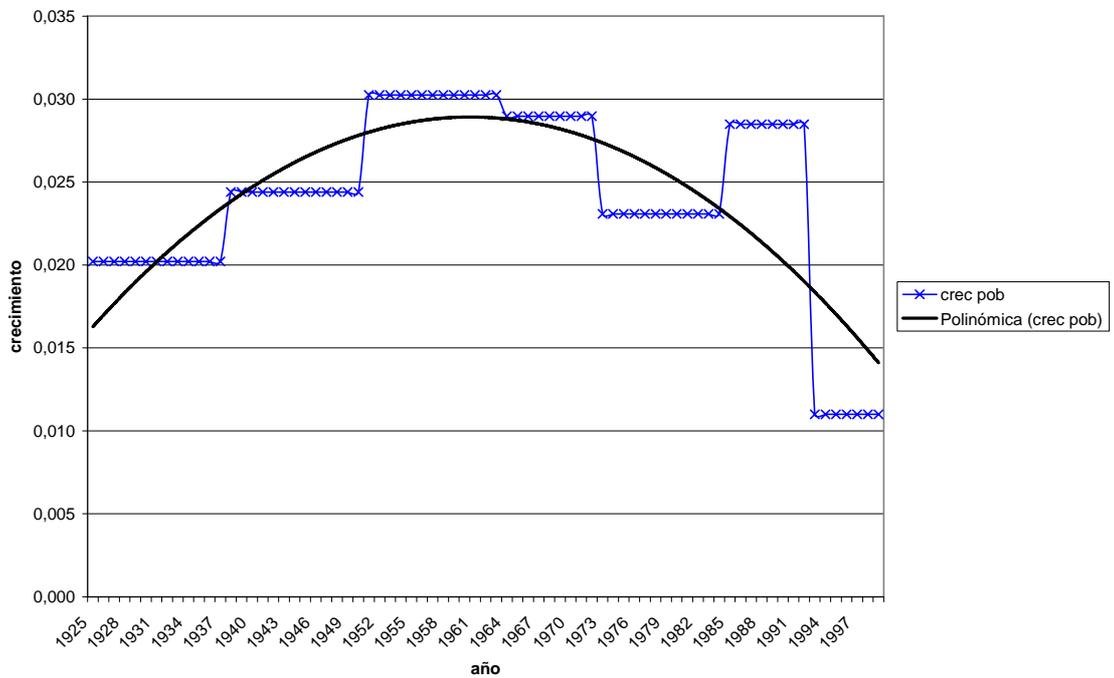


Gráfico 4. Crecimiento de la población



### Población económicamente activa

Para calcular la población económicamente activa se utilizó la relación  $\frac{PEA}{POBT}$  de 1925 hasta 1996 estimada por GRECO (2002), así:

$PEA = \frac{PEA}{POBT} * POBT$ . Los datos restantes (1996-2000) se tomaron de la encuesta nacional de hogares.

Gráfico 5. Población Económicamente Activa

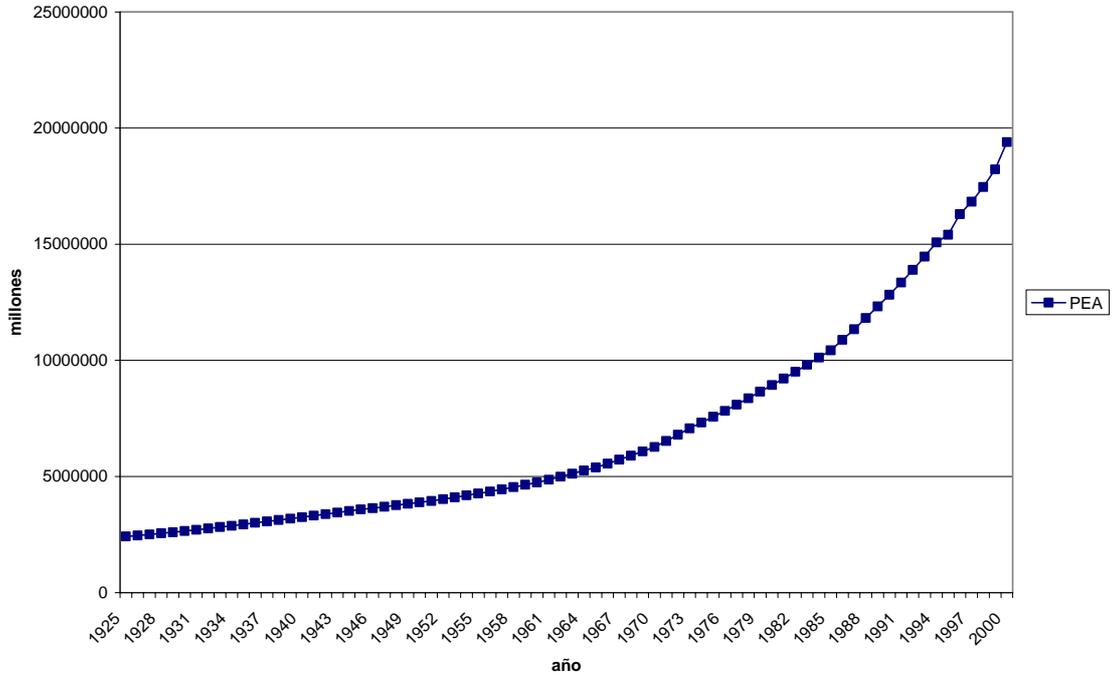


Gráfico 6. Crecimiento PEA

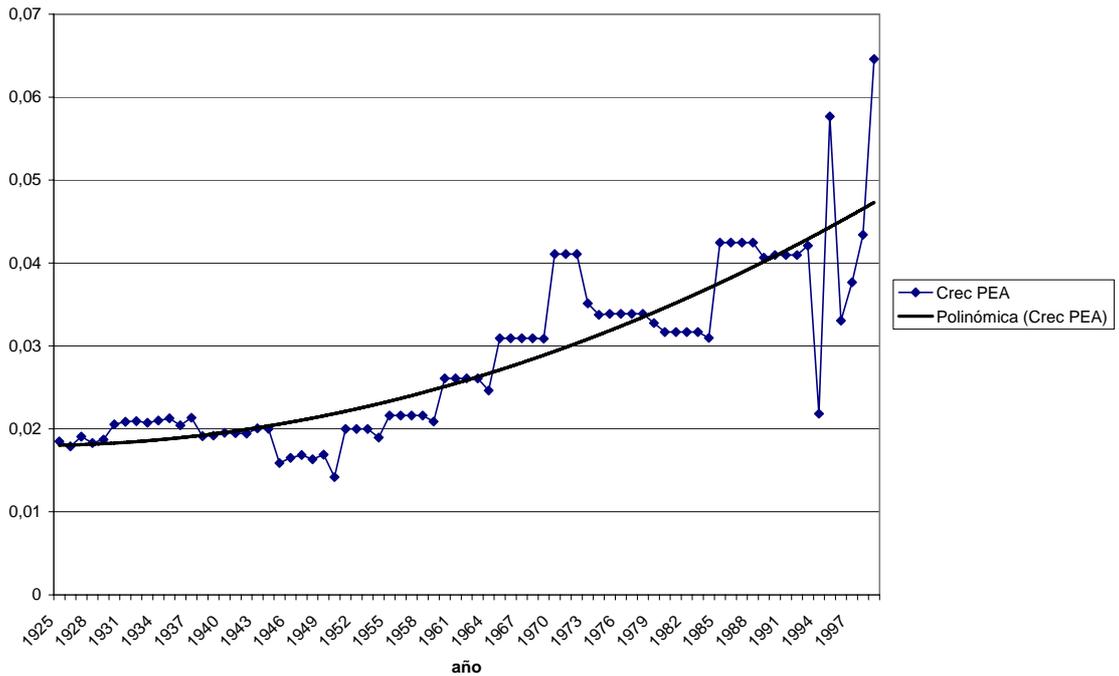


Gráfico 7. Relación PEA/POBT

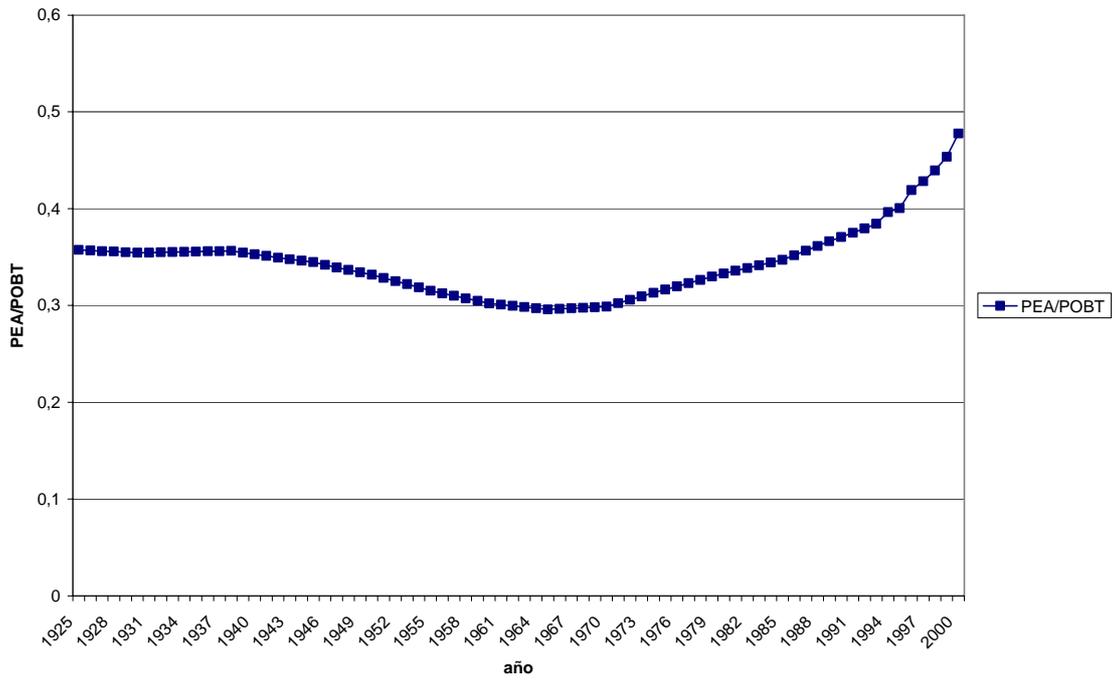
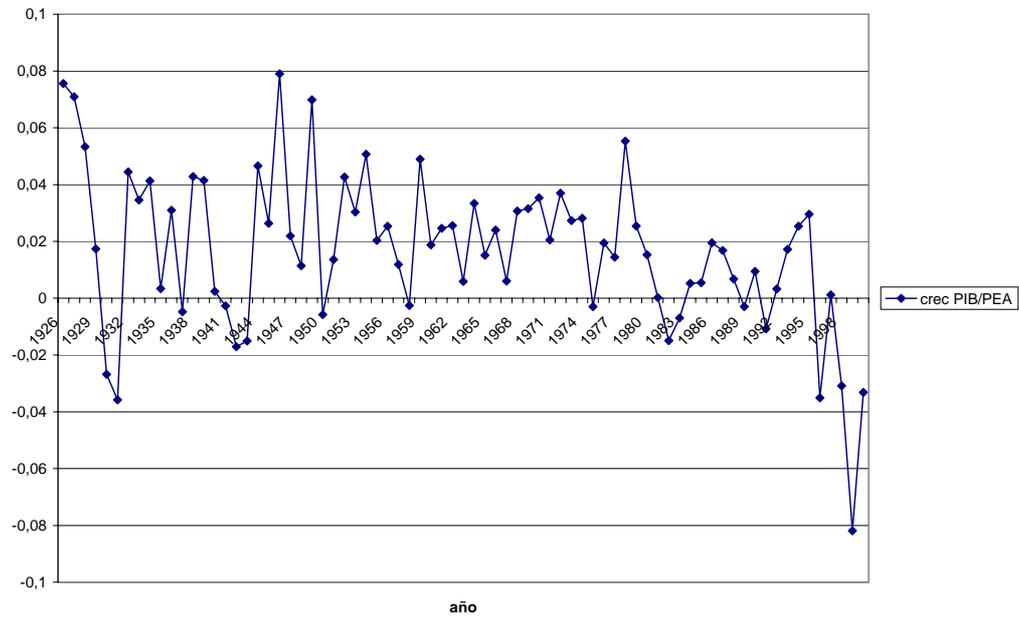


Gráfico 8. Crecimiento PIB/PEA



<b>Tabla 1. El crecimiento económico colombiano 1925-2000</b>		
A. Aumento del PIB <i>per cápita</i> .		
Período	Tasa de crecimiento anual (%) (media aritmética )	Varianza (%)
<b>1925-2000</b>	2,07	0,06
1925-1950	2,12	0,11
1951-1975	2,22	0,02
1976-2000	1,87	0,05

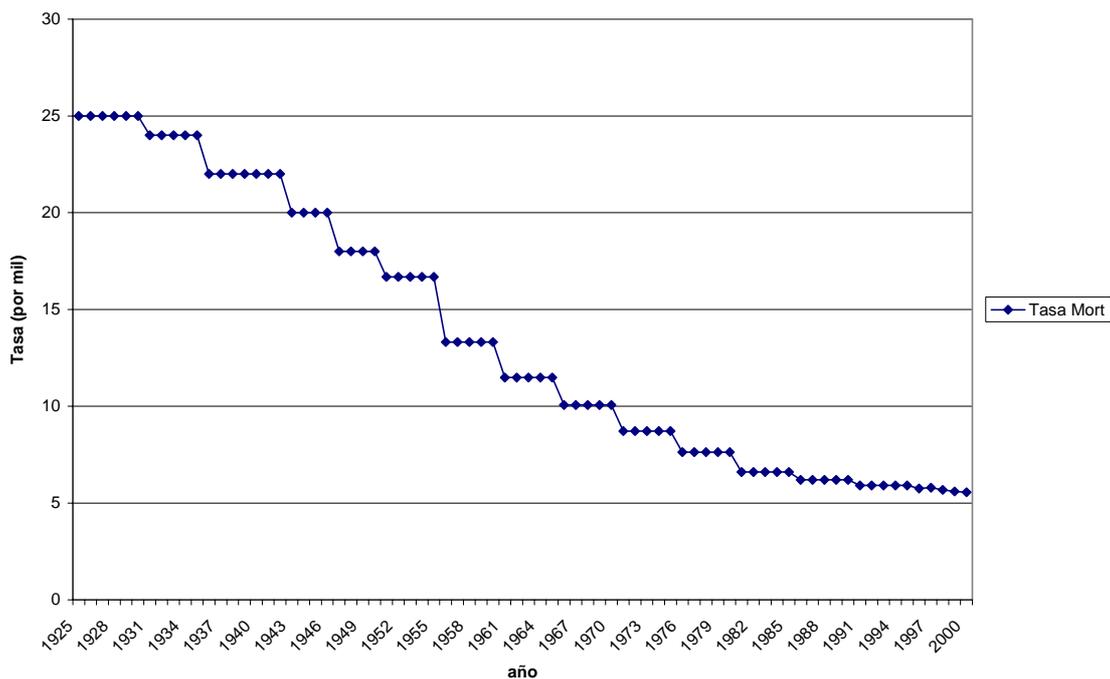
B. Aumento de la relación PIB/PEA		
Período	Tasa de crecimiento anual (%) (media aritmética )	Varianza (%)
<b>1925-2000</b>	1,68	0,076
1925-1950	2,42	0,11
1951-1975	2,41	0,02
1976-2000	0,21	0,07

### 3. Tasa de mortalidad

#### 3.1. Mortalidad de adultos

La serie de la tasa de mortalidad fue tomada del Departamento Nacional de Planeación (DNP) desde 1950 hasta 2000. Las cifras para los años 1925 - 1949 provienen de Flórez (2000); de manera específica, se tuvieron en cuenta las tasas de mortalidad de hombres y mujeres mayores de 15 años y luego se calculó el promedio de dichas tasas.

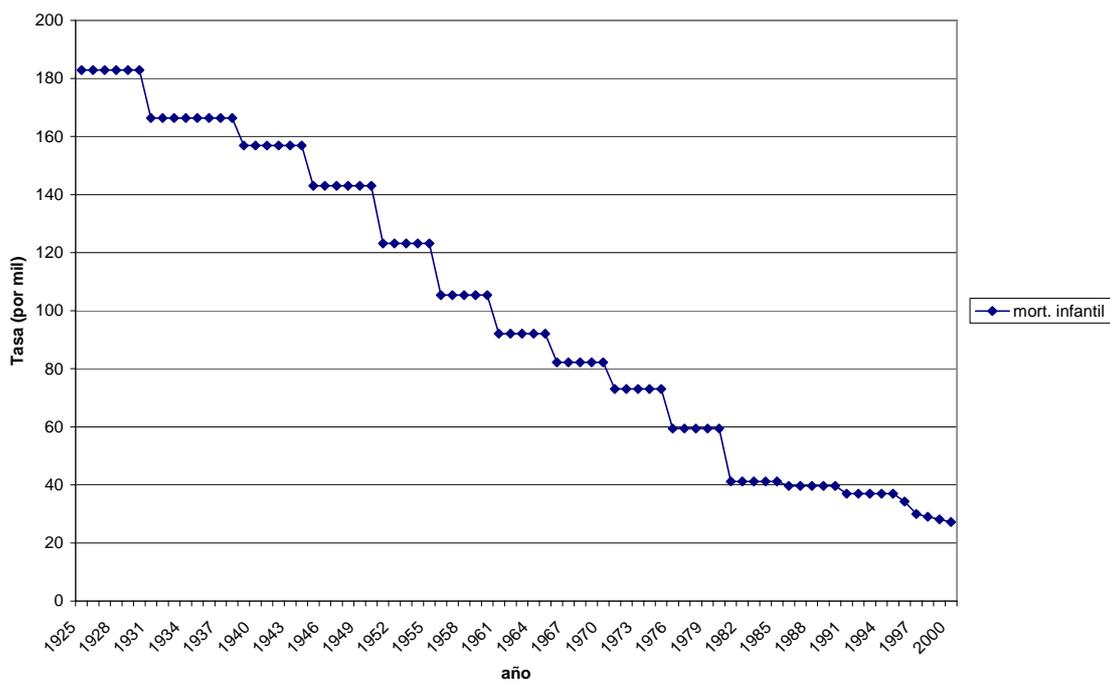
Gráfico 9. Tasa de mortalidad adultos



### 3.2. Mortalidad infantil

Los datos de mortalidad infantil se tomaron del DNP desde 1951 hasta 2000; los datos restantes (1925 – 1950) se tomaron de Flórez (2000); nosotros calculamos un promedio de la mortalidad de niños y niñas.

Gráfico 10. Tasa de mortalidad infantil



#### 4. Tasa de natalidad

Los datos de natalidad (por mil habitantes) para el período 1925 – 1993 se tomaron de Flórez (2000); de ahí en adelante provinieron de la CEPAL.

Gráfico 11. Tasa de natalidad

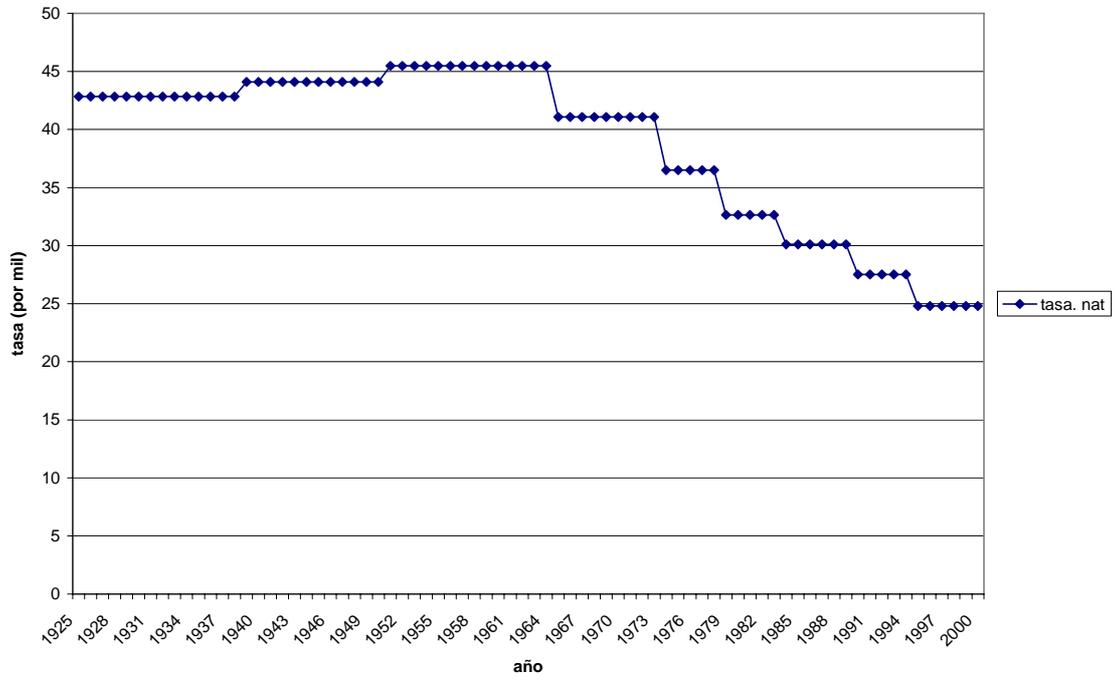


Gráfico 12. PIB/PEA- crecimiento PEA

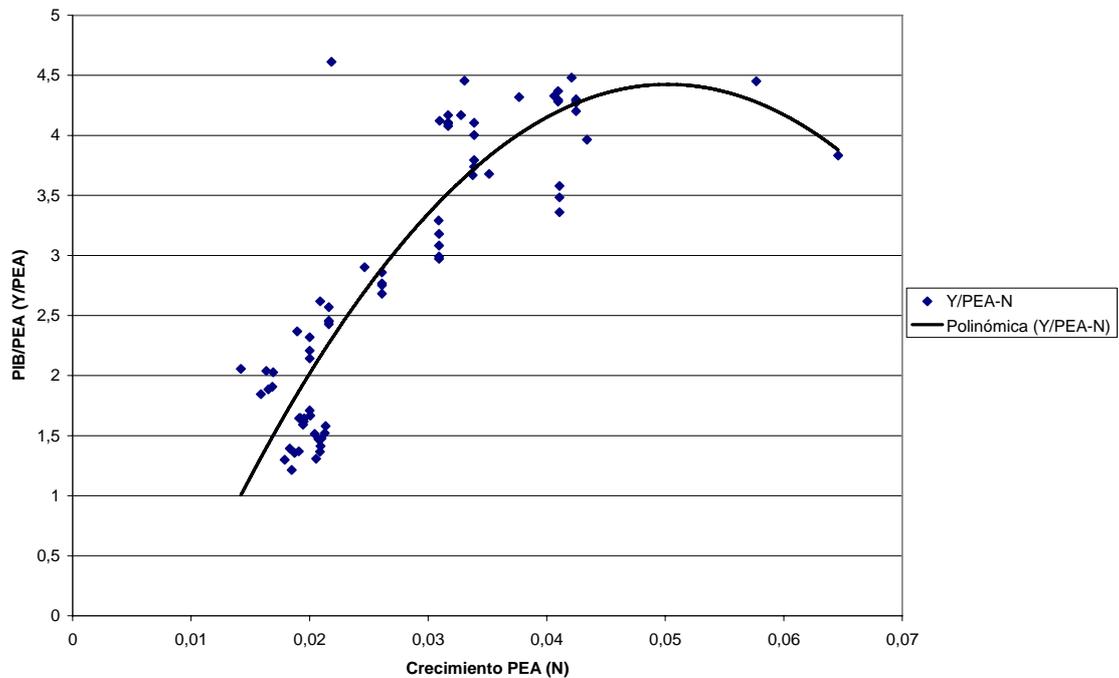


Gráfico 13. PIB per capita-PIB/PEA

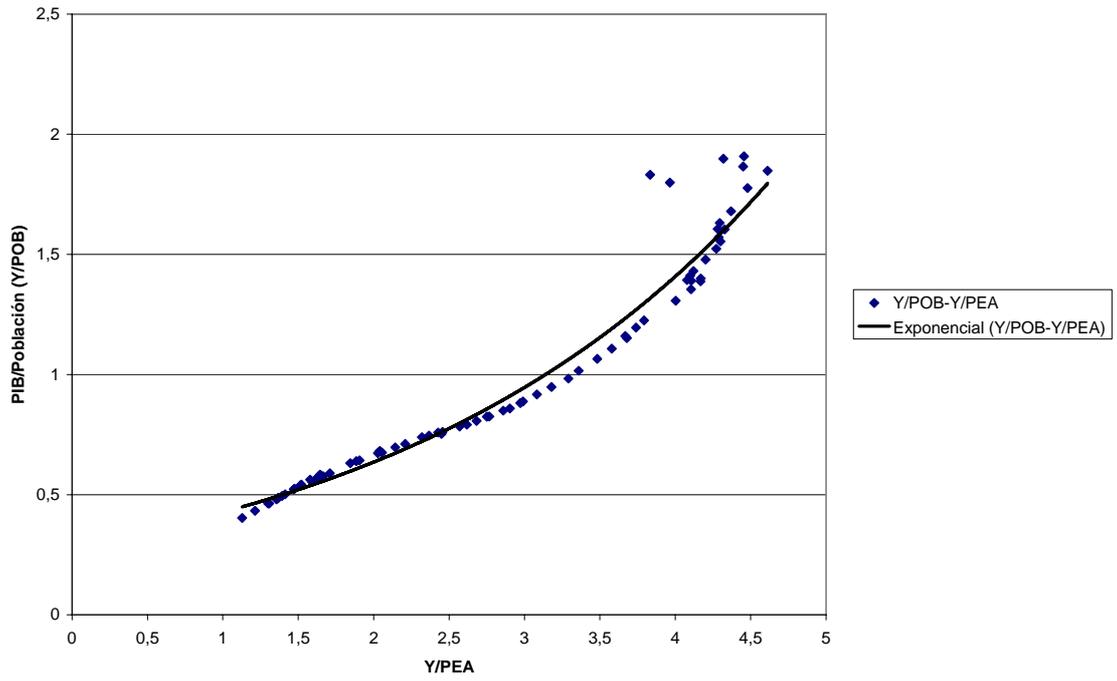


Gráfico 14. Tasa de mortalidad - PIB/PEA

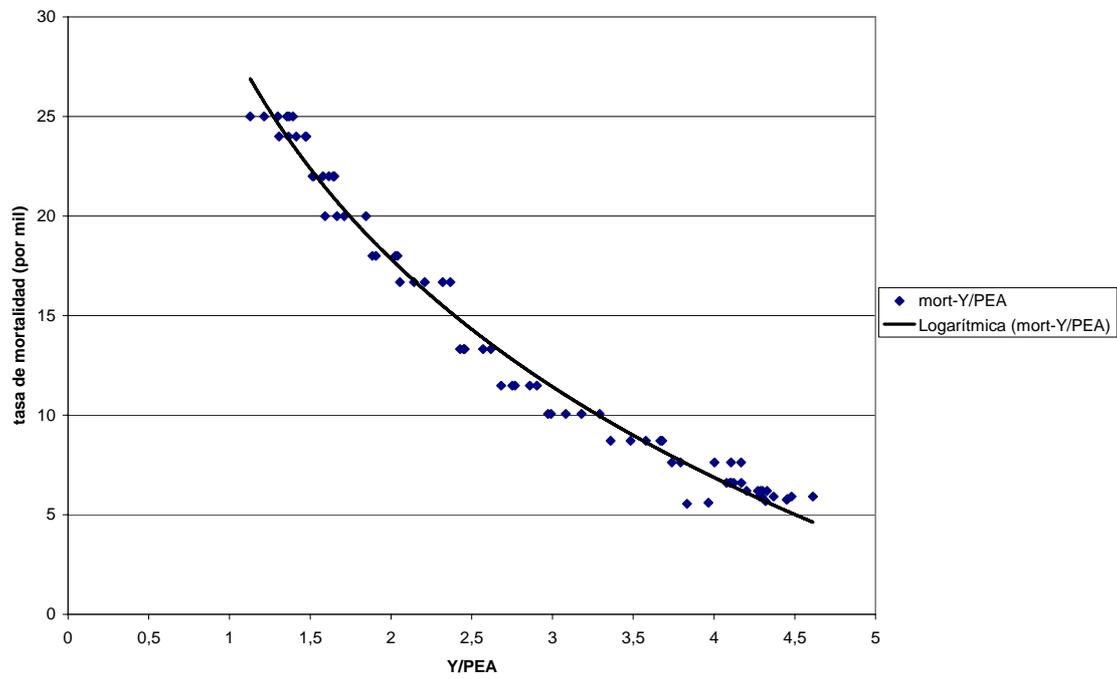


Gráfico 15. Tasa de natalidad - PIB/PEA

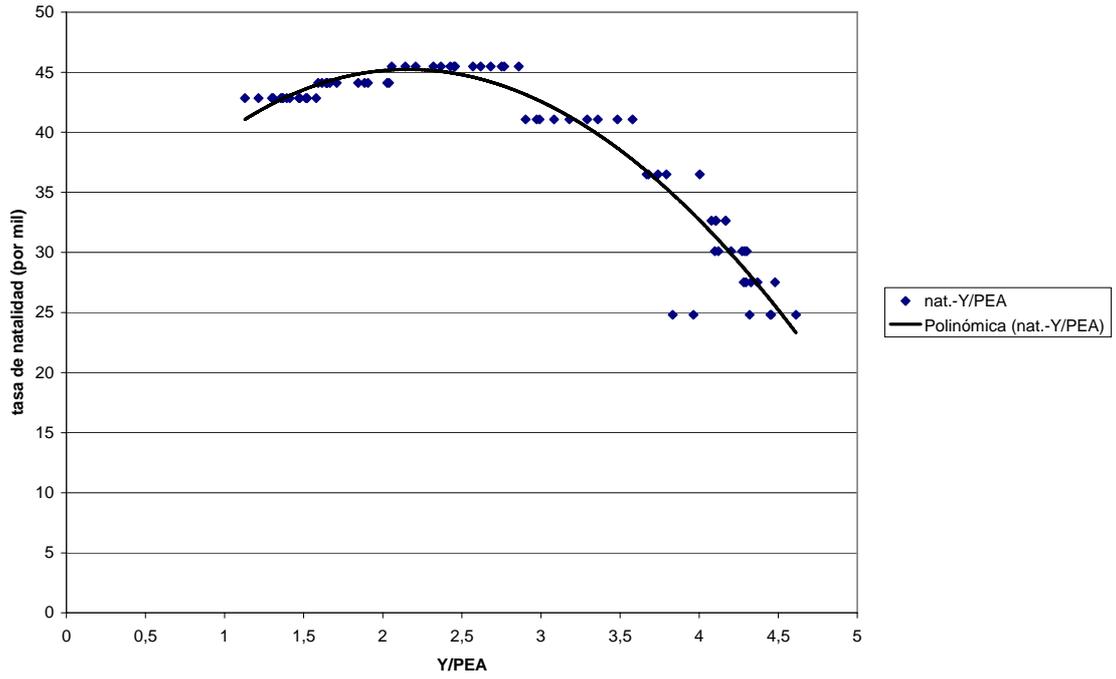


Gráfico 16. Tasa de natalidad-tasa de mortalidad (por mil habitantes)

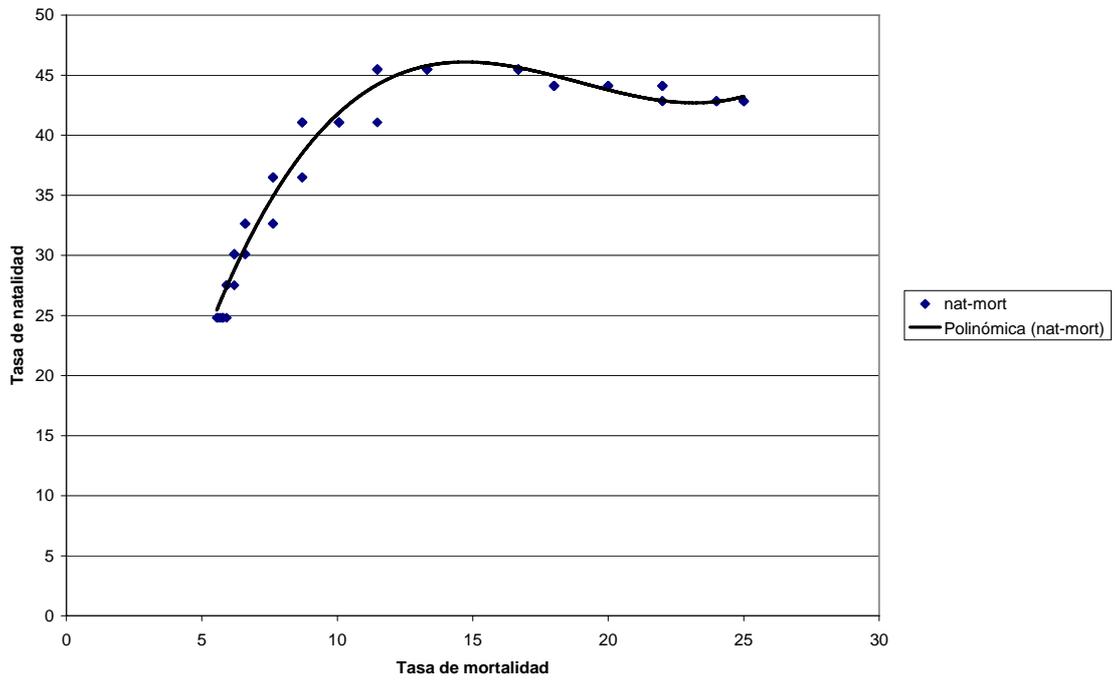
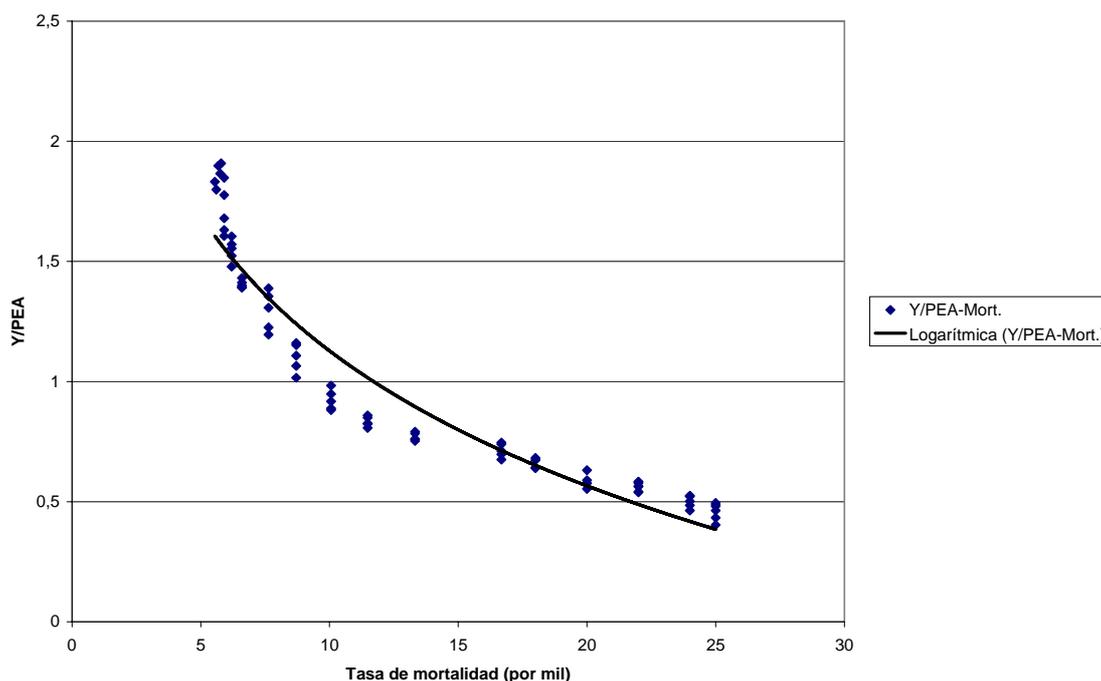


Gráfico 17. PIB/PEA - Tasa de mortalidad



Los gráficos anteriores ofrecen evidencia de tres fenómenos: 1) el ritmo de crecimiento económico colombiano a lo largo del siglo XX fue importante (tasas de crecimiento del PIB *per cápita* alrededor de 2% anual), 2) la transición demográfica empezó y culminó entre principios y finales del siglo XX y 3) la tasa bruta de participación laboral (PEA/población) ha tendido a crecer *pari passu* con el desarrollo de la economía<sup>3</sup>.

### III. CAPITAL HUMANO

#### 1. Datos

Vargas (2002) hizo estimaciones refinadas y acertadas del capital humano en Colombia desde 1950 hasta 2000 en valores monetarios a precios de 1975<sup>4</sup>. Nosotros nos

<sup>3</sup> Véase un examen de la transición demográfica en Flórez (2000), y uno general del crecimiento económico colombiano en el siglo XX en Urrutia y Posada (2007).

<sup>4</sup> Vargas (2002) inicia su estimación mediante la construcción de una serie de educación que no solo tiene en cuenta la información de personas inscritas en cada nivel escolar sino también la tasa de aprobación y la tasa de deserción de cada nivel para obtener el número de personas que alcanzan a aprobar cada nivel. Una vez obtenida esta serie, se calcula el salario esperado por nivel educativo ya que se supone que el salario por el número de personas con aprobación en el año es la inversión que se hace en capital humano. Una vez obtenida la inversión en capital humano se calcula el capital humano en cada nivel de la siguiente forma:  $H_{k,t} = H_{k,t-1}(1 - M_t) + I_{k,t}$ , siendo  $H_{k,t}$  el capital humano en el nivel  $k$  en el período  $t$ ,  $M_t$  la tasa de mortalidad de adultos en el período  $t$ ,  $I_{k,t}$  la inversión de capital humano en el nivel  $k$  en el período  $t$ . Como éste es el capital humano por niveles es necesario calcular el capital

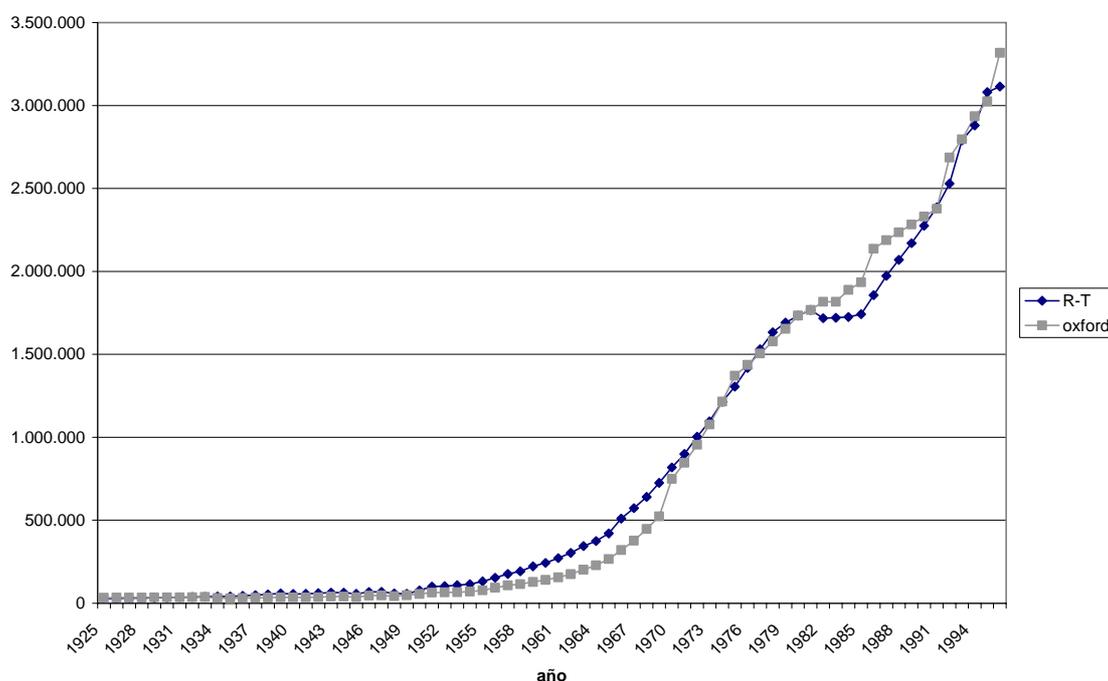
propusimos elaborar una serie más larga, que cubriera el período 1925-2000. Además, para nuestros propósitos era aceptable y suficiente la construcción de un índice de capital humano. Con todo, tuvimos en cuenta (parcialmente) el comportamiento de la tasa de crecimiento de la serie de capital humano calculada por Vargas. El cálculo del índice de capital humano parte de la siguiente ley:

$$(1) \quad Kh_t = Kh_{t-1}(1 - M_t) + I_t$$

Siendo  $Kh_t$  el capital humano en el período  $t$ ,  $M_t$  la tasa de mortalidad de adultos en el período  $t$  (nuestra aproximación a la tasa de depreciación del capital humano) e  $I_t$  la inversión en capital humano en el período  $t$

Para el cálculo de la inversión en capital humano utilizamos la relación entre alumnos matriculados en secundaria y la población total. Los datos de alumnos matriculados en secundaria fueron tomados de Ramírez y Téllez (2007) y comparados con los de “Oxford Latin American Economic History Database” (véase el gráfico 18)

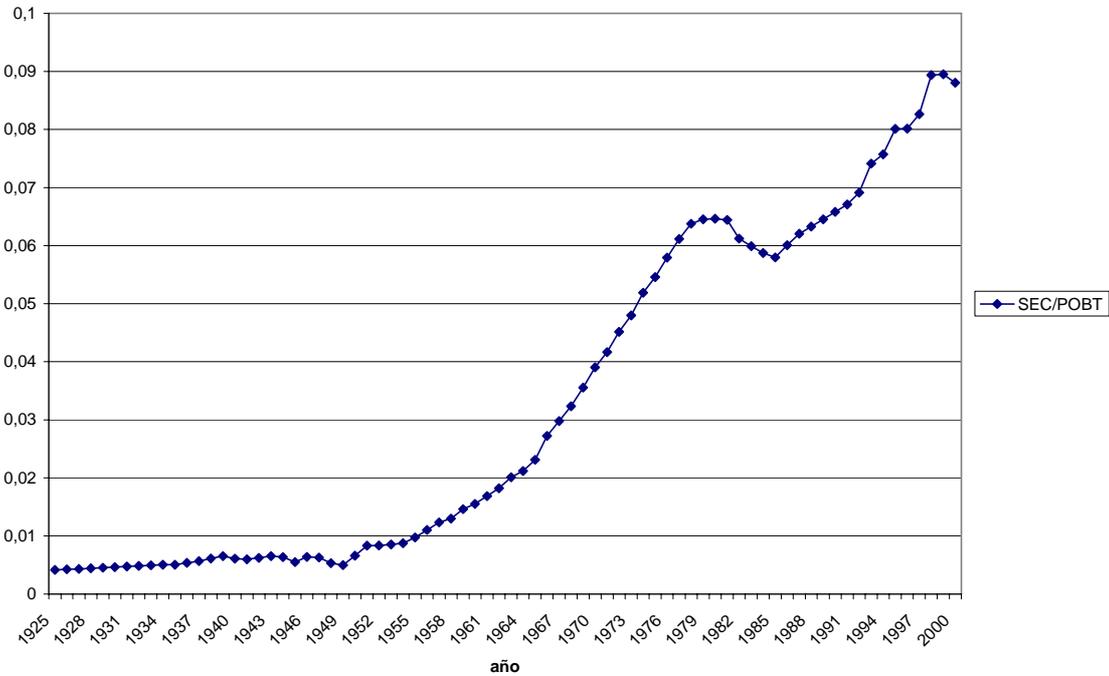
Gráfico 18. Alumnos en secundaria



humano total; para esto se suma el valor del capital humano de cada uno de los niveles durante el mismo año.

Realizada la comparación decidimos adoptar la serie de Ramírez y Téllez. La inversión en capital humano queda representada así:

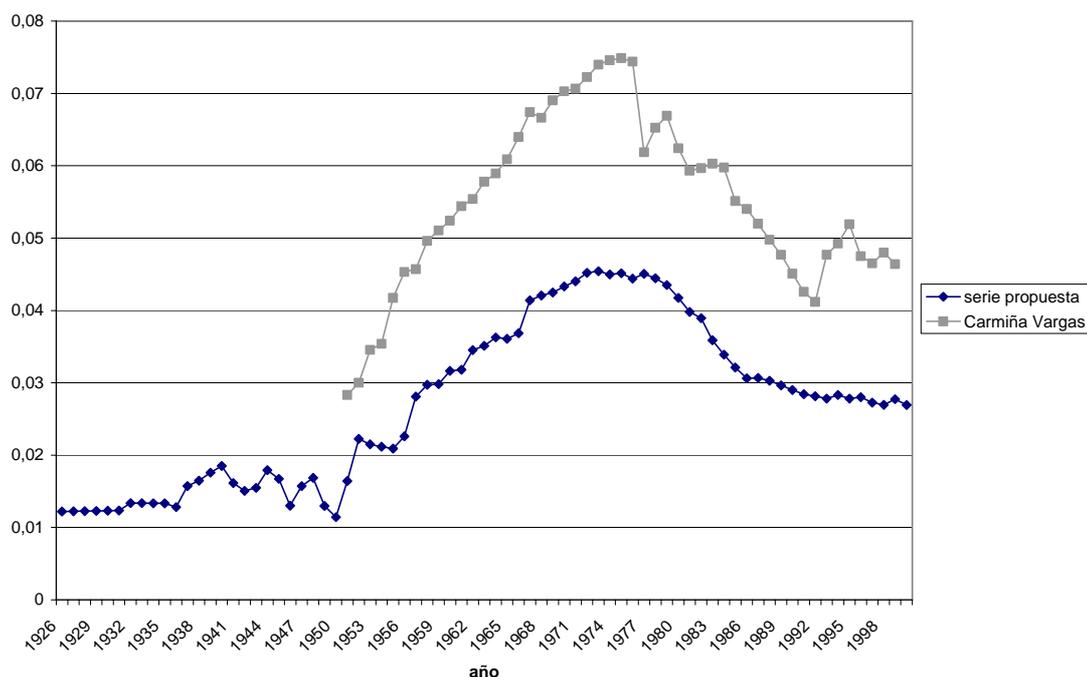
**Gráfico 19. Relación alumnos en secundaria/población total**



Cuando calculamos el capital humano con base en lo anterior y en la ecuación (1), la tasa de crecimiento de los primeros años alcanza un nivel negativo; por ello modificamos la serie de inversión para evitar esta anomalía. Dicha modificación se hizo elevando el valor de nuestra medida previa de inversión de capital humano a la potencia 0,6; éste es un valor arbitrario pero produjo, a nuestro juicio, resultados razonables<sup>5</sup>. La nueva serie de la tasa de crecimiento del capital humano queda así (Gráfico 20):

<sup>5</sup> Esta fue una forma práctica de tratar de solucionar tal problema. Klenow y Rodríguez-Clare (1997, trabajo citado por Helpman, 2004) consideraron que una fuente de exageración de la medida de capital humano basada en la matrícula en educación secundaria podría atenuarse teniendo en cuenta las matrículas en educación primaria y terciaria. Pero en el caso colombiano, como se verá más adelante, tener en cuenta la matrícula en primaria tampoco soluciona el problema; más bien lo agrava.

Gráfico 20. Tasa de crecimiento del capital humano



Como se puede ver en el gráfico 20, la serie de la tasa de crecimiento de nuestro índice de capital humano tiene un comportamiento similar a la de Vargas pero esta última exhibe algunos detalles inadecuados, a saber, tres caídas demasiado intensas durante el período 1977 - 1986 a causa de la disminución en la tasa de escolaridad bruta en primaria.<sup>6</sup> Con todo, cuando se compara el índice que proponemos con la serie de capital humano de Vargas se observa que, en general, tienen el mismo comportamiento.

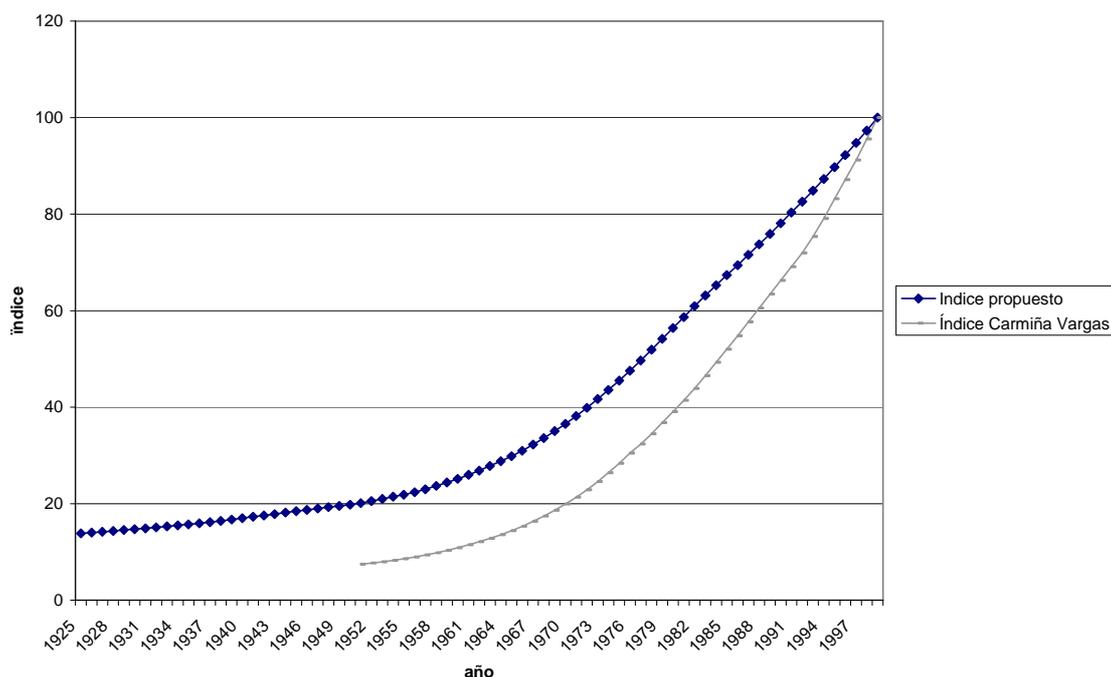
Para hacer una comparación más rigurosa entre las dos mediciones del capital humano se hicieron dos índices a partir de las tasas de crecimiento del capital humano de cada una de las series. Estos índices toman el valor 1 en 1999. Para encontrar los valores de los años anteriores se sigue un método usual:

$$Ikh_{t-1} = \frac{Ikh_t}{1 + G_t}$$

El resultado de los dos índices es el siguiente:

<sup>6</sup> Ramírez y Téllez (2007).

Gráfico 21. Comparación índices de capital humano



## 2. Interpretaciones

¿Cómo explicar los hechos reportados en las secciones II y III.1? Recordémoslos: transición demográfica (las curvas en forma de “u” invertida de las tasas de crecimiento de la población y natalidad y la caída continua de la tasa de mortalidad), aumento de la proporción de la población económicamente activa en la población total, crecimiento del producto *per cápita* en el largo plazo y una acumulación de capital humano que se aceleró a partir de los años cuarenta y hasta la primera mitad de los años setenta del pasado siglo, perdiendo parte de su velocidad posteriormente.

El modelo de fertilidad y acumulación de capital humano de Lucas (2002)<sup>7</sup> es una explicación bastante simplificada (esto es, omite varios aspectos que contribuirían a responder aquella pregunta) pero, a nuestro juicio, da cuenta de algunos componentes esenciales del proceso de “despegue” de una economía y de su transición demográfica en los siguientes términos hipotéticos: al principio (primera mitad del siglo XX) se presentó un cambio técnico que redujo el costo de criar niños, y mantenerlos vivos y en condiciones adecuadas de salud; por tanto aumentó la tasa de crecimiento de la población. Simultáneamente o en una fase posterior (desde mediados de los años cuarenta o cincuenta) el cambio técnico adquirió otra característica: hizo más productivas las labores sociales dedicadas a la enseñanza y otras formas de acrecentar el

<sup>7</sup> Véase el anexo 2.

capital humano; así que se debieron observar estos hechos: a) incremento de la fracción de la jornada anual de trabajo de la sociedad dedicada a la acumulación de capital humano e inicio del proceso de aumentos de la proporción de la población que está matriculada en el sistema educativo, b) reducción de la tasa de aumento de la población a partir del momento en el cual las familias consideran más ventajoso aumentar la relación entre calidad (asociada a educación y salud) y cantidad de hijos, y c) aumento de la tasa de crecimiento económico de largo plazo (mediados de los años treinta a finales de los setenta) gracias a la aceleración del acervo de capital humano. Lo que no podría explicarse con este modelo, al menos no de manera inmediata, es la desaceleración del aumento del capital humano desde fines de los años setenta justo cuando el crecimiento poblacional ya había empezado a reducirse<sup>8</sup>. Con todo, la desaceleración del aumento del capital humano, según el modelo de Lucas, sería el motor principal de la acaecida también al crecimiento económico colombiano entre 1980 y 2000<sup>9</sup>. En la sección V se mostrará evidencia a favor de una hipótesis relacionada con la anterior aunque menos extrema, a saber: que las variaciones del ritmo de aumento del capital humano han contribuido a explicar parcialmente la evolución de la tasa de crecimiento del PIB por trabajador<sup>10</sup>.

---

<sup>8</sup> Existen teorías y modelos alternativos al de Lucas para explicar la transición demográfica y el impulso inicial al crecimiento económico urbano que hacen énfasis en aumentos iniciales en la productividad agrícola. En Desmet y Parente (2007) se encuentra una explicación asociada al caso inglés y referencias a esta literatura. Otros modelos de transición demográfica y crecimiento económico recurren no solo al proceso de formación de capital humano sino también a la acumulación de capital físico y al cambio técnico en la producción de bienes físicos. Véanse al respecto los capítulos 2, 3 y 4 de Helpman (2004), y Galor y Weil (2000).

<sup>9</sup> ¿Por qué se desaceleró la acumulación de capital humano desde fines de los años 70 o principios de los ochenta? Dada la forma de construir nuestra variable de capital humano la respuesta de primera instancia es la siguiente: se desaceleró el aumento de la matrícula en secundaria con respecto a la población total y la tasa de mortalidad de adultos dejó de caer tan rápido como antes. Pero esto deja abierta la pregunta sobre los factores determinantes de la matrícula en secundaria.

<sup>10</sup> Con un modelo menos abstracto que el de Lucas, uno que tiene en cuenta varios factores que pueden afectar el crecimiento económico y la oferta y la demanda de capital humano, Londoño (1995) interpretó las interrelaciones entre el crecimiento económico (y sus modalidades intensivas bien sea en capital humano o en trabajo no calificado), las ofertas y demandas de capital humano y los salarios relativos de trabajadores calificados y no calificados en el caso colombiano del período 1938-1988.

Gráfico 22. Crecimiento del PIB/PEA-Crecimiento del capital humano/PEA

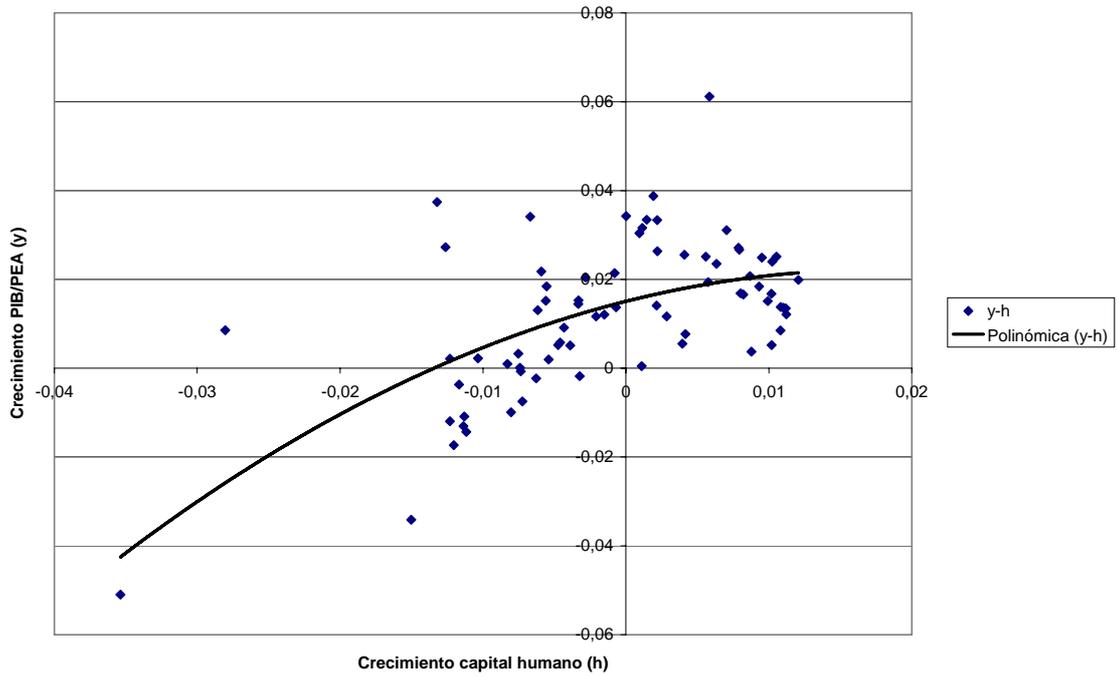


Gráfico 23. Capital humano/PEA-crecimiento PEA

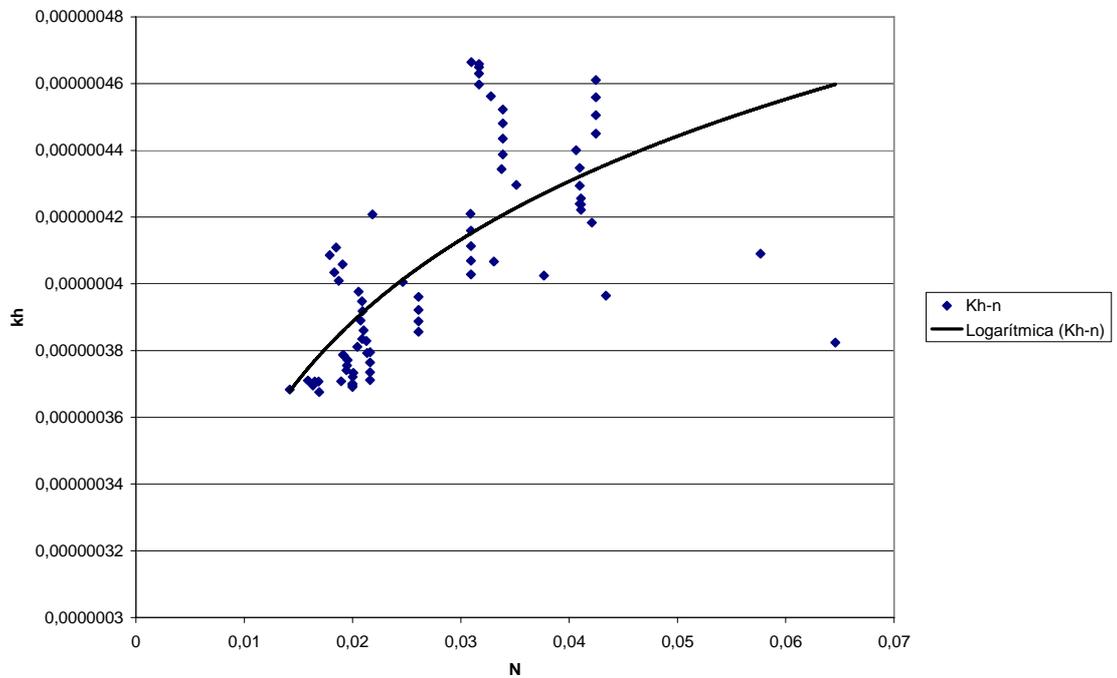
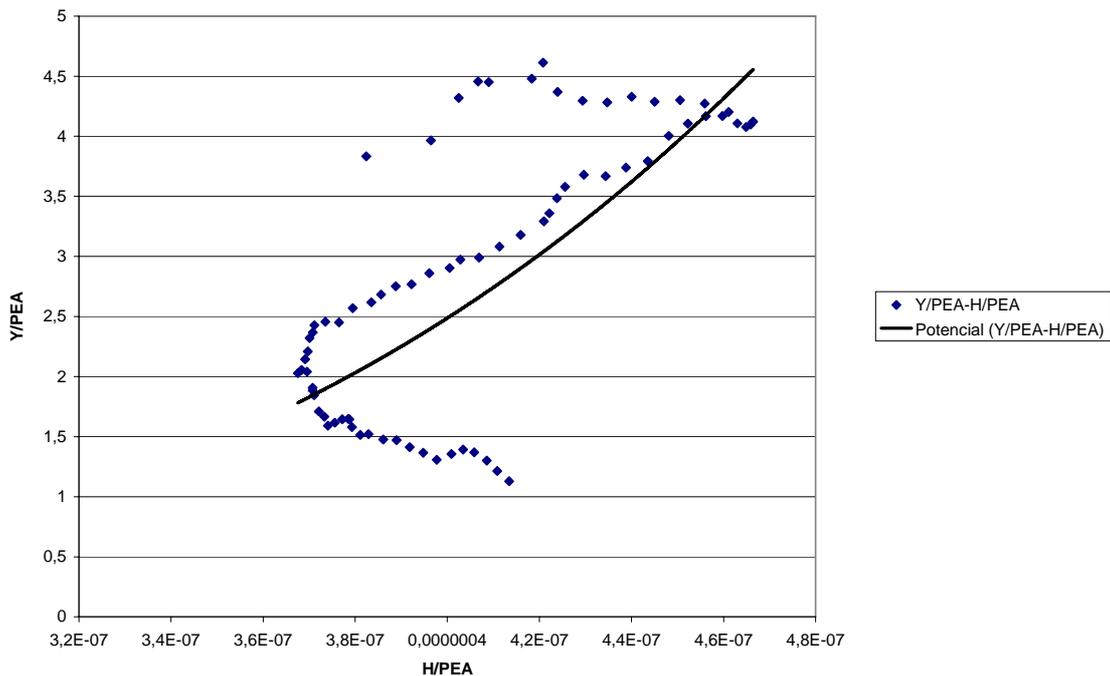


Gráfico 24. PIB/PEA-Capital humano/PEA



## IV. PRODUCCIÓN Y CAPITAL FÍSICO

### 1. Capital fijo

Decidimos estimar el acervo de capital fijo desde 1925 hasta 2000 a precios de 1994 para hacer compatible tal estimación con la del PIB real. Para este propósito se revisaron los siguientes trabajos: Harberger (1969), GRECO (2002), las estimaciones realizadas por el departamento de programación e inflación del Banco de la República y Tribín (2006). Todas las estimaciones se basan en el mismo método general que se expresa mediante esta ley:

$$K_t = K_{t-1}(1 - D_t) + I_t$$

Siendo:  $K_t$  el stock de capital en el año  $t$ ,  $D$  la tasa de depreciación e  $I_t$  la inversión del capital en el año  $t$ .

La serie del acervo de capital fijo queda así (gráfico 25):

Gráfico 25. Capital fijo

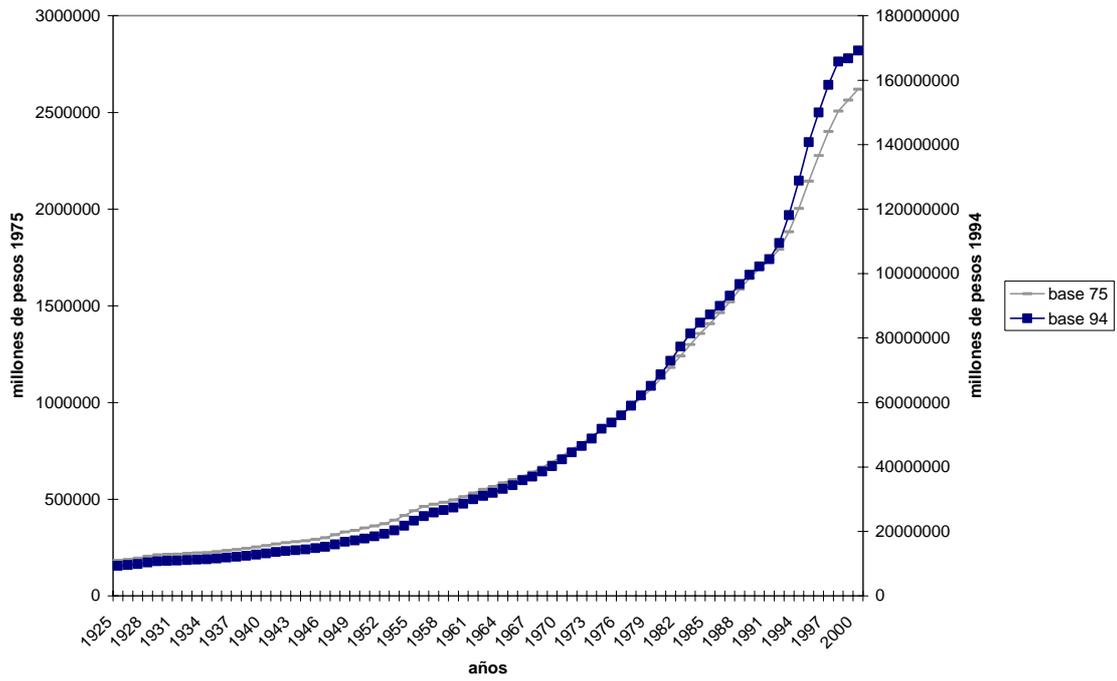


Gráfico 26. Crecimiento del capital fijo

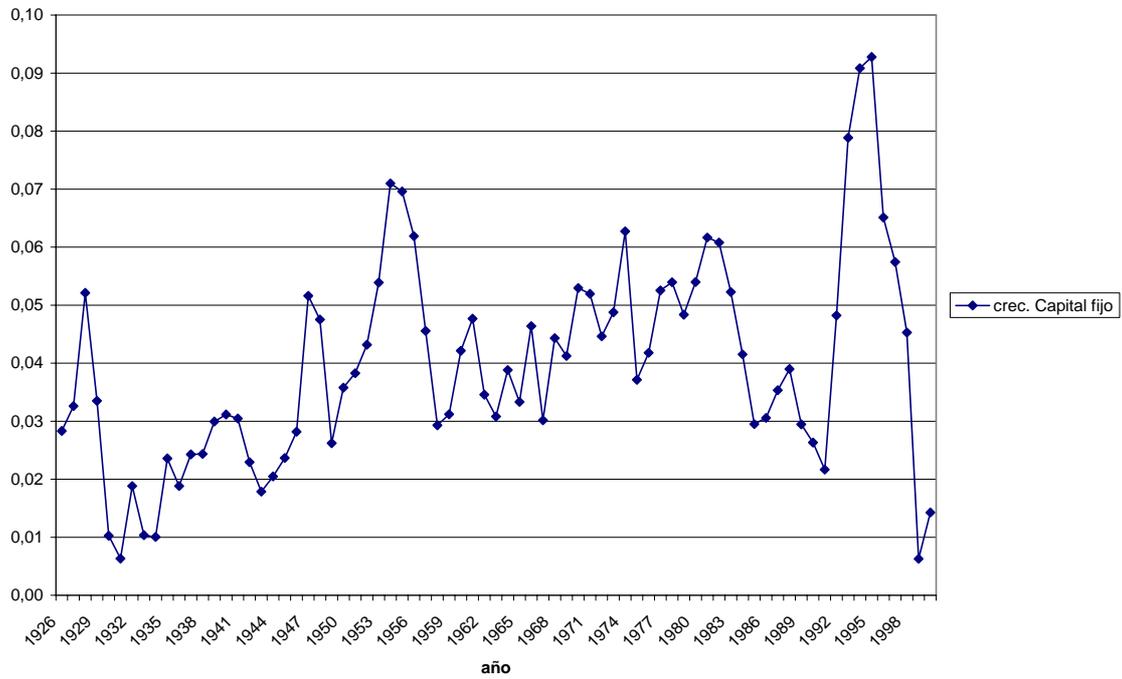


Gráfico 27. Relación PIB/Capital fijo

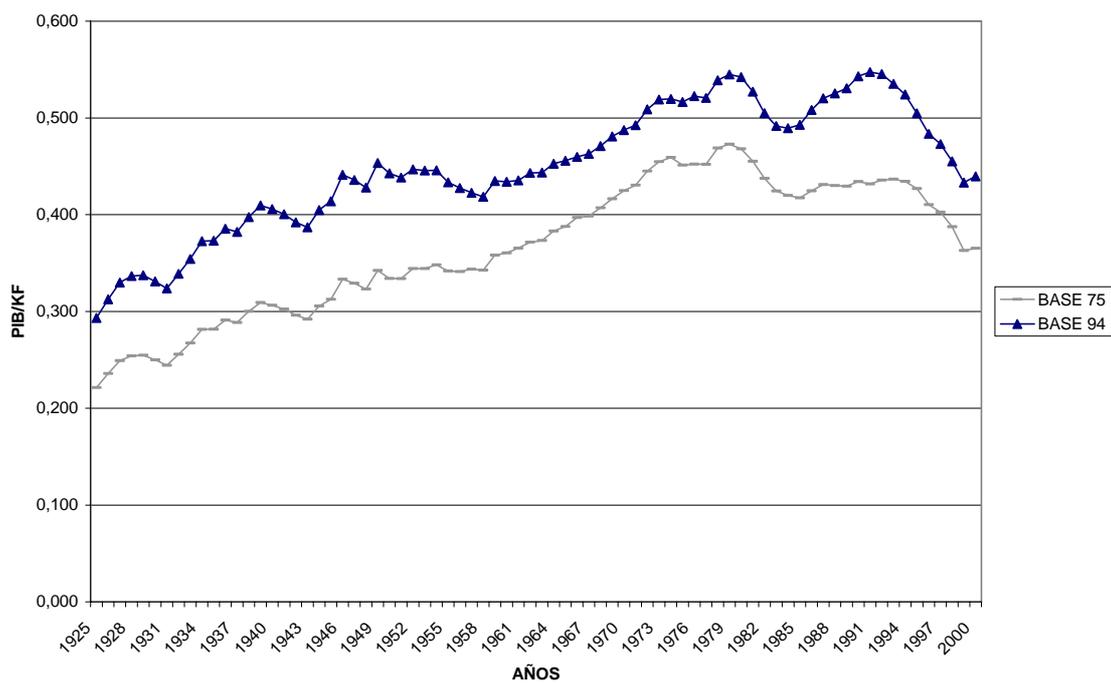
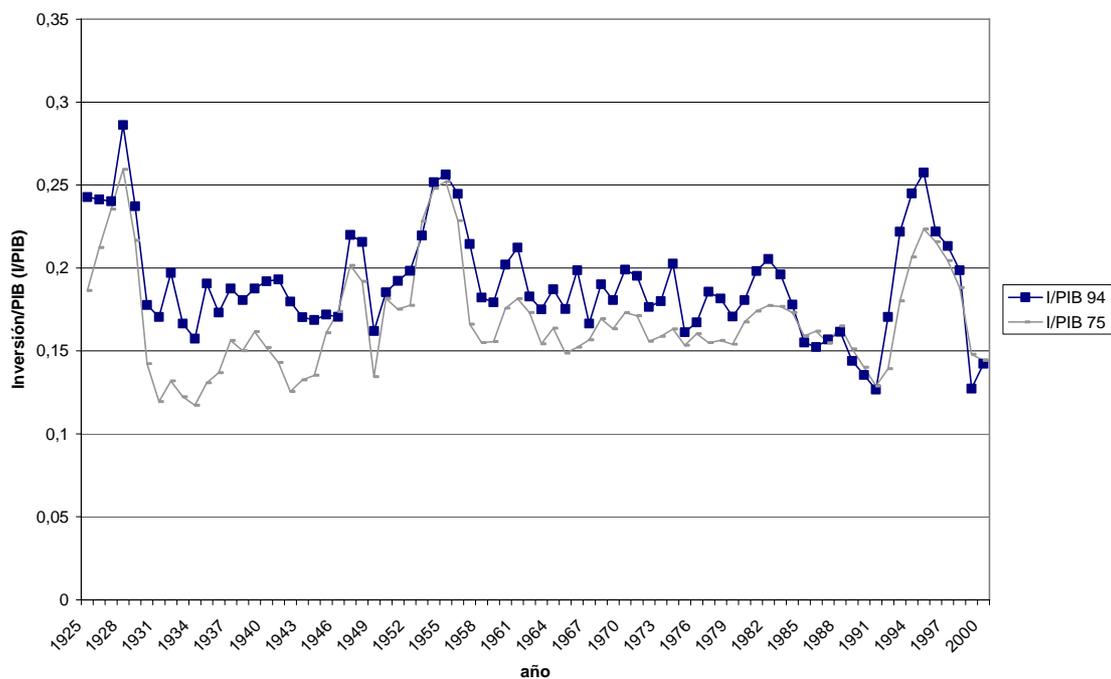


Gráfico 28. Relación Inversión en capital fijo/PIB



## 2. Inventarios

En el caso del cálculo del valor de los inventarios se utilizó la metodología de Harberger (1969)<sup>11</sup>. De acuerdo con esta utilizamos la razón marginal inventarios/PIB para calcular el nivel inicial de estos:

$$R = \frac{\Delta \text{Inventario}_{1925-1955}}{\Delta \text{PIB}_{1925-1955}}$$

$$\Delta \text{PIB}_{1925-1955} = \text{PIB}_{1955} - \text{PIB}_{1925}$$

$$\Delta \text{Inventarios}_{1925-1955} = \sum_{1925}^{1955} \text{Variación en existencias}$$

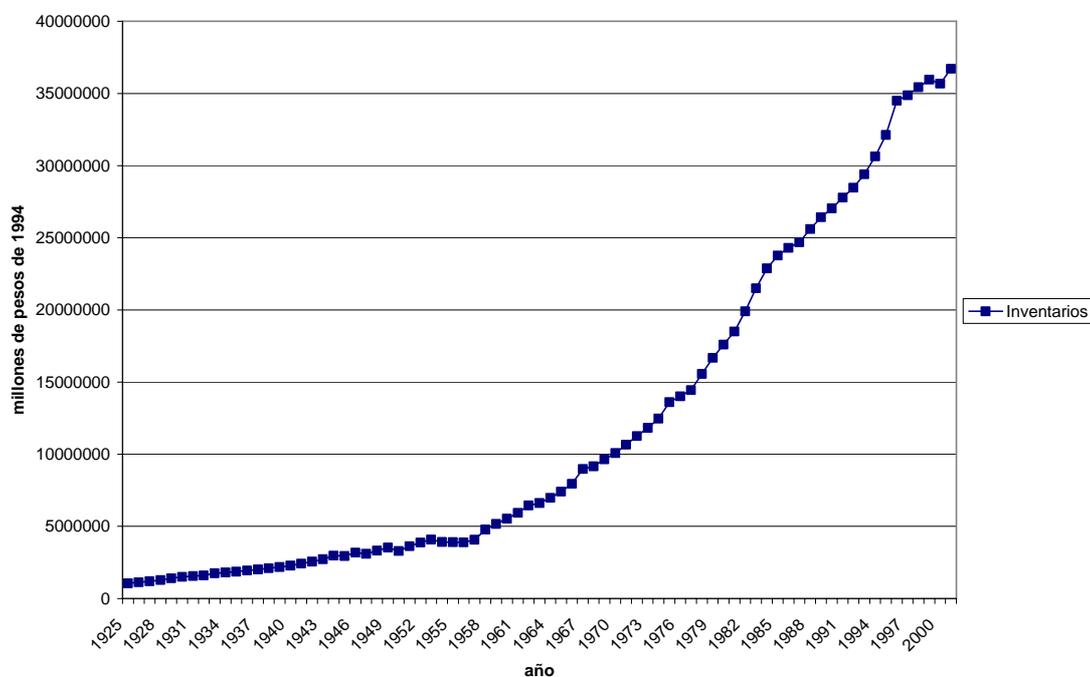
Luego se calcula el valor de inventarios en el año 1925.

$$K_{ex1925} = \text{PIB}_{1925} * R$$

Después de encontrar el valor del inventario en el año inicial se le suma la variación de existencias de tal año para encontrar el valor del inventario del año siguiente (y así sucesivamente):

$$K_{ex1926} = K_{ex1925} + \text{var. existencias}_{1926}$$

Gráfico 29. Inventarios



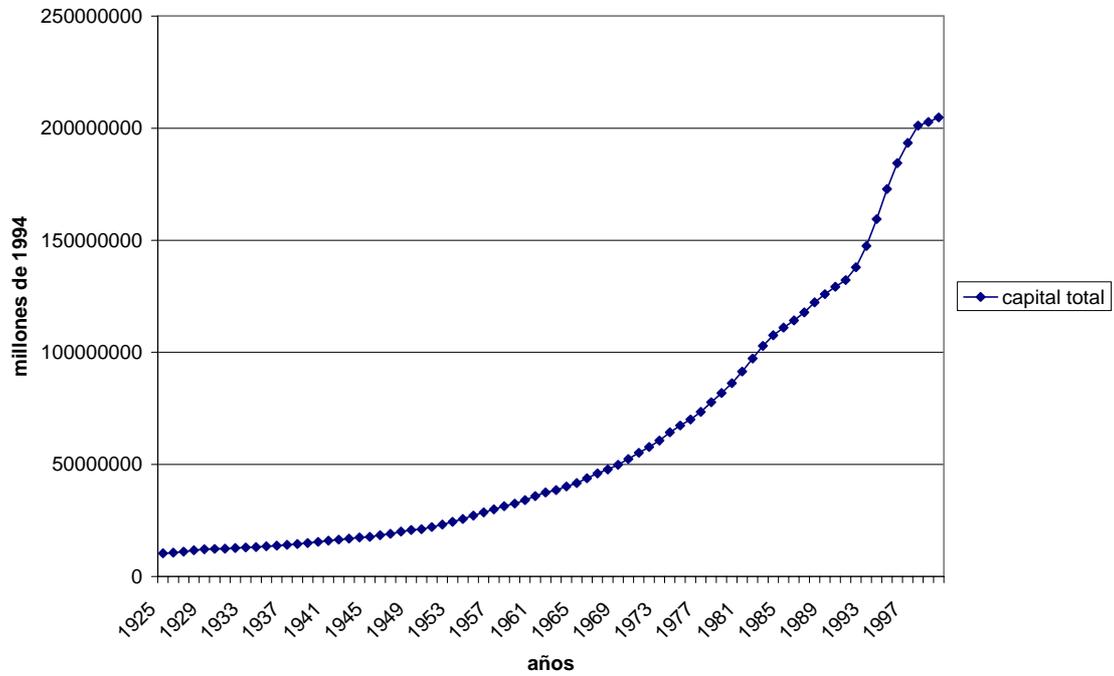
### 3. Capital físico total

<sup>11</sup> Ver una aplicación reciente en Tribín 2006.

Para la construcción del capital físico total se sumaron las dos series: la de capital fijo y la de inventarios.

El capital físico total queda representado así (Gráfico 30):

**Gráfico 30. Capital físico total**



**Gráfico 31. Crecimiento capital físico total**

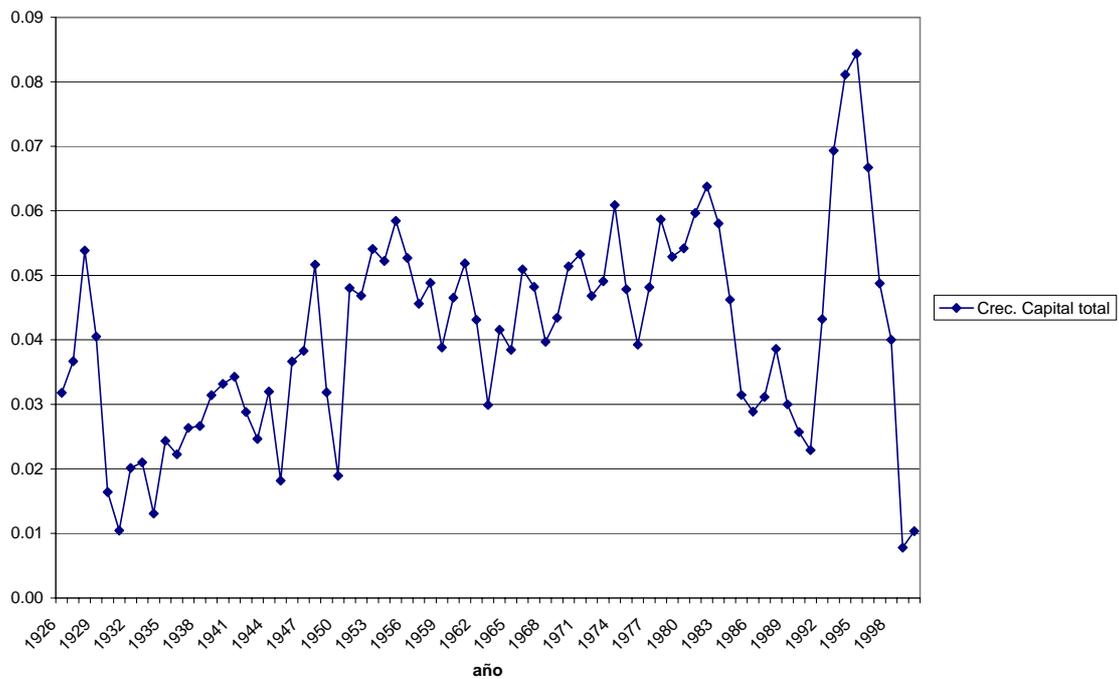
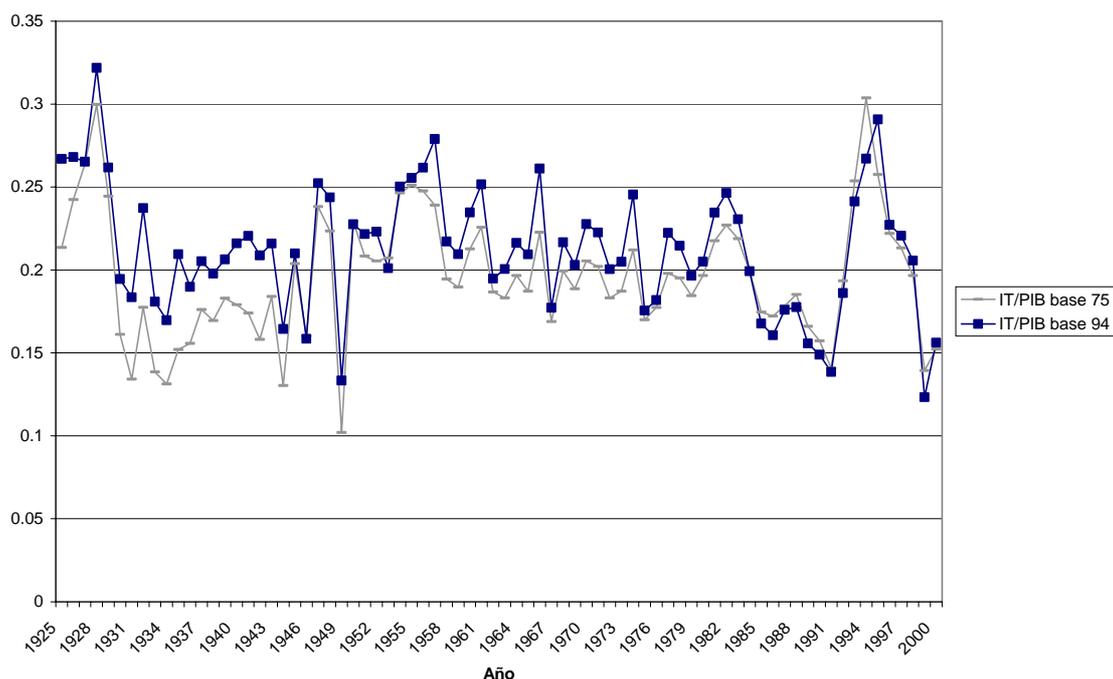


Gráfico 32. Relación inversión física total/PIB



#### 4. Inversión versus ahorro

Los cálculos anteriores invitan a la siguiente pregunta: ¿cómo se compara la tasa de inversión (inversión total en capital físico/PIB) con la tasa de ahorro de la economía?<sup>12</sup>

Hasta el presente no conocemos una estimación adecuada de la tasa de ahorro nacional para todo el período 1925-2000. Pero por lo pronto podemos estimar una tasa teórica de ahorro nacional. Para realizar esta estimación nos basamos en la tasa de ahorro de estado estacionario del modelo de Solow<sup>13</sup>:

$$s = \frac{(n + g + \delta)k^*}{y^*}$$

Siendo  $s$  la tasa de ahorro nacional (ahorro nacional /PIB),  $n$  la tasa de crecimiento de la población,  $g$  la tasa de crecimiento de la eficiencia laboral,  $\delta$  la tasa de depreciación del capital (4,92%: véase anexo 1), y  $k^*/y^*$  la relación capital/producto de estado estacionario. La tasa  $s$  podría verse como adecuada desde el punto de vista

<sup>12</sup> La inversión en capital humano también se financia con ahorro, pero los sistemas usuales de contabilidad nacional incluyen los gastos privados y públicos en educación como parte del consumo de los hogares y de las administraciones públicas. Por esta razón comparamos la tasa de ahorro (sin incluir la financiación de la educación) solo con la tasa de inversión en capital físico y utilizamos como marco analítico un modelo que cuenta solo con capital físico.

<sup>13</sup> Romer, 1996, p. 13.

social pues es la compatible con aquella inversión por unidad de trabajo eficiente requerida para mantener constante el capital por unidad de trabajo eficiente<sup>14</sup>.

Para estimar  $\frac{k^*}{y^*}$  lo primero que hicimos fue establecer la época en la cual la relación capital físico/PIB fue estacionaria. Para esto realizamos algunas pruebas estadísticas (de “estacionariedad”), y llegamos a la conclusión de que tal época fue el período 1945 - 1968. Para este período se calculó el valor promedio de la relación capital físico/PIB y éste se usó como medida aproximada de la relación  $\frac{k^*}{y^*}$  (Gráfico 33).

Bajo el supuesto de una función de producción agregada Cobb-Douglas cuyos argumentos son el capital físico y el trabajo medido en unidades de eficiencia, la tasa de crecimiento de la eficiencia laboral se calculó de la siguiente forma:

$$g = \frac{1}{1-\alpha_f} \dot{y} - \frac{\alpha_f}{1-\alpha_f} \dot{k},$$

siendo  $\dot{y}$  la tasa de crecimiento del producto por trabajador ( $y$ ),

$\dot{k}$  la tasa de aumento del capital por trabajador ( $k$ ) y  $\alpha_f$  la elasticidad del producto al capital físico. Se tomaron los datos estimados en este trabajo de los crecimientos anuales del producto por trabajador y el del capital por trabajador y se supuso que la elasticidad del producto al capital es 0,4<sup>15</sup>.

El gráfico 34 muestra que la tasa teórica de ahorro (la calculada mediante el modelo de Solow y con los parámetros estimados según lo mencionado) fue, en general, superior a la tasa de inversión a lo largo del período 1925-2000. Probablemente esto sea un indicio de que en Colombia: 1) la tasa de ahorro efectiva fue inferior a la teórica u óptima para la sociedad; 2) la tasa efectiva de inversión fue inferior a la que se habría podido alcanzar aún con el mismo ahorro externo que el obtenido en dicho período, y 3) el país habría podido lograr mayores niveles de capital y producto *per cápita* si las dos conjeturas previas fuesen correctas<sup>16</sup>.

¿Cuánto más grande habría podido ser el producto por trabajador (PIB/PEA) si la tasa de inversión hubiera sido tan alta como la tasa teórica de ahorro, suponiendo

---

<sup>14</sup> *Ibidem*.

<sup>15</sup> GRECO (2002).

<sup>16</sup> Entre 1929 y 1989 el país observó una tendencia al alza (en medio de fluctuaciones) de la tasa de cambio real (véase el gráfico 17, cap. 9, GRECO 2002). ¿Tuvo este proceso alguna relación con el de la mencionada tendencia hipotética a la sub-inversión dado el hecho del gran componente importado de la inversión en Colombia?

ausencia de ahorro externo? Una respuesta sencilla a esta pregunta en el marco del modelo de Solow puede hacerse si seleccionamos un período en el cual las tasas de ahorro (la teórica) y la de inversión fueron relativamente estables. El gráfico 35 muestra que entre 1936 y 1980 tanto la tasa teórica de ahorro como el componente permanente de la tasa de inversión fueron relativamente estables. Ahora bien, según el modelo de Solow el producto por trabajador de estado estable es<sup>17</sup>:

$$y = A \left( \frac{s}{n + g + \delta} \right)^{\frac{\alpha_f}{1-\alpha_f}}$$

Por tanto, la relación entre los productos por trabajador de estado estable que difieren solamente en la tasa de ahorro es:

$$\frac{y_1}{y_2} = \left( \frac{s_1}{s_2} \right)^{\frac{\alpha_f}{1-\alpha_f}}$$

Puesto que la tasa teórica de ahorro en dicho período (que la llamaremos  $s_1$ ) fue, en promedio, 27% y la tasa de inversión ( $s_2$ ) fue 22%, y puesto que, como ya lo habíamos anotado, se puede estimar  $\alpha_f$  en 0,4, entonces podemos concluir que el producto por trabajador (PIB/PEA) habría sido permanentemente 15% más alto que el observado si la tasa de inversión hubiera sido igual a la teórica de ahorro.

---

<sup>17</sup> Ecuación 2.13, Jones (2002), p.40.

Gráfico 33. Capital físico/PIB

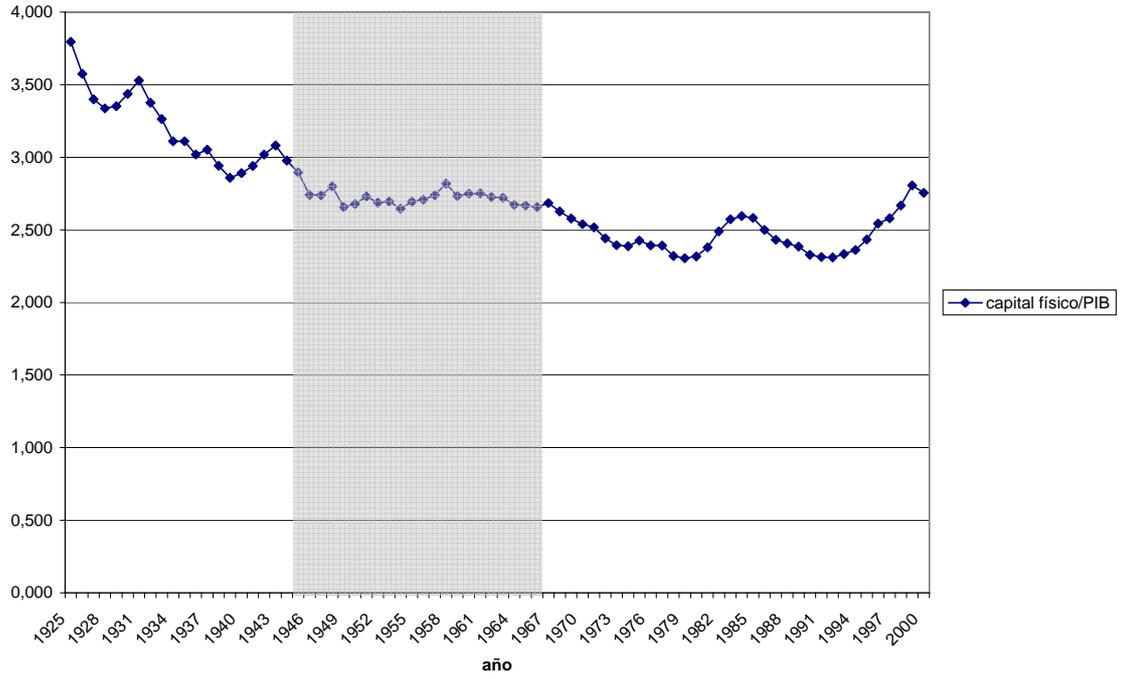
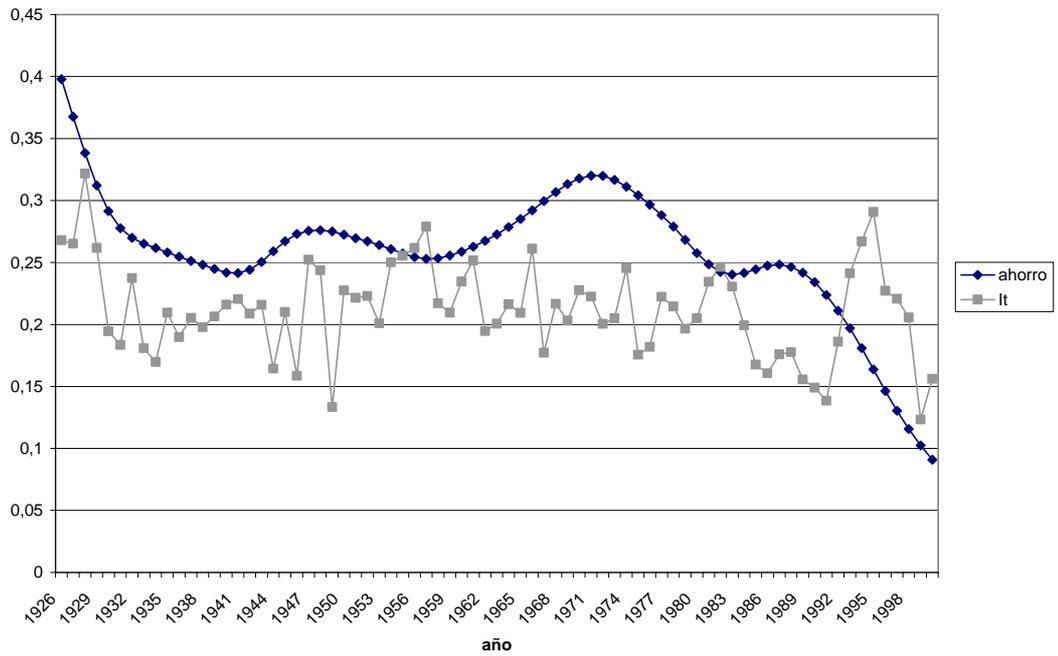
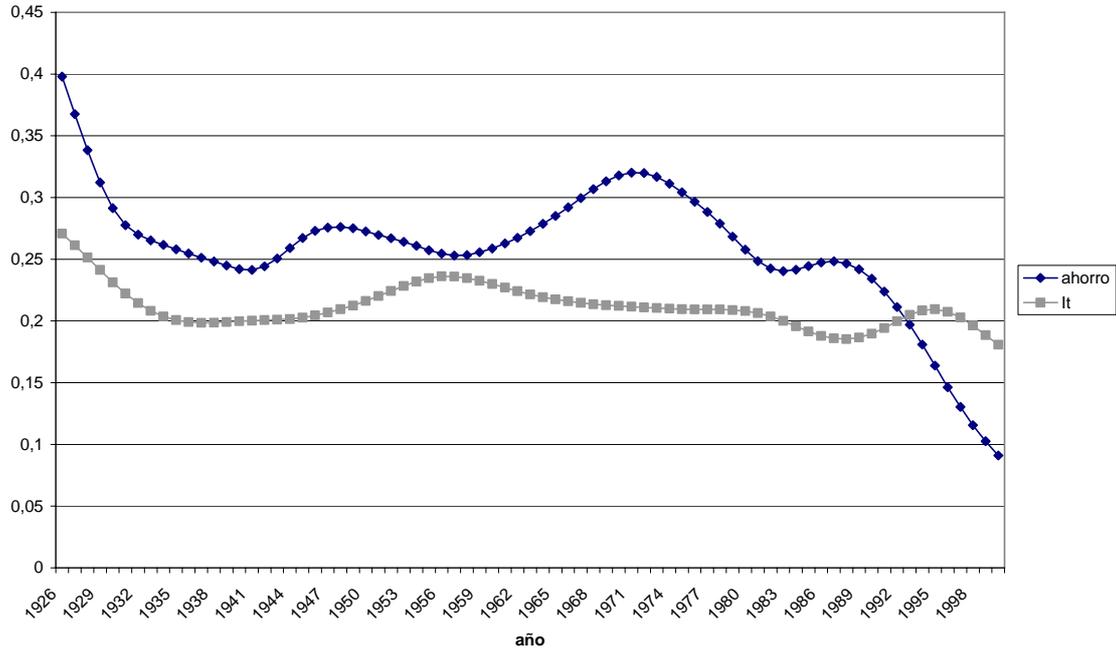


Gráfico 34. Tasa teórica (Solow) de ahorro y tasa de inversión física (inversión física total/PIB) 1925-2000



**Gráfico 35. Tasa teórica (Solow) de ahorro y componente permanente de la tasa de inversión física (inversión física total/PIB) 1925-2000**



**Gráfico 36. PIB/PEA-Capital físico/PEA**

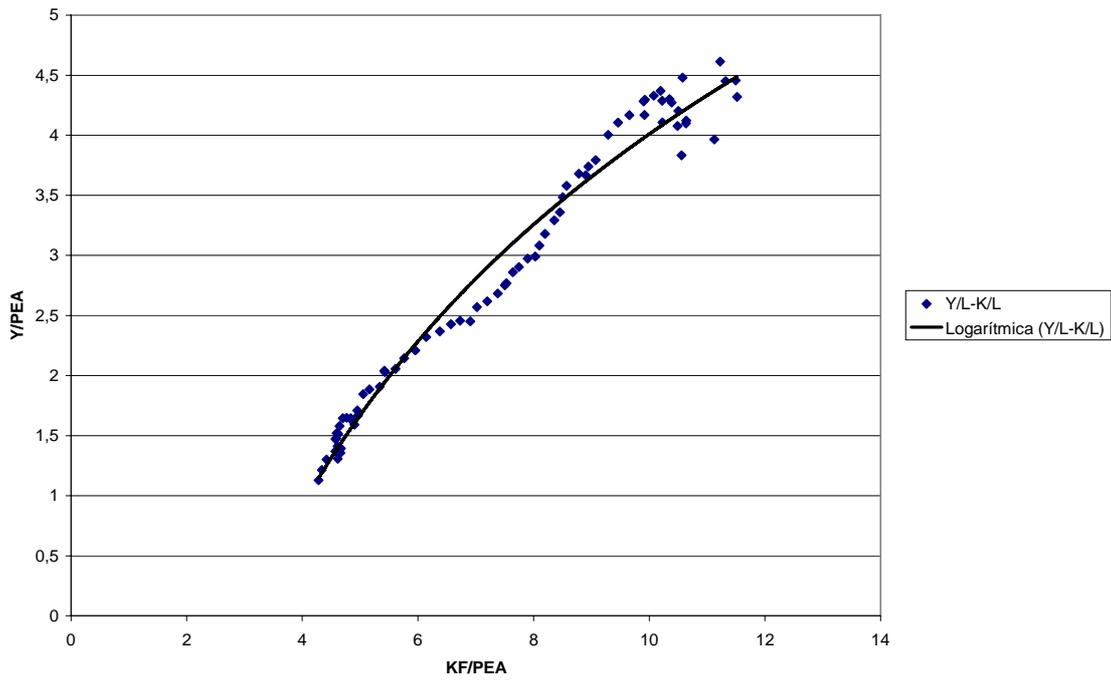
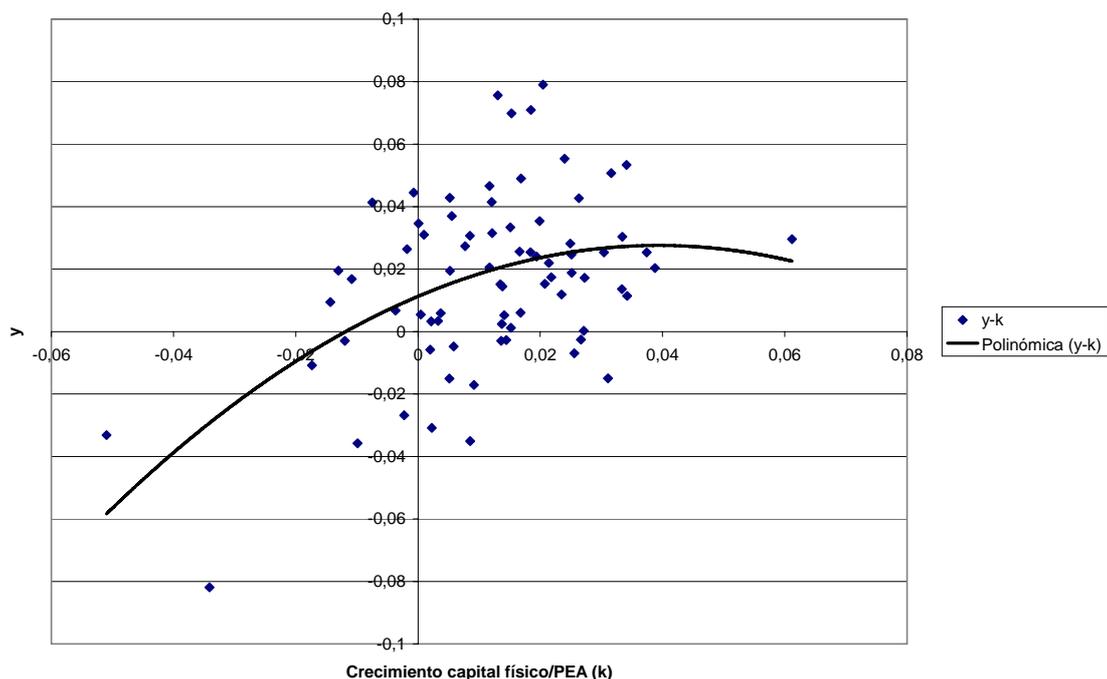


Gráfico 37. Crecimiento del PIB/PEA- crecimiento del capital físico/PEA



## 5. Productividades marginales

Siguiendo con el supuesto de una función de producción agregada Cobb-Douglas con capital físico y trabajo, y una elasticidad del producto al capital igual a  $\alpha_f$ , podemos agregar que una medida “naive” de la productividad marginal del capital (como la llaman Caselli y Feyrer [2007]), esto es, sin corregir por el uso de recursos naturales ni teniendo en cuenta valorizaciones por cambios de precios relativos, *etc.*, es  $\alpha_f \left( \frac{y^*}{k^*} \right)$ ; esta medida es 14,3% anual en Colombia suponiendo, de nuevo, un valor de  $\alpha_f = 0,4$  y una relación producto/capital como la media del período 1945-1968, que es prácticamente igual a la del año 2000 (gráfico 33). Pero la cifra correspondiente para Colombia contenida en la Tabla II de Caselli y Freyre (2007, p. 549) es mucho mayor: 28%. Nosotros creemos que la cifra nuestra se acerca mucho más a la correcta. A favor de esta conjetura podemos anotar que la diferencia entre nuestra medida de la productividad marginal del capital “naive” y la tasa de depreciación con la cual se hicieron los cálculos del capital físico, 4,92%, es 9,38%. Esta cifra (9,38%) es la tasa de rendimiento real anual del capital de estado estacionario antes de impuestos y pagos de rentas por el uso de recursos naturales y antes de incluir efectos de valorización por cambios de precios relativos. Esta tasa de rendimiento está en el rango de lo calculado

por Harberger (1969) para lo que él denominó la “tasa global de rendimiento del capital” en Colombia en el período 1960-1967: 8% - 10%<sup>18</sup>.

De otra parte, la productividad marginal del trabajo “naive”, la compatible con lo anterior, es  $(1 - \alpha_f)(y^*)$ . Este valor sería igual al salario real medio de equilibrio de la economía. Puesto que el producto por trabajador no tiene un valor estacionario si hay cambio técnico, que es lo usual, podemos omitir el superíndice \* de la letra símbolo que lo representa y considerar que la relación PIB/PEA es una *proxy* adecuada de esta variable. En 2000 el PIB/PEA fue 3'833000 pesos. Por tanto, resulta que la productividad marginal anual del trabajo en 2000 fue 0,6 x 3'833000 pesos de 1994, es decir, 2'298000 pesos de 1994. El salario mínimo anual real de 2000 a precios de 1994 (usando como deflactor el IPC, y siendo 100 su base en junio de 1994), ascendió a 1'290.882 pesos (sin incluir los costos laborales diferentes al propio salario contemplados por el código laboral como son las cotizaciones patronales a la seguridad social, las contribuciones forzosas a favor del SENA, cajas de compensación familiar, ICBF, etc.). Si se incluyen estos costos laborales (aproximadamente 50% adicional sobre el salario básico), resulta que el salario mínimo anual integral real fue 1'936000 pesos, suma equivalente a 84% del salario medio de equilibrio y a 51% del PIB/PEA del año 2000<sup>19</sup>.

Dado el valor de  $\alpha_f$  (y suponiendo todo lo demás ya supuesto), la variación porcentual de la productividad marginal del trabajo es igual a la variación porcentual del PIB/PEA. Esto lleva a la pregunta: ¿de qué depende esta?

De acuerdo con el ejercicio reportado en la Tabla 2, hay evidencia favorable a la hipótesis de una relación positiva no lineal entre el crecimiento del PIB/PEA y el crecimiento del capital físico/PEA. En cuanto a los modelos más usuales de crecimiento económico, esta evidencia favorece dos modelos conocidos (y que sólo utilizan variables macroeconómicas) como son los de Solow y Mankiw-Romer-Weil (éste último se basa en el de Solow pero es ampliado con la incorporación de capital humano).

---

<sup>18</sup> Harberger, 1969, p. 21.

<sup>19</sup> Estimamos que el salario mínimo integral anual equivalió a 44,5% del PIB/PEA en 2007 y, por ende, a 74% del salario de equilibrio. Esta estimación supone que el PIB nominal creció 12,2% en 2007 (6,9% en términos reales y suponiendo una inflación del deflactor del PIB de 5%) y que el aumento de la PEA fue 1% en 2007. Sobre el salario mínimo y su relación con el salario medio urbano véase Arango *et al.* (2007), en particular las figuras 3 y 5.

**Tabla 2**

<b>Variable dependiente:</b> Crecimiento PIB/PEA <b>Método:</b> Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) <b>Observaciones:</b> 75 después de ajustes			
	Coefficiente	Estadístico t	Valor P.
Constante	0.011242	2.982841	0.0039
Crecimiento KF/PEA	0.828979	4.582472	0.0000
Crecimiento KF/PEA^2	-10.53306	-2.057435	0.0433
R <sup>2</sup>	0.226924		
R <sup>2</sup> Ajustado	0.205450		
Estadístico F	10.56724	(0.000)	
Estadístico Q(5-1)	13.141	(0.022)	
Estadístico Q(18-1)	20.228	(0.320)	
Estadístico Jarque-Bera	0.2419	(0.8860)	
Prueba de White (sin cruzar)	0.4588	(0.7950)	

Valor P en paréntesis

**Gráfico 38. Crecimiento del capital físico per capita - inversión física/PIB**

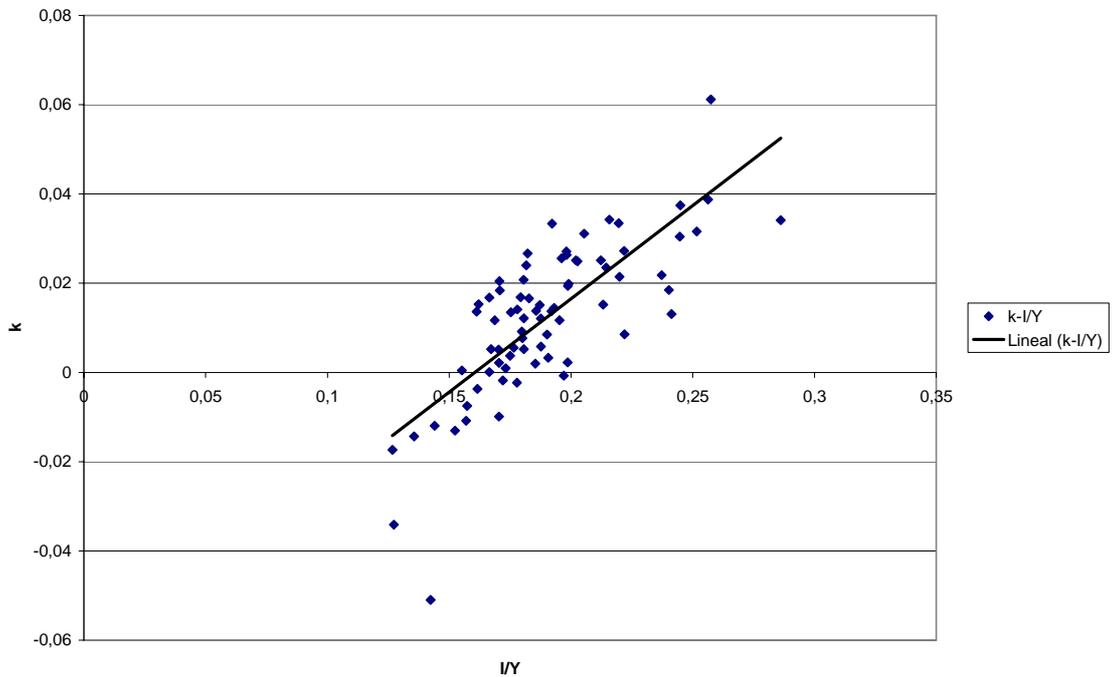


Gráfico 39. Crecimiento del PIB/PEA-Inversión física total/PIB

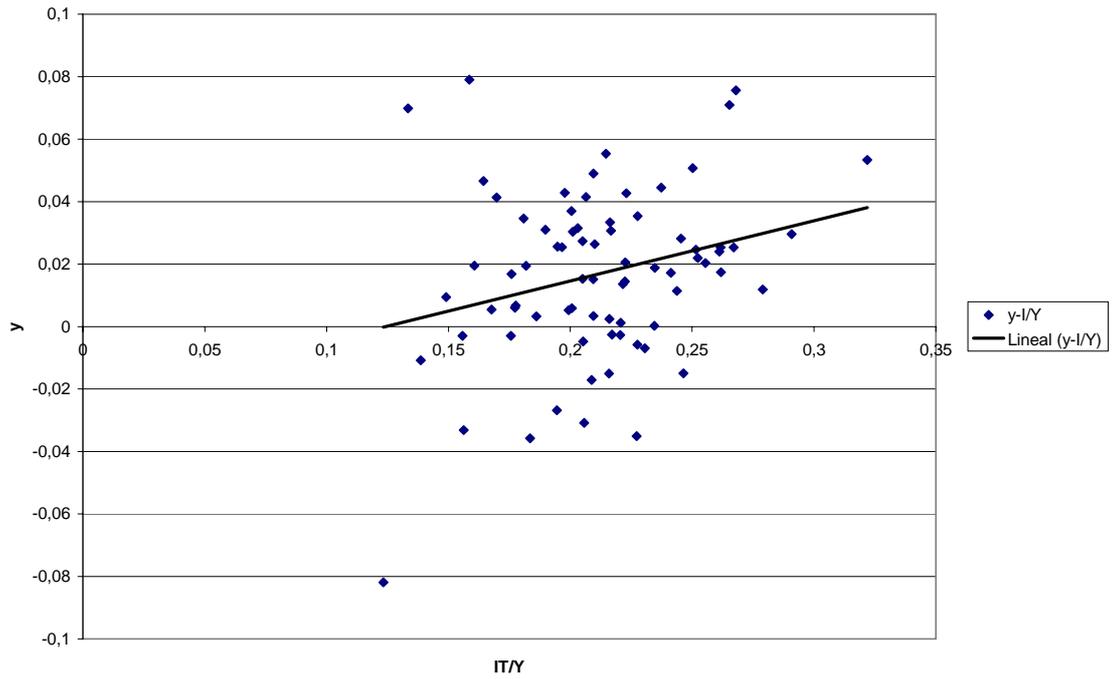


Gráfico 40. Crecimiento del capital físico total- crecimiento de la PEA

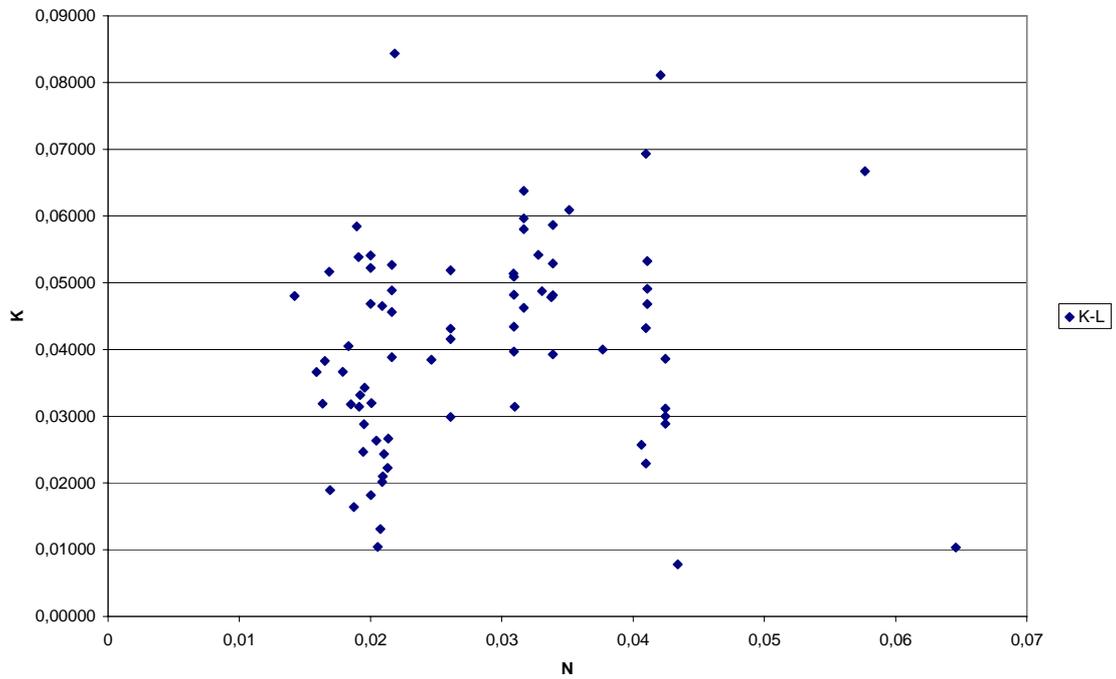


Gráfico 41. Capital físico/PEA- crecimiento PEA

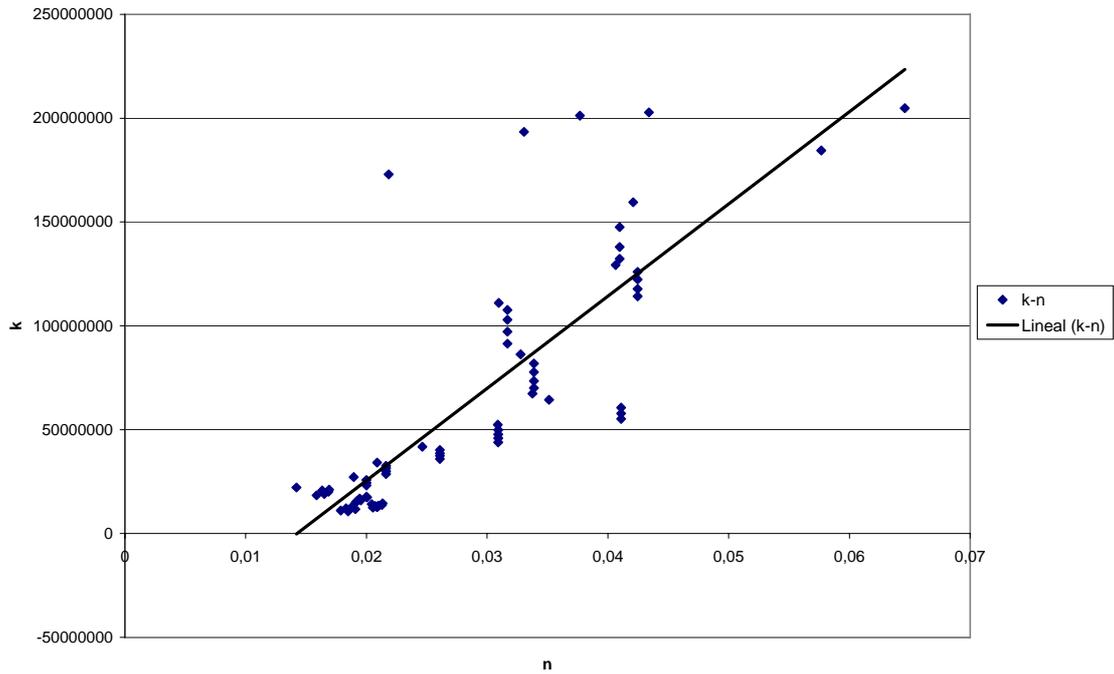
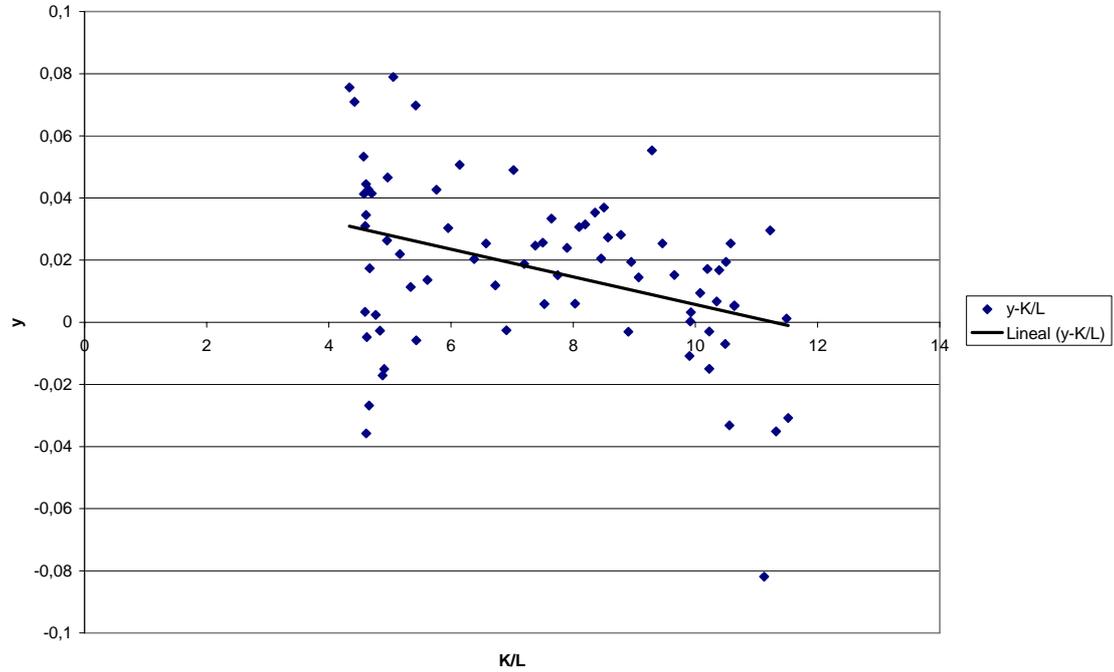


Gráfico 42. Crecimiento del PIB/PEA-Capital físico/PEA



## V. CAPITAL TOTAL

Creamos un índice de capital total (llamado “C”) que tiene en cuenta tanto el capital físico como el capital humano; para esto se revisaron algunas funciones de capital y se

concluyó que una conveniente es una función CES que puede expresar la hipótesis de una baja sustituibilidad entre ambos capitales, así:

$$C_t = [\beta K^\varphi + (1 - \beta)H^\varphi]^{1/\varphi}$$

Siendo  $K$  y  $H$  los índices de los capitales físico y humano, respectivamente.

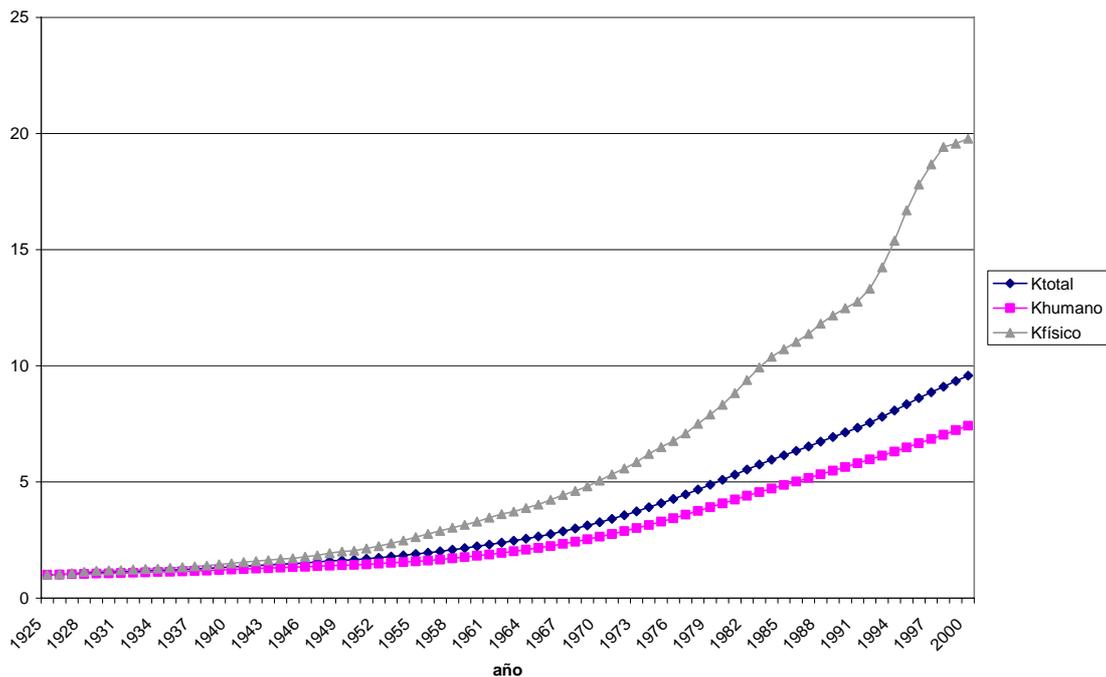
La elasticidad de sustitución entre el capital físico y el capital humano viene dada por:

$$\varepsilon = \frac{1}{(1 - \varphi)}$$

Para el cálculo del índice se supuso  $\beta$  igual a 0,5. Al mismo tiempo se supuso una elasticidad igual a 0,3 (relativamente baja), lo que significa un valor de  $\varphi = -2,33$ .

La serie del índice resultante de capital total es la siguiente (Gráfico 43):

Gráfico 43. Índice de capital total, físico y humano



La baja elasticidad de sustitución supuesta entre los capitales humano y físico y el hecho de que el crecimiento del capital humano fue más lento que el del capital físico entre 1925 y 2000 implican que el índice de capital total se aleja menos del índice de capital humano que del índice de capital físico.

Gráfico 44. Crecimiento capital total

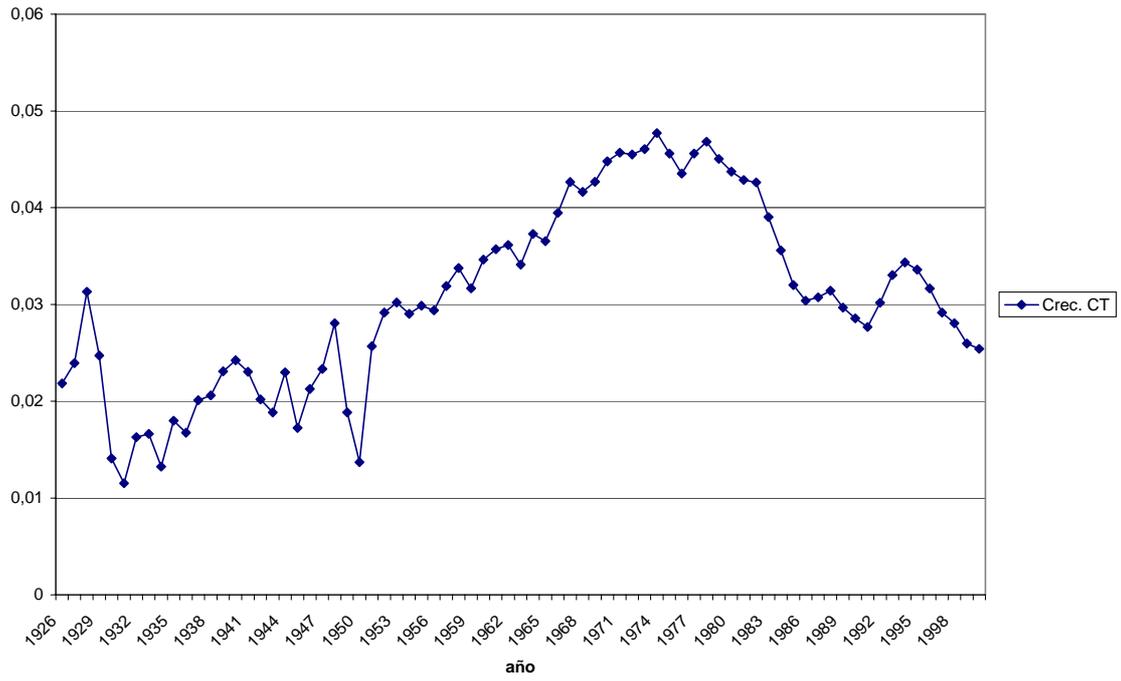


Gráfico 45. Índice de capital total/PEA- Capital físico/PEA

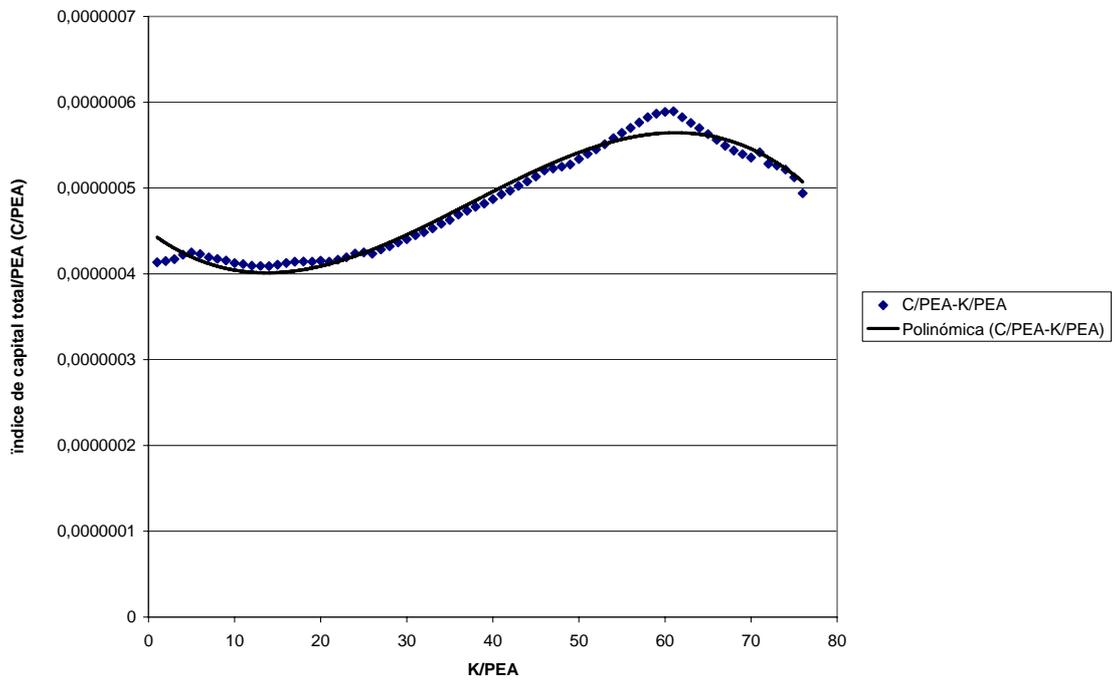


Gráfico 46. Índice capital total/PEA- capital humano/PEA

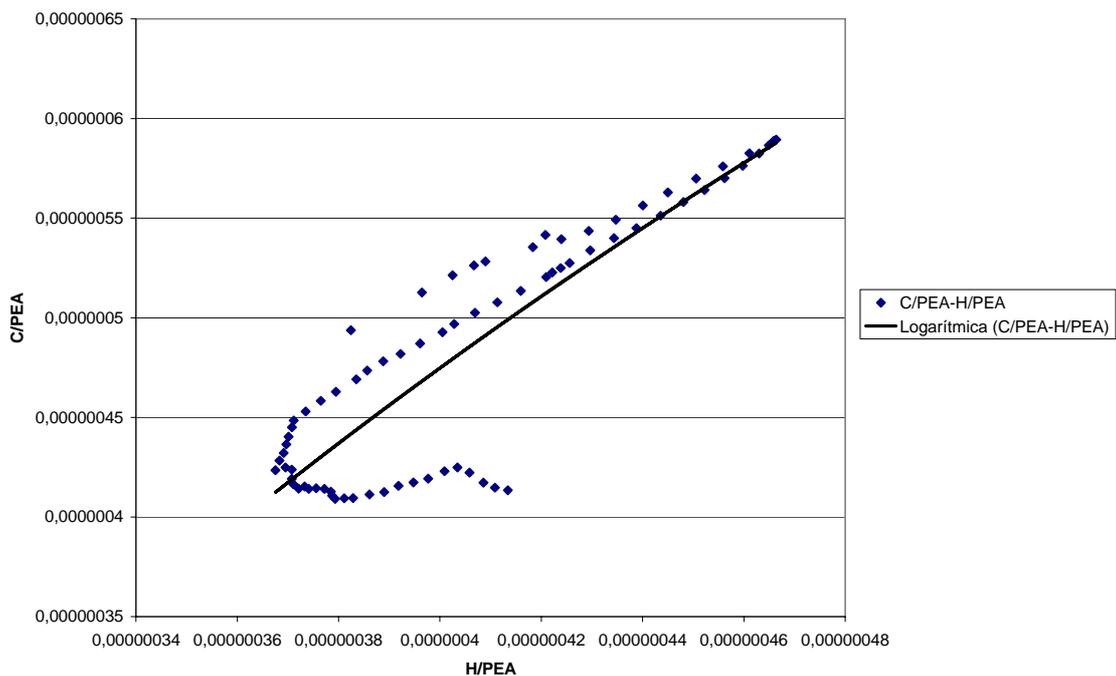


Gráfico 47. Crecimiento PIB/PEA- crecimiento capital total/PEA

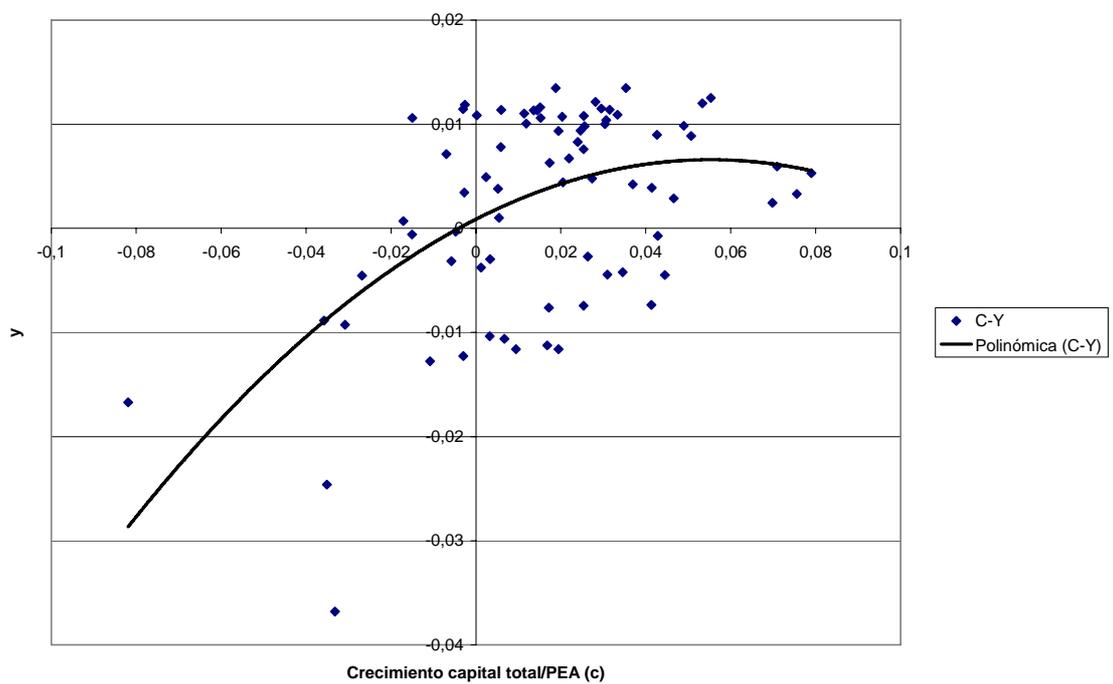


Gráfico 48. Crecimiento capital físico- crecimiento capital humano

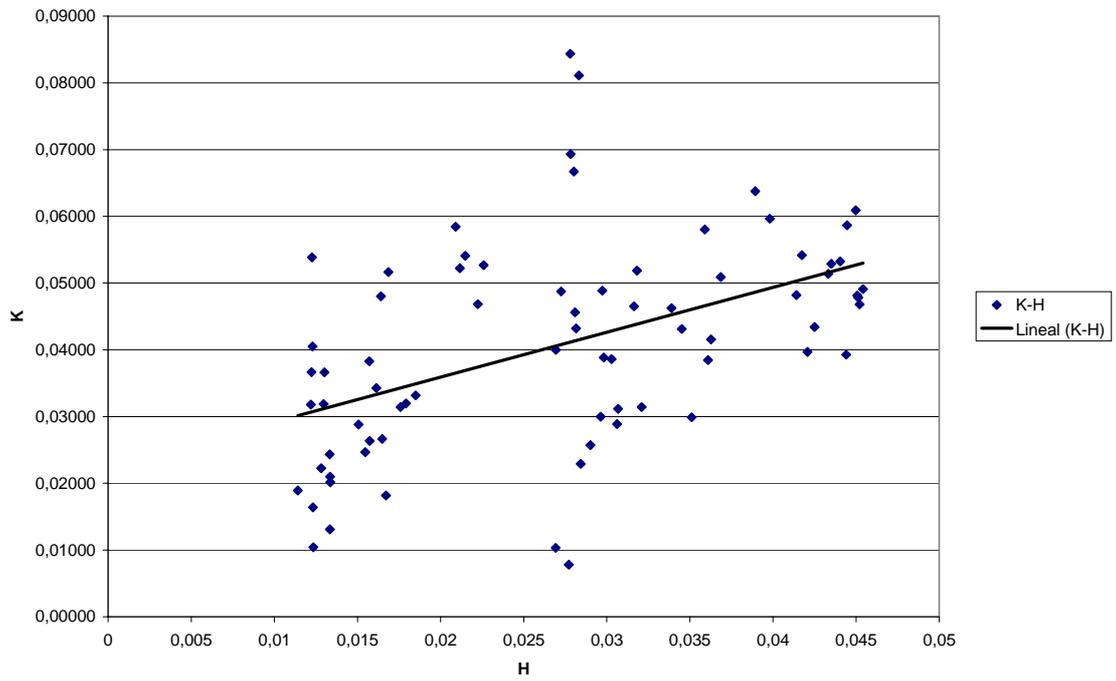


Gráfico 49. Capital físico/PEA-capital humano/PEA

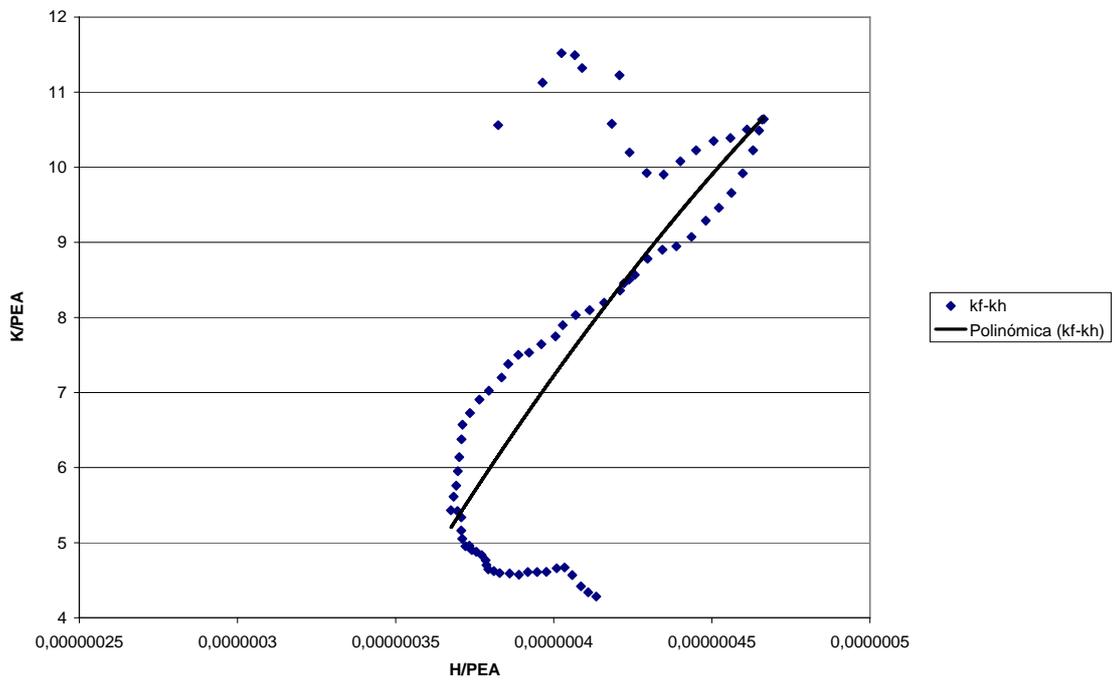
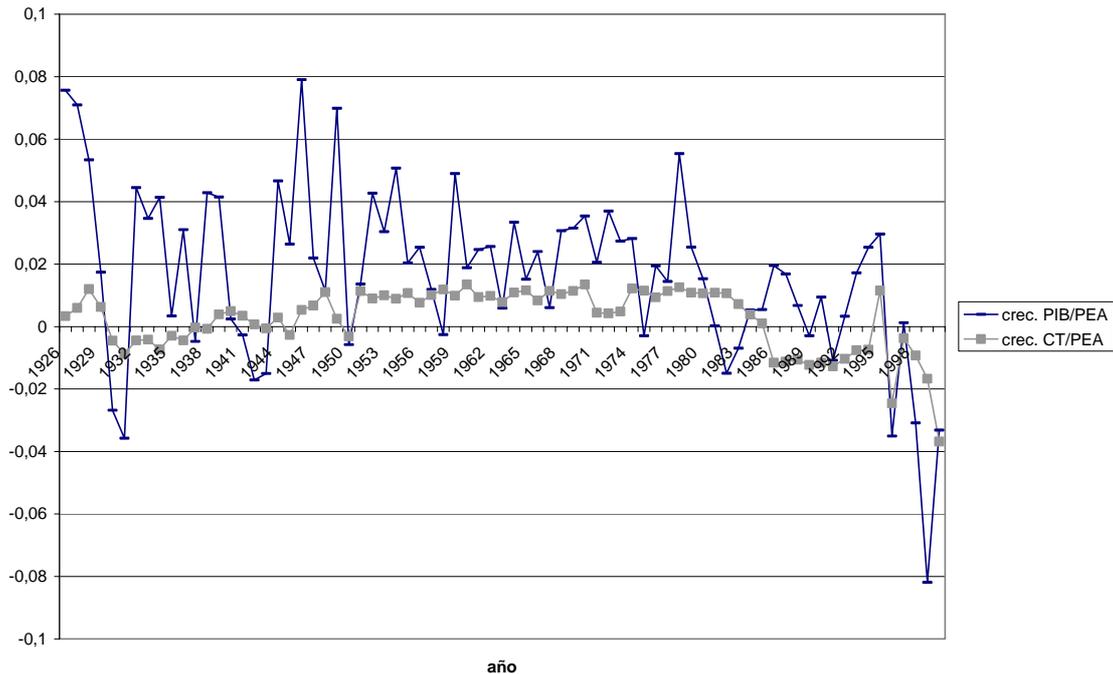


Gráfico 50. Crecimiento PIB/PEA y crecimiento Capital total/PEA



Dados el comportamiento ya visto de la tasa de aumento del capital humano y la forma, mencionada ya también, de construir el índice de capital total, se puede concluir que hay evidencia favorable a la hipótesis de una desaceleración del crecimiento del PIB por trabajador (y, por ende, del PIB *per* cápita) que fue causada, parcialmente, por la desaceleración del aumento del capital humano (Gráfico 50).

## VI. IMPLICACIONES EMPÍRICAS DE LOS MODELOS DE CRECIMIENTO ECONÓMICO

Para aplicar un modelo de crecimiento económico como guía de la interpretación de la evolución de una economía se hace necesario establecer las implicaciones de modelos alternativos y proceder a su evaluación mediante el contraste empírico. En este caso analizamos los modelos más usuales, aquellos que utilizan sólo variables macroeconómicas (y que no abordan los asuntos de la transición demográfica ni de los determinantes de la acumulación de capital humano), a saber: Harrod-Domar, Solow, Mankiw-Romer-Weil (M-R-W: extensión del modelo de Solow con capital humano) y el de externalidades del capital físico<sup>20</sup>.

<sup>20</sup> Sala-i-Martin, 1994.

**Tabla 3. Implicaciones teóricas de largo plazo de los modelos más usuales de crecimiento económico**

Relación de las variables en el largo plazo	Harrod-Domar	Solow	M-R-W	Externalidades*	
				$\alpha + \mu < 1$	$\alpha + \mu \geq 1$
1. $y - kf$	$\frac{\partial y}{\partial kf} > 0$ $\frac{\partial^2 y}{\partial kf^2} = 0$ para $k \geq \bar{k}$	$\frac{\partial y}{\partial kf} > 0$ $\frac{\partial^2 y}{\partial kf^2} < 0$	$\frac{\partial y}{\partial kf} > 0$ $\frac{\partial^2 y}{\partial kf^2} < 0$	$\frac{\partial y}{\partial kf} > 0$ $\frac{\partial^2 y}{\partial kf^2} < 0$	$\frac{\partial y}{\partial kf} > 0$ $\frac{\partial^2 y}{\partial kf^2} \geq 0$
2. $\dot{y} - \frac{it}{PIB}$	$\frac{\partial \dot{y}}{\partial it / pib} > 0$	$\frac{\partial \dot{y}}{\partial it / pib} = 0$	$\frac{\partial \dot{y}}{\partial it / pib} = 0$	$\frac{\partial \dot{y}}{\partial it / pib} = 0$	$\frac{\partial \dot{y}}{\partial it / pib} = 0$
3. $y - kh$	n/a	n/a	$\frac{\partial y}{\partial kh} > 0$	n/a	n/a
4. $\dot{y} - \dot{kh}$	n/a	n/a	$\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{kh}} > 0$	n/a	n/a
5. $kh - n$	n/a	n/a	$\frac{\partial kh}{\partial n} < 0$	n/a	n/a
6. $\dot{KF} - \dot{KH}$	n/a	n/a	$\frac{\partial \dot{KF}}{\partial \dot{KH}} > 0$	n/a	n/a
7. $kf - kh$	n/a	n/a	$\frac{\partial kf}{\partial kh} > 0$ $\frac{\partial^2 kf}{\partial kh^2} > 0$	n/a	n/a

\*El modelo de externalidades se describe en el anexo 2. En este modelo  $\alpha + \mu$  es la elasticidad del producto agregado al capital físico agregado.

Siendo:  $y$ : PIB/PEA;  $\dot{y}$ : tasa de crecimiento de PIB/PEA;  $n$ : tasa de crecimiento de la PEA;  $\frac{it}{PIB}$ : inversión física total/PIB;  $KF$ : capital físico;  $\dot{KF}$ : crecimiento capital físico;  $kf$ : capital físico/PEA;  $\dot{kf}$ : tasa de crecimiento de

capital físico/PEA;  $\dot{K}H$ : crecimiento capital humano;  $kh$ : capital humano/PEA;  $\dot{k}h$ : tasa de crecimiento de capital humano/PEA.

A continuación veremos cuales implicaciones teóricas se cumplen en el caso colombiano (1925-2000).

<b>Tabla 4. Cumplimiento de las implicaciones teóricas de largo plazo en el caso colombiano 1925-2000</b>						
Relación de las variables en el caso colombiano	Harrod-Domar	Solow	M-R-W	Externalidades		Evidencia
				$\alpha + \mu < 1$	$\alpha + \mu \geq 1$	
1. $y - kf$	No	Si	Si	Si	No	Gráfico 36
2. $\dot{y} - \frac{it}{PIB}$	Si (?)	No (?)	No (?)	No	No	Gráfico 39
3. $y - kh$	n/a	n/a	Si	n/a	n/a	Gráfico 24
4. $\dot{y} - \dot{k}h$	n/a	n/a	Si	n/a	n/a	Gráfico 22
5. $kh - n$	n/a	n/a	No	n/a	n/a	Gráfico 23
6. $\dot{K}F - \dot{K}H$	n/a	n/a	Si	n/a	n/a	Gráfico 48
7. $kf - kh$	n/a	n/a	Si	n/a	n/a	Gráfico 49

Según los resultados del análisis de las implicaciones teóricas y su contraste superficial con el caso colombiano, se podría decir que el modelo menos apto para representar el crecimiento de la economía colombiana (1925-2000) es el de externalidades para el caso en el cual la elasticidad del producto agregado al capital agregado es igual a o mayor que la unidad ( $\alpha + \mu \geq 1$ ). En cuanto a los demás modelos, no parece posible, con el ejercicio anterior, proceder a un rechazo, excepto reconocer que el más completo (y ya de uso factible en Colombia) sería el de M-R-W por incluir la variable de capital humano. Por lo demás, el cumplimiento de la segunda implicación teórica por parte del modelo Harrod-Domar y el incumplimiento de la segunda implicación teórica por parte de los modelos de Solow y M-R-W en el caso colombiano

pueden ser solo aparentes. En efecto si la tasa de cambio técnico (el aumento porcentual de la eficiencia laboral o de la productividad multifactorial) varía simultáneamente y en el mismo sentido con la tasa de inversión (o con su componente permanente), entonces estos últimos modelos pueden predecir movimientos en la misma dirección entre la tasa de inversión y la tasa de crecimiento del producto por trabajador y por habitante. En las secciones IV y VII se presentan dos porciones de la evidencia al respecto (tasa de inversión en capital físico y tasas de crecimiento de la eficiencia laboral y de la productividad multifactorial).

## VII. La contabilidad del crecimiento

A continuación se presentan los resultados de algunos ejercicios denominados “de contabilidad del crecimiento” cuyo propósito fue estimar los ritmos de aumento de la eficiencia laboral y de la productividad multifactorial (asociados en el largo plazo al cambio técnico<sup>21</sup>) bajo el supuesto de que el crecimiento económico puede describirse adecuadamente con modelos en los cuales la producción utiliza, además de capital físico, capital humano y trabajo.

A continuación realizaremos estos ejercicios bajo el supuesto de una función agregada de producción del tipo Cobb-Douglas con las características previamente mencionadas y con dos factores productivos: el capital total (una combinación CES de capitales físico y humano en los términos presentados en la sección V) y trabajo ponderado por su nivel medio de eficiencia:

$$Y_t = C_t^\alpha (A_t L_t)^{(1-\alpha)}; \quad 0 < \alpha < 1$$

Siendo  $C_t$  el índice de capital total,  $A$  el índice de eficiencia laboral y  $L$  el índice de nivel de empleo de equilibrio (medido por la PEA).

Como el índice de capital total está compuesto por los índices de capital humano y físico, suponemos que el valor de  $\alpha$  equivaldría, en un caso alternativo de una función Cobb-Douglas de capital humano, capital físico y trabajo (como la del modelo M-R-W) a la suma de las elasticidades del producto al capital humano y al físico (suponemos, como en la sección IV, que esta última igual a 0,4), y suponemos, además, que la elasticidad del producto al capital humano ha crecido en Colombia a lo largo del siglo XX. De manera específica suponemos, según consta en la Tabla 5, que<sup>22</sup>:

<sup>21</sup> Véase el cap. 4 de Helpman (2004).

<sup>22</sup> Suponemos que la elasticidad del producto al capital humano equivale a la participación del ingreso laboral del grupo de trabajadores que tiene 12 o más años de educación en el ingreso laboral total. Estas son conjeturas nuestras pero las estimaciones de Arango *et al.* (2006) pueden ser utilizadas en su defensa.

Tabla 5. Supuestos sobre elasticidades del producto al capital total	
Período	Elasticidad ( $\alpha$ )
1925-50	$0,06+0,4=0,46$
1951-70	$0,09+0,4=0,49$
1971-83	$0,15+0,4=0,55$
1984-2000	$0,168+0,4=0,568$

De la función de producción se deduce que la productividad multifactorial es:

$$E \equiv A^{1-\alpha}$$

Por tanto, su tasa de crecimiento es:

$$\dot{E} = \dot{Y} - \alpha\dot{C} - (1-\alpha)\dot{L}$$

Con base en este cálculo creamos un índice del nivel de la productividad multifactorial (cuyo valor lo hacemos 1 en 1926). El gráfico 51 presenta el índice “observado” y su componente permanente calculado con el filtro Hodrick-Prescott, en tanto que el gráfico 52 presenta sus tasas de crecimiento (la “observada” y la calculada mediante tal filtro).

Gráfico 51. Productividad multifactorial

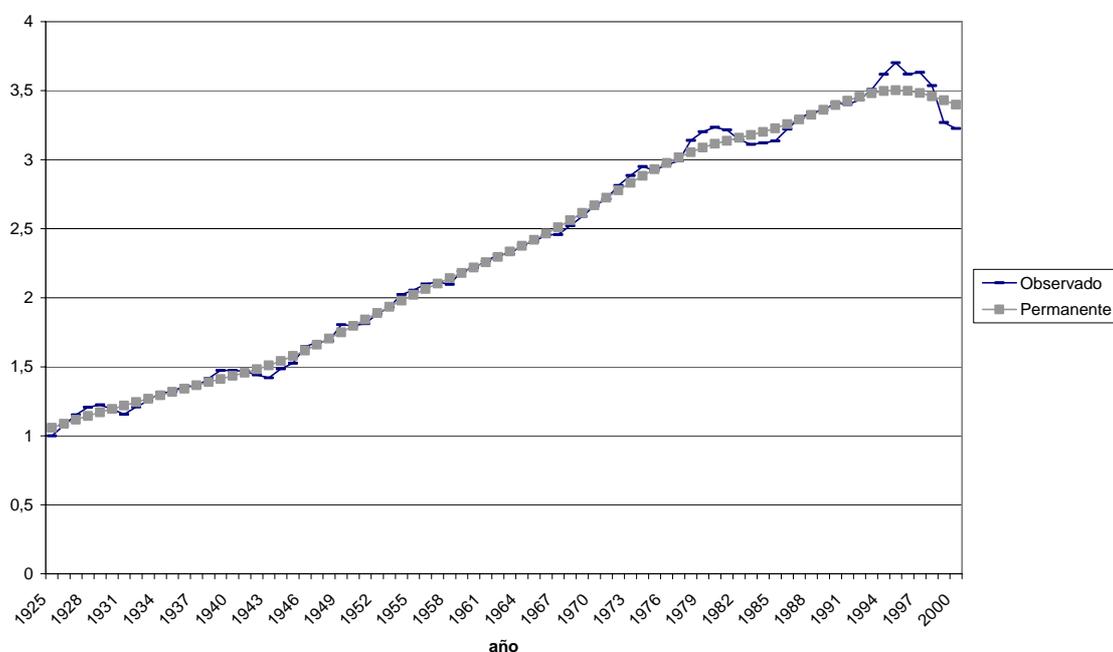
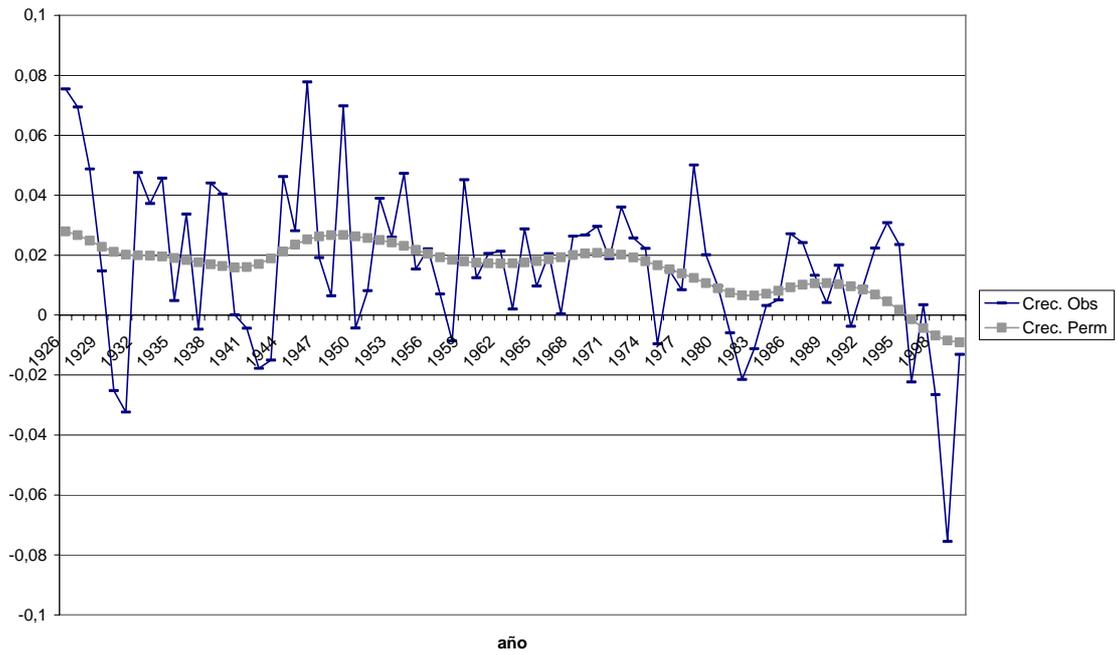


Gráfico 52. Crecimiento productividad multifactorial



Para calcular la eficiencia laboral se tiene que:

$$A_t = (E_t)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Siguiendo similares procedimientos calculamos los índices y las tasas de crecimiento de la eficiencia laboral (gráficos 53 y 54):

Gráfico 53. Eficiencia laboral

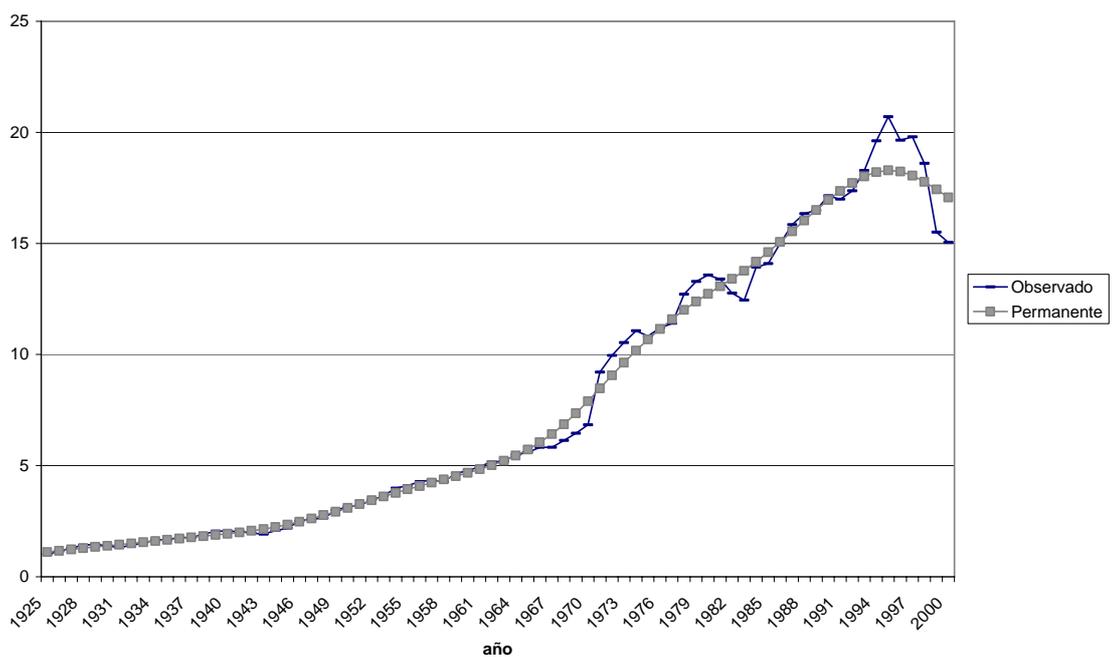
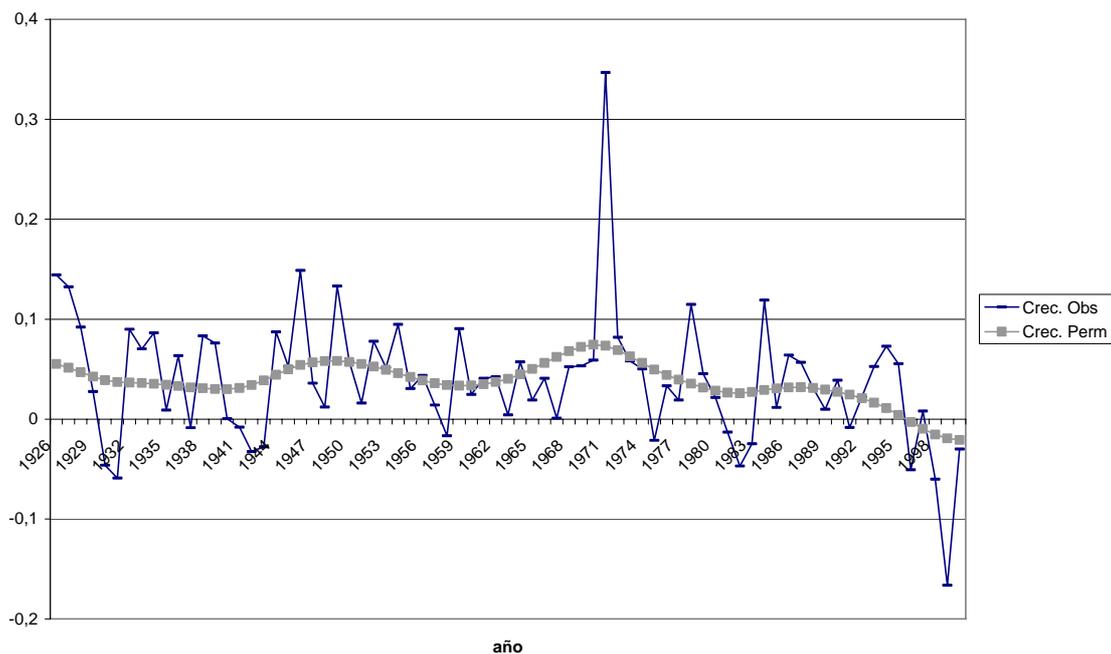


Gráfico 54. Crecimiento eficiencia laboral



Lo anterior da pie a la pregunta: ¿fue la crisis de fines de siglo la causante de que los valores estimados de los componentes permanentes de la productividad multifactorial y la eficiencia laboral se hubiesen desacelerado? Para responder esta pregunta hicimos un ejercicio “contrafactual”: repetimos los cálculos de la manera ya mencionada pero supusimos que las tasas de crecimiento del producto total, el capital total y la PEA de los años 1990-2000 fueron iguales a sus promedios anuales correspondientes al período 1975-1989. Con este supuesto se calcularon de nuevo los índices de la productividad multifactorial y de la eficiencia laboral para compararlos con los verdaderos. De esto se puede deducir lo siguiente: la causa de que estos índices hubiesen tomado valores negativos sí fue asociada a la crisis (y a sus factores determinantes) pero aún sin la crisis se habría registrado un proceso de desaceleración del cambio técnico, como lo hacen evidente los gráficos 56 y 58.

Gráfico 55. Productividad multifactorial ("contrafactual")

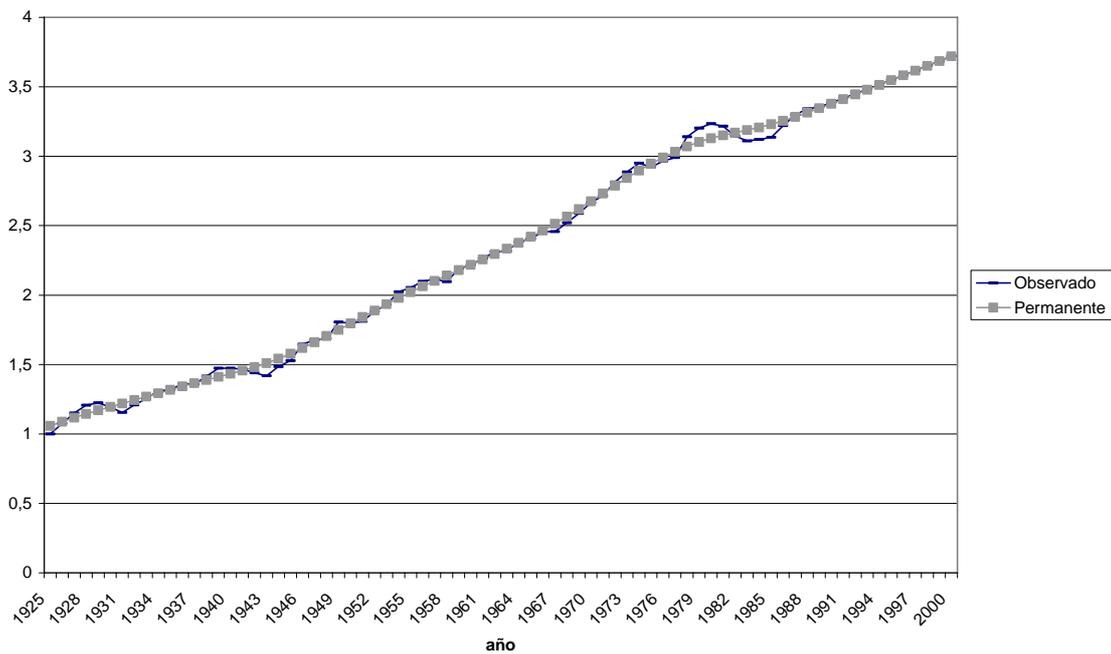


Gráfico 56. Crecimiento productividad multifactorial ("contrafactual")

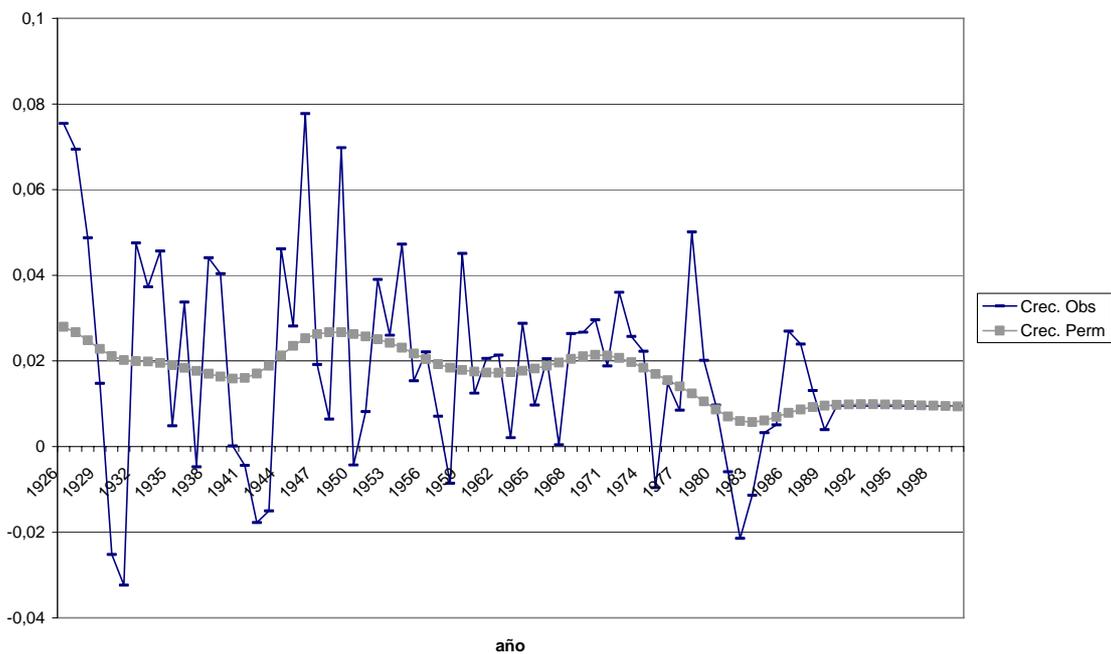


Gráfico 57. Eficiencia laboral ("contrafactual")

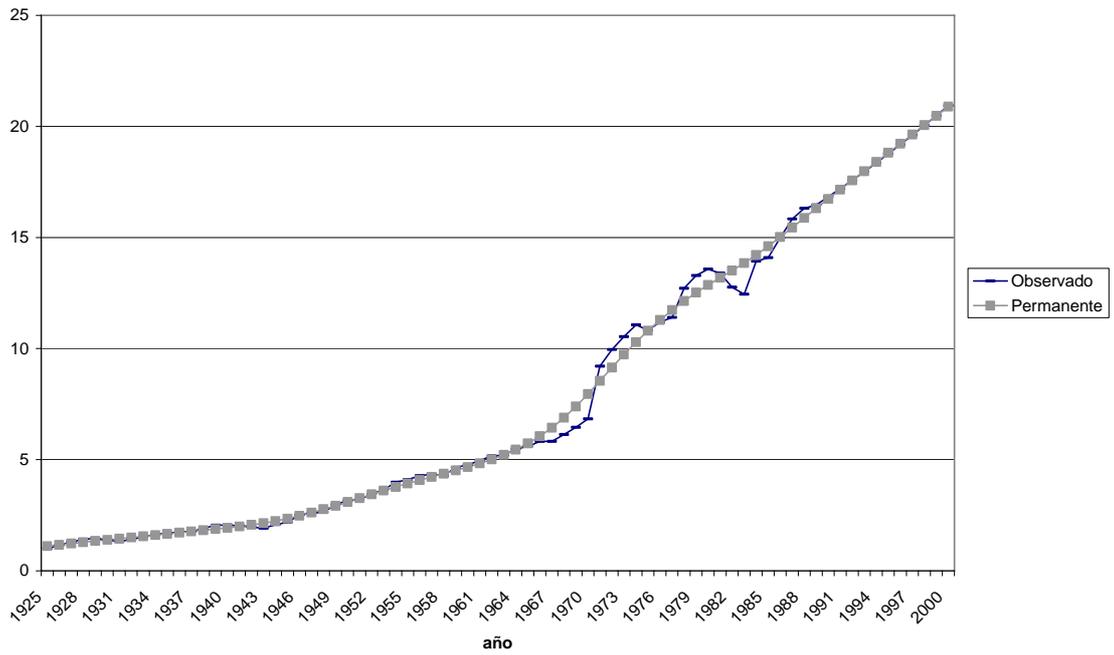
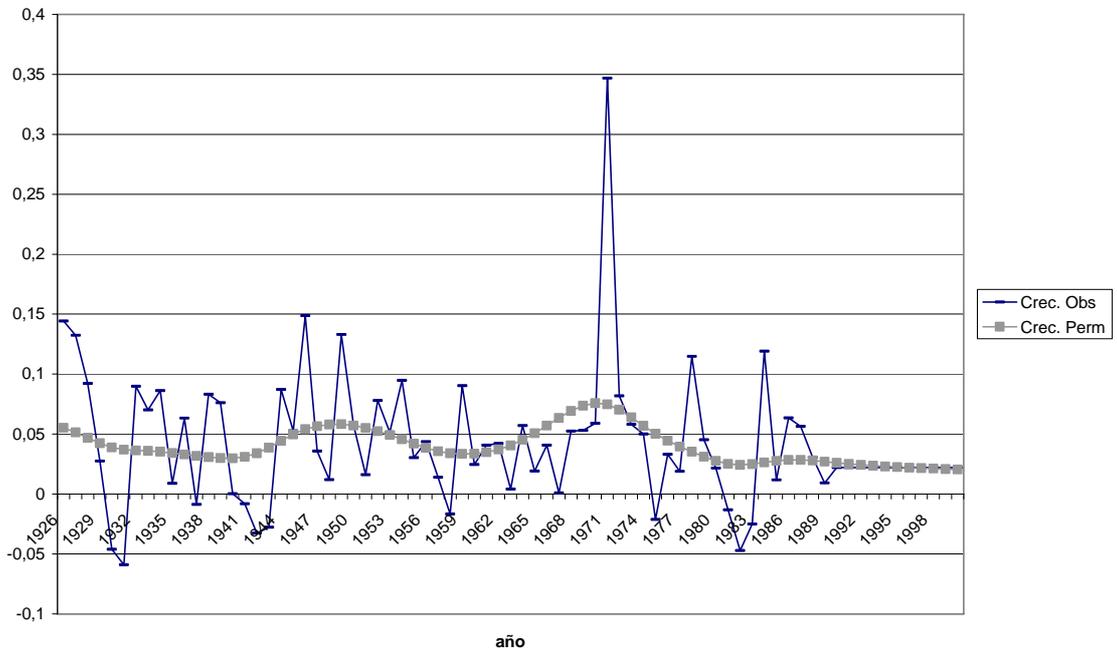


Gráfico 58. Crecimiento eficiencia laboral ("contrafactual")



## VIII. Resumen y conclusiones

En este documento presentamos una base de datos demográficos y macroeconómicos colombianos del período 1925-2000. También incluimos los resultados de nuestra utilización de estos datos. Del examen sobresalen algunos rasgos interesantes.

En primer lugar, el país inició y culminó de manera casi completa su transición demográfica: desde principios y hasta mediados del siglo XX la tasa de crecimiento de la población ascendió; posteriormente descendió, hasta llegar, al final, a niveles inferiores a los de los años veinte. Esto fue posible gracias al comportamiento en forma de “u” invertida de la tasa de natalidad y a las caídas permanentes de las tasas de mortalidad de niños y adultos. De manera simultánea el esfuerzo educativo de la sociedad fue aumentando así como la participación de la población en las actividades económicas. Los modelos de crecimiento económico (el aumento persistente del producto por habitante) que explican el despegue de la economía y la transición demográfica con base en un cambio técnico que altera las escogencias entre cantidad de niños y calidad de su crianza y educación pueden ser útiles para interpretar estos procesos pero también deben afrontar el reto de aclarar un hecho colombiano que parece paradójico a la luz de estos modelos: la desaceleración casi simultánea de las tasas de acumulación de capital humano, natalidad y crecimiento poblacional.

El ritmo de crecimiento económico fue, en promedio, 2,1% anual y su varianza (una medida usual de inestabilidad) fue 0,06% entre 1925 y 2000. Tal promedio esconde un giro (una “u” invertida), modesto, es cierto. En efecto, entre 1925 y 1950 la tasa de crecimiento llegó a 2,1% anual, aproximadamente, en tanto que entre 1951 y 1975 subió a 2,2%, y entre 1976 y 2000 fue 1,9%. Y el grado de inestabilidad de la economía, medido por la varianza de la tasa de crecimiento económico, mostró la forma de “u”: alta (0,11%) entre 1925 y 1950, baja (0,02%) entre 1951 y 1975 y, de nuevo, alta (0,05%, aunque menos que entre 1925 y 1950) en el último cuarto del siglo.

La tasa de inversión en capital físico (inversión/PIB) sostuvo una relación positiva pero nada estrecha con la tasa de crecimiento económico. Su tendencia de largo plazo fue ligeramente declinante en medio de oscilaciones, y entre mediados de los años 30 y mediados de los ochentas fue casi nula su tendencia (fue casi estacionaria), así que podría decirse (con algún margen de error) que en tales años su nivel medio fue 21% aproximadamente. Esta tasa no solo parece baja si se la compara con las de economías en desarrollo de alto crecimiento durante el siglo XX, como varias del este asiático, sino

que resultó inferior a lo que, en esos mismos años, pudo ser la tasa de ahorro nacional potencial. Esta hipótesis (hipótesis de “sub-inversión”) merecería ser examinada con mayor detalle en otra ocasión.

Los datos presentados en la sección sobre capital físico permitieron estimar, con base en ciertos supuestos, los niveles de dos variables: la tasa de rendimiento real del capital físico de estado estacionario y el salario real. La tasa de rendimiento que estimamos está en el rango contemplado por Harberger, 8% - 10% anual, cuando hizo su estimación pionera para el caso colombiano. El salario real de equilibrio es 60% de la relación PIB/PEA. Tal salario resulta relativamente pequeño cuando se lo compara con el salario real mínimo integral de los últimos años. Por ejemplo, en el año 2000 este último equivalió a 84% del salario de equilibrio, y en 2007 a 74%.

Un modelo de crecimiento económico relativamente adecuado para interpretar el caso colombiano del siglo XX, excepto en lo referente a cuestiones demográficas y decisiones sobre educación, es el modelo Mankiw-Romer-Weil, M-R-W). Cabe anotar, en relación con esto, que la tasa de crecimiento del capital total (una combinación de capital físico y humano) se aceleró entre 1950 y 1975 y se desaceleró entre 1976 y 2000; esto debió contribuir, si nos basamos en este modelo, a la oscilación de largo plazo ya mencionada de las tasas de crecimiento de los productos por trabajador y por habitante en la segunda mitad del siglo.

Con todo, nuestros cálculos de la productividad total multifactorial (y la eficiencia laboral) indican que sus tasas de crecimiento, esto es, los componentes exógenos del crecimiento o la parte de éste no explicada por la acumulación del capital (total: físico y humano) por trabajador, según el modelo M-R-W, mostraron unas tendencias declinantes desde mediados de los años 70. La crisis de fin de siglo acentuó estos comportamientos pero aún sin la ocurrencia de este evento se habría podido registrar dicha tendencia.

¿Cuáles son las implicaciones de política económica que se derivan de lo anterior? La primera es la siguiente: convendría elevar de manera perdurable las tasas de ahorro y de inversión en capital físico y humano. Esto, según los modelos reseñados (y no rechazados), podría tener efectos permanentes (modelo Harrod-Domar) o transitorios (modelo M-R-W) sobre las tasas de crecimiento económico y, en todo caso,

efectos permanentes sobre los niveles de los ingresos por trabajador y por habitante<sup>23</sup>. La segunda implicación hace referencia a los posibles determinantes de la productividad multifactorial. Nuestra intuición es que estos determinantes tienen que ver, en países como Colombia, con una mejor asignación entre sectores y empresas de los recursos productivos de la sociedad, y con poder reducir o eliminar de manera permanente las barreras a la competencia, a la innovación y a la adaptación de nuevas tecnologías<sup>24</sup>.

## Referencias

- Arango, Luis Eduardo, Paula Herrera y Carlos Esteban Posada (2007). “El salario mínimo: aspectos generales sobre los casos de Colombia y otros países”. *Borradores de Economía*, No. 436.
- Arango Luis Eduardo, Carlos Esteban Posada, José Darío Uribe (2006), “Cambios en la estructura de los salarios urbanos en Colombia”, *Lecturas de Economía* No. 64 (junio).
- Caselli, Francesco y James Feyrer (2007). “The Marginal Product of Capital”. *The Quarterly Journal of Economics*. Vol. CXXII, Issue 2.
- CEPAL (2007). *Anuario estadístico de América Latina y el Caribe*. División de estadística y proyecciones económicas, 2006.
- Desmet, Klaus, y Stephen Parente (2007). “Why England First? The End of Resistance and the Start of the Revolution” (octubre). Documento no publicado.
- Flórez, Carmen Elisa (2000). *Las transformaciones sociodemográficas en Colombia durante el siglo XX*. Banco de la República.
- Galor, Oded, y David Weil (2000). “Population, Technology and Growth: From the Malthusian Stagnation to the Demographic Transition and beyond”, *American Economic Review*, Vol. 90, No. 4.
- GRECO (2002), Grupo de Estudios del Crecimiento Económico. *El Crecimiento Económico colombiano en el Siglo XX*, Banco de la República – Fondo de Cultura Económica.

---

<sup>23</sup> Afirmar que no rechazamos estos modelos no obsta para aceptar que estos sí se podrían rechazar bajo un examen simultáneo de casos de varios países (análisis de corte transversal) o de varios países y con cifras de cada uno que cambian a través del tiempo. Véase, al respecto, una crítica del modelo M-R-W en Helpman (2004, p. 27).

<sup>24</sup> Son especialmente ilustrativos al respecto los capítulos 7 y 9 de Parente y Prescott (2002) y el capítulo 7 de Jones (2002). En cuanto al asunto específico de los efectos sobre crecimiento económico de las políticas comerciales de protección *versus* liberalización (que afectan el grado de competencia), dice así Helpman: “...it is fair to conclude that the evidence favors a negative effect of protection on rates of growth in the post-World War II period. ...” (p. 79).

- Harberger, Arnold (1969). “La tasa de rendimiento de capital en Colombia”, *Revista de Planeación y Desarrollo*. Vol 1. No. 3, pp. 3-42.
- Helpman, Elhanan (2004). *The Mystery of Economic Growth*. Harvard University Press.
- Jones, Charles (2002). *Introduction to Economic Growth* (2a. edición). W. W. Norton & Co.
- Londoño, Juan Luis (1995). *Distribución del ingreso y desarrollo económico. Colombia en el siglo XX*. Tercer Mundo Editores – Banco de la República – Fedesarrollo.
- Lucas, Jr., Robert E. (2002). “Fertility and Sustained Growth”: sección 6 del capítulo 5 (“The Industrial Revolution: Past and Future”) de *Lectures on Economic Growth*, Harvard University Press.
- Mankiw, N. Gregory, David Romer, y David Weil (1991). “A contribution to the empirics of economic growth”, *Quarterly Journal of Economics*, No. 107 (mayo)
- “Oxford Latin American Economic History Database”, <http://oxlad.geh.ox.ac.uk/search.php>.
- Parente, Stephen, y Edward Prescott (2002). *Barriers to Riches*. The MIT Press.
- Ramírez, María Teresa, y Juana P. Téllez (2007). “La educación primaria y secundaria en Colombia en el siglo XX” en *Economía colombiana en el siglo XX. Un análisis cuantitativo*, James Robinson y Miguel Urrutia, editores, Banco de la República – Fondo de Cultura Económica, 2007.
- Romer David (1996). *Advanced Macroeconomics*, McGraw Hill.
- Sala-I-Martin, Xavier (1994). *Apuntes de crecimiento económico* (segunda edición, 2000), Antoni Bosch.
- Solow, Robert M. (1956). “A contribution to the theory of economic growth”, *Quarterly Journal of Economics*, No. 70, I (febrero).
- Tribín, Ana María (2006). “Tasa de rendimiento de capital de Colombia para el período entre 1990 y 2001”, *Borradores de Economía*, No. 398, Banco de la República.
- Urrutia, Miguel, y Carlos Esteban Posada (2007). “Un siglo de crecimiento económico”, cap. 1 de *Economía colombiana en el siglo XX. Un análisis cuantitativo* (J. Robinson y M. Urrutia, editores), Banco de la República – Fondo de Cultura Económica.
- Vargas, Carmiña (2002). *Educación y crecimiento en Colombia: una comprobación empírica*. Tesis de Maestría en Economía, Universidad Nacional de Colombia.

## Anexo 1. Los datos

	Población total (1)	Crecimiento Población (2)	PEA (3)	Crecimiento PEA (4)	Tasa de mortalidad adultos (5)	Tasa de mortalidad infantil (6)
1925	6764542		2418872		25,00	182,88
1926	6901262	0,0202	2463595	0,0185	25,00	182,88
1927	7040746	0,0202	2507656	0,0179	25,00	182,88
1928	7183048	0,0202	2555515	0,0191	25,00	182,88
1929	7328226	0,0202	2602321	0,0183	25,00	182,88
1930	7476339	0,0202	2651048	0,0187	25,00	182,88
1931	7627445	0,0202	2705508	0,0205	24,00	166,38
1932	7781606	0,0202	2761983	0,0209	24,00	166,38
1933	7938882	0,0202	2819789	0,0209	24,00	166,38
1934	8099337	0,0202	2878258	0,0207	24,00	166,38
1935	8263035	0,0202	2938733	0,0210	24,00	166,38
1936	8430041	0,0202	3001288	0,0213	22,00	166,38
1937	8600423	0,0202	3062608	0,0204	22,00	166,38
1938	8774248	0,0202	3127964	0,0213	22,00	166,38
1939	8988276	0,0244	3187785	0,0191	22,00	156,87
1940	9207525	0,0244	3249012	0,0192	22,00	156,87
1941	9432122	0,0244	3312495	0,0195	22,00	156,87
1942	9662197	0,0244	3377051	0,0195	22,00	156,87
1943	9897885	0,0244	3442690	0,0194	20,00	156,87
1944	10139322	0,0244	3511741	0,0201	20,00	156,87
1945	10386648	0,0244	3582013	0,0200	20,00	142,99
1946	10640007	0,0244	3638899	0,0159	20,00	142,99
1947	10899546	0,0244	3699003	0,0165	18,00	142,99
1948	11165416	0,0244	3761352	0,0169	18,00	142,99
1949	11437771	0,0244	3822811	0,0163	18,00	142,99
1950	11716769	0,0244	3887468	0,0169	18,00	142,99
1951	12002574	0,0244	3942668	0,0142	16,68	123,17
1952	12365643	0,0302	4021513	0,0200	16,68	123,17
1953	12739694	0,0302	4101934	0,0200	16,68	123,17
1954	13125060	0,0302	4183964	0,0200	16,68	123,17
1955	13522083	0,0302	4263235	0,0189	16,68	123,17
1956	13931116	0,0302	4355413	0,0216	13,32	105,34
1957	14352522	0,0302	4449583	0,0216	13,32	105,34
1958	14786675	0,0302	4545789	0,0216	13,32	105,34
1959	15233961	0,0302	4644075	0,0216	13,32	105,34
1960	15694777	0,0302	4741045	0,0209	13,32	105,34
1961	16169532	0,0302	4864738	0,0261	11,48	92,10
1962	16658648	0,0302	4991657	0,0261	11,48	92,10
1963	17162560	0,0302	5121887	0,0261	11,48	92,10
1964	17681714	0,0302	5255516	0,0261	11,48	92,10
1965	18193803	0,0290	5384997	0,0246	11,48	92,10
1966	18720723	0,0290	5551514	0,0309	10,06	82,18
1967	19262903	0,0290	5723180	0,0309	10,06	82,18
1968	19820785	0,0290	5900155	0,0309	10,06	82,18
1969	20394825	0,0290	6082602	0,0309	10,06	82,18
1970	20985489	0,0290	6270464	0,0309	10,06	82,18

<b>1971</b>	21593260	0,0290	6528074	0,0411	8,71	73,03
<b>1972</b>	22218633	0,0290	6796268	0,0411	8,71	73,03
<b>1973</b>	22862118	0,0290	7075480	0,0411	8,71	73,03
<b>1974</b>	23389727	0,0231	7324043	0,0351	8,71	73,03
<b>1975</b>	23929512	0,0231	7571298	0,0338	8,71	73,03
<b>1976</b>	24481754	0,0231	7827796	0,0339	7,63	59,43
<b>1977</b>	25046741	0,0231	8092984	0,0339	7,63	59,43
<b>1978</b>	25624766	0,0231	8367156	0,0339	7,63	59,43
<b>1979</b>	26216131	0,0231	8650616	0,0339	7,63	59,43
<b>1980</b>	26821143	0,0231	8934123	0,0328	7,63	59,43
<b>1981</b>	27440118	0,0231	9217136	0,0317	6,60	41,16
<b>1982</b>	28073377	0,0231	9509114	0,0317	6,60	41,16
<b>1983</b>	28721251	0,0231	9810341	0,0317	6,60	41,16
<b>1984</b>	29384076	0,0231	10121110	0,0317	6,60	41,16
<b>1985</b>	30062198	0,0231	10434589	0,0310	6,60	41,16
<b>1986</b>	30918418	0,0285	10877718	0,0425	6,20	39,66
<b>1987</b>	31799025	0,0285	11339665	0,0425	6,20	39,66
<b>1988</b>	32704712	0,0285	11821230	0,0425	6,20	39,66
<b>1989</b>	33636195	0,0285	12323246	0,0425	6,20	39,66
<b>1990</b>	34594209	0,0285	12824073	0,0406	6,20	39,66
<b>1991</b>	35579508	0,0285	13349431	0,0410	5,91	36,96
<b>1992</b>	36592870	0,0285	13896312	0,0410	5,91	36,96
<b>1993</b>	37635094	0,0285	14465596	0,0410	5,91	36,96
<b>1994</b>	38025863	0,0104	15074530	0,0421	5,91	36,96
<b>1995</b>	38444147	0,0110	15403694	0,0218	5,91	36,96
<b>1996</b>	38867033	0,0110	16292017	0,0577	5,75	34,25
<b>1997</b>	39294570	0,0110	16830493	0,0331	5,79	30,00
<b>1998</b>	39726811	0,0110	17464642	0,0377	5,68	29,00
<b>1999</b>	40163806	0,0110	18222557	0,0434	5,60	28,10
<b>2000</b>	40605607	0,0110	19399468	0,0646	5,55	27,20

(1) Se toman los datos de los censos (1973, 1985, 1993, 2005) y se calcula una tasa de crecimiento (geométrica) entre censos; dicha tasa se usa para estimar los datos inter-censales. De 1925 a 1972 se calculan los datos a partir de las tasa de crecimiento provenientes de GRECO.

(3): Se toma la relación PEA/POBT calculada en GRECO y se aplica a la población total calculada para encontrar la PEA (1925-1995); de 1996 hasta 2000 se toman los datos de la encuesta nacional de hogares.

(5) Por mil habitantes. De 1925 hasta 1950 se toman los datos de Carmen Elisa Flórez; de 1951 hasta el 2000 se toman de DNP.

(6) Por mil habitantes. De 1925 hasta 1993 se toman los datos de Carmen Elisa Flórez; de 1994 hasta 2000 de la CEPAL.

	Tasa de natalidad (7)	Total alumnos en secundaria (8)	Total alumnos en secundaria (9)	Índice de capital humano Vargas (10)	Índice de capital humano (11)	Índice de capital total (12)
1925	42,83	28048	33200		1,00	1,00
1926	42,83	29238	33600		1,01	1,02
1927	42,83	30479	33900		1,02	1,05
1928	42,83	31772	34000		1,04	1,08
1929	42,83	33120	34600		1,05	1,11
1930	42,83	34526	35200		1,06	1,12
1931	42,83	35991	35500		1,08	1,13
1932	42,83	37518	36100		1,09	1,15
1933	42,83	39110	37000		1,10	1,17
1934	42,83	40770	31000		1,12	1,19
1935	42,83	41560	29000		1,13	1,21
1936	42,83	45114	32000		1,15	1,23
1937	42,83	48815	33000		1,17	1,25
1938	42,83	53641	34000		1,19	1,28
1939	44,10	58762	35000		1,21	1,31
1940	44,10	56135	35000		1,23	1,34
1941	44,10	56330	35000		1,25	1,37
1942	44,10	60221	36000		1,27	1,40
1943	44,10	64573	40000		1,29	1,43
1944	44,10	64568	40000		1,31	1,46
1945	44,10	56957	36000		1,33	1,48
1946	44,10	67965	46000		1,35	1,52
1947	44,10	68642	47000		1,37	1,55
1948	44,10	59354	42000		1,39	1,59
1949	44,10	57004	48000		1,41	1,62
1950	44,10	77311	56000	372171	1,43	1,65
1951	45,47	99916	64000	382706	1,45	1,69
1952	45,47	103333	65000	394193	1,48	1,74
1953	45,47	108718	66000	407815	1,52	1,79
1954	45,47	114686	70000	422240	1,55	1,84
1955	45,47	131598	77000	439860	1,58	1,90
1956	45,47	153742	93000	459795	1,62	1,95
1957	45,47	176964	108000	480801	1,66	2,02
1958	45,47	192079	115000	504658	1,71	2,08
1959	45,47	222584	128000	530414	1,76	2,15
1960	45,47	243226	140000	558207	1,82	2,22
1961	45,47	272383	156000	588577	1,88	2,30
1962	45,47	303344	175000	621193	1,94	2,39
1963	45,47	344945	202000	657085	2,01	2,47
1964	45,47	374700	229000	695809	2,08	2,56
1965	41,07	420130	266000	738185	2,16	2,65
1966	41,07	509857	320000	785402	2,24	2,76
1967	41,07	573388	377000	838350	2,33	2,88
1968	41,07	640549	447000	894213	2,43	3,00
1969	41,07	725180	523000	955962	2,53	3,12
1970	41,07	818839	750100	1023168	2,64	3,26
1971	41,07	899890	846200	1095466	2,76	3,41
1972	41,07	1003283	954600	1174635	2,88	3,57

1973	41,07	1096791	1076900	1261543	3,01	3,73
1974	36,50	1213430	1214900	1355644	3,15	3,91
1975	36,50	1306275	1370600	1457142	3,29	4,09
1976	36,50	1418091	1436400	1565559	3,43	4,27
1977	36,50	1531173	1505500	1662400	3,59	4,46
1978	36,50	1633635	1577900	1770874	3,75	4,67
1979	32,64	1691356	1653700	1889386	3,91	4,88
1980	32,64	1733192	1733200	2007307	4,08	5,09
1981	32,64	1768124	1768100	2126389	4,24	5,31
1982	32,64	1718128	1816600	2253301	4,40	5,54
1983	32,64	1720002	1816600	2389112	4,56	5,75
1984	30,10	1725052	1889000	2531867	4,72	5,96
1985	30,10	1742410	1934000	2671415	4,87	6,15
1986	30,10	1856789	2136200	2815683	5,02	6,34
1987	30,10	1973025	2187800	2962081	5,17	6,53
1988	30,10	2069194	2235300	3109517	5,33	6,74
1989	30,10	2170050	2282800	3257833	5,48	6,94
1990	27,51	2275823	2330400	3404761	5,64	7,13
1991	27,51	2386751	2377900	3549673	5,80	7,33
1992	27,51	2529115	2686500	3695874	5,97	7,55
1993	27,51	2790139	2796000	3872187	6,13	7,80
1994	27,51	2879681	2935800	4062891	6,31	8,07
1995	24,80	3080092	3025400	4273812	6,48	8,34
1996	24,80	3114418	3317800	4476848	6,66	8,61
1997	24,80	3247379		4685003	6,85	8,86
1998	24,80	3549368		4909889	7,03	9,11
1999	24,80	3594083		5137734	7,22	9,34
2000	24,80	3575279			7,42	9,58

(7) Por mil habitantes. De 1925 hasta 1993 se toman los datos de Carmen Elisa Flórez; de 1994 hasta 2000 de la CEPAL.

(8) Datos tomados de María Teresa Ramírez y Juana Patricia Téllez (2007)

(9) Datos Oxford Latin American Economic History Database

(10) Índice de capital humano estimado por Carriña Vargas

(11) Índice propuesto de capital humano

(12) Índice propuesto de capital total

	<b>PIB real (año base 1994) Millones de pesos (13)</b>	<b>Inversión en capital fijo (año base 1994) (14)</b>	<b>Variación en existencias (año base 1994) (15)</b>	<b>Inversión total en capital físico (año base 1994) (16)</b>
1925	2729863,8	662866,46	65709	728576
1926	2990504,1	721583,63	79790	801373
1927	3259873,9	783062,13	81667	864729
1928	3499313,8	1001260,92	124847	1126108
1929	3625269,1	859920,03	89177	949097
1930	3594092,1	638943,93	60077	699021
1931	3536726,3	602918,00	45996	648914
1932	3771177,8	742998,11	152070	895068
1933	3983181,9	663153,36	57261	720414

<b>1934</b>	4233845,5	666191,71	52567	718759
<b>1935</b>	4337353,3	826961,38	81667	908628
<b>1936</b>	4566816,5	790765,06	76035	866800
<b>1937</b>	4637900,2	870314,55	81667	951982
<b>1938</b>	4939694,2	892396,82	84483	976880
<b>1939</b>	5242735,3	983658,40	98564	1082222
<b>1940</b>	5356219,8	1028426,15	128602	1157028
<b>1941</b>	5446009,8	1051566,00	149253	1200819
<b>1942</b>	5457233,5	981397,18	157702	1139099
<b>1943</b>	5479681,0	933259,84	249694	1182954
<b>1944</b>	5850064,5	986945,44	-25345	961601
<b>1945</b>	6124422,7	1053253,26	232798	1286051
<b>1946</b>	6713045,7	1145050,69	-80728	1064322
<b>1947</b>	6973686,0	1533329,63	226227	1759557
<b>1948</b>	7171972,1	1547253,19	200882	1748135
<b>1949</b>	7798007,6	1263640,83	-223411	1040230
<b>1950</b>	7884056,3	1461630,53	332534	1794164
<b>1951</b>	8104720,3	1557873,04	238093	1795966
<b>1952</b>	8619309,8	1708681,21	213487	1922168
<b>1953</b>	9058660,5	1988777,42	-167723	1821055
<b>1954</b>	9707901,9	2443267,74	-14086	2429182
<b>1955</b>	10092983,3	2586763,49	-8677	2578086
<b>1956</b>	10572559,4	2587284,38	179194	2766478
<b>1957</b>	10929406,2	2343418,56	705066	3048485
<b>1958</b>	11137011,7	2029237,41	389115	2418352
<b>1959</b>	11935149,2	2139819,40	360468	2500287
<b>1960</b>	12413442,6	2507274,57	406054	2913328
<b>1961</b>	13051167,7	2770914,56	512084	3282998
<b>1962</b>	13734532,1	2510462,07	164097	2674560
<b>1963</b>	14175235,9	2480996,37	362607	2843604
<b>1964</b>	15030175,1	2813064,88	438148	3251213
<b>1965</b>	15633714,3	2740537,80	532707	3273245
<b>1966</b>	16503577,1	3278939,02	1031062	4310001
<b>1967</b>	17115707,6	2848842,55	185078	3033920
<b>1968</b>	18185919,5	3458601,88	481416	3940018
<b>1969</b>	19338689,8	3493337,52	432442	3925780
<b>1970</b>	20640504,1	4107650,24	591191	4698841
<b>1971</b>	21929433,4	4283020,37	597788	4880808
<b>1972</b>	23673533,2	4178553,66	568011	4746565
<b>1973</b>	25319739,9	4558108,21	631784	5189892
<b>1974</b>	26947693,3	5461884,73	1150822	6612706
<b>1975</b>	27773600,3	4477773,84	398743	4876517
<b>1976</b>	29272796,4	4894536,96	428282	5322819
<b>1977</b>	30701217,3	5701326,85	1126275	6827602
<b>1978</b>	33497934,8	6083028,39	1105057	7188086
<b>1979</b>	35512375,0	6063774,08	917959	6981733
<b>1980</b>	37234398,2	6723230,58	911540	7634771
<b>1981</b>	38422747,5	7613022,96	1396582	9009605
<b>1982</b>	39046379,1	8019051,40	1603055	9622107
<b>1983</b>	40002627,7	7846609,71	1377919	9224529
<b>1984</b>	41485471,2	7384313,55	883487	8267801
<b>1985</b>	43003168,5	6672233,29	539008	7211241

<b>1986</b>	45701670,8	6962607,88	379665	7342273
<b>1987</b>	48442599,0	7604175,34	917068	8521243
<b>1988</b>	50839266,6	8213220,39	817932	9031152
<b>1989</b>	52841623,1	7611460,78	618233	8229694
<b>1990</b>	55506536,5	7522215,28	748572	8270787
<b>1991</b>	57154902,1	7242761,76	677330	7920092
<b>1992</b>	59689627,3	10174775,60	931889	11106665
<b>1993</b>	63203248,5	14018309,70	1233751	15252061
<b>1994</b>	67532862,0	16538628,10	1496594	18035222
<b>1995</b>	71046217,0	18293020,62	2367045	20660066
<b>1996</b>	72506824,0	16094209,97	380092	16474302
<b>1997</b>	74994021,0	15990428,44	559142	16549570
<b>1998</b>	75421325,0	14981731,72	529570	15511302
<b>1999</b>	72250601,0	9194292,00	-283676	8910616
<b>2000</b>	74363831	10585830,55	1031866	11617697

(13) 1994 hasta 2000: datos del DANE; de 1925-1993, datos calculados a partir de la tasa de crecimiento de los datos de GRECO.  
(14) y (15) 1991-2000 datos del DANE; de 1925-1989 datos calculados a partir de la tasa de crecimiento de los datos de GRECO a precios de 1975.  
(16) suma de (14) y (15).

	<b>Acervo de capital fijo (año base 1994) Millones de pesos (17)</b>	<b>Inventarios (año base 1994) Millones de pesos (18)</b>	<b>Capital físico total (año base 1994) Millones de pesos (19)</b>
<b>1925</b>	9306773	1053250,34	10360023
<b>1926</b>	9570463	1118959,4	10689422
<b>1927</b>	9882658	1198748,98	11081407
<b>1928</b>	10397692	1280415,95	11678108
<b>1929</b>	10746046	1405263,16	12151309
<b>1930</b>	10856285	1494439,75	12350724
<b>1931</b>	10925073	1554516,6	12479590
<b>1932</b>	11130558	1600512,94	12731071
<b>1933</b>	11246088	1752582,48	12998670
<b>1934</b>	11358972	1809843,24	13168815
<b>1935</b>	11627072	1862410,48	13489482
<b>1936</b>	11845785	1944077,46	13789862
<b>1937</b>	12133287	2020112,23	14153399
<b>1938</b>	12428726	2101779,2	14530505
<b>1939</b>	12800891	2186262,28	14987153
<b>1940</b>	13199513	2284825,87	15484339
<b>1941</b>	13601663	2413427,89	16015091
<b>1942</b>	13913859	2562681,33	16476540
<b>1943</b>	14162557	2720383,07	16882940
<b>1944</b>	14452704	2970077,5	17422782
<b>1945</b>	14794885	2944732,58	17739617
<b>1946</b>	15212027	3177530,39	18389557
<b>1947</b>	15996925	3096802,12	19093727
<b>1948</b>	16757129	3323029,02	20080158
<b>1949</b>	17196319	3523911,01	20720230
<b>1950</b>	17811891	3300500,2	21112391
<b>1951</b>	18493419	3633033,77	22126453
<b>1952</b>	19292224	3871126,62	23163351
<b>1953</b>	20331824	4084613,77	24416438
<b>1954</b>	21774766	3916890,85	25691657
<b>1955</b>	23290211	3902804,98	27193016
<b>1956</b>	24731617	3894127,6	28625745
<b>1957</b>	25858240	4073321,3	29931561
<b>1958</b>	26615252	4778387,57	31393640
<b>1959</b>	27445601	5167502,36	32613103
<b>1960</b>	28602552	5527969,95	34130522
<b>1961</b>	29966221	5934023,45	35900244
<b>1962</b>	31002345	6446107,32	37448452
<b>1963</b>	31958026	6610204,76	38568231
<b>1964</b>	33198756	6972811,97	40171568
<b>1965</b>	34305915	7410959,87	41716875
<b>1966</b>	35897003	7943667,36	43840670
<b>1967</b>	36979713	8974729,45	45954442
<b>1968</b>	38618913	9159807,12	47778720
<b>1969</b>	40212200	9641223,01	49853423
<b>1970</b>	42341410	10073665,2	52415075

<b>1971</b>	44541233	10664855,8	55206089
<b>1972</b>	46528358	11262643,6	57791002
<b>1973</b>	48797271	11830655	60627926
<b>1974</b>	51858330	12462439	64320769
<b>1975</b>	53784674	13613260,8	67397935
<b>1976</b>	56033005	14012003,9	70045009
<b>1977</b>	58977508	14440285,7	73417794
<b>1978</b>	62158843	15566561,2	77725404
<b>1979</b>	65164402	16671618,7	81836021
<b>1980</b>	68681544	17589577,7	86271122
<b>1981</b>	72915435	18501117,9	91416553
<b>1982</b>	77347047	19897699,5	97244747
<b>1983</b>	81388182	21500755	102888937
<b>1984</b>	84768197	22878674,3	107646871
<b>1985</b>	87269835	23762161,6	111031997
<b>1986</b>	89938767	24301169,1	114239936
<b>1987</b>	93117955	24680833,9	117798789
<b>1988</b>	96749772	25597901,4	122347673
<b>1989</b>	99601144	26415833	126016977
<b>1990</b>	102222983	27034066,1	129257049
<b>1991</b>	104436374	27782638,1	132219012
<b>1992</b>	109472880	28459968,1	137932848
<b>1993</b>	118105124	29391857,1	147496981
<b>1994</b>	128832980	30625608,1	159458588
<b>1995</b>	140787418	32122202,1	172909620
<b>1996</b>	149954887	34489247,1	184444134
<b>1997</b>	158567535	34869339,1	193436874
<b>1998</b>	165747744	35428481,1	201176225
<b>1999</b>	166787247	35958051,1	202745298
<b>2000</b>	169167145	35674375,1	204841520

(17) 1950-2000: datos del departamento de programación e inflación, Banco de la República.

1925-1949: datos calculados siguiendo la misma metodología y tasas de crecimiento de GRECO; para el cálculo se supone una depreciación constante de 4,92%

(18) 1925-2000: se siguió la metodología de Harberger

(19) suma de (17) y (18)

## 2. 1. El modelo de Lucas de acumulación endógena de capital humano y transición demográfica<sup>25</sup>.

El punto de partida de Lucas (2002) es suponer un agente representativo (un individuo adulto) con una función de utilidad que depende de su consumo ( $c$ ), el número de hijos que tenga ( $n$ ) y la utilidad futura de sus hijos ( $u$ ).

$$(1) W(c, n, u) = c^{1-\beta} n^\eta u^\beta; \quad 0 < \beta < 1; \eta > 0$$

En la formulación (1) es necesario suponer que la función de utilidad es homogénea de grado uno en los argumentos  $c$  y  $u$  para garantizar un sendero balanceado de crecimiento.

Se supone que el individuo adulto solo vive un período; por lo tanto, las personas que están presentes hoy son los niños de ayer. Por la forma de plantearse el problema, la tasa de crecimiento de la población es  $n-1$ , así: la tasa bruta de crecimiento es  $n$  niños/1 adulto; por tanto la tasa (bruta) es  $n$ .<sup>26</sup>

Además, se supone una función de producción del bien de consumo con rendimientos constantes en su único insumo: capital humano ( $h$ ). La producción del bien de consumo es  $h$  x tiempo de trabajo en la producción para consumo.

De otra parte, la evolución del capital humano está descrita por la siguiente ecuación:

$$(2) h_{t+1} = h_t \varphi(r_t), \text{ siendo } \varphi(r) = (Cr)^\varepsilon$$

Siendo  $r_t$  la fracción del tiempo total (éste es igual a 1) dedicada a la formación de capital humano incorporado en cada niño. El único supuesto sobre la función (2) es que es estrictamente creciente en  $r_t$ . Por todo lo anterior la utilidad de la generación futura se asocia positivamente a su capital humano.

Por otro lado, se supone que existe una cantidad mínima de tiempo ( $k$ ) que debe ser dedicada a la crianza de cada nuevo niño. Por lo tanto el consumo del agente es:

$$(3) c \leq h(1 - (r + k)n)$$

Por tanto, la ecuación de Bellman que define el problema del agente representativo está dada por:

---

<sup>25</sup> Agradecemos la ayuda de Camilo Morales en la exposición de este modelo.

<sup>26</sup> Un hogar típico tiene dos adultos y  $2n$  niños. Para  $n = 1$  el hogar típico tiene solo dos niños; en tal caso la población no crece.

$$v(h) = \max_{c,n,r} W(c, n, v(h\varphi(r)))$$

(4) s.a.

$$c \leq h(1 - (r + k)n)$$

Por ser la función de utilidad homogénea de grado uno en los argumentos  $c$  y  $u$  la solución para este problema tomará la forma  $v(h) = Bh$ ; por tal razón se tiene que el problema del individuo se reduce a:

$$(5) B = \max_{n,r} W(1 - (r + k)n, n, B\varphi(r))$$

Así, las condiciones de primer orden vienen dadas por:

$$(6) W_n = (r + k)W_c$$

$$(7) W_u B\varphi'(r) = (r + k)W_c$$

Siendo  $W_n$ ,  $W_c$  y  $W_u$  las derivadas de  $W$  con respecto a  $n$ ,  $c$  y  $u$  respectivamente. Por lo tanto al asumir una forma funcional para  $W$  como la descrita en (1) se tiene que la ecuación (6) se puede reescribir así:

$$(8) \eta(1 - (r + k)n)^{1-\beta} n^{\eta-1} (B\varphi(r))^\beta = (r + k)(1 - \beta)(1 - (r + k)n)^{-\beta} n^\eta (B\varphi(r))^\beta$$

$$(9) \eta(1 - (r + k)n) = (r + k)(1 - \beta)n$$

$$(10) n(r + k) = \frac{\eta}{1 - \beta + \eta}$$

Análogamente se puede reescribir (7) como:

$$(11) \beta(1 - (r + k)n)^{1-\beta} n^\eta (B\varphi(r))^{\beta-1} B\varphi'(r) = n(1 - \beta)(1 - (r + k)n)^{-\beta} n^\eta (B\varphi(r))^\beta$$

$$(12) \beta \frac{\varphi'(r)}{\varphi(r)} = n \frac{1 - \beta}{1 - (r + k)n}$$

Y finalmente reemplazando la forma funcional de  $\varphi(r)$  se tiene:

$$(13) \beta\varepsilon = m \frac{1 - \beta}{1 - (r + k)n}$$

Por último, utilizando (10) y (13) para resolver separadamente  $r$  y  $n$  resulta que:

$$n = \frac{\eta - \beta\varepsilon}{k(1 + \eta - \beta)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial n}{\partial k} < 0; \quad \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} < 0$$

$$r = k \frac{\beta\varepsilon}{\eta - \beta\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial r}{\partial k} > 0; \quad \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} > 0$$

Este modelo permite describir en los siguientes términos una transición demográfica: 1) al principio se presenta un cambio técnico que reduce el costo de crianza de un niño, es decir,  $k$  ; por tanto aumenta la tasa de crecimiento de la población; 2) simultáneamente o en una fase posterior el cambio técnico adquiere otra característica: eleva la elasticidad de la tasa de acumulación de capital humano al tiempo dedicado a esta actividad, es decir, aumenta  $\varepsilon$  , o, en otros términos, hace más productivas las labores sociales dedicadas a la enseñanza y otras formas de acrecentar el capital humano; así que se deben observar estos hechos: a) se acrecienta la fracción de la jornada social de trabajo dedicada a la acumulación de capital humano y se inicia el proceso de aumentos de la fracción de la población matriculada en el sistema educativo y b) se reduce la tasa de aumento de la población a partir del momento en el cual el efecto (negativo) poblacional del aumento de  $\varepsilon$  se hace mayor que el efecto (negativo) poblacional de la disminución de  $k$  .

## 2. 2. Modelo de externalidades

La función de producción con rendimientos constantes está definida por:

$$Y_t = CA_t K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$$

Siendo  $C$  una constante (factor de escala),  $K_t$  el capital en el tiempo  $t$ ,  $L_t$  la población económicamente activa, y  $A_t$  el factor de producción social, que está definido por:

$$A_t = \left( \frac{K_t}{L_t} \right)^\mu$$

La función de producción queda así:

$$Y_t = C \left( \frac{K_t}{L_t} \right)^\mu K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$$

$$Y_t = C (K_t)^{\alpha+\mu} (L_t)^{1-\alpha-\mu}$$

En donde:

$$k_t = \frac{K_t}{L_t} \rightarrow \hat{k}_t = \frac{\hat{K}_t}{K_t} - \frac{\hat{L}_t}{L_t}$$

$$\frac{\hat{L}_t}{L_t} = n$$

$$\frac{\hat{k}_t}{k_t} = \frac{SY_t}{K_t} - \frac{\hat{L}_t}{L_t} = \frac{SC (K_t)^{\alpha+\mu} (L_t)^{1-\alpha-\mu}}{K_t} - n$$

$$\frac{\hat{k}_t}{k_t} = SC (K_t)^{\mu+\alpha-1} L_t^{1-\alpha-\mu} - n = SC \left( \frac{K_t}{L_t} \right)^{\alpha+\mu-1} - n$$

La ecuación fundamental del modelo es:

$$\frac{\hat{k}_t}{k_t} = SC k_t^{\alpha+\mu-1} - n$$

Tomando logaritmos y derivando con respecto al tiempo tenemos:

$$\log Y_t = \log C + (\alpha + \mu) \log K_t + (1 - \alpha - \mu) \log L_t$$

$$\frac{\hat{Y}_t}{Y_t} = (\alpha + \mu) \frac{\hat{K}_t}{K_t} + (1 - \alpha - \mu) \frac{\hat{L}_t}{L_t}$$

$$\frac{\hat{Y}_t}{Y_t} - \frac{\hat{L}_t}{L_t} = (\alpha + \mu) \frac{\hat{K}_t}{K_t} - (\alpha + \mu) \frac{\hat{L}_t}{L_t}$$

$$\frac{\hat{y}_t}{y_t} = (\alpha + \mu) \frac{\hat{k}_t}{k_t}$$

$$\log y = (\alpha + \mu) \log k$$

$$y = k^{\alpha+\mu}$$

Hay tres posibles casos:

$$si \ \alpha + \mu = 1$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial k^2} = 0$$

$$si \ \alpha + \mu < 1$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial k^2} < 0$$

$$si \ \alpha + \mu > 1$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial k^2} > 0$$