

BANCO DE LA REPUBLICA  
Subgerencia de Estudios Económicos

**EL PRODUCTO POTENCIAL UTILIZANDO EL FILTRO DE  
HODRICK-PRESCOTT CON PARÁMETRO DE SUAVIZACIÓN  
VARIABLE Y AJUSTADO POR INFLACIÓN:  
Una aplicación para Colombia**

Luis Fernando Melo Velandia<sup>1</sup>  
Alvaro Riascos Villegas

Santafé de Bogotá, diciembre de 1997

---

<sup>1</sup>Este trabajo fue motivado por José Dario Uribe. Agradecemos los comentarios de Juan C Echeverry, Martha Misas, Norberto Rodriguez y Hernando Vargas. Los errores son responsabilidad exclusiva de los autores.

## 1. Introducción.

Hasta hace poco tiempo, la visión tradicional de las fluctuaciones macroeconómicas<sup>2</sup> se basaba en dos ideas que a su vez motivaron el desarrollo de buena parte de la teoría macro. Por un lado, esta visión considera que los determinantes de largo plazo de las principales series macroeconómicas se encuentran en los determinantes de la oferta agregada (el sector real). Es decir, en el largo plazo, lo que determina el movimiento de las series son factores como los cambios tecnológicos, los cambios demográficos, la productividad de los factores, el entorno institucional, el sistema tributario y arancelario, etc. Desde esta perspectiva y en el marco de la teoría del equilibrio, el movimiento de largo plazo de las series, corresponde al valor de las variables cuando la economía está en equilibrio<sup>3</sup>. Estos factores son los que caracterizan el movimiento “natural” de las series y, como estos varían lentamente en el tiempo, la implicación es que en el largo plazo, el movimiento natural de las series debe ser “suave”. Este movimiento natural de las series es lo que los economistas llaman la componente *permanente* o la *tendencia* de la serie. De otro lado, en el corto plazo, es la demanda agregada quien determina principalmente el comportamiento de las series. Así, las variaciones en la demanda agregada caracterizan las fluctuaciones de las series entorno a su movimiento natural, constituyéndose así en desequilibrios temporales de la economía. Estas fluctuaciones de las series alrededor de su componente permanente es lo que se define como componente cíclica. De esta manera, las series macroeconómicas pueden verse como la suma de dos componentes:<sup>4</sup> la componente permanente, caracterizada por factores de oferta de la economía, y la componente cíclica, caracterizada principalmente por factores de demanda.<sup>5</sup>

Hasta los años setenta, la teoría económica se había desarrollado intentando explicar separadamente estas dos componentes.<sup>6</sup> Por un lado, por la teoría neo-

---

<sup>2</sup>Básicamente la visión Keynesiana.

<sup>3</sup>En este sentido, la visión tradicional difiere radicalmente de por lo menos algunas teorías actuales (ver nota 6). Para algunas de estas, todo el movimiento de la serie debe explicarse como un fenómeno de equilibrio.

<sup>4</sup>Igualmente uno puede pensar en descomponer las series como un producto de dos componentes, una permanente y otra cíclica. En este caso, el logaritmo natural de la serie se puede escribir como la suma de dos series. La racionalidad económica detrás de esta descomposición es la misma anterior y es en realidad ésta la que implementaremos en esta nota.

<sup>5</sup>Para ser más precisos, deberíamos de considerar una tercera componente estacional. Sin embargo, supondremos que las series ya han sido debidamente desestacionalizadas.

<sup>6</sup>La visión moderna, en el espíritu de la teoría de Ciclos Económicos Reales (“Real Business Cycles Theory”) intenta explicar conjuntamente estas dos componentes como un fenómeno de

clásica y las teorías de crecimiento económico y de otro, por las teorías sobre ciclos económicos. En medio de este marco de análisis, la pregunta empírica fundamental es cómo descomponer las series macroeconómicas en sus componentes, permanente y transitorias.

En esta nota nos proponemos dos objetivos: el primero, es exponer uno de los métodos más controvertidos pero a su vez más populares para obtener la descomposición del producto real de Colombia (el filtro de Hodrick y Prescott) y utilizando un poco de teoría económica, motivar una generalización bastante natural que puede llevar a resultados más acordes con la intuición económica. Y segundo, ajustar este producto potencial (la componente permanente de la serie) de forma que minimice la suma de los errores cuadráticos de un modelo de curva de Phillips aumentada por expectativas.

La motivación original de esta nota surge de los modelos de pronósticos de inflación en los cuales se utiliza sistemáticamente la brecha del producto como generador de presiones inflacionarias.

## **2. El Filtro de Hodrick-Prescott y su Generalización.**

A pesar de que cualquier descomposición de las series macroeconómicas es en principio arbitraria, ésta es útil si revela patrones interesantes desde el punto de vista de la teoría económica. La metodología de Hodrick y Prescott se elabora justamente sobre la base de esa proposición.<sup>7</sup> Como los mismos autores observan, su objetivo era documentar aquellas desviaciones sistemáticas de las series con respecto a las restricciones impuestas por la teoría neoclásica. A lo largo de este trabajo, se mantiene la hipótesis de que la componente permanente del logaritmo natural de la serie debe variar suavemente, de manera que las tasa de crecimiento varíe poco, y además, que la componente cíclica no sea más que desviaciones entorno a la componente permanente. Este método, “filtra” el logaritmo natural de la serie extrayendo la componente permanente (usando una transformación

---

equilibrio.

<sup>7</sup>Este trabajo fue publicado recientemente en Hodrick-Prescott [1997]. En este artículo los autores no hacen prácticamente ninguna modificación en relación al original (Hodrick-Prescott [1980]), y se abstienen de defender o criticar esta metodología, a pesar de toda la literatura que se ha escrito en torno al tema en los últimos 17 años.

La generalización propuesta más adelante, ya aparece en otros trabajos. Por ejemplo, Razzak-Dennis [1996].

lineal) y obtiene la componente cíclica simplemente como la diferencia entre la serie y su componente permanente.

Para lograr tal descomposición, Hodrick y Prescott propusieron como medida de la variabilidad de la componente permanente, la suma de los cuadrados de las segundas diferencias. Como el procedimiento que proponen se aplica sobre el logaritmo de la serie, este criterio sugiere minimizar la variabilidad de la tasa de crecimiento de la componente permanente.

Dada  $\{x_t\}_{t=1,\dots,T}$  una serie cualquiera (en lo que sigue, siempre que nos refiramos a una serie estaremos considerando el logaritmo natural de ésta). Según la visión tradicional, ésta se puede escribir como la suma de dos series,  $\{g_t\}_{t=1,\dots,T}$  la tendencia, y  $\{c_t\}_{t=1,\dots,T}$  la parte cíclica. Es decir,

$$x_t = g_t + c_t, t = 1, \dots, T$$

Motivados por el criterio de variabilidad expuesto anteriormente, Hodrick y Prescott propusieron el siguiente problema de minimización para encontrar la componente permanente (o tendencia) de una serie.

$$\min_{\{g_t\}_{t=0,\dots,T+1}} \left\{ \sum_{t=1}^T (x_t - g_t)^2 + \lambda \sum_{t=1}^T [(g_{t+1} - g_t) - (g_t - g_{t-1})]^2 \right\},$$

donde  $\lambda$  es un número predeterminado, conocido como *parámetro de suavización*, cuya función en el problema de minimización es penalizar la suma de las segundas diferencias de la componente permanente. Obsérvese que entre menor sea el parámetro, la componente permanente puede fluctuar más, y entre mayor sea éste, más se penalizan las fluctuaciones de la tendencia. Por lo tanto, entre mayor sea éste, la tendencia debe ser más suave. Cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ , la componente permanente se aproxima a una serie de la forma  $g_t = g_0 + \alpha t$ , para una constante positiva  $\alpha$ . Si recordamos que estamos trabajando con el logaritmo de las series, el caso extremo cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ , corresponde al caso en que la tendencia crece a una tasa constante, en concordancia con la teoría neoclásica. Cuando  $\lambda = 0$  (no se penalizan las variaciones de la tendencia), la componente permanente es la misma serie.

La primera inquietud que surge alrededor de este problema está asociada al parámetro de suavización  $\lambda$ . En primera instancia, Hodrick y Prescott se basaron

en el siguiente modelo estadístico (bastante distante de la realidad) para inferir el valor aproximado de  $\lambda$ : Sí la componente cíclica y las segundas diferencias de la componente permanente (la variación de la tasa de crecimiento de la tendencia) son dos procesos ruido blanco, normales, ortogonales y con varianzas conocidas  $\sigma_c^2$  y  $\sigma_t^2$ , respectivamente, entonces el filtro de Hodrick y Prescott minimiza el error cuadrático medio cuando el parámetro de suavización  $\lambda$  es  $\frac{\sigma_c^2}{\sigma_t^2}$ . A pesar de que en la práctica, por lo general, estos supuestos no se cumplen<sup>8</sup>, los autores tomaron ésto como punto de partida para hacer la siguiente propuesta:<sup>9</sup> para series trimestrales, un 5 por ciento de variabilidad en la tasa de crecimiento de la componente cíclica es intuitivamente del orden de  $\frac{1}{8}$  de un uno por ciento de variabilidad en la variación de la tasa de crecimiento de la componente permanente. Es decir, ellos proponen utilizar  $\sqrt{\lambda} = \frac{5}{1/8}$  o  $\lambda = 1600$ . Vale la pena anotar que la mayoría de las aplicaciones que se encuentran de este filtro han sido bastante fieles a esta sugerencia.

Ahora, desde el marco de análisis mencionado en la introducción, surge el cuestionamiento de por qué penalizar de la misma forma las variaciones de la tendencia en cualquier período de tiempo. Si, como mencionamos anteriormente, la componente permanente de la serie la caracterizan los determinantes de la oferta agregada, es de esperar que la tendencia responda a los diferentes cambios estructurales en la economía. Por lo tanto, sería más sensato desde el punto de vista económico, penalizar de diferentes maneras las variaciones en la tendencia durante un cierto período de tiempo, dependiendo de si en este período acontecieron cambios importantes en la estructura de la economía. Por ejemplo, el cambio de una economía de tasa de cambio fija, a sistema de bandas, o las reformas arancelarias e institucionales que hicieron posible la apertura en Colombia, constituyen cambios importantes en la estructura de la economía y por ende es de esperar una mayor variabilidad (o una mayor respuesta) en la componente permanente de por ejemplo el producto de la economía Colombiana. Esta intuición es la que nos lleva a considerar el problema de minimización anterior pero donde el coeficiente de suavización puede ser variable. Es decir, la propuesta ahora es:

---

<sup>8</sup>En particular, no es común que el componente cíclico de una serie, definido de esta manera, sea completamente aleatorio (supuesto implícito para una serie ruido blanco).

<sup>9</sup>Bajo las mismas hipótesis, se puede mostrar que en realidad lo que hace el filtro de Hodrick y Prescott es una estimación por máximo verosimilitud de la tendencia (ver Reeves-Blyth-Triggs-Small [1996]).

$$\min_{\{g_t\}_{t=0, \dots, T+1}} \left\{ \sum_{t=1}^T (x_t - g_t)^2 + \sum_{t=1}^T \lambda_t [(g_{t+1} - g_t) - (g_t - g_{t-1})]^2 \right\},$$

donde  $\lambda_t$  es una secuencia de coeficientes positivos predeterminados. Claramente el filtro de Hodrick y Prescott es un caso particular de éste. En el Apéndice (1) se encuentra la solución a este problema.

Como puede observarse, la componente permanente de la serie es una transformación lineal de la serie y al igual que el problema anterior, la solución es bastante sensible a los extremos de la muestra y consecuentemente al tamaño de la serie.

Ahora, con base en el mismo modelo estadístico que propusieron Hodrick y Prescott, excepto que ahora las varianzas de la parte cíclica y de las segundas diferencias de la componente permanente pueden variar cada período, podemos intuir el valor de los parámetros  $\lambda_t$ . La respuesta es la generalización natural del caso anterior: La componente permanente que resulta de filtrar la serie con el filtro generalizado, minimiza el error cuadrático medio cuando  $\lambda_t = \left(\frac{\sigma_c^2}{\sigma_t^2}\right)_t$ , donde  $\left(\frac{\sigma_c^2}{\sigma_t^2}\right)_t$  denota la razón entre la varianza de la componente cíclica en el período  $t$  y la varianza de las segundas diferencias de la componente permanente en  $t$ .<sup>10</sup>

Visto así, nuestra intuición es que en períodos en los que es de esperar una mayor respuesta en la variabilidad de la oferta agregada en relación con la variabilidad de la demanda agregada, el parámetro de suavización debe ser menor al del período inmediatamente anterior. Y viceversa, períodos en donde la demanda agregada responde más al ambiente económico en relación con la oferta agregada, el parámetro de suavización debe ser mayor.

---

<sup>10</sup>En Reeves-Blyth-Triggs-Small [1996], se demuestra que esta generalización también corresponde a una estimación por máximo verosimilitud.

### 3. El Producto Potencial de Colombia según el Filtro Generalizado.

Nuestro objetivo ahora es aplicar el filtro generalizado a la serie del producto trimestral real de la economía colombiana, pero incorporando el conocimiento que tenemos de los cambios estructurales durante este período y que se reflejaron como choques sobresalientes en la oferta y en la demanda agregada. Una vez identificados estos períodos (donde sobresalen los choques de oferta en relación con los de demanda, o viceversa), tendremos fundamentos para modificar el parámetro de suavización en los períodos correspondientes. Para tal fin, se procedió a estimar un VAR estructural como en Shapiro-Watson [1988]<sup>11</sup>. A continuación se describe el modelo econométrico, sus orígenes económicos, su interpretación y los resultados del ejercicio.

#### 3.1. Un VAR estructural para identificar los diferentes choques de oferta y demanda de la economía Colombiana durante el período 1980-1996.

Como se observó anteriormente, nuestra primera tarea consiste en identificar la magnitud relativa de los diferentes choques de oferta y demanda a los cuales ha estado expuesta la economía colombiana durante el período 1980-1996. El modelo econométrico que presentaremos parte del importante supuesto de que en el largo plazo, el nivel del producto real está determinado por la oferta agregada. Específicamente, por choques tecnológicos o por choques en la oferta laboral. Así, no se excluye que en el corto plazo estos choques de oferta sean también los responsables de las fluctuaciones económicas o que por el contrario, sea la demanda agregada la más importante. De esta manera, no se toma partida entre la visión tradicional que atribuye las fluctuaciones a cambios en la demanda agregada o a las teorías modernas (como la teoría de los Ciclos Económicos Reales) que consideran la oferta agregada como la mayor responsable. El modelo está basado en la superposición de una dinámica de corto plazo sobre un modelo neoclásico de crecimiento.

Supongamos entonces que el logaritmo del producto real de largo plazo  $y_t^*$  está caracterizado por una función de producción Cobb-Douglas:

$$y_t^* = \alpha h_t^* + (1 - \alpha) k_t^* + \varepsilon_t^*,$$

---

<sup>11</sup>Este ejercicio ya fue hecho para Colombia y aparece en Gaviria-Uribe [1993]. Si bien el modelo es el mismo, nuestro interés es únicamente identificar la magnitud relativa de la variabilidad de los choques. Por lo cual, no reportamos el análisis de impulso respuesta.

donde  $h_t^*$  es el logaritmo de la oferta laboral de largo plazo,  $k_t^*$  es el logaritmo del capital de largo plazo, y  $\varepsilon_t^*$  refleja el nivel tecnológico de la economía. Nuestra primera restricción económica requiere que la razón del capital de largo plazo al producto de largo plazo sea una constante:<sup>12</sup>

$$k_t^* = y_t^* + \eta$$

De otra parte, supongamos que la oferta laboral y el nivel tecnológico evolucionan de acuerdo a:

$$h_t^* = \delta_h + h_{t-1}^* + \Theta_h(L)v_t$$

$$\varepsilon_t^* = \delta_\varepsilon + \varepsilon_{t-1}^* + \Theta_\varepsilon(L)e_t,$$

donde  $v_t$ ,  $e_t$ , son choque serial y mutuamente no correlacionados.  $\Theta_h(L)$  y  $\Theta_\varepsilon(L)$  son polinomios en el operador de rezagos que suponemos describen una dinámica puramente transitoria<sup>13</sup>. Ahora, para permitir que el producto y la oferta laboral se desvíen temporalmente de sus trayectorias de largo plazo, se introducen dos choques de demanda  $v_t^1$  y  $v_t^2$ . Sean  $h_t$  y  $y_t$  el logaritmo de los valores observados de la oferta laboral y el producto real, respectivamente. Entonces:

$$h_t = h_t^* + \Xi_h(L)[v_t, e_t, v_t^1, v_t^2]'$$

$$y_t = y_t^* + \Xi_y(L)[v_t, e_t, v_t^1, v_t^2]'$$

permitiendo así que todos los choques puedan alterar los niveles de corto plazo de estas variables.

Para completar el modelo se supone que la dinámica de la inflación es en forma reducida:

---

<sup>12</sup>Este supuesto es consistente con la teoría neoclásica del crecimiento (por ejemplo el modelo de Ramsey).

<sup>13</sup>Suponemos lo mismo de todos los polinomios que consideremos.



$$\Delta\pi_t = \Xi_\pi(L)[v_t, e_t, v_t^1, v_t^2]',$$

y que la tasa de interés real es constante en el largo plazo como se desprende de la función de producción de largo plazo y de nuestra primera restricción económica (la razón capital producto es constante en el largo plazo). En particular, la tasa de interés nominal y la inflación están cointegradas<sup>14</sup>. En su forma reducida, suponemos que:

$$i_t - \pi_t = \mu + \Xi_i(L)[v_t, e_t, v_t^1, v_t^2]',$$

En resumen, podemos escribir el modelo como:

$$\begin{bmatrix} \Delta h_t \\ \Delta y_t \\ \Delta \pi_t \\ i_t - \pi_t \end{bmatrix} = A(L) \begin{bmatrix} v_t \\ e_t \\ v_t^1 \\ v_t^2 \end{bmatrix},$$

donde el polinomio de matrices  $A(L)$  depende de los polinomios  $\Theta_h(L)$ ,  $\Theta_\varepsilon(L)$ ,  $\Xi_h(L)$ ,  $\Xi_e(L)$ ,  $\Xi_\pi(L)$  y  $\Xi_i(L)$ . Las restricciones impuestas hasta el momento, pueden escribirse en términos de los multiplicadores de largo plazo, es decir, la matriz  $A(1)$ . Tales restricciones implican que  $A(1)$  debe ser de la forma:<sup>15</sup>

$$A(1) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Lo cual supone que en largo plazo los choques de demanda no tienen ningún efecto permanente sobre la oferta laboral y el producto.

<sup>14</sup>En el apéndice II se muestra que este supuesto se cumple para el caso colombiano.

<sup>15</sup>El lector puede encontrar más detalles en el artículo de Shapiro y Watson citado anteriormente.

Ahora, si no fuera por la importancia que tiene el café para la economía colombiana, cuyo precio podemos tomarlo como exógeno, el modelo descrito anteriormente parece capturar de manera razonable la dinámica del trabajo, del producto, de la inflación y de las tasas de interés. Por lo tanto, se introdujeron choques exógenos en el precio del café que puedan tener efectos permanentes en todas las variables excepto en la oferta laboral. La variación en el precio del café la suponemos dada por:

$$\Delta c_t = \xi_t$$

De cualquier forma en el caso colombiano, no es claro si debemos interpretar estos como choques de oferta o de demanda, pues la actividad económica entorno al café envuelve una proporción sobresaliente de la fuerza de trabajo. Así, si bien lo tenemos en consideración con el objeto de obtener un buen modelo econométrico, no lo utilizamos de manera directa para deducir cuando hubo un cambio importante en las variabilidades relativas de los choques de oferta o demanda.

Finalmente nuestro modelo se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} \Delta h_t \\ \Delta c_t \\ \Delta y_t \\ \Delta \pi_t \\ i_t - \pi_t \end{bmatrix} = C(L) \begin{bmatrix} v_t \\ \xi_t \\ e_t \\ v_t^1 \\ v_t^2 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

donde  $C(1)$  tiene la misma estructura que  $A(1)$ . El sistema que debemos estimar es el (1). A continuación se describe el método de estimación.

### 3.2 Método de Estimación.

Desde la perspectiva de este trabajo, nuestro objetivo principal es estimar el vector de choques del lado derecho del sistema (1). Suponiendo que el operador  $C(L)$  es invertible, podemos escribir el sistema (1) como:

$$B(L) \begin{bmatrix} \Delta h_t \\ \Delta c_t \\ \Delta y_t \\ \Delta \pi_t \\ i_t - \pi_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_t \\ \xi_t \\ e_t \\ v_t^1 \\ v_t^2 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

donde  $B(L) = C(L)^{-1}$ . Suponemos además que el operador  $B(L)$  tiene sus raíces por fuera del círculo unitario<sup>16</sup>. De esta manera, obtenemos un VAR estructural como representación del sistema (1). Ahora, es claro que las restricciones de largo plazo, que se reflejaron como restricciones sobre  $C(1)$ , tengan su contrapartida en restricciones sobre el operador  $B(L)$ .<sup>17</sup> Estas restricciones se manifiestan en los coeficientes de largo plazo de cada una de las variables del modelo. Para ver esto, consideremos la primera ecuación del sistema (2) cuando el orden del VAR es  $p$ :

$$\begin{aligned} \Delta h_t = & \sum_{j=1}^p \beta_{hh,j} \Delta h_{t-j} + \sum_{j=0}^p \beta_{hc,j} \Delta c_{t-j} + \sum_{j=0}^p \beta_{hy,j} \Delta y_{t-j} + \\ & \sum_{j=0}^p \beta_{h\pi,j} \Delta \pi_{t-j} + \sum_{j=0}^p \beta_{hi,j} (i_{t-j} - \pi_{t-j}) + v_t. \end{aligned}$$

Las restricciones de largo plazo sobre la oferta laboral implican, en esta ecuación, que los multiplicadores de largo plazo de  $\Delta c_t$ ,  $\Delta y_t$ ,  $\Delta \pi_t$ . y  $i_t - \pi_t$  sobre  $\Delta h_t$  deben ser iguales a cero.

Escribiendo esta ecuación con la ayuda del operador de rezagos obtenemos:

$$\begin{aligned} \Delta h_t = & \sum_{j=1}^p \beta_{hh,j} \Delta h_{t-j} + \beta_{hc}(L) \Delta c_t + \beta_{hy}(L) \Delta y_{t-j} + \\ & \beta_{h\pi}(L) \Delta \pi_{t-j} + \beta_{hi}(L) (i_{t-j} - \pi_{t-j}) + v_t. \end{aligned}$$

Así, la restricción sobre el multiplicador de largo plazo de cada variable  $x$  puede escribirse como:  $\beta_{hx}(1) = 0$ , luego, incorporando las restricciones, podemos escribir  $\beta_{hx}(L)$  como  $(1-L)\beta_{hx}^*(L)$  y así  $\beta_{hx}(L) \Delta x_t = \beta_{hx}^*(L) \Delta^2 x_t$  cuando imponemos las restricciones sobre los multiplicadores de cada una de las variables.

En resumen, incorporando las restricciones sobre la última ecuación, obtenemos:

$$\begin{aligned} \Delta h_t = & \sum_{j=1}^p \beta_{hh,j} \Delta h_{t-j} + \sum_{j=0}^{p-1} \beta_{hc,j}^* \Delta^2 c_{t-j} + \sum_{j=0}^{p-1} \beta_{hy,j}^* \Delta^2 y_{t-j} + \\ & \sum_{j=0}^{p-1} \beta_{h\pi,j}^* \Delta^2 \pi_{t-j} + \sum_{j=0}^{p-1} \beta_{hi,j}^* \Delta (i_{t-j} - \pi_{t-j}) + v_t. \end{aligned}$$

Para estimar esta última ecuación, Shapiro y Watson utilizaron el método de variables instrumentales<sup>18</sup>: Como instrumentos se utilizaron los rezagos de 1 hasta

---

<sup>16</sup>Las estadísticas que sugieren el orden de integración de las series se encuentran en el Apéndice (2). La fuente de los datos utilizados se encuentra en el Apéndice (3).

<sup>17</sup>Véase entre otros en Lutkepohl [1993], sección 10.6.

<sup>18</sup>Obsérvese la imposibilidad de utilizar el método de mínimos cuadrados ordinarios: Algunas de las variables del lado derecho de la ecuación están correlacionadas con el error debido a la presencia de variables endógenas contemporáneas.

$p$  de  $\Delta y_t, \Delta \pi_t, i_t - \pi_t$ , y los rezagos de 0 hasta  $p$  de  $\Delta c_t$

Para la segunda ecuación, se procedió de manera análoga, con la diferencia de que en ésta aparece adicionalmente la variable  $v_t$  estimada como variable explicativa. Para su estimación se utilizaron los mismos instrumentos más los residuos estimados ( $v_t$ ) de la primera ecuación. Para las otras ecuaciones se procedió de manera similar.

### 3.3. Resultados de la Estimación.

Como nuestro objetivo es estimar en el tiempo los cambios relativos en de las varianzas entre los diferentes choques de oferta y demanda, se calculó para cada uno de los cinco choques estructurales del sistema (2), una estadística que permitiera evaluar si esta varianza ha cambiado significativamente dentro del período 1981-1996: Más específicamente, para cada choque, sea  $S_p^2$  la varianza estimada de éste en el período 1981:1-1996:4, y  $S_i^2$ , para  $i = 1, \dots, 16$  la varianaza estimada del choque para los años 1981, 1982, ..., 1996 respectivamente. Dicho de otra forma, consideramos 16 ventanas disyuntas, cada una de tamaño 4, comenzando en 1981 y terminando en 1996, y en cada ventana calculamos la varianza de cada choque. La estadística que proponen Razzak y Dennis [1996] es:

$$R_i(s^2) = \frac{3S_i^2}{S_p^2},$$

para  $i = 1, 2, \dots, 16$ . Para cada choque tenemos 16 observaciones de  $R_i(S^2)$ . Esta estadística sigue asintóticamente una distribución  $\chi^2$  con 3 grados de libertad.<sup>19</sup> Ahora, con esta estadística podemos probar la hipótesis nula  $\sigma_i^2 = \sigma_p^2$ , contra la hipótesis alterna  $\sigma_i^2 > \sigma_p^2$ . La figura (1) muestra los valores de  $R_i(s^2)$  para los cinco choques y las regiones en las que se rechaza la hipótesis nula con un nivel de significancia del 10% y 5%.

Como puede observarse, por el lado de la oferta, con un nivel de confianza del 5% la hipótesis nula se rechaza en el año 1989<sup>20</sup>. De otra parte, por el lado de la

---

<sup>19</sup>Si hubiéramos utilizado ventanas de tamaño  $n$ , la estadística asociada sería:

$R_i(s^2) = \frac{(n-1)S_i^2}{S_p^2}$ , que se distribuye, bajo la hipótesis nula, como una  $\chi^2$  con  $n - 1$  grados de libertad.

<sup>20</sup>Los otros períodos en donde se rechaza la hipótesis nula (92, 95, por el lado de los choques tecnológicos, y 86 por el lado de la oferta laboral), no se tuvieron en consideración porque a un nivel de confianza del 5% la hipótesis nula no se rechaza. Recuérdese que no interpretamos los choques al café como choques de oferta o de demanda.

demanda, la hipótesis nula se rechaza en el año 85. Nuestra conclusión es entonces que la razón entre las variabilidades de los choques de demanda con respecto a los choques de oferta cambió substancialmente en los años 85 y 89, siendo menor en el primer y tercer período en relación al segundo.

### 3.4. El Producto Potencial de Colombia según el Filtro Generalizado y ajustado por inflación.

De acuerdo con los resultados de la sección anterior y al filtro generalizado que hemos propuesto para encontrar la componente de largo plazo del producto, la idea es entonces resolver el siguiente problema<sup>21</sup>:

$$\min_{\{g_t\}_{t=0,\dots,T+1}} \left\{ \sum_{t=1}^T (x_t - g_t)^2 + \sum_{t=1}^T \lambda_t [(g_{t+1} - g_t) - (g_t - g_{t-1})]^2 \right\}, \quad (2)$$

utilizando  $\lambda_t = \begin{cases} \lambda^1, t = 1980 : 2 \dots \text{hasta } 1984 : 4 \\ \lambda^2, t = 1985 : 1 \text{ hasta } 1989 : 4 \\ \lambda^3, t = 1990 : 1 \text{ hasta } 1996 : 4 \end{cases}$ , donde  $\lambda^1, \lambda^2$  y  $\lambda^3$  son con-

stantes positivas tales que:  $\lambda^1, \lambda^3 \leq \lambda^2$

Ahora, a pesar de que el método econométrico propuesto para encontrar los períodos en los que cambiaron los  $\lambda$  no permite deducir cuales son los valores de estos, nuestra propuesta para encontrarlos, dentro de un cierto rango, es que sean óptimos en el sentido de ajustar de la mejor manera los datos observados de la inflación anual utilizando un modelo de curva de Phillips aumentada por expectativas.<sup>22</sup> Es decir, lo que se hizo fue lo siguiente.

Para cada  $\lambda^1, \lambda^2$  y  $\lambda^3$  en el intervalo  $[100, 2000]$  con  $\lambda^1, \lambda^3 \leq \lambda^2$  donde  $\lambda^i$  es múltiplo de cien,  $i = 1, 2, 3$ , se resolvió el problema (2) para el logaritmo del producto trimestral real desestacionalizado, obteniendo así, una tendencia (PIB potencial) para cada tripleta de  $\lambda$ 's. Posteriormente, para cada tendencia estimamos el siguiente modelo de *Función de Transferencia* (una curva de Phillips aumentada por expectativas):

$$Inf_t = \frac{\alpha brecha_{t-1}}{(1-L)} + \frac{(1 - \theta_4 L^4)}{(1 - \phi_3 L^3)(1-L)} \varepsilon_t,$$

donde  $Inf$  es la inflación anual,  $brecha$  es la brecha del producto basada en la estimación del PIB potencial y los errores  $\varepsilon_t$  conforman una serie ruido blanco.

<sup>21</sup>La serie  $\{x_t\}$  utilizada en este problema fue el logaritmo de la serie del producto real trimestral desestacionalizada con el procedimiento X11 multiplicativo.

<sup>22</sup>Razzak y Dennis [1996] proponen escoger los  $\lambda$  que fueran óptimos para *pronosticar* la inflación según un modelo no lineal de la curva de Phillips. Nuestra propuesta esta en la línea de Haltmaier [1996].

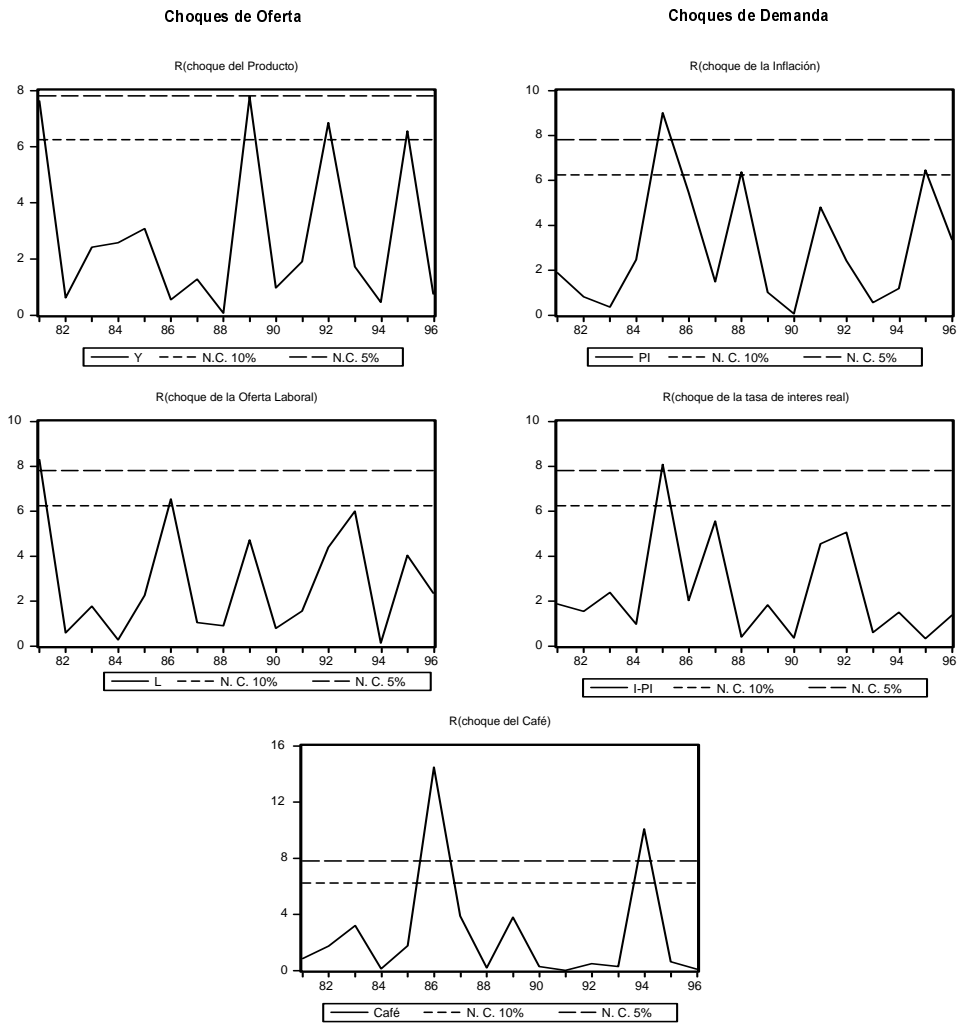


Figure 0.1:

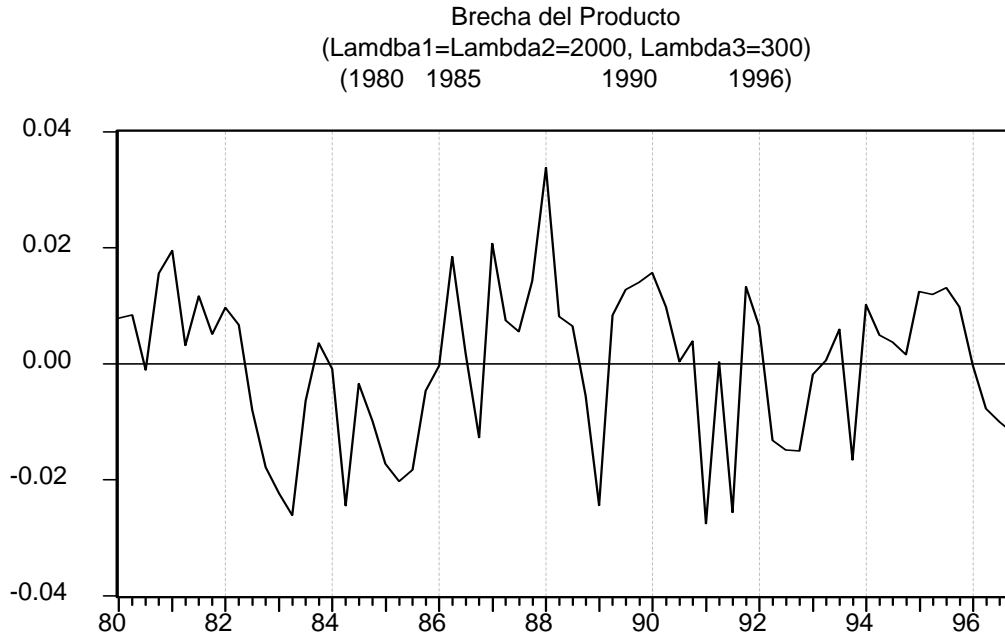


Figure 0.2:

Una vez calculados los errores para cada tendencia, escogimos aquella tripleta de  $\lambda$ 's que hace mínima la suma de los cuadrados de los errores. Los resultados de este ejercicio dieron como óptimos:  $\lambda^1 = 2000$ ,  $\lambda^2 = 2000$  y  $\lambda^3 = 300$ .<sup>23</sup>

La figura (2) ilustra la brecha del producto obtenido y en el Apéndice (3) aparecen las estadísticas del modelo de transferencia asociado al producto potencial que corresponde a la tripleta óptima.

#### 4. Aplicación: Pronósticos de Inflación.

Utilizando el modelo de transferencia anterior, hicimos una evaluación de los pronósticos de inflación comparados con los de un modelo ARIMA. Nuestra conclusión es que nuestro modelo de transferencia mejora los pronósticos. La metodología utilizada para comparar los pronósticos de los dos modelos fue

---

<sup>23</sup>Es importante anotar que los valores óptimos de  $\lambda^1$  y  $\lambda^2$  corresponden al límite superior del intervalo considerado para ellos.



la siguiente: comenzando con la muestra 1981:2-1992:4, estimamos los modelos, proyectamos un período y aumentamos la muestra hasta 1993:1, reestimamos los modelos y proyectamos un período, y así sucesivamente lo hicimos 16 veces hasta 1996:4.

En la siguiente tabla aparecen las estadísticas de pronósticos para el modelo de transferencia y para un modelo ARIMA de la inflación.

**Tabla 1**  
**Estadísticas de Evaluación de los Pronósticos de Inflación**

<b>Modelo</b>	<b>RMS</b>	<b>RMSP</b>	<b>MAE</b>	<b>MAPE</b>	<b>U<sub>1</sub> THEIL</b>
<b>Transferencia</b>	0.9584	0.0443	0.7694	0.03533	0.8565
<b>ARIMA</b>	0.9916	0.0459	0.8893	0.041	0.8861

En la tabla (1), valores menores indican errores de pronóstico pequeños. En el Apéndice IV, se encuentran las definiciones correspondientes a cada estadística.

## 5. Conclusiones.

Utilizando un poco de teoría económica, en particular, la interpretación del ciclo económico como un fenómeno de desequilibrio temporal caracterizado por la demanda de la economía, hemos motivado una generalización natural del filtro de Hodrick y Prescott. Para identificar correctamente el filtro generalizado se efectuaron dos procedimientos: primero, se utilizó un VAR estructural para distinguir entre las volatilidades relativas de los posibles choques de oferta y demanda, lo cual se propuso como mecanismo para ubicar algunos cambios estructurales sobresalientes durante los años 1981-1996 (o mejor, cambios según la volatilidad relativa de los choques de oferta y demanda). Y segundo, entre todas las posibles alternativas que quedaron parametrizadas por tripletas de números en un cierto conjunto, escogimos aquella parametrización del producto potencial, que mejor ajusta la inflación anual durante este periodo (de acuerdo a una curva de Phillips aumentada por expectativas y según un criterio muy común: minimizar la suma del cuadrado de los errores)

Finalmente, se realizaron pronósticos de inflación para dos modelos: el primero un modelo ARIMA y el segundo un modelo de curva de Phillips que incluye la brecha del producto estimada bajo la metodología expuesta anteriormente. Utilizando varias de las estadísticas de evaluación de pronósticos (RMS, RMSP, MAE,

MAPE,  $U_1$ -Theil), se mostró que el modelo propuesto mejora los pronósticos de un modelo ARIMA de la inflación.

Siendo pragmáticos, y teniendo como objetivo, mejorar las predicciones de la inflación anual de un modelo ARIMA, de acuerdo a los criterios de evaluación de pronósticos mencionados anteriormente, se justifica la aplicación del procedimiento expuesto en este trabajo.

## 6. Bibliografía.

Gaviria, A. Uribe, J. 1993. "Origen de las Fluctuaciones Económicas en Colombia". Ensayos sobre Economía Cafetera. Enero-Diciembre.

Haltmaier, J. 1996. "Inflation-Adjusted Potential Output". International Finance Discussion Papers. Board of Governors of the Federal Reserve System.

Hodrick, R., E. Prescott. 1980. "Post war business cycles: An empirical investigation". Working Paper. Carnegie Melon University.

Hodrick, R., E. Prescott. 1997. "Post war business cycles: An empirical investigation". Journal of Money, Credit and Banking. Vol 29, No. 1. 1-16.

Johansen, S. 1992. "Determination of the Cointegration Rank in the Presence of Linear Trend". Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 54. Páginas 383-397.

Lutkepohl, H. 1993. Introduction to Multiple Time Series Analysis. Springer-Verlag. Heilderberg. Segunda Edición.

Makridakis, S., Wheelwright, S. 1989. Manual de Técnicas de Pronósticos. Editorial Limusa S.A. México.

Razzak, W. Dennis, R. 1996. "The output gap using the Hodrick-Prescott filter with a non-constant smoothing parameter: an application to New Zealand ". Reserve Bank of New Zealand.

Reeves, J. Blyth, C. Triggs, C y Small, J. 1996. "The Hodrick-Prescott Filter, a Generalisation, and a New Procedure for Extracting an Empirical Cycle from a Series". Working Paper # 160. Departament of Economics. University of Auckland, New Zealand.

Shapiro, M. Watson, M. 1988. "Sources of Business Cycle Fluctuations". National Bureau of Economic Research. Macroeconomics Annual, 1988, 3, 111-156.

Toro, J. 1987. "Tasa de Interés y Variaciones del grado de apertura de la economía colombiana durante el período 1967-87". Desarrollo y Sociedad. Número 20.

## Apéndice I

El problema que se desea resolver, según el filtro generalizado de Hodrick y Prescott, es:

$$\min_{\{g_t\}_{t=0, \dots, T+1}} \left\{ \sum_{t=1}^T (x_t - g_t)^2 + \sum_{t=1}^T \lambda_t [(g_{t+1} - g_t) - (g_t - g_{t-1})]^2 \right\},$$

donde  $x_t$  es la serie que queremos filtrar y  $\lambda_t$  son los parámetros de suavización.

La solución que se obtiene es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_n \end{bmatrix} = H^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

donde  $H = \begin{bmatrix} H_1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{2,5} & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{2,6} & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{2,7} & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & H_{2,n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & H_{2,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & H_{2,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & H_3 \end{bmatrix},$

y,

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 + \lambda_2 & -2\lambda_2 & \lambda_2 & 0 \\ -2\lambda_2 & 1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 & -2\lambda_2 - 2\lambda_3 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$H_{2,i} = \begin{bmatrix} \lambda_{i-3} & -2\lambda_{i-3} - 2\lambda_{i-2} & 1 + \lambda_{i-3} + 4\lambda_{i-2} + \lambda_{i-1} & -2\lambda_{i-2} - 2\lambda_{i-1} & \lambda_{i-1} \end{bmatrix}$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} \lambda_{n-2} & -2\lambda_{n-2} - 2\lambda_{n-1} & 1 + \lambda_{n-2} + 4\lambda_{n-1} & -2\lambda_{n-1} \\ 0 & \lambda_{n-1} & -2\lambda_{n-1} & 1 + \lambda_{n-1} \end{bmatrix}$$

## Apéndice II

El modelo se estimó con datos trimestrales para el período 1980:2-1996:4 (véase Apéndice IV para la fuente de los datos utilizados). Dados los supuestos sobre los cuales se especificó el modelo estructural, es necesario realizar pruebas de raíz unitaria sobre las series  $y_t, h_t, \pi_t, c_t$ , y  $i_t - \pi_t$ . En la siguiente tabla, se encuentran los resultados al aplicar las pruebas de Dickey-Fuller.

**Pruebas de Raíz Unitaria**

Serie	Estadística D-F	Valor Crítico ( $\alpha = 5\%$ )	Estadística L-B*	P-value
$y_t$	$\tau_\tau = -3.17$	-3.48	17.17	0.38
$h_t$	$\tau_\tau = -2.27$	-3.48	12.00	0.74
$\pi_t$	$\tau_\tau = -0.73$	-1.95	15.65	0.48
$c_t$	$\tau_\mu = -1.93$	-2.91	14.35	0.57
$i_t$	$\tau_\mu = -2.43$	-2.91	18.17	0.31

\*Prueba de ruido blanco sobre los residuos, utilizando 16 rezagos.

Para evaluar si la serie  $i_t - \pi_t$  es estacionaria, primero se probó si las variables  $y_t, h_t, \pi_t$ , y  $i_t$  estaban cointegradas<sup>24</sup> y segundo, habiéndose comprobado la cointegración con un solo vector, se realizó una prueba  $\chi^2$  en la cual se evaluaba si la combinación lineal  $0y_t + 0h_t + 1i_t - 1\pi_t$  es o no estacionaria. El resultado fue  $\chi^2 = 12.44$ , con un p-value asociado igual a 0.19. Es decir, para un nivel del 5% de significancia, no se pudo rechazar que la serie  $i_t - \pi_t$  es estacionaria. Los resultados de la prueba de cointegración de Johansen se muestran a continuación.

---

<sup>24</sup>Para probar si existe cointegración entre estas series, primero se escogió el número de rezagos del modelo, dos en este caso, como el mínimo número de rezagos con el cual el vector de errores del modelo correspondía a un proceso de ruido blanco multivariado. Posteriormente, se utilizó la prueba de Johansen, usando un modelo con tendencia determinística lineal en las series. Esta prueba arrojó como resultado que las series estaban cointegradas y que solo existía un vector de cointegración.

## Prueba de Cointegración de Johansen<sup>25</sup>

Variables:  $y_t, h_t, \pi_t$ , y  $i_t$

Hipótesis Nula	Hipótesis Alterna	Estadística <sup>26</sup>	Valor Crítico
r: No. de vectores de cointegración			(10%)
$r = 0$	$r = 1$	20.04	17.15
$r = 1$	$r = 2$	9.17	13.39
$r = 2$	$r = 3$	8.23	10.60
$r = 3$	$r = 4$	0.03	2.71

Una vez determinado el orden de integración de las series, se determinó la longitud del modelo VAR para las variables  $\Delta y_t, \Delta h_t, \Delta \pi_t, \Delta c_t$ , y  $i_t - \pi_t$ , como el mínimo número de rezagos con el cual el vector de errores del sistema no evidenciara autocorrelación. El resultado fue tres rezagos, con una estadística multivariada de Pormanteau<sup>27</sup> igual a 257.82 para 18 rezagos y con un p-value de 0.205.

---

<sup>25</sup>Los componentes determinísticos del modelo utilizados en esta prueba fueron determinados conjuntamente con el número de vectores de cointegración ( $r$ ), usando “el principio de Pantula” discutido en Johansen [1992].

La prueba de Johansen está basada en la estadística del máximo valor propio.

<sup>26</sup>Estos valores han sido modificados utilizando la corrección para muestras pequeñas sugerida por Reinsel-Ahn [1992].

<sup>27</sup>Véase en Lutkepohl [1993].

### Apéndice III

#### Estimación del Modelo de Transferencia

Parámetro	Estimación	Error Estándar
$\alpha$	2.191	1.120
$\theta_4$	0.719	0.103
$\phi_3$	0.280	0.119

Prueba Ljung-Box (rezagos 18),  $\chi^2 = 14.92$ , P-value=0.530.

#### Series Utilizadas para la Estimación del VAR Estructural

Series trimestrales desde 1980:2 hasta 1996:4.

- 1)  $h_t$ : Oferta laboral, medida como *Población Económicamente Activa* de acuerdo con el DANE.
- 2)  $y_t$ : Producto Interno Bruto, medido como los datos trimestrales estimados por el Departamento Nacional de Planeación.
- 3)  $\pi_t$ : Inflación, calculada a partir de las variaciones anuales del IPC.
- 4)  $i_t$ : Tasa de interés nominal medida hasta 1985 como los datos reportados por Toro [1987] y luego los datos de la DTF.
- 5)  $c_t$ : Café, precios externos reales del café calculados como la cotización de los llamados cafés suaves colombianos deflactados por la inflación de los Estados Unidos.

## Apéndice IV

### Estadísticas de Evaluación de Pronósticos

Las siguientes cuatro estadísticas tiene como objeto medir la diferencia promedio entre los valores observados de una serie y los pronósticos obtenidos por un modelo.

Las estadísticas *RMS* (Root Mean Square Error) y *MAE* (Mean Absolute Error), buscan medir la diferencia promedio entre los valores observados y pronosticados en las unidades de la serie. Por otro lado, las estadísticas *RMSP* (Root Mean Square Percentage Error) y *MAPE* (Mean Absolute Percentage Error), buscan medir la misma diferencia promedio pero en términos relativos. Formalmente, estas estadísticas se definen de la siguiente manera:

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_t^s - y_t^o)^2}$$

$$RMSP = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\frac{y_t^s - y_t^o}{y_t^o}\right)^2}$$

$$MAE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |(y_t^s - y_t^o)|$$

$$MAPE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \frac{y_t^s - y_t^o}{y_t^o} \right|,$$

donde  $T$  es el número de pronósticos (en nuestro caso  $T = 16$ ),  $y_t^s$  es el valor pronosticado de la serie con base en un modelo con información hasta  $t - 1$ , y  $y_t^o$  es el valor observado (para más detalles, véase Makridakis- Wheelwright [1989]).

Adicionalmente, también se evaluó la estadística  $U_1$ -Theil, la cual compara los pronósticos de un modelo con respecto a los obtenidos usando una caminata aleatoria. Esta se define como:

$$\sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T (y_t^s - y_t^o)^2}{\sum_{t=1}^T (y_t^o - y_{t-1}^o)^2}},$$

Una explicación más detallada de esta estadística se puede encontrar en Makridakis- Wheelwright [1989]).

Para las cinco estadísticas mencionadas, menores valores indican que los pronósticos del modelo se acercan más a los valores observados de la serie. En particular,

si los pronósticos coinciden con los valores observados de la serie, todas estas estadísticas son iguales a cero.