



**Zur optimalen Parametrisierung der  
Lagerkennlinie nach Nyhuis/Wiendahl**

Karl Inderfurth • Tobias Schulz

**FEMM Working Paper No. 16, July 2007**

***F E M M***

*Faculty of Economics and Management Magdeburg*

**Working Paper Series**

# **Zur optimalen Parametrisierung der Lagerkennlinie nach Nyhuis/Wiendahl**

***Karl Inderfurth***

*Lehrstuhl für Produktion und Logistik*

*Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, 39106 Magdeburg*

*karl.inderfurth@ww.uni-magdeburg.de*

***Tobias Schulz***

*Lehrstuhl für Produktion und Logistik*

*Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, 39106 Magdeburg*

*tobias.schulz@ww.uni-magdeburg.de*

## **Zusammenfassung**

Mit dem von P. Nyhuis und H.-P. Wiendahl entwickelten Konzept der logistischen Kennlinien ist das Ziel verbunden, den Zusammenhang zwischen verschiedenen Kenngrößen eines logistischen Systems mit einem einfachen Funktionsverlauf hinreichend genau abzubilden. Im Rahmen von Lagerkennlinien soll dabei die Beziehung zwischen den Kenngrößen Bestandshöhe und Lieferverzug in einem Lagersystem wiedergegeben werden. Ausgehend von der exakten Darstellung des entsprechenden Zusammenhangs in einem idealisierten, deterministischen Umfeld empfehlen die Autoren, diese Beziehung in einer realen, durch stochastische Störeinflüsse geprägten Umwelt approximativ durch eine einfache Anpassung des unter deterministischen Bedingungen ermittelten Funktionsverlaufs zu beschreiben. Eine entscheidende Rolle spielt hierbei ein Parameter, der die Krümmung der Lagerkennlinie kennzeichnet. Im vorliegenden Beitrag wird gezeigt, wie mittels einer lagerhaltungstheoretischen Analyse eine Optimierung dieses Parameters für vorgegebene Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Störgrößen vorgenommen werden kann. Daraus lassen sich allgemeine Hinweise darauf ableiten, wie Lagerkennlinien in Abhängigkeit von wesentlichen Eigenschaften der hinter realen Planabweichungen steckenden stochastischen Störungen (wie Ausmaß von Streuung und Schiefe der entsprechenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen) bestmöglich zu parametrisieren sind.

## 1 Die Bedeutung der Lagerkennlinie

Zum Design logistischer Systeme sowie zur Planung und Kontrolle logistischer Prozesse ist es notwendig, messbare Kenngrößen zu deren Beurteilung heranzuziehen sowie qualitative und quantitative Zusammenhänge zwischen diesen Kenngrößen einschätzen zu können. Für die Darstellung funktionaler Zusammenhänge zwischen wichtigen Kenngrößen und deren graphische Umsetzung in Form von Kurvenverläufen wird im ingenieurwissenschaftlichen Bereich der Begriff der „logistischen Kennlinie“ verwendet<sup>1</sup>. Ganz allgemein wird in diesem Kontext unter einer Kennlinie „die graphische Darstellung des Zusammenhangs zwischen einer unabhängigen Einflussgröße und einer sich ergebenden Zielgröße in Form einer Kurve“ verstanden<sup>2</sup>, wobei parallel zur graphischen Darstellung auch immer der mathematische Funktionszusammenhang gesehen wird. Hinter dem Kennlinienansatz steht der Anspruch, sowohl produktions- als auch distributionslogistische Zusammenhänge mit weniger Aufwand als bei der Anwendung der Simulationstechnik und mit stärkerer Realitätsnähe als bei der Nutzung der Warteschlangentheorie allgemeingültig beschreiben und für den praktischen Einsatz nutzen zu können<sup>3</sup>. Den höchsten Bekanntheitsgrad haben in diesem Rahmen die sogenannten Betriebskennlinien bzw. Produktionskennlinien erlangt, die insbesondere die Abhängigkeit zwischen Auftragsbestand sowie Durchlaufzeit und Leistung bzw. Auslastung in einem produktionslogistischen System beschreiben<sup>4</sup>.

Später folgende Weiterentwicklungen zur Ableitung von Kennlinien und deren Einsatz in zusätzlichen Anwendungsbereichen sind in der von P. Nyhuis und H.-P. Wiendahl verfassten Monografie „Logistische Kennlinien“ beschrieben, die 2003 in zweiter Auflage erschienen ist. In dieser Schrift, die im Weiteren mit Nyhuis/Wiendahl abgekürzt wird, sowie in zusätzlichen Veröffentlichungen neueren Datums<sup>5</sup> wird nicht zuletzt darauf hingewiesen, dass das fortentwickelte Konzept der Kennlinientheorie sich über die Produktionslogistik hinaus auch auf weitere Bereiche wie insbesondere auf das Management von Lagerprozessen in einstufigen Lagersystemen und mehrstufigen logistischen Ketten anwenden lässt. Im Rahmen von sog. Lagerkennlinien (LKL) soll dabei die Beziehung zwischen den Kenngrößen Bestandshöhe und Lieferverzug in einem Lagersystem wiedergegeben werden. Bei der von Nyhuis/Wiendahl vorgeschlagenen Festlegung des Funktionsverlaufs dieser LKL ergeben sich einige konzeptionelle Probleme, auf die aber an dieser Stelle nicht weiter eingegangen

---

<sup>1</sup> siehe z.B. Handbuch Logistik (hrsg. von D. Arnold u.a.), S. A1-30, B3-63, B4-23 und B5-49

<sup>2</sup> siehe Nyhuis/Wiendahl 2003, S. 11

<sup>3</sup> siehe Nyhuis/Wiendahl 2003, S. 39 ff.

<sup>4</sup> siehe Wiendahl 1987, S. 206 ff.

<sup>5</sup> siehe Lutz u.a. 2003, Lödging 2005, Nyhuis u.a. 2006

werden soll<sup>6</sup>. Der vorliegende Beitrag befasst sich mit der Frage des zweckmäßigen Einsatzes des Funktionstyps der LKL, der sich im Wesentlichen durch einen einzigen endogen festzulegenden Parameter (die sog.  $C_{NORM}$ ) an unterschiedliche reale Bedingungen anpassen lässt. Während sich hierbei der Zusammenhang zwischen den beiden Kenngrößen in einem idealisierten, deterministischen Umfeld noch exakt beschreiben lässt, ist dies in einem realen Problemzusammenhang, der durch stochastische Störeinflüsse und damit verbundene Planabweichungen geprägt ist, nur noch approximativ möglich. Eine entscheidende Rolle für die Güte der Anpassung spielt der  $C_{NORM}$ -Parameter (oder kurz:  $C$ -Parameter), der die Krümmung der Lagerkennlinie kennzeichnet und in Abhängigkeit der stochastischen Ausprägung der Planabweichung zu wählen ist. Der Kennlinienansatz von Nyhuis/Wiendahl liefert allerdings nur recht vage Hinweise, wie dies im Einzelnen geschehen sollte<sup>7</sup> und erweist sich insofern beim operativen Einsatz dieses Instruments als ergänzungsbedürftig.

Ziel des vorliegenden Beitrags ist es, die Kennlinientheorie dahingehend auszubauen, dass ein wissenschaftlich fundierter Ansatz zur Parametrisierung der LKL entwickelt wird, der eine präzise Antwort auf die Frage gibt, wie der  $C_{NORM}$ -Parameter in Abhängigkeit von wesentlichen Eigenschaften der auf die Planungsgenauigkeit einwirkenden Störeinflüsse zu wählen ist. Aus vorhergehenden Untersuchungen ist bekannt, dass die Parameterfestlegung sich nach dem Typ der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Störeinflüsse und dabei insbesondere nach deren Streuung und darüber hinaus auch nach deren Schiefe richten sollte<sup>8</sup>. Hierauf aufbauend soll im Folgenden analysiert werden, wie unter idealisierten stochastischen Bedingungen die LKL nach Nyhuis/Wiendahl parametrisiert werden müsste, um die in diesen Fällen mittels eines lagerhaltungstheoretischen Ansatzes exakt bestimmbare LKL möglichst gut zu approximieren. Dabei zeigt sich, dass es nur wenige charakteristische Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind, welche die optimale Wahl des  $C$ -Parameters determinieren, so dass allgemeine Hinweise zur bestmöglichen Parameterwahl gegeben werden können.

Um die entsprechende Analyse nachvollziehbar zu machen, werden zunächst das Konzept der LKL nach Nyhuis/Wiendahl sowie das Konzept der Lagerhaltungstheorie zur Ableitung der exakten LKL in einem einheitlichen formalen Rahmen präsentiert. Um die Darstellung nicht zu überfrachten, wird aus dem Komplex möglicher Planabweichungen nur die stochastische Bedarfsabweichung betrachtet<sup>9</sup>. Für diesen Betrachtungsrahmen wird im Anschluss die

---

<sup>6</sup> Näheres hierzu findet sich in Inderfurth/Schulz 2007a

<sup>7</sup> siehe Nyhuis/Wiendahl 2003, S. 258 ff.

<sup>8</sup> siehe Inderfurth/Schulz 2007b

<sup>9</sup> zur möglichen Einbeziehung weiterer Abweichungstypen siehe Inderfurth/Schulz 2007a

Analyse der optimalen Parametrisierung über die Wahl des Parameters  $C$  vorgenommen und ausgewertet.

## 2 Das Konzept der Lagerkennlinie von Nyhuis/Wiendahl

### 2.1 Lagerkennlinie und Performancemaße des Bestandsmanagements

Traditionelle Kenngrößen zur Messung der Performance von Lagersystemen sind neben Kostengrößen insbesondere technische Maße wie Bestandsgrößen und Größen, die den Lieferservice charakterisieren<sup>10</sup>. Zu den Kenngrößen, die den Lieferservice quantitativ beschreiben, gehören insbesondere die Lieferzeit und die Lieferzuverlässigkeit, wobei Lieferzuverlässigkeit durch Servicegrade verschiedenen Typs beschrieben werden kann<sup>11</sup>. Eine klassische Aufgabe im Rahmen von Bestandsplanung und Bestandscontrolling besteht darin, den Zielkonflikt zwischen Bestandsgrößen auf der einen Seite und Kenngrößen der Lieferfähigkeit auf der anderen Seite zu analysieren und zu beschreiben. Der Trade-off zwischen Lieferfähigkeit und Lagerbestand (insbesondere Sicherheitsbestand) findet sich häufig in Form von Ausgleichskurven dargestellt<sup>12</sup>, die mit Hilfe einer stochastischen Analyse des Lagersystems erstellt werden. Hier ist auch die Theorie der Lagerkennlinie einzuordnen, die sich in ihren ersten Ansätzen einer Analyse des Zusammenhangs zwischen Bestandshöhe und Dauer einer Lieferverzögerung widmet<sup>13</sup>. Dabei wird generell der Anspruch erhoben, den „Wirkungszusammenhang zwischen dem Lagerbestand und der Lieferbereitschaft in Abhängigkeit verschiedenster Rahmenbedingungen“ darzustellen<sup>14</sup>.

Im ursprünglichen Ansatz der Kennlinientheorie zum Bestandsmanagement wird als zeitbezogenes Servicemaß der sogenannte Lieferverzug benutzt, der die mittlere Zeitverzögerung bei der Bedienung der Nachfrage aus dem Lager wiedergibt<sup>15</sup>. In diesem Sinn stellt die LKL den funktionalen Zusammenhang zwischen dem mittleren Bestand in einem Lagersystem und der Höhe des mittleren Lieferverzugs dar, der sich unter gegebenen logistischen Rahmenbedingungen (Lagersystem, Dispositionsverfahren, Störeinflüsse) erwarten lässt. Dabei wird zwischen einer idealen und einer realen Kennlinie unterschieden. Die Ableitung der idealen Lagerkennlinie basiert auf einer analytischen Beschreibung des Zu-

---

<sup>10</sup> siehe Pfohl 2004, S. 37 ff.

<sup>11</sup> siehe hierzu insbesondere Tempelmeier 2005, S. 27 ff.

<sup>12</sup> siehe z.B. Pfohl 2004, S. 116, Silver u.a. 1998, S. 286

<sup>13</sup> siehe Gläßner 1995, S 46 ff.; in Lutz 2002 erfolgt später auch eine analoge Untersuchung des Trade-offs zwischen Lagerbestand und  $\beta$ -Servicegrad

<sup>14</sup> siehe Nyhuis/Wiendahl 2003, S. 240

<sup>15</sup> siehe Nyhuis/Wiendahl 2003, S. 241

sammenhangs in einem idealisierten, deterministischen Lagerhaltungsmodell vom Typ des klassischen Losgrößenproblems, das mit einer einfachen Dispositionsregel gesteuert wird. Da das idealisierte, deterministische Modell kaum in der Praxis vorzufinden ist, wird für praktische Anwendungen die reale Lagerkennlinie empfohlen. Diese wird unter Nutzung einer spezifischen mathematischen Approximationsfunktion aus der idealen LKL transformiert, sobald eine oder mehrere logistische Einflussgrößen einem stochastischen Einfluss unterliegen. Das Konzept der LKL nach Nyhuis/Wiendahl basiert auf der Analyse eines einfachen statischen Lagerhaltungsproblems (ein Produkt, eine Lagerstufe) mit konstantem zeitkontinuierlichem Lagerabgang und losweisem Lagerzugang. In einem ersten Schritt wird in idealisierter Form angenommen, dass keine unsicheren Einflussgrößen existieren, sodass sich allgemein ein Bestandsverlauf wie im klassischen Losgrößenmodell mit Fehlmengen ergibt<sup>16</sup>, der in Abbildung 1 wiedergegeben ist.

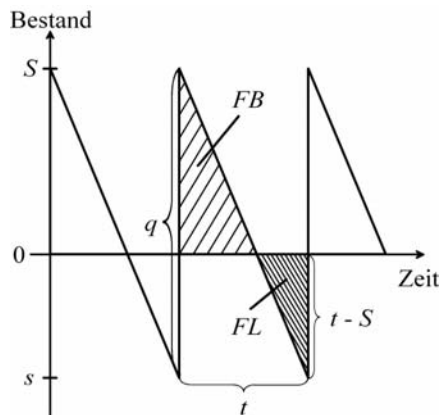


Abbildung 1: Lagerbestandsverlauf bei Sicherheit

Die Bestandsdisposition erfolgt in diesem Fall gleichermaßen nach einer  $(s,q)$ - wie nach einer  $(t,S)$ -Regel<sup>17</sup> mit den Dispositionsparametern  $s$  (Bestellpunkt),  $q$  (Bestellmenge = Beschaffungslosgröße),  $t$  (Bestellzykluslänge) und  $S$  (Bestellgrenze), zwischen denen bei konstanter Nachfragerate (Lagerabgangsrate)  $r$  folgender Zusammenhang besteht:

$$q = r \cdot t \text{ und } s = S - q \quad (1)$$

Im Folgenden wird zur Beschreibung der Zusammenhänge von einer  $(t,S)$ -Regel ausgegangen. Eine mögliche Wiederbeschaffungszeit (Lieferzeit)  $\lambda$  wird

<sup>16</sup> siehe Neumann 1996, S. 32 ff.

<sup>17</sup> zu Dispositionsregeln siehe Inderfurth/Jensen 2004

hier nicht berücksichtigt, da sie unter deterministischen Bedingungen lediglich eine Anhebung des Bestellpunkts  $s$  um den Betrag  $\lambda \cdot r$  zur Folge hätte und den Bestandsverlauf aus Abbildung 1 nicht beeinflussen würde.

Abbildung 1 lässt erkennen, dass bei vorgegebener Größe der Bestellmenge  $q$  durch die Wahl der Bestellgrenze  $S$  direkt Einfluss auf die Höhe des mittleren Lagerbestands und der in Kauf zu nehmenden Fehlmengen genommen werden kann. Durch Variation von  $S$ , dessen Wertebereich zwischen 0 und  $q$  liegt, kann eine Trade-off-Beziehung zwischen Lagerbestand und Lieferverzug, der sich aus den auftretenden Fehlmengen ergibt, analysiert werden. Im LKL-Konzept von Nyhuis/Wiendahl werden dabei als Lieferverzug der mittlere Zeitverzug pro Nachfrageeinheit und als Lagerbestand der mittlere Bestand pro Zeiteinheit betrachtet<sup>18</sup>. Um den Zusammenhang zwischen diesen Kenngrößen abzuleiten, werden zunächst die zugehörigen Flächenstücke aus Abbildung 1 berechnet. Für die weiteren Ableitungen wird folgende Notation verwendet:

$FB$	:	Bestandsfläche
$FL$	:	Fehlmengenfläche
$B$	:	mittlerer Bestand je Zeiteinheit
$L$	:	mittlerer Lieferverzug je Nachfrageeinheit
$B_{max}$	:	maximal notwendiger Bestand (für $L = 0$ )
$L_{max}$	:	maximal in Kauf zu nehmender Lieferverzug (für $B = 0$ )

Definitionsgemäß gilt:

$$B = FB/t \quad \text{und} \quad L = FL/(r \cdot t).$$

Aus Abbildung 1 lassen sich leicht folgende Flächengrößen ableiten, die mit der Bestellgrenze  $S$  variieren:

$$FB(S) = S^2/(2r) \quad \text{und} \quad FL(S) = (r \cdot t - S)^2/(2r).$$

Daraus ergeben sich für die Lagerkenngrößen  $B$  und  $L$  jeweils die Funktionen:

$$B(S) = S^2/(2r \cdot t) \quad \text{und} \quad L(S) = (r \cdot t - S)^2/(2r^2 \cdot t).$$

Löst man  $B(S)$  nach  $S$  auf und setzt dies in die Funktion  $L(S)$  ein, so erhält man folgenden funktionalen Ausdruck für die Abhängigkeit des mittleren Lieferverzugs vom mittleren Lagerbestand:

$$L^i(B) = t/2 + \left( B - \sqrt{2 \cdot r \cdot t \cdot B} \right) / r. \quad (2)$$

---

<sup>18</sup> siehe Nyhuis/Wiendahl 2003, S. 243

Diese Funktion entspricht bei Ersetzung der Zykluszeit  $t$  durch den losgrößenabhängigen Ausdruck  $q/r$  gemäß (1) der Formulierung aus Nyhuis/Wiendahl<sup>19</sup>. Die Beziehung aus (2), deren Kurvenverlauf in Abbildung 2 dargestellt ist, gibt unter den idealisierten Bedingungen der Abbildung 1 wieder, wie der Lieferverzug – beginnend bei einem Maximalwert von  $L_{\max}^i$  – mit zunehmendem Lagerbestand absinkt, bis er schließlich bei einem maximal notwendigen Bestand  $B_{\max}^i$  einen Wert von Null erreicht. Diese Kurve, die im Bereich  $0 \leq B \leq B_{\max}^i$  definiert ist, wird von Nyhuis/Wiendahl als *ideale* LKL bezeichnet und soll deshalb als Funktion  $L^i(B)$  genannt werden<sup>20</sup>.

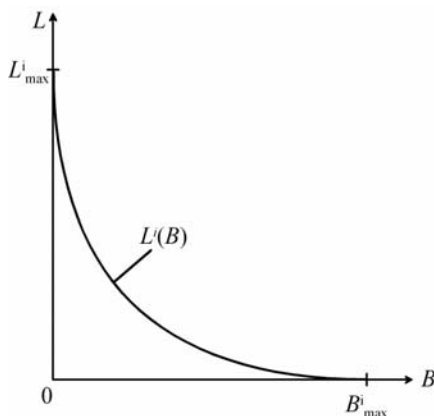


Abbildung 2: Die Lagerkennlinie bei Sicherheit

Aus dem Funktionszusammenhang in (2) ist unmittelbar ableitbar, dass  $L^i(B)$  einen konvexen, monoton fallenden Verlauf hat. Daher kann man sagen, dass jede zusätzliche Verminderung des Lieferverzugs mit einer überproportionalen Erhöhung des Lagerbestands erkaufte werden muss. Die Achsenabschnitte der idealen LKL ergeben sich als Grenzpunkte der Kennlinienfunktion für  $B = 0$  bzw.  $L = 0$  und betragen:

$$L_{\max}^i = t/2 \tag{3}$$

und

$$B_{\max}^i = r \cdot t/2 \tag{4}$$

<sup>19</sup> Der entsprechende funktionale Zusammenhang ist in Nyhuis/Wiendahl 2003 (S. 248 ff.) wiedergegeben.

<sup>20</sup> siehe Nyhuis/Wiendahl 2003, S. 248 f.



Hieraus lässt sich entnehmen, dass im Extremfall (bei  $S = 0$ ) je Nachfrageeinheit durchschnittlich eine halbe Zyklusdauer  $t$  auf Lieferung gewartet werden muss bzw. dass im entgegengesetzten Extrem (bei  $S = q$ ) eine halbe Losgröße im Durchschnitt im Bestand liegt, um eine Lieferzuverlässigkeit von 100 % zu garantieren.

## 2.2 Anpassung der Lagerkennlinie bei Unsicherheit

Ausgehend von der oben beschriebenen idealen LKL wird in Nyhuis/Wiendahl ein spezifisches Konzept zur Anpassung dieser Kennlinie an Situationen entwickelt, die durch Unsicherheit in Form von Prozessstörungen auf der Lagerzu- und Lagerabgangsseite charakterisiert sind. Betrachtet werden dabei neben Liefertermin- und Liefermengenabweichungen auch Bedarfsabweichungen. Für die weitere Analyse des LKL-Konzepts erfolgt eine Beschränkung auf bedarfsbezogene Abweichungen, die in vielen praktischen Fällen auch die wesentlichen Störgrößen darstellen. In Nyhuis/Wiendahl werden diese Nachfrageabweichungen als stochastische Größen mit bekannten (bzw. zu schätzenden) Wahrscheinlichkeitsverteilungen verstanden, deren Wertebereich nach unten und oben beschränkt ist<sup>21</sup>. Zur Berücksichtigung dieses Sachverhalts wird folgende zusätzliche Notation eingeführt:

$\tilde{r}$  : stochastische Nachfrage mit Wertebereich  $r_u \leq r \leq r_o$   
 und Erwartungswert  $\bar{r} = E[\tilde{r}]$ .

Die Kenngrößen mittlerer Lagerbestand und Lieferverzug sind im stochastischen Fall als Erwartungswerte zu verstehen. Da sich unter Unsicherheit mögliche Abweichungen von der erwarteten Nachfrage auf die Trade-off-Beziehung zwischen diesen Kenngrößen auswirken, muss die in (2) beschriebene LKL unter Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeitsinformationen modifiziert werden.

Geht man davon aus, dass die ideale LKL in (2) auf der Grundlage des Erwartungswerts der Nachfrage (d.h.  $\bar{r}$ ) abgeleitet wurde, so werden im Fall stochastischer Einflussgrößen zunächst die Grenzwerte von Lieferverzug und Lagerbestand (d.h.  $L_{\max}$  und  $B_{\max}$ ) im Rahmen einer Worst-case-Betrachtung angepasst und damit vergrößert. Dabei wird der maximale Lieferverzug  $L_{\max}$  um die Differenz aus erwarteter und minimaler Nachfrage während der Lieferzeit erhöht, wobei diese Differenz auf die erwartete Nachfrage bezogen wird. Für den maximalen Lagerbestand ergibt sich aus analogen Überlegungen, dass der Bestand aus dem deterministischen Fall in (4) noch um die Differenz zwischen maximaler und mittlerer Nachfrage während der Lieferzeit ergänzt wird. Bei positiver Lieferzeit ergeben sich dadurch größere Werte für maximalen Liefer-

---

<sup>21</sup> siehe Nyhuis/Wiendahl 2003, S. 251 ff.

verzug und Bestand als sie im deterministischen Fall in (3) und (4) vorliegen würden<sup>22</sup>. Bei einer Lieferzeit von null, von der im Weiteren der Einfachheit halber ausgegangen werden soll, bleibt es auch im stochastischen Fall bei den Werten aus der idealen LKL:

$$L_{\max} = t/2 \text{ und } B_{\max} = \bar{r} \cdot t/2 \quad (5)$$

Bei periodischer Bestandskontrolle, wie sie bei Anwendung einer  $(t,S)$ -Regel stattfindet, verlängert sich der Risikozeitraum für die stochastischen Nachfragen um die Dauer des Bestellzyklus  $t^3$ , sodass sich hier ein anderer Grenzbestand  $B_{\max}$  als nach (5) ergibt:

$$B_{\max} = \bar{r} \cdot t/2 + t \cdot (r_o - \bar{r}) \quad (6)$$

Im Anschluss an die so beschriebene Festlegung der Kennliniengrenzwerte  $L_{\max}$  und  $B_{\max}$  wird die Gesamtkennlinie nach Nyhuis/Wiendahl dadurch erzeugt, dass diese beiden Achsenabschnitte der LKL durch eine Näherungskurve miteinander verbunden werden, welche die Austauschbeziehung zwischen Lieferverzug und Bestandshöhe im stochastischen Fall möglichst gut widerspiegeln soll. Eine solche Kennlinie wird von Nyhuis/Wiendahl als *reale* LKL bezeichnet<sup>24</sup>.

Als Funktion zur Näherung des exakten LKL-Verlaufs wird die sog.  $C_{NORM}$ -Funktion gewählt, die eine Verallgemeinerung der Kreisfunktion mittels eines frei zu wählenden Parameters  $C$  in Form von  $1 = |x|^C + |y|^C$  darstellt<sup>25</sup>. Diese Funktion eignet sich zur Approximation eines stetigen konvexen oder konkaven Kurvenverlaufs zwischen zwei Punkten, der bestimmte Symmetrieeigenschaften aufweist. Auf die LKL mit den Grenzpunkten  $L_{\max}$  und  $B_{\max}$  übertragen, ergibt sich dabei im stochastischen Fall folgender Funktionsverlauf für die Abhängigkeit des Lieferverzugs vom Lagerbestand<sup>26</sup>:

$$L(B) = L_{\max} \cdot \sqrt[C]{1 - (B/B_{\max})^C} \quad (7)$$

Der Parameter  $C$  soll dabei so gewählt werden, dass diese Funktion  $L(B)$  sich umso stärker der idealen LKL aus (2) annähert, je mehr sich die Wahrscheinlichkeitsmasse der stochastischen Einflussgrößen um ihren Mittelwert konzentriert. Grundlage für die genaueren Empfehlungen zur Wahl des Wertes von  $C$  bildet der Sachverhalt, dass unter deterministischen Bedingungen die LKL aus (2) durch die Kennlinienfunktion in (7) für  $C = 0,5$  exakt wiedergegeben wird. Dieser Parameterwert wird als maximal zulässige Größe  $C_{\max}$  im stochasti-

<sup>22</sup> zu Details siehe Inderfurth/Schulz 2007a

<sup>23</sup> siehe Inderfurth/Jensen 2004

<sup>24</sup> siehe Nyhuis/Wiendahl 2003, S. 257

<sup>25</sup> siehe Nyhuis/Wiendahl 2003, S. 71 f.

<sup>26</sup> siehe Nyhuis/Wiendahl 2003, S. 256 f.

schen Fall betrachtet, die einen Zusammenhang widerspiegeln soll, der durch eine extrem starke Streuung des Zufallseinflusses innerhalb der angenommenen Unter- und Obergrenzen ( $r_u$  bzw.  $r_o$ ) gekennzeichnet ist. Ausgehend von den Achsenabschnitten  $L_{\max}$  und  $B_{\max}$  wird in diesem Fall die reale LKL über den ganzen Verlauf hin stark von der idealen LKL abweichen, wie es in Abbildung 3 dargestellt ist.

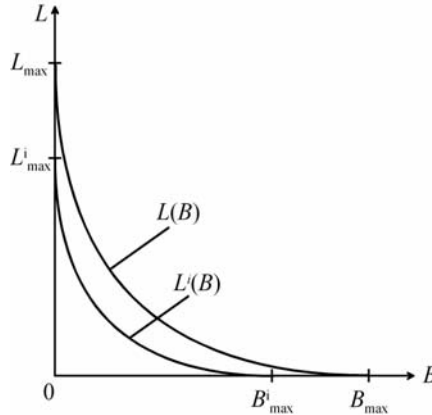


Abbildung 3: Ideale und reale Lagerkennlinie

Je geringer die Streuung der stochastischen Einflussgrößen ist, desto mehr sollte sich durch die Wahl des  $C$ -Parameters die reale LKL an die ideale Kurve annähern. Der minimale  $C$ -Wert  $C_{\min}$  wird dabei so festgelegt, dass die reale LKL die ideale LKL in einem Punkt gerade berührt<sup>27</sup>. Dieser  $C_{\min}$ -Wert wird auf Basis einer näherungsweise angenommenen Identität der Relationen  $L_{\max} / L_{\max}^i$  und  $B_{\max} / B_{\max}^i$  (d.h. eine symmetrische Wahrscheinlichkeitsverteilung der Planabweichungen voraussetzend) abgeschätzt und beträgt allgemein<sup>28</sup>:

$$C_{\min} = \ln(0,5) / \ln(B_{\max}^i / 4B_{\max})$$

Ein solcher  $C_{\min}$ -Wert wird für Wahrscheinlichkeitsverteilungen empfohlen, die nur sehr gering um ihren Erwartungswert streuen, also einen niedrigen Variationskoeffizienten haben. Als praxisrelevante Wertgröße von  $C$  wird unter Verweis auf Simulationsergebnisse eine Festlegung der folgenden Form empfohlen, bei der  $\alpha$  als verteilungsspezifisch zu wählender Parameter zu betrachten ist:

$$C = \alpha \cdot (C_{\max} - C_{\min}) + C_{\min} \quad (8)$$

<sup>27</sup> siehe Nyhuis/Wiendahl 2003, S. 258 f.

<sup>28</sup> siehe Nyhuis/Wiendahl 2003, S. 259

Für näherungsweise normalverteilte Störgrößen wird ein  $\alpha$ -Wert von  $\alpha = 0,15$  als optimal genannt<sup>29</sup>. Für schlankere Verteilungen mit in Relation zum Mittelwert niedriger Streuung wird empfohlen, den  $\alpha$ -Wert zu reduzieren, für breitere Verteilungen lautet die Empfehlung, ihn zu erhöhen. Detaillierte Angaben hierzu werden allerdings nicht gemacht. Somit bleibt die Frage offen, wie z.B. bei bestimmter Höhe des Variationskoeffizienten der Störgröße der  $C$ -Wert konkret zu wählen ist. Außerdem beziehen sich alle Vorschläge auf symmetrische Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Die Frage, ob und wie der  $C$ -Wert zusätzlich im Hinblick auf eine mögliche Schiefe der Verteilung angepasst werden sollte, ist ebenfalls noch zu beantworten.

### **3 Exakte Ableitung der Lagerkennlinie bei stochastischer Nachfrage**

#### *3.1 Lagerhaltungstheoretische Kennlinienermittlung*

Im Rahmen der stochastischen Lagerhaltungstheorie wird allgemein versucht, den Einfluss verschiedenster stochastischer Störeinflüsse auf Leistungskenngrößen von Lagerhaltungssystemen bei Anwendung bestimmter Dispositionsregeln und Wahl spezifischer Dispositionsparameter analytisch zu erfassen. Dabei wird beim Einsatz der Lagerhaltungstheorie grundsätzlich davon ausgegangen, dass der Typ der Dispositionsregel und die Wahrscheinlichkeitsinformation zu den Störgrößen explizit in die Analyse einbezogen werden. Für eine vorgegebene Dispositionsregel und eine spezifizierte Wahrscheinlichkeitsverteilung wird dabei auf analytischem Weg untersucht, welcher Zusammenhang zwischen Dispositionsparametern und einzelnen logistischen Kenngrößen besteht bzw. wie unterschiedliche Kenngrößen miteinander verknüpft sind. Eine solche Untersuchung lässt sich auch für die Kenngrößen „mittlerer Lieferverzug“ und „mittlerer Lagerbestand“ vornehmen.

Im Folgenden wird für eine Planungsumgebung analog zu derjenigen der Kennlinientheorie gezeigt, wie sich unter der (idealisierenden) Annahme der Kenntnis der zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen die reale LKL mit dem alternativen lagerhaltungstheoretischen Ansatz – anders als bei der Kennlinientheorie – exakt ableiten lässt. Diese Untersuchungen werden exemplarisch für den Fall der Anwendung einer  $(t,S)$ -Dispositionsregel bei einer Lieferzeit von null durchgeführt. Ausgangspunkt bildet hierbei die Analyse der Bestands- und Fehlmengenflächen während eines Bestellzyklus, wie sie im deterministischen Fall des Kapitels 2.2 zur Ableitung der idealen LKL vorgenommen

---

<sup>29</sup> siehe Nyhuis/Wiendahl 2003, S. 260 f.

wurde. Diese Vorgehensweise wird unmittelbar auf den stochastischen Fall erweitert.

### 3.2 Die Lagerkennlinie bei diskreter Nachfrageverteilung

Zu Beginn der Analyse wird der Fall einer diskreten Nachfrageverteilung untersucht, wobei der Einfachheit wegen unterstellt wird, dass bei der stochastischen Nachfrage nur zwei Realisationen (unterer Wert  $r_u$  und oberer Wert  $r_o$ ) auftreten können. Damit haben wir es mit einer diskreten Zufallsgröße zu tun, die sich durch folgende Zweipunktverteilung beschreiben lässt:

Nachfragerate	$r_u$	$r_o$
Wahrscheinlichkeit	$p_u$	$p_o$

Für den Erwartungswert der Nachfrage  $\bar{r}$  gilt damit:  $\bar{r} = p_u \cdot r_u + p_o \cdot r_o$ .

Zunächst ist darauf hinzuweisen, dass die Kenngrößen mittlerer Lieferverzug und mittlerer Lagerbestand im stochastischen Fall als Erwartungswerte über alle möglichen Realisationen der Zufallsgrößen zu verstehen sind. Analog zur Analyse bei Sicherheit werden Lieferverzug und Bestand auf der Grundlage des Lagerbestandsverlaufs pro Zyklus analysiert. Dabei wird berücksichtigt, dass der Bestandsverlauf nunmehr von der Realisation der Zufallsgröße abhängt. Im Rahmen der angewandten  $(t,S)$ -Regel müssen dabei verschiedene Fälle unterschieden werden, bei denen in Abhängigkeit von der Wahl der Bestellgrenze  $S$  Lagerbestände und Fehlmengen in unterschiedlicher Konstellation auftreten.

Im Hinblick auf die beiden möglichen Nachfragewerte  $r_u$  und  $r_o$  müssen die schon in Abbildung 1 beschriebenen Bestands- und Fehlmengenflächen  $FB$  und  $FL$  nachfragespezifisch unterschieden werden, was zu folgender Fallunterscheidung bei der Ableitung der relevanten Bestands- und Lieferverzugsflächen in Abhängigkeit von der Wahl der Bestellgrenze  $S$  führt:

*Fall I* : Lieferverzug ist nur bei hoher Nachfrage  $r_o$  möglich  
(d.h.  $S - t \cdot r_u \geq 0$  und  $S - t \cdot r_o \leq 0$  ),

*Fall II* : Lagerbestand und Lieferverzug sind in beiden Nachfragesituationen  $r_u$  und  $r_o$  möglich  
(d.h.  $S \geq 0$  und  $S - t \cdot r_u \leq 0$  ).

Aus einer entsprechenden Analyse<sup>30</sup> ergeben sich folgende Zusammenhänge für den mittleren Bestand ( $B_I$  bzw.  $B_{II}$ ) und den mittleren Lieferverzug ( $L_I$  bzw.  $L_{II}$ ) in den beiden Fällen:

$$B_I(S) = p_u \cdot (S - t \cdot r_u / 2) + p_o \cdot S^2 / (2t \cdot r_o) \quad (9)$$

$$L_I(S) = p_o \cdot (t - S / r_o)^2 / (2t) \quad (10)$$

$$B_{II}(S) = (p_u \cdot S^2 / r_u + p_o \cdot S^2 / r_o) / (2t) \quad (11)$$

$$L_{II}(S) = (p_u \cdot (t - S / r_u)^2 + p_o \cdot (t - S / r_o)^2) / (2t) \quad (12)$$

Die Extremwerte von mittlerem Lagerbestand und Lieferverzug ( $B_{\max}$  und  $L_{\max}$ ) lassen sich aus  $B_I(S)$  für  $S = t \cdot r_o$  bzw. aus  $L_{II}(S)$  für  $S = 0$  ableiten. Unter Verwendung des Nachfrageerwartungswerts  $\bar{r}$  ergeben sich dabei folgende Zusammenhänge:

$$B_{\max} = t \cdot \bar{r} / 2 + t \cdot (r_o - \bar{r}) \quad \text{und} \quad L_{\max} = t / 2. \quad (13)$$

Bei einem direkten Vergleich mit den entsprechenden Grenzwerten  $B_{\max}$  und  $L_{\max}$  aus der Kennlinienanalyse von Nyhuis/Wiendahl in (5) bzw. (6) stellt sich heraus, dass im vorliegenden Fall die Grenzpunkte  $B_{\max}$  und  $L_{\max}$  der Kennlinientheorie durch die lagerhaltungstheoretische Analyse bestätigt werden.

Die gesamte Kennlinienfunktion kann nunmehr erzeugt werden, indem für die beiden Fälle I und II die Funktionen  $B_I(S)$  bzw.  $B_{II}(S)$  nach  $S$  aufgelöst und in die Funktionen  $L_I(S)$  und  $L_{II}(S)$  eingesetzt werden. Daraus ergibt sich ein Funktionsverlauf  $L(B)$  der exakten realen LKL, der stetig ist und sich aus zwei Teilfunktionen  $L_I(B)$  und  $L_{II}(B)$  für die beiden Fälle I und II zusammensetzt:

$$L(B) = \begin{cases} L_I(B) & \text{für} \quad B_{I/II} \leq B \leq B_{\max} \\ L_{II}(B) & \quad \quad \quad 0 \leq B \leq B_{I/II} \end{cases} \quad (14)$$

$B_{I/II}$  ergibt sich aus  $B_I(S) = B_{II}(S)$  für  $S = t \cdot r_u$ , woraus folgt:

$$B_{I/II} = (p_u \cdot r_u + p_o \cdot r_o \cdot (r_u / r_o)^2) \cdot t / 2.$$

Für die Teilfunktion  $L_I(B)$  und  $L_{II}(B)$  resultiert aus der weiteren Auswertung:

---

<sup>30</sup> zu Einzelheiten der Ableitung siehe Inderfurth/Schulz 2007b

$$L_I(B) = t \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot p_o + p_u + \frac{p_u^2}{p_o} \right) +$$

$$\frac{1}{r_o} \cdot \left( B - \left( 1 + \frac{p_u}{p_o} \right) \cdot \sqrt{p_u^2 \cdot r_o^2 \cdot t^2 + p_o \cdot p_u \cdot r_o \cdot r_u \cdot t^2 + 2 \cdot p_o \cdot r_o \cdot t \cdot B} + \frac{1}{2} \cdot t \cdot p_u \cdot r_u \right)$$

$$L_{II}(B) = \frac{B \cdot (p_u \cdot r_o^2 + p_o \cdot r_u^2)}{r_u \cdot r_o \cdot (p_u \cdot r_o + p_o \cdot r_u)} - \sqrt{\frac{2 \cdot B \cdot t \cdot (p_u \cdot r_o + p_o \cdot r_u)}{r_u \cdot r_o}} + \frac{1}{2} \cdot t.$$

Die Kennlinienfunktion aus (14) bildet eine Erweiterung der idealen Kennlinie aus (2) für den Fall stochastischer Nachfrage. Für den Grenzfall  $r_u = r_o = r$  vereinfacht sich die LKL aus (14) zum Spezialfall der deterministischen Variante in (2).

In den Abbildungen 4 und 5 ist der Kennlinienverlauf aus (14) für verschiedene Konstellationen der Wahrscheinlichkeiten  $p_u$  und  $p_o$  dargestellt, aus denen sich ablesen lässt, wie sich eine unterschiedliche Streuung (bei symmetrischer Nachfrage) bzw. eine unterschiedliche Form der Asymmetrie der Nachfrage auf den Kennlinienverlauf auswirken können.

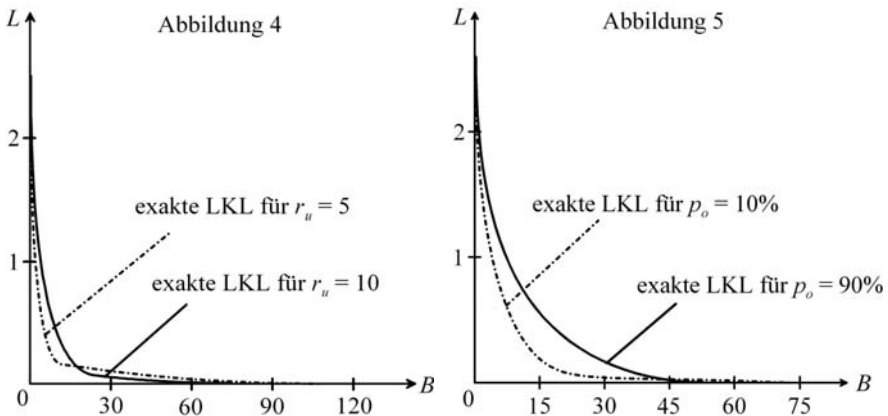


Abbildung 4: Exakte LKL für  $t=5$ ,  $p_u=p_o=0,5$  und  $\bar{r}=15$

Abbildung 5: Exakte LKL für  $t=5$ ,  $r_u=10$  und  $r_o=20$

Aus den Abbildungen wird deutlich, dass nicht nur das Ausmaß der Streuung (bzw. des Variationskoeffizienten) der Störgröße einen erheblichen Einfluss auf den Verlauf der exakten LKL hat, sondern dass dasselbe auch für Form und Ausmaß der Asymmetrie der entsprechenden Wahrscheinlichkeitsverteilung gilt.

### 3.3 Lagerkennlinien bei stetiger Nachfrageverteilung

Die im vorhergehenden Abschnitt beschriebene Methode der exakten Ableitung von Lagerkennlinien lässt sich auch unter erweiterten Bedingungen anwenden. So ist es möglich, stetige Störgrößen an Stelle solcher mit diskreter Wahrscheinlichkeitsverteilung zu berücksichtigen. An Stelle einer Zweipunktverteilung mit den beiden Nachfragewerten  $r_u$  und  $r_o$  wird eine stetige Verteilung im Intervall  $[r_u, r_o]$  mit einer Dichtefunktion  $\varphi(r)$  unterstellt.

Zur Analyse der Bestands- und Fehlmengenflächen ist unter diesen Umständen grundsätzlich genauso wie in Kap. 3.2 vorzugehen, wobei auch für die Wertebereiche der Bestellgrenze  $S$  dieselben beiden Fälle zu unterscheiden sind. Allerdings können nun in jedem dieser Fälle unbegrenzt viele Bestandsverläufe auftreten, wobei auch hier wieder angenommen wird, dass eine sich realisierende Nachfragerate während der gesamten Zyklusdauer  $t$  konstant bleibt. Unter diesen Bedingungen gilt im *Fall I* (mit  $S - t \cdot r_u \geq 0$  und  $S - t \cdot r_o \leq 0$ ) für den erwarteten mittleren Bestand:

$$B_I(S) = \int_{r_u}^{S/t} \left(S - \frac{t \cdot r}{2}\right) \cdot \varphi(r) \cdot dr + \int_{S/t}^{r_o} \frac{S^2}{2t \cdot r} \cdot \varphi(r) \cdot dr . \quad (15)$$

Hierbei entsprechen die beiden Terme den erwarteten Bestandsflächen bei den Nachfrageverläufen, die zu ausschließlich positivem ( $t \cdot r < S$ ) bzw. zu nicht-positivem Lagerendbestand ( $t \cdot r \geq S$ ) im Zyklus führen. Analog erhält man den erwarteten mittleren Lieferverzug im Fall I, wobei hier nur das Auftreten hinreichend hoher Nachfragen (mit  $t \cdot r \geq S$ ) relevant ist:

$$L_I(S) = \int_{S/t}^{r_o} \frac{(t \cdot r - S)^2}{2t \cdot r^2} \cdot \varphi(r) \cdot dr . \quad (16)$$

Im *Fall II* (mit  $S \geq 0$  und  $S - t \cdot r_u \leq 0$ ) stellen sich bei entsprechender Vorgehensweise folgende Ergebnisse heraus:

$$B_{II}(S) = \int_{r_u}^{r_o} \frac{S^2}{2t \cdot r} \cdot \varphi(r) \cdot dr \quad (17)$$

und

$$L_{II}(S) = \int_{r_u}^{r_o} \frac{(t \cdot r - S)^2}{2t \cdot r^2} \cdot \varphi(r) \cdot dr . \quad (18)$$

Aus diesen funktionalen Beziehungen lassen sich grundsätzlich wieder zwei Teilfunktionen  $L_I(B)$  und  $L_{II}(B)$  ableiten, die zusammengesetzt den exakten Verlauf der gesamten LKL beschreiben. Die Grenzpunkte der LKL erhält man wie



im diskreten Fall aus folgendem Zusammenhang:  $B_{\max}$  aus  $B_I(S)$  für  $S = t \cdot r_o$  und  $L_{\max}$  aus  $L_{II}(S)$  für  $S = 0$ . Durch Einsetzen dieser Werte für  $S$  in die Funktionsbeziehungen (15) und (18) folgt für die Maximalwerte von mittlerem Bestand und Lieferverzug unmittelbar:

$$B_{\max} = t \cdot \bar{r} / 2 + t \cdot (r_o - \bar{r}) \quad \text{und} \quad L_{\max} = t / 2. \quad (19)$$

Es stellt sich somit heraus, dass bei begrenztem Wertebereich für die stochastische Nachfrage unabhängig vom spezifischen Typ der Nachfragedichte  $\varphi(r)$  dieselben Grenzpunkte der LKL gültig sind wie im Fall der Zweipunktverteilung in (13).

Aus der Abhängigkeit der Bestands- und Lieferverzugsfunktionen in (15) bis (18) von der Nachfragedichte  $\varphi(r)$  wird allerdings deutlich, dass im Gegensatz zu den Grenzwerten  $B_{\max}$  und  $L_{\max}$  der konkrete Verlauf der LKL sehr wohl von den speziellen Eigenschaften der Nachfrageverteilung abhängt. Im Allgemeinen wird es nicht mehr möglich sein, die durch die beiden Teilfunktionen  $L_I(B)$  und  $L_{II}(B)$  definierte Kennlinienfunktion  $L(B)$  in geschlossener Form darzustellen. Dann muss die gesamte LKL durch eine numerische Auswertung der Funktionsverläufe der Gleichungen (14) bis (18) ermittelt werden.

#### 4 Optimale Parameterwahl für die Lagerkennlinie nach Nyhuis/Wiendahl

Die Ableitung der realen LKL nach dem Ansatz von Nyhuis/Wiendahl lässt sich als ein pragmatischer Ansatz verstehen, der dazu dient, durch die Verwendung des Funktionstyps aus (7) mit Anpassungsparameter  $C$  auch ohne die direkte Berücksichtigung von Wahrscheinlichkeitsinformationen für Planabweichungen eine zuverlässige Abbildung der Trade-off-Beziehung zwischen Bestandshöhe und Lieferverzug zu generieren. Wie gut die Wahl des  $C$ -Parameters den Einfluss der Stochastik zu berücksichtigen vermag, lässt sich nun an Beispielen überprüfen, in denen die lagerhaltungstheoretische Untersuchung den exakten Verlauf der LKL herzuleiten gestattet. Für den in Kapitel 2 und 3 erläuterten Problemzusammenhang zeigt eine erste Analyse unmittelbar, dass die exakte LKL nach (14) durch den Funktionsverlauf der realen LKL nach (7) nicht genau abgebildet werden kann. Dies gilt auch für beliebige stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen nach Kapitel 3.3. Durch die Wahl des Parameters  $C$  lässt sich der exakte LKL-Verlauf lediglich mehr oder weniger gut annähern. Wendet man die in (7) und (8) beschriebenen Hinweise zur Parameterwahl nach Nyhu-

is/Wiendahl an, so gelangt man zu dem Ergebnis, dass sich starke Abweichungen der so festgelegten realen von der exakten LKL ergeben können<sup>31</sup>.

Damit stellt sich die Frage, wie der  $C$ -Parameter gewählt werden sollte, um die exakte LKL möglichst gut wiederzugeben und von welchen Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsverteilung diese Wahl im Einzelnen abhängig gemacht werden sollte. Um diese Frage zu beantworten, sollen im Folgenden mehrere unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen, mit denen sich reale Nachfrageverteilungen häufig (zumindest näherungsweise) gut abbilden lassen, daraufhin untersucht werden, bei welchem Parameterwert von  $C$  sich jeweils die geringste Abweichung zwischen realer und exakter LKL ergibt. Die Abweichung soll dabei durch die Größe der Fläche zwischen den beiden LKL-Kurven gemessen werden, die sich unter Verwendung der lagerhaltungstheoretischen Analyseergebnisse numerisch ermitteln lässt. Da aus den Kurvenverläufen in den Abbildungen 4 und 5 deutlich geworden ist, dass die exakte LKL in ihrem Verlauf sowohl auf die Streuung wie auch auf die Schiefe der Wahrscheinlichkeitsverteilung sehr stark reagiert, sollen diese beiden Einflussgrößen zunächst einzeln untersucht werden.

#### 4.1 *Parameterwahl bei unterschiedlicher Streuung der Nachfrageverteilung*

Durch geeignete Wahl des Parameters  $C$  lässt sich die reale LKL nach Nyhuis/Wiendahl an den exakten Verlauf approximativ anpassen. Bevor der Einfluss der Nachfragestreuung auf die Parameterwahl im Detail untersucht wird, sollen zunächst die Faktoren näher erläutert werden, die unter sonst gleichen Umständen die Wahl des Parameters  $C$  nicht beeinflussen. In mehreren numerischen Untersuchungen wurde das Verhältnis von  $r_o$  zu  $r_u$ , das im Folgenden mit  $\gamma$  bezeichnet wird, als einer dieser Faktoren identifiziert. Demzufolge entspricht der optimale  $C$ -Wert für eine gegebene Nachfrageverteilung im Intervall zwischen  $r_u = 10$  und  $r_o = 20$  genau dem Wert, der für denselben Verteilungstyp im Intervall zwischen 50 und 100 optimal ist. Aus diesem Grund kann auch die Länge des Beobachtungsintervalls  $t$  unter sonst gleichen Umständen keinen Einfluss auf die Parametrisierung von  $C$  haben, was ebenfalls im Rahmen der Untersuchungen Bestätigung findet. Während also die absolute Höhe der Nachfragestreuung keine Auswirkung auf die Wahl von  $C$  zu haben braucht, gilt dies für die relative Streuung in Form des Variationskoeffizienten nicht. Der Variationskoeffizient (im Weiteren mit  $\rho$  symbolisiert) ist ein Maß, das die eigentliche Nachfragevariabilität in Form der Standardabweichung ins Verhältnis zum Mit-

---

<sup>31</sup> zu Einzelheiten siehe Inderfurth/Schulz 2007b

telwert der Verteilung setzt und somit von einer Skalenänderung der Intervallgrenzen der Störgröße nicht betroffen ist.

Aufgrund ihrer Vielseitigkeit nutzen alle folgenden Untersuchungen die Beta-Verteilung als Verteilungstyp, die mithilfe zweier Verteilungsparameter in einem vorgegebenen Intervall eindeutig bestimmt wird<sup>32</sup>. Da zunächst die Schiefe als Einflussfaktor ausgeschlossen wird, handelt es sich bei den in diesem Unterpunkt betrachteten Verteilungen ausschließlich um symmetrische Beta-Verteilungen, d.h. beide Verteilungsparameter haben den gleichen Wert. Die Vielseitigkeit der Beta-Verteilung wird darin deutlich, dass durch geeignete Wahl der Parameter unter anderem ein U-förmiger Verlauf (beide Parameter kleiner 1), eine Gleichverteilung (beide Parameter gleich 1) oder ein - von den Intervallbeschränkungen abgesehen – angenähert normalverteilter Verlauf generiert werden kann. Zu deren Illustration stellt Abbildung 6 den Verlauf der Dichtefunktionen von vier Verteilungen beispielhaft dar und gibt deren entsprechende Variationskoeffizienten an.

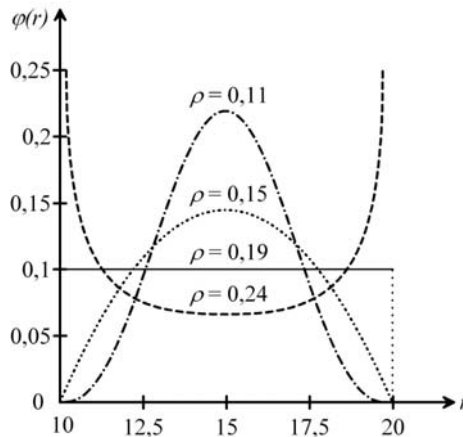


Abbildung 6: Beta-Verteilung mit  $r_u = 10$  und  $r_o = 20$  für vier verschiedene Variationskoeffizienten .

Durch Variation der eine Beta-Verteilung bestimmenden Parameter kann ein breites Spektrum unterschiedlicher Streuungen abgedeckt werden. Dabei ist eine Analyse der beiden Extremfälle besonders hilfreich. Wie in Abbildung 6 zu erkennen ist, konzentriert sich die Wahrscheinlichkeitsmasse umso mehr um den Mittelwert der Nachfrageverteilung je kleiner  $\rho$  ist. Im Extremfall  $\rho_{\min} = 0$  liegt sogar die komplette Masse bei  $\bar{r}$  und es herrscht somit Sicherheit bezüglich der Plangröße. Andererseits wird immer mehr Masse an die Ränder des Nachfragein-

<sup>32</sup> siehe Evans u.a. 2000, S.34 ff.

tervals gedrängt je größer die Ausprägung des Variationskoeffizienten ist. Daher liegt im anderen Extremfall, der sich in Abhängigkeit vom Nachfrageverhältnis  $\gamma$  als  $\rho_{\max} = (\gamma-1)/(\gamma+1)$  ergibt, die in Kapitel 3.2 thematisierte Zweipunktverteilung mit  $p_u = p_o = 0,5$  vor. Darauf basierend kann die Abhängigkeit der Parametrisierung des Faktors  $C$  von der Nachfrigestreuung sowie vom Verhältnis der höchstmöglichen zur niedrigstmöglichen Nachfrageausprägung herausgearbeitet werden. Das Ergebnis dieser Analyse zeigen die Abbildungen 7 und 8.

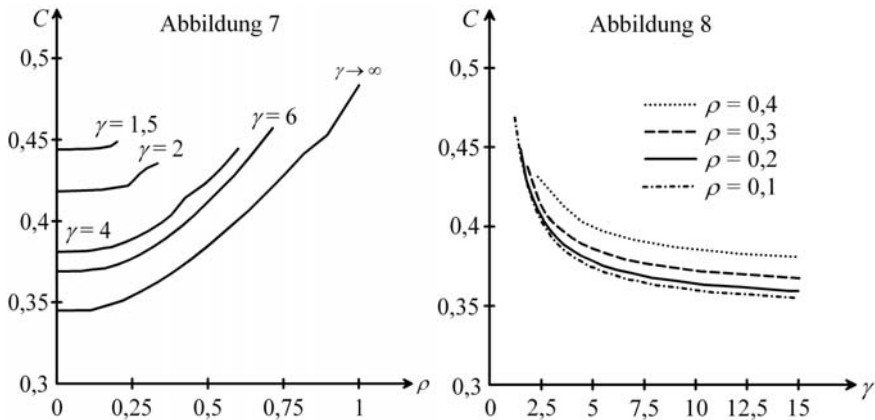


Abbildung 7: Optimaler C-Wert bei unterschiedlichem Variationskoeffizienten  $\rho$  für verschiedene Werte von  $\gamma = r_o / r_u$

Abbildung 8: Optimaler C-Wert bei unterschiedlichem Verhältnis  $\gamma = r_o / r_u$  für verschiedene Variationskoeffizienten  $\rho$

Darin wird deutlich, dass die Wahl des optimalen Parameters  $C$  in einigen Fällen recht robust gegenüber einer Änderung der Ausgangssituation ist. So reagiert die Wahl bei konstantem Verhältnis der Intervallgrenzen  $\gamma$  kaum auf Änderungen des Variationskoeffizienten, solange dieser kleiner als 0,2 ist. Ebenso zeigen die numerischen Untersuchungen, dass bei konstantem Variationskoeffizienten für große Werte von  $\gamma$  kaum Veränderungen bezüglich des optimalen C-Parameters auftreten. Allerdings wird ebenfalls deutlich, dass bei großem Wert von  $\gamma$  (im Extremfall mit  $\gamma \rightarrow \infty$  für  $r_u = 0$ ) die Nachfrigestreuung die Wahl des Parameters  $C$  besonders stark beeinflusst. Bei starker Konzentration der Wahrscheinlichkeitsmasse um den Mittelwert ermittelt dort die Flächenminimierung zwischen exakter und realer Kennlinie einen optimalen C-Wert von ca. 0,345. Auf der anderen Seite wird bei hoher Konzentration an den Rändern ein  $C$  von ungefähr 0,48 bestimmt. Dementsprechend kann der resultierende Fehler recht groß werden, den eine Parameterfehlspezifikation bei Vernachlässigung der

Nachfragestreuung verursacht. Führt man dieselbe Untersuchung wie oben für normalverteilte Nachfragen (die an den Intervallgrenzen abgeschnitten werden) durch, so zeigen sich im Hinblick auf den Einfluss des Variationskoeffizienten praktisch die gleichen Ergebnisse wie bei der Beta-Verteilung.

In den Abbildungen nicht dargestellt ist die Güte der Approximation des exakten Kennlinienverlaufs durch die reale LKL nach Nyhuis/Wiendahl<sup>33</sup>. Aufgrund der Tatsache, dass der absolute Abstand der beiden Kennlinien kaum Aussagekraft besitzt, sollen an dieser Stelle die aus den numerischen Untersuchungen gewonnenen Tendenzen aufgezeigt werden. So ist bei allen Untersuchungen zu beobachten, dass die Fläche zwischen den beiden Kurven stets größer wird, sobald sich einer der beiden Extremausprägungen der Nachfrageverteilung (mit  $\rho = 0$  bzw.  $\rho = \rho_{\max}$ ) genähert wird. Im Falle der Annäherung an  $\rho = 0$  ist dieses Verhalten offensichtlich. Da ein Großteil der Nachfragerealisationen dort in der Nähe des Mittelwerts liegt, ist der mittlere Lieferverzögerung für Werte zwischen  $\bar{r}$  und  $r_o$  nur marginal größer als null. Es hat sich gezeigt, dass die  $C_{NORM}$ -Funktion aufgrund fehlender Flexibilität solch einen Verlauf nur ungenügend abbilden kann. Im Gegensatz dazu lassen sich allerdings mit der realen LKL solche Nachfrageverteilungen recht präzise abbilden, deren Variationskoeffizient im mittleren Wertebereich zwischen  $\rho = 0$  und  $\rho = \rho_{\max}$  zu finden sind.

#### 4.2 Parameterwahl bei unterschiedlicher Schiefe der Nachfrageverteilung

Nachdem der vorige Abschnitt den Einfluss der Nachfragestreuung bei symmetrischen Verteilungen untersucht hat, thematisiert dieser Abschnitt die Auswirkung einer unterschiedlichen Schiefe der Nachfrageverteilung auf die optimale Parametrisierung von  $C$ . Dabei wird als Maß der Schiefe einer Verteilung (im Folgenden mit  $\eta$  bezeichnet) das auf die dritte Potenz der Standardabweichung bezogene zentrale Moment 3. Ordnung genutzt, was in der folgenden Gleichung (20) dargestellt ist<sup>34</sup>:

$$\eta = \frac{\int_{r_u}^{r_o} (r - \mu)^3 \varphi(r) dr}{\sigma^3} \quad (20)$$

Der zugrunde liegende Verteilungstyp ist auch in diesem Abschnitt wieder die Beta-Verteilung, mit der jede beliebige Schiefe durch Anpassung der entsprechenden Verteilungsparameter modelliert werden kann. Zur Illustration stellen die Abbildungen 9 und 10 exemplarisch für  $\gamma = 4$  und  $\rho = 0,3$  bzw.  $\rho = 0,2$

<sup>33</sup> zu Einzelheiten siehe Inderfurth/Schulz 2007b

<sup>34</sup> siehe Evans u.a. 2000, S.15

je drei verschiedene Beta-Verteilungen dar, wobei jeweils eine symmetrische ( $\eta = 0$ ), eine linksschiefe ( $\eta < 0$ ) und eine rechtsschiefe Verteilung ( $\eta > 0$ ) gewählt wurden. Auffällig ist dabei, dass die Form der Verteilungen unterschiedlich ausfällt. Vor allem bei  $\eta = 0,5$  und  $\eta = -0,5$  könnte man zwei zueinander symmetrische Verteilungen erwarten. Allerdings würde man damit die Forderung nach einer konstanten Streuung verletzen, da zwar die Standardabweichung und die absolute Schiefe beider Verteilungen identisch sind aber deren Mittelwert nicht. Dadurch wäre eine isolierte Untersuchung des Einflusses der Schiefe der Nachfrageverteilung nicht mehr möglich.

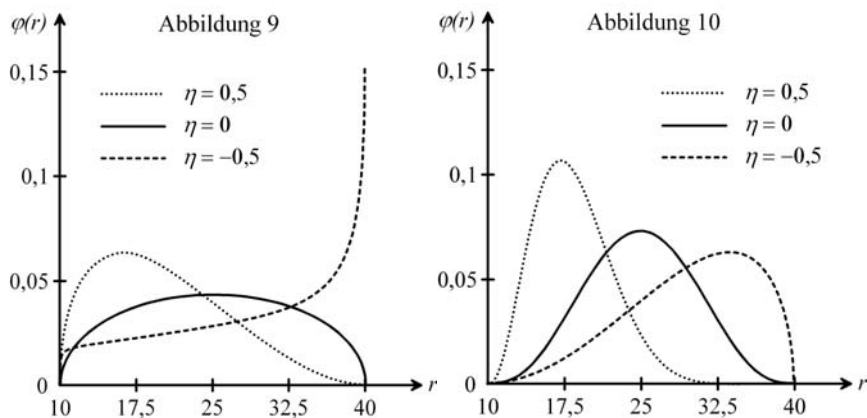


Abbildung 9: Dichtefunktionen von drei Beta-Verteilungen unterschiedlicher Schiefe mit  $\gamma = 4$  und  $\rho = 0,3$ .

Abbildung 10: Dichtefunktionen von drei Beta-Verteilungen unterschiedlicher Schiefe mit  $\gamma = 4$  und  $\rho = 0,2$ .

Wie im vorigen Kapitel gezeigt, beeinflussen sowohl  $\rho$  als auch  $\gamma$  die optimale Wahl von  $C$ . In den folgenden Untersuchungen soll zusätzlich noch der Einfluss der Schiefe mit aufgenommen werden, was dazu führt, dass einer der drei Einflussfaktoren isoliert und somit konstant gehalten werden muss. In den folgenden Abbildungen 11 und 12 wird das Ergebnis der Untersuchung grafisch dargestellt, wobei Abbildung 11 den Einfluss der Schiefe bei unterschiedlichen Variationskoeffizienten und Abbildung 12 den Einfluss der Schiefe bei verschiedenen Werten von  $\gamma$  präsentiert. Zur besseren Übersichtlichkeit wird die Schiefe nur im Wertebereich zwischen  $-1,5$  und  $1,5$  dargestellt, obwohl der eigentliche Wertebereich nicht nach oben und unten begrenzt ist. Das Auftreten beider Extremfälle ist durch ein Merkmal gekennzeichnet, nämlich dass sich fast die gesamte Wahrscheinlichkeitsmasse in der Nähe von einer der beiden Intervallgren-

zen befindet. Konzentriert sich die gesamte Masse nahe der maximalen Ausprägung der Störgröße  $r_o$ , ist die beobachtete Schiefe  $\eta = -\infty$ . Liegt die gesamte Masse allerdings in der Nähe der Nachfrageuntergrenze  $r_u$ , nähert sich die Schiefe der Verteilung  $+\infty$  an.

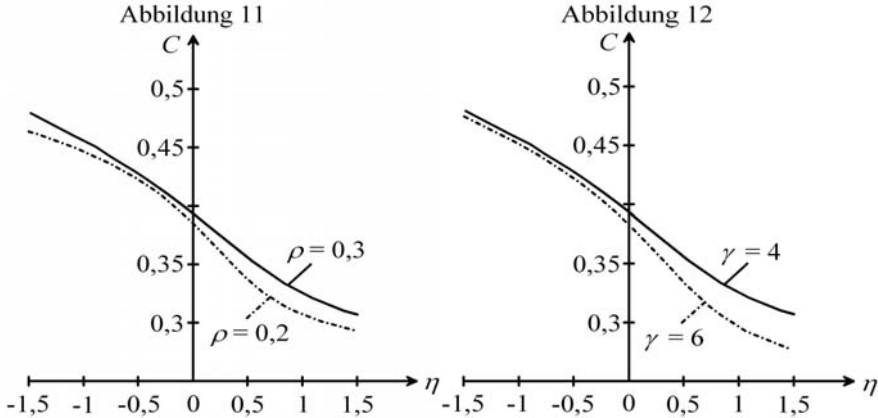


Abbildung 11: Optimaler C-Wert bei unterschiedlicher Schiefe  $\eta$  für  $\gamma = 4$

Abbildung 12: Optimaler C-Wert bei unterschiedlicher Schiefe  $\eta$  für  $\rho = 0,3$

Wie in beiden Abbildungen deutlich zu erkennen ist, besitzt die Schiefe der Nachfrageverteilung einen signifikanten Einfluss auf die Höhe des zu wählenden Parameters  $C$ . So ist unter anderem ersichtlich, dass bei einer rechtsschiefen Verteilung ein kleinerer Wert von  $C$  den Abstand zwischen exakter und approximierter Kennlinie minimiert als bei einer linksschiefen Verteilung. Ebenso ist zu erkennen, dass dieser Effekt in der Tendenz unabhängig von den beiden anderen Einflussfaktoren  $\rho$  und  $\gamma$  auftritt. Sobald sich die Schiefe  $-\infty$  annähert, liegt der optimal zu wählende Parameter für  $C$  in der Nähe von 0,5. Auf der anderen Seite kann für den Fall, dass sich die Schiefe  $\infty$  annähert, keine generelle Aussage getroffen werden, da der Parameter  $C$  dort von den anderen beiden Einflussfaktoren abhängt. Dieses Verhalten in Hinblick auf die beiden Extremausprägungen der Verteilung der Störgröße lässt sich mit einem Blick auf Gleichung (19) verdeutlichen. Dort ist der maximale Bestand, bei dem kein Lieferverzug auftritt, in Abhängigkeit von  $\bar{r}$  und  $r_o$  definiert. Wenn sich die gesamte Wahrscheinlichkeitsmasse bei der Untergrenze der Nachfrage konzentriert, liegen  $r_u$  und  $\bar{r}$  sehr nah zusammen. Das bedeutet allerdings auch, dass die Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer Nachfrage größer  $\bar{r}$  nur sehr gering ist. Demzufolge ist der mittlere Lieferverzug für die zu diesen Nachfragen korrespondierenden Bestände nur marginal größer als null und eine Approximation mit  $C = 0,5$  führt

zu keinem guten Ergebnis. Sobald die Wahrscheinlichkeitsmasse allerdings bei der Nachfrageobergrenze eine hohe Konzentration aufweist, liegen  $r_o$  und  $\bar{r}$  sehr nah beieinander. Unter diesen Umständen entspricht der exakte fast genau dem approximierten Kennlinienverlauf, wobei der Parameter  $C$  mit 0,5 gewählt werden muss.

Abschließend soll auch in diesem Punkt kurz auf die Güte der jeweiligen Approximation mit Hilfe der  $C_{NORM}$ -Funktion eingegangen werden. Wie schon im vorigen Unterpunkt erwähnt, besitzt die reale Kennlinie aufgrund ihrer beschränkten Flexibilität keine geeignete Anpassungsmöglichkeit an die Situation, dass ein Großteil der relevanten mittleren Bestände nur einen marginalen Lieferverzug aufweist. Demzufolge ist der Ansatz nach Nyhuis/Wiendahl für stark rechtsschiefe Verteilungen recht problematisch. Andererseits zeigt sich bei links-schiefen Verteilungen aufgrund der Eigenschaften der  $C_{NORM}$ -Funktion eine recht gute Approximationsmöglichkeit des exakten Kennlinienverlaufs.

## 5 Schlussfolgerungen

Die vorliegenden Untersuchungen zeigen, dass die Wahl des  $C$ -Werts im Rahmen der LKL nach Nyhuis/Wiendahl von drei statistischen Merkmalen der Planabweichungen abhängig gemacht werden sollte, nämlich vom Verhältnis von höchst- zu niedrigstmöglicher Ausprägung der Plangröße (Merkmal  $\gamma$ ) sowie vom Variationskoeffizienten (Merkmal  $\rho$ ) und vom Ausmaß der Schiefe (Merkmal  $\eta$ ) der entsprechenden Wahrscheinlichkeitsverteilung. Jede dieser drei Größen kann für sich einen signifikanten Einfluss auf die sachgerechte Festlegung des  $C$ -Parameters haben. Interessanterweise spielt der spezielle Typ einer Wahrscheinlichkeitsverteilung (z.B. Beta- oder Normalverteilung) für die  $C$ -Festlegung ebenso eine untergeordnete Rolle wie die Frage, ob es sich um eine diskrete oder stetige Verteilung handelt. Darüber hinaus ist es für die optimale Wahl des  $C$ -Werts auch nicht von Bedeutung, welche Absolutwerte die Ober- und Untergrenze des Bereichs der Planabweichungen aufweisen, sondern es kommt nur auf deren Verhältnis zueinander an.

Hieraus wird deutlich, dass es zur adäquaten Festlegung des  $C$ -Parameters bei Anwendung der LKL nach Nyhuis/Wiendahl der Schätzung dieser drei statistischen Größen ( $\gamma$ ,  $\rho$  und  $\eta$ ) unter Nutzung der Datengrundlage für Planabweichungen im jeweiligen Anwendungsfall bedarf. Liegen entsprechende Schätzungen vor, so lässt sich aus der Kurvenschar der Abbildungen 7, 8, 11 und 12 bzw. aus entsprechend tabellierten Werten (evtl. mittels zusätzlicher Interpolation) der Wert des  $C$ -Parameters ablesen, mit dem die exakte LKL bestmöglich approximiert wird. Die Untersuchungen haben gezeigt, dass ein einfacher funktionaler Zusammenhang für die Abhängigkeit des  $C$ -Werts, wie er nach Nyhu-



is/Wiendahl gemäß Formel (8) vermutet wird, leider nicht existiert. Aus den Kurvenverläufen in den Abbildungen des Kapitels 4 ist zu entnehmen, dass der Zusammenhang zwischen den drei Einflussgrößen  $\gamma$ ,  $\rho$  und  $\eta$  und dem optimalen  $C$ -Wert wohl zu komplex ist, um durch eine einfache funktionale Beziehung ausgedrückt werden zu können.

Eine gewisse Einschränkung der Allgemeingültigkeit der vorliegenden Untersuchungsergebnisse lässt sich darin sehen, dass sich die Untersuchung auf eine Analyse des Einflusses stochastischer Bedarfsabweichungen beschränkt und weitere Abweichtungstypen wie Liefertermin- und Liefermengenabweichungen nicht einbezogen werden. Entsprechende zusätzliche Untersuchungen wären technisch möglich, würden aber einen hohen zusätzlichen Aufwand erfordern, ohne dass zu erwarten wäre, dass relevante zusätzliche Erkenntnisse gewonnen würden. Auch jede Kombination von Planabweichungen führt zu einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilung der Gesamtabweichung, die durch die drei oben skizzierten Merkmale  $\gamma$ ,  $\rho$  und  $\eta$  gekennzeichnet ist. Es ist nicht zu erwarten, dass in einem solchen Fall zusätzliche Einflussgrößen eine Rolle für die Wahl des  $C$ -Parameters spielen sollten. Ebenso gibt es keine plausiblen Anhaltspunkte dafür, dass die Kurvenverläufe für den  $C$ -Wert unter diesen Umständen wesentlich anders aussehen sollten. Insofern spricht wenig dagegen, die Empfehlungen für die Parametrisierung der LKL nach Nyhuis/Wiendahl aus Kapitel 4 auch auf den allgemeinen Fall des gleichzeitigen Auftretens unterschiedlicher Planabweichungen auszuweiten. Zugleich wird deutlich, dass es wichtig ist, in diesem Fall die Ober- und Untergrenze des relevanten Gesamtbereichs der Planabweichungen korrekt zu schätzen.

Ein weiterer Aspekt der Untersuchung, auf den noch hinzuweisen ist, besteht darin, dass die Festlegung des Werts für den  $C$ -Parameter jeweils darauf ausgerichtet wurde, die Flächenabweichung zwischen realer und exakter LKL über den gesamten Bereich des Kennlinienverlaufs (zwischen  $L_{\max}$  und  $B_{\max}$ ) zu minimieren. Diese Vorgehensweise impliziert, dass alle Abweichungen – unabhängig vom Niveau der Kenngrößen Lieferverzug und Lagerbestand – gleich stark gewichtet werden, so dass die Kennlinie als Ganzes durch die Parameterwahl möglichst gut angepasst wird. Im realen Anwendungsfall kann es durchaus sein, dass bestimmte Kenngrößenbereiche weniger relevant sind als andere. So ist es denkbar, dass in einem logistischen System nur relativ hohe Lieferfähigkeiten und damit relativ niedrige Lieferverzüge akzeptiert werden, was z.B. darin zum Ausdruck kommen kann, dass die entsprechende LKL nur für Werte des Lieferverzugs in Höhe von  $L_{\max}/2$  oder  $L_{\max}/3$  relevant ist. In einem solchen Fall wäre es plausibel, den  $C$ -Wert so zu wählen, dass die reale LKL speziell in diesem Teilbereich die exakte LKL möglichst gut approximiert. Dadurch könnten sich Abweichungen von den Empfehlungen zur Wahl von  $C$  ergeben, die auf der

Grundlage einer bestmöglichen Approximation über den gesamten Kennlinienverlauf entwickelt wurden.

Mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Instrumentarium lassen sich auch im Fall beliebiger anderer Abweichungsmessung für reale und exakte LKL entsprechende Untersuchungen vornehmen und damit Empfehlungen zur zweckentsprechenden Wahl des  $C$ -Parameters ableiten. Insofern ist der hier vorgestellte Ansatz zur optimalen Parametrisierung der LKL nach Nyhuis/Wiendahl weiter verallgemeinerbar. Er stellt ein Konzept dar, mit dessen Hilfe sich Erkenntnisse aus lagerhaltungstheoretischen Analysen fruchtbar mit dem anwendungsorientierten Ansatz zur Bestimmung von LKL nach Nyhuis/Wiendahl verknüpfen lassen.

**Literaturverzeichnis**

- Arnold, D., Isermann, H., Kuhn, A., Tempelmeier, H. (Hrsg.): Handbuch Logistik, 2. Aufl., Berlin/Heidelberg/New York 2004
- Evans, M., Hastings N., Peacock B.: Statistical distributions, 3. Aufl., John Wiley & Sons, New York 2000
- Gläßner, J.: Modellgestütztes Controlling der beschaffungslogistischen Prozesskette, Diss. Hannover, Fortschr.-Ber. VDI, Reihe 2, Nr. 337, Düsseldorf 1995
- Inderfurth, K., Jensen, T.: Lagerbestandsmanagement, in: Handbuch Logistik, hrsg. v. Arnold, D. Isermann, H., Kuhn, A., Tempelmeier, H., 2. Aufl. Berlin/Heidelberg/New York 2004, S. A3-62 – A3-76
- Inderfurth, K., Schulz, T.: Lagerhaltungstheoretische Analyse der Lagerkennlinien nach Nyhuis/Wiendahl, in: Produktions- und Logistikmanagement, hrsg. von Corsten/Missbauer, 2007a, S. 287-317
- Inderfurth, K., Schulz, T.: Zur Exaktheit der Lagerkennlinie nach Nyhuis/Wiendahl, in: Logistik Management 2007 – Analyse, Bewertung und Gestaltung von Logistiksystemen, hrsg. v. Otto, A. Obermaier, R., Wiesbaden 2007b, S. 23-49
- Lödding, H.: Verfahren der Fertigungstechnik, Berlin/Heidelberg/New York 2005
- Lutz, S.: Kennliniengestütztes Lagermanagement, Fortschr.-Ber. VDI, Reihe 13, Nr. 53, Düsseldorf 2002
- Lutz, S., Lödding, H., Wiendahl, H.-P.: Logistics-oriented Inventory Analysis, in: International Journal of Production Economics, 85(2003), S. 217-231
- Neumann, K.: Produktions- und Operationsmanagement, Berlin/Heidelberg/New York 1996
- Nyhuis, P., Wiendahl, H.-P.: Logistische Kennlinien, 2. Aufl., Berlin/Heidelberg/New York 2003
- Nyhuis, P., Grabe, D., Nickel, R.: Bewertung von Fertigungs- und Lagerprozessen mit Logistischen Kennlinien, in: Prozessmanagement in der Wertschöpfungskette, hrsg. v. Hagen, N., Nyhuis, P., Frühwald, C., Felder M., Bern 2006, S. 79-116
- Pfohl, H.-C.: Logistiksysteme, 7. Aufl., Berlin/Heidelberg/New York 2004
- Silver, E.D, Pyke, D.F, Peterson, R.: Inventory Management and Production Planning and Scheduling, 3. Aufl., New York 1998
- Tempelmeier, H.: Bestandsmanagement in Supply Chains, Norderstedt 2005
- Wiendahl, H.-P.: Belastungsorientierte Fertigungssteuerung, München/Wien 1987