Lerm, Michael; Rollberg, Roland

Working Paper

Modifizierte Schrittsteinmethode zur ganzzahligen simultanen Produktionsprogramm-, Transport- und Absatzmengenplanun

Wirtschaftswissenschaftliche Diskussionspapiere // Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald, Rechts- und Staatswissenschaftliche Fakultät, No. 03/2007

ERNST-MORITZ-ARNDT-UNIVERSITÄT GREIFSWALD

Rechts- und Staatswissenschaftliche Fakultät

Modifizierte Schrittsteinmethode zur ganzzahligen simultanen Produktionsprogramm-, Transport- und Absatzmengenplanung

Michael Lerm, Roland Rollberg

Diskussionspapier 3/2007

Mai 2007

Wirtschaftswissenschaftliche Diskussionspapiere

Korrespondenzanschriften:

Dipl.-Kfm. Michael Lerm
Lehrstuhl für Allgemeine Betriebswirtschaftslehre und Produktionswirtschaft
Rechts- und Staatswissenschaftliche Fakultät
Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald
Friedrich-Loeffler-Straße 70
17489 Greifswald
Tel.: +49 3834 86 2420
E-Post: michael.lerm@uni-greifswald.de

Prof. Dr. habil. Roland Rollberg
Lehrstuhl für Allgemeine Betriebswirtschaftslehre und Produktionswirtschaft
Rechts- und Staatswissenschaftliche Fakultät
Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald
Friedrich-Loeffler-Straße 70
17489 Greifswald
Tel.: +49 3834 86 2469 (Sekretariat)
Fax.: +49 3834 86 2428
E-Post: rororo@uni-greifswald.de

ERNST-MORITZ-ARNDT-UNIVERSITÄT GREIFSWALD

Lehrstuhl für Allgemeine Betriebswirtschaftslehre und Produktionswirtschaft

Modifizierte Schrittsteinmethode zur ganzzahligen simultanen Produktionsprogramm-, Transport- und Absatzmengenplanung

Michael Lerm, Roland Rollberg

Diskussionspapier 3/2007

Mai 2007

Wirtschaftswissenschaftliche Diskussionspapiere

ISSN 1437 − 6989

http://www.rsf.uni-greifswald.de/bwl/paper.html

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis

A1	Absatzort 1
A2	Absatzort 2
bspw.	beispielsweise
bzw.	beziehungsweise
EDV	elektronische Datenverarbeitung
et al.	et alii
f.	folgende
FE	Faktoreinheit(en)
ff.	fortfolgende
GE	Geldeinheit(en)
ggf.	gegebenenfalls
Hrsg.	Herausgeber
ME	Mengeneinheit(en)
P1	Produktionsort 1
P2	Produktionsort 2
P3	Produktionsort 3
S.	Seite(n)
u. U.	unter Umständen
vgl.	vergleiche

Symbolverzeichnis

Indizes

E1	Empfängerfeld 1
E2	Empfängerfeld 2
E3	Empfängerfeld 3
E4	Empfängerfeld 4
E5	Empfängerfeld 5
G1	Geberfeld 1
G2	Geberfeld 2
G3	Geberfeld 3
G4	Geberfeld 4
G6	Geberfeld 6
i	Produktionsort, $i \in \{1;\ldots;I\}$
j	Absatzort, $j \in \{1;\ldots;J\}$
k	Produktart, $k \in \{1;\ldots;K\}$

Variable

DB	Zielvariable „Deckungsbeitrag“
DB_{max}	maximaler Deckungsbeitrag
$DB^{schätz}$	geschätzte Deckungsbeitragsänderung bezogen auf einen Verschiebepfad
$\overline{DB}^{schätz}$	geschätzte Deckungsbeitragsänderung bezogen auf einen Verschiebepfadteil
$DB^{schätz+}$	geschätzte Deckungsbeitragsänderung bezogen auf ein Feld
$DB^{schätz+*}$	geschätzte Deckungsbeitragsänderung bezogen auf ein Feld
$DB^{schätz*}$	geschätzte Deckungsbeitragsänderung bezogen auf ein Feld
n	Produktmengenänderung auf einem Pfadstartfeld
x	Produktmenge

Konstante

ABS	Absatzobergrenze
DS	Deckungsspanne
KAP	Produktionskapazität
kt	Transportstückkosten
kv	Produktionsstückkosten
pk	Produktionskoeffizient
p	Stückabsatzpreis
RestKap	Restproduktionskapazität

1 Problemstellung und Aufbau des Arbeitsberichts

Wegen der in letzter Zeit propagierten Konzentration der Unternehmen auf ihre originären Kernkompetenzen zur Kostensenkung, der wirtschaftlichen Erfolge insbesondere in den sich entwickelnden Wachstumsmärkten und des hauptsächlich darauf basierenden Effekts der sogenannten „Globalisierung“ nahmen die Absatzaktivitäten vieler Unternehmen in den entwickelten Volkswirtschaften gerade bezogen auf die neuen, häufig räumlich recht weit entfernten Märkte stark zu. Dies erhöhte den Transportkostenanteil für die dorthin beförderten Güter häufig in nicht unerheblichem Maße, obgleich die Entwicklung der Wachstumsmärkte nicht unwesentlich von stets verbesserten Infrastrukturen vor Ort abhängt. Dennoch werden große räumliche Distanzen im Vergleich zu geringen Entfernungen zu den Abnehmern stets erhöhte Produktkosten bewirken, denn auch bei der besten Infrastruktur ist der Transport nicht kostenlos zu haben.

Die Globalisierung bringt jedoch nicht nur neue Absatzmärkte für Unternehmen, sondern auch zusätzliche Produktionsstandorte ebenfalls mit unterschiedlichen Entfernungen zueinander und zu allen Absatzmärkten. Bezogen auf die einzelnen Produktionsstätten eines Unternehmens entstehen einerseits unterschiedliche Fertigungsstückkosten und andererseits spezifische Transportstückkosten in Abhängigkeit vom Zielabsatzmarkt.

Insbesondere aus diesen Gründen wird für den wirtschaftlichen Erfolg von Unternehmen eine integrierte Produktionsprogramm-, Transport- und Absatzmengenplanung immer wichtiger, die eine simultane Betrachtung von sowohl Produktions- und Transportkosten sowie Absatzpreisen als auch Produktionskapazitäts- und Absatzobergrenzen erlaubt.

Zur Lösung dieses Planungsproblems soll im Kapitel 2 des vorliegenden Arbeitsberichts zunächst auf der Grundlage des klassischen Transportproblems ein auf ein Unternehmen bezogenes lineares Entscheidungsmodell mit dem Ziel der Gesamtdeckungsbeitragsmaximierung entwickelt werden.[1] Darauf aufbauend sind sodann im Kapitel 3 mögliche Lösungsverfahren kurz zu diskutieren, bevor schließlich einerseits der Simplex-Algorithmus[2] bei Zulässigkeit nichtganzzahliger Lösungen verwendet wird und andererseits die vom klassischen Transportproblem[3] bekannte Schrittsteinmethode[4] als ein geeignet erscheinender Algorithmus bei geforderter Ganzzahligkeit der Transportmengen so modifiziert wird, daß er für die simultane

---

1 Zur linearen Programmierung allgemein vgl. bspw. HILLIER/LIEBERMAN (1997), S. 25 ff. sowie speziell zur Deckungsbeitragsmaximierung mittels linearer Programmierung z.B. ADAM (1996), S. 460 ff. und die dort zitierte Literatur.

2 Zum Simplex-Algorithmus vgl. insbesondere DANTZIG (1951), S. 339 ff. und DANTZIG (1966), der als Begründer des Verfahrens gilt, sowie bspw. HILLIER/LIEBERMAN (1997), S. 46 ff., CORSTEN/CORSTEN/SARTOR (2005), S. 18 ff., ZIMMERMANN/STACHE (2001), S. 48 ff.

3 Zum klassischen Transportproblem vgl. HITCHCOCK (1941) und KOOPMANS (1949), S. 136 ff., die dieses Problem als erste beschrieben und untersucht haben. Weiterführende Ausführungen finden sich bspw. auch in CORSTEN/CORSTEN/SARTOR (2005), S. 88 ff., DOMSCHKE (1995), S. 59 ff., S. 112, DOMSCHKE (1997), S.43 ff., GÜNTHER/TEMPELMEIER (2000), S.274 ff., HILLIER/LIEBERMAN (1997), S. 173 ff., MÜLLER-MERBACH (1973), S. 173 ff., 264 ff., ZIMMERMANN/STACHE (2001), S. 90 ff. sowie den jeweils dort angegebenen Quellen.

4 In der Literatur wird dieses Verfahren häufig als Stepping-Stone-Methode oder Zyklenmethode bezeichnet. Vgl. hierzu bspw. DOMSCHKE (1995), S. 126 ff., ELLINGER/BEUERMANN/LEISTEN (2003), 79 ff. und ZIMMERMANN/STACHE (2001), S.96 ff.

Produktionsprogramm-, Transport- und Absatzmengenplanung angewendet werden kann. Die hierbei notwendige Startlösung wird entweder mit der ebenfalls anzupassenden VOGELschen Approximation[1] oder durch Abrundung der mit dem Simplex-Algorithmus gewonnenen Lösung generiert. Zur besseren Veranschaulichung dient theoriebegleitend und kapitelübergreifend ein Zahlenbeispiel. Abschließend werden im Kapitel 4 die Eignung des Algorithmus zur Lösung derartiger Planungsprobleme und Erweiterungsmöglichkeiten des Modells einer kritischen Würdigung unterzogen.

[1] Vgl. hierzu z.B. HILLIER/LIEBERMAN (1997), S. 188, DOMSCHKE (1995), S. 122 ff., MÜLLER-MERBACH (1973), S. 310 ff., GÜNTER/TEMPELMEIER (2000), S.278 ff. sowie ZIMMERMANN/STACHE (2001), S. 96.

2 Modellierung des Planungsproblems

Ausgangspunkt der folgenden Untersuchungen ist ein Unternehmen, welches eine bekannte Anzahl verschiedener Produktarten fertigen kann. Es verfügt über mehrere Produktionsstandorte. An jedem der insgesamt I Standorte besteht grundsätzlich die Möglichkeit, jedes der K zu unterscheidenden Produktarten herzustellen, wobei die Produktarten mit speziellen Produktionskoeffizienten pk in FE/ME auf eine gemeinsame beschränkte Kapazität KAP in FE als dominantem Engpaß am jeweiligen Produktionsstandort zugreifen.[1] Nicht an jedem Produktionsort muß der gleiche Produktionsfaktor den wirksamen Kapazitätsengpaß darstellen. Bei der Herstellung jeder Mengeneinheit einer Produktart entstehen an jedem Standort bestimmte variable Produktionsstückkosten kv in GE/ME. Die gefertigten Produkte können unter Einhaltung jeweiliger Absatzobergrenzen ABS in ME an J Absatzorten für einen produktart- und absatzortspezifischen Preis p in GE/ME verkauft werden. Der Transport einer Mengeneinheit einer Produktart von einem Produktions- zu einem Absatzort verursacht individuelle Transportstückkosten kt in GE/ME. Für das Unternehmen stellt sich die Frage, welche Mengen x in ME der Produktarten k an welchen Produktionsstandorten i gefertigt und zu welchen Absatzorten j geliefert werden sollen, um den maximal erreichbaren Deckungsbeitrag in GE zu realisieren. Sämtliche relevante Parameter seien sicher und bekannt.

Das Problem kann mittels linearer Programmierung modelliert werden. Die an einem Produktionsort gefertigten und von dort zu einem Absatzort transportierten Mengen einer Produktart sind die Entscheidungsvariablen. Es läßt sich ein relaxiertes, recht einfach zu lösendes Problem formulieren, indem keine Ganzzahligkeit, sondern nur Nichtnegativität der Entscheidungsvariablen vorausgesetzt wird. Jedoch ist das relaxierte Modell nur dann anwendbar, wenn Produktion, Transport und Absatz beliebig teilbarer Produkte unterstellt werden (bspw. Schüttgüter oder Flüssigkeiten). Die Relaxierung weist den großen Vorteil auf, daß das resultierende mathematische Modell mit dem Simplex-Algorithmus gelöst werden kann, wobei sogar beliebige Erweiterungen bezogen auf die Kapazitätsrestriktionen möglich sind, wie z.B. mehrere mögliche Engpässe je Produktions- oder Absatzort.

Im Falle nicht beliebig teilbarer Fertigungs- und Absatzmengen, also der Zulässigkeitsbeschränkung der Entscheidungsvariablen auf einen diskreten Definitionsbereich wie sinnvollerweise die natürlichen Zahlen inklusive der Null, ist jedoch die relaxierte Modellierung unbrauchbar, da hierbei selbst bei ausschließlich ganzzahligen Konstantenwerten im allgemeinen nichtganzzahlige optimale Variablenwerte resultieren. Somit ist dann das Modell in seiner nichtrelaxierten Fassung relevant. Eine Formulierung des Modells mit ganzzahligen nichtnegativen Entscheidungsvariablen ist hingegen für die Fälle einer zulässigen Anwendung des relaxierten Modells nicht problemadäquat, da ganzzahlige Lösungen erzwungen werden, die nur ausnahmsweise zu maximalen Deckungsbeiträgen führen, die nicht geringer sind als die mit den im allgemeinen nichtganzzahligen Lösungen des relaxierten Ansatzes erzielbaren maximalen Deckungsbeiträge. Verantwortlich dafür sind die eingeschränkten

[1] Hierbei wird zusätzlich angenommen, daß die Ressource an den jeweiligen Produktionsort gebunden, also immobil ist. Eine Modellerweiterung könnte beispielsweise darin bestehen, daß der Austausch von Kapazitätseinheiten zwischen den Produktionsorten in Verbindung mit entsprechenden Transportkosten zugelassen wird.

Definitionsbereiche der ganzzahligen Entscheidungsvariablen. Somit ist die Wahl des angemessenen Definitionsbereichs der Entscheidungsvariablen abhängig vom Problemkontext.

Es läßt sich das folgende deckungsbeitragsmaximierende Modell formulieren mit DB als Deckungsbeitrag und DS als Deckungsspanne:

Zielfunktion: $\max . DB; \quad DB := \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} (p_{jk} - kv_{ik} - kt_{ijk}) \cdot x_{ijk} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} DS_{ijk} \cdot x_{ijk}$

Restriktionen: $\sum_{i=1}^{I} x_{ijk} \leq ABS_{jk} \quad \forall j, \forall k$ Absatzrestriktionen

$\sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} pk_{ik} \cdot x_{ijk} \leq KAP_i \quad \forall i$ Produktionsrestriktionen

Relaxierung: $x_{ijk} \geq 0 \quad \forall i, \forall j, \forall k$ Nichtnegativitätsbedingungen **oder**

Ganzzahligkeit: $x_{ijk} \in N_0 \quad \forall i, \forall j, \forall k$ Ganzzahligkeitsbedingungen

3 Lösungsalgorithmus auf der Basis der Schrittsteinmethode

3.1 Generelle Eignung gängiger Lösungsverfahren

Für das relaxierte Modell ist die bereits im vorangegangenen Kapitel erwähnte Möglichkeit der Lösung mit Hilfe des Simplex-Verfahrens sinnvoll. Problematischer stellt sicht das Modell mit ganzzahligen nichtnegativen Entscheidungsvariablen dar. Die Aufgabe der ganzzahligen Optimierung stellt sich um ein Vielfaches komplizierter dar, sind doch neben der bereits beim relaxierten Problem mit dem einfachen Simplex-Algorithmus realisierbaren simultanen Ermittlung deckungsbeitragsmaximal zu produzierender Fertigungsmengen, zu befördernder Transportmengen und abzusetzender Verkaufsmengen bezüglich der entsprechenden Produktions- und Absatzorte zusätzlich für sämtliche dieser Mengen nur nichtnegative ganze Zahlen als Definitionsbereich zugelassen. Die ohnehin bereits vorher gegebene Komplexität des Planungsproblems steigt dadurch enorm an, obwohl sich die Menge zulässiger Lösungen erheblich verkleinert, denn für das relaxierte Problem existiert wegen der stetigen Definitionsbereiche der Entscheidungsvariablen ein unendlicher Lösungsraum, während die Lösungsmenge im unrelaxierten Fall endlich ist. Dies schließt indes gerade für große Probleme eine unüberschaubare Menge zulässiger Lösungen nicht aus.

Die Crux daran ist, daß im Gegensatz zum relaxierten Fall, bei dem der Lösungsraum des Problems zwar unendlich ist, es aber mit dem Simplex-Verfahren eine so effiziente Methode gibt, daß schnell und zielsicher das Deckungsbeitragsmaximum gefunden werden kann, es für das komplexere Problem des unrelaxierten Falls mit endlichem Lösungsraum kein effizientes Lösungsverfahren gibt. Im Extremfall ist eine vollständige Enumeration aller zulässigen Lösungen vorzunehmen, um schließlich die deckungsbeitragsmaximale Variablenspezifikation identifizieren zu können. Doch auch schon bei recht kleiner Problemgröße kann dies ohne effiziente Suchstrategien nach potentiellen deckungsbeitragsmaximalen Lösungen zu einem schier aussichtslosen Unterfangen werden. Hier könnte die heutige leistungsstarke Rechentechnik helfen. Auf der Basis eines zuverlässig jede zulässige Lösung kreierenden Verfahrens ließen sich mit Hilfe der Rechentechnik schließlich die oder, bei mehreren zulässigen, eine oder alle deckungsbeitragsmaximalen Lösungen finden. Allerdings versagt dieses Vorgehen bei zu komplexen Problemen, da die Lösungsmöglichkeiten mit zunehmender Problemgröße so zahlreich werden, daß sie in zufriedenstellender Zeit mit Hilfe von EDV-Technik nicht mehr „durchprobiert“ werden können.

Mithin ist von einer vollständigen Enumeration Abstand zu nehmen und nach Möglichkeiten der begrenzten Enumeration zu suchen oder schlicht zu kapitulieren und mit Heuristiken vorliebzunehmen. Als ein Ausgangspunkt für Heuristiken kann beispielsweise die Lösung des relaxierten Problems dienen. Mittels Rundung läßt sich einerseits aus ihr eine zulässige Lösung des unrelaxierten Problems ermitteln. Andererseits kann mit ihr eine vage Güteabschätzung der aus ihr gewonnenen Lösung des unrelaxierten Problems vorgenommen werden, da diese abgeleitete Lösung in der Regel einen geringeren Deckungsbeitrag liefert. Wenn dem so ist, dann muß die tatsächlich deckungsbeitragsmaximale Lösung des unrelaxierten Problems zwischen der Lösung des relaxierten Problems und der daraus gewonnenen Lösung des unrelaxierten Problems liegen.[1] Ist also der Deckungsbeitrag der durch Rundung gewonnenen Lösung aus Sicht des Entscheiders nur „unwesentlich“ geringer als der maximale als Lösung des relaxierten Problems, kann auf eine weitere, eventuell aufwendige Suche nach besseren Lösungen verzichtet werden.

Verfahren der begrenzten Enumeration müssen für den vorliegenden Fall auf Methoden der ganzzahligen Optimierung zurückgreifen.[2] Diese Methoden gehen überwiegend von einer oder mehreren zu findenden Ausgangslösungen aus, die im Anschluß schrittweise bis zum Optimum verbessert werden. Eine Ausnahme bildet die dynamische Optimierung, die ein Planungsproblem mit n Variablen in n – 1 hintereinander zu lösende, miteinander verknüpfte Planungsprobleme zerlegt.[3] Da jedoch das hier behandelte Problem bereits für kleine Umfänge recht viele Variablen enthält und mit Problemzunahme diese Anzahl geradezu „explodiert“, ist die dynamische Optimierung als Lösungsansatz ungeeignet.[4]

Die ganzzahligen Optimierungsverfahren auf der Basis einer zu verbessernden Ausgangslösung lassen sich dahingehend unterscheiden, ob diese Startlösung zulässig oder unzulässig ist. Dabei liegt ein Vorteil der aus dem zulässigen Lösungsbereich startenden Verfahren darin, daß jeder Optimierungsschritt stets eine zulässige Lösung liefert, die bei entsprechender Güte heuristisch als Planungsgröße bei Abbruch des Verfahrens genutzt werden kann.

Bei den aus unzulässigem Lösungsbereich startenden Verfahren wird möglicherweise erst mit dem letzten Optimierungsschritt eine zulässige und dann auch optimale Lösung erzeugt. Derartige Methoden sind somit für Heuristiken eher ungeeignet.

Ohne an dieser Stelle eine ausführliche Methodendiskussion zu eröffnen, die bei der Vielzahl möglicher Vorgehensweisen kaum erschöpfend sein könnte, sollte also aus rein praktischen Überlegungen heraus eher ein ganzzahliges Optimierungsverfahren gewählt werden, das auch Abbrüche vor dem Deckungsbeitragsmaximum zuläßt. Allein wegen der komplexen Problemstruktur und der Möglichkeit, bei Verfahren der begrenzten Enumeration im ungünstigsten Falle eine Vollenumeration durchführen zu müssen, wird ohne eine Abbruchmöglichkeit auch die derzeit verfügbare Rechentechnik bei größeren Problemumfängen in akzeptabler Zeit keine zulässige und zufriedenstellende Lösung liefern können.

Abgesehen von dieser methodologischen Diskussion empfiehlt es sich, bei der Suche nach Lösungsalgorithmen für neuartige Optimierungsprobleme zuerst Methoden strukturähnlicher Probleme auf ihre diesbezügliche Eignung zur Lösungsfindung zu untersuchen. Ein viel einfacheres, aber in seiner Struktur vergleichbares Problem stellt das einfache Transportproblem dar. Dabei geht es darum, eine einzige Produktart aus mehreren Angebotsorten in diverse

---

[1] Die durch Rundung gewonnene Lösung aus dem relaxierten Problem kann bereits die gesuchte Lösung sein. Ergibt sich per Zufall bereits eine ganzzahlige Optimallösung des relaxierten Problems, so ist sie ebenfalls Optimallösung des unrelaxierten Problems.

[2] Zur ganzzahligen Optimierung vgl. bspw. HILLIER/LIEBERMAN (1997), S. 316 ff. sowie ZIMMERMANN/STACHE (2001), S.184 ff.

[3] Zur dynamischen Optimierung vgl. bspw. HILLIER/LIEBERMAN (1997), S. 376 ff. unter dem Begriff der ganzzahligen Programmierung und ZIMMERMANN/STACHE (2001), S. 125 ff. unter dem Begriff der ganzzahligen Optimierung.

[4] Für ein Zwei-Produktarten-Problem mit zwei Fertigungs- und zwei Abnahmeorten existieren bspw. 8 und bei jeweils drei Produktarten, Fertigungs- und Abnahmeorten bereits 27 Variablen.

Nachfrageorte zu befördern, wobei es prinzipiell gleichgültig ist, aus welchem Angebotsort die Produkte stammen. Es darf aber keine Nachfrage unbedient bleiben. Ein Kostenminimierungsproblem ergibt sich dadurch, daß die Transportkosten für jede Produktmengeneinheit zu einem Nachfrageort zwar stets konstant, aber abhängig sind vom liefernden Angebotsort. Idealerweise wird noch vorausgesetzt, daß die Gesamtangebotsmenge über alle Angebotsorte hinweg genau mit der Gesamtnachfragemenge über alle Nachfrageorte hinweg übereinstimmt. Die Struktur dieses Problems bewirkt, daß bei ganzzahligen Angebots- und Nachfragemengen in den entsprechenden Orten auch die kostenminimale Lösung nur ganzzahlige Transportmengen enthält. Gelöst werden kann das Problem nicht nur mit dem Simplex-Algorithmus, sondern auch mit spezifisch problemangepaßten Methoden wie dem MODI-Verfahren[1] oder der Schrittsteinmethode. Da jedoch das MODI-Verfahren letztlich nichts anderes darstellt als eine Methode zur Lösung des zum Transportproblem dualen linearen Problems, ist es wie der Simplex-Algorithmus kein ganzzahliges Optimierungsverfahren und somit auch nicht als Ausgangspunkt für Modifikationsüberlegungen im Sinne des hier betrachteten ganzzahligen simultanen Produktionsprogramm-, Transport- und Absatzmengenplanungsproblems geeignet.[2]

Anders verhält es sich mit der Schrittsteinmethode. Sie ist zwar auch ein nichtganzzahliges Optimierungsverfahren und liefert nur wegen der Struktur und bei speziellen Datenkonstellationen des Transportproblems ganzzahlige Lösungen. Jedoch kann die Methode durchaus als ganzzahliges Optimierungsverfahren ausgestaltet werden, indem nur ganzzahlige Mengenverschiebungen zugelassen und beurteilt werden, was unter Umständen zu Verfahrensmodifikationen führt. Da diese Methode von einer zulässigen Startlösung ausgeht und diese sukzessive bis zum Optimum mittels stets zulässiger Zwischenlösungen verbessert, erscheint sie auch vor dem Hintergrund der methodologischen Diskussion als geeigneter Anknüpfungspunkt zur Entwicklung eines Optimierungsalgorithmus für das hier betrachtete Problem.

Zunächst ist jedoch das Produktionsprogramm-, Transport- und Absatzmengenplanungsproblem mit dem Ziel der Deckungsbeitragsmaximierung in ein Transportproblem mit einer Zielwertminimierung umzuinterpretieren. Hierzu sind die Vorzeichen der Deckungsspannen (= Stückdeckungsbeiträge) umzukehren und als Zielgröße der negativierte Deckungsbeitrag zu minimieren:

modifizierte Zielfunktion: $$\min. -DB; \quad -DB := \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(-DS_{ijk}) \cdot x_{ijk}$$

Geht es bei der Transportplanung ausschließlich um die Betrachtung von restringierten Liefer- und Absatzmengen einer Produktart, so sind jetzt mehrere Produktarten relevant. Weiterhin konkurrieren die Produktarten jedes Produktionsortes um eine knappe dominante Ressource. Es findet also jeweils auf einen Produktionsort bezogen quasi die „Verschiebung" von Kapazitätsnutzung einerseits bezüglich einer Produktart zu den vorgesehenen Zielabnah-

[1] Zum MODI-Verfahren vgl. bspw. DOMSCHKE (1995), S. 129 ff., ELLINGER/BEUERMANN/LEISTEN (2003), S. 85 ff., und ZIMMERMANN/STACHE (2001), S. 97 ff.

[2] Zur Dualitätstheorie und zur Dualisierung von linearen Modellen vgl. bspw. HILLIER/LIEBERMAN (1997), S. 124 ff., CORSTEN/CORSTEN/SARTOR (2005), S. 70 ff., WITTE/DEPPE/BORN (1975), S. 119 ff. und zum Rückgriff des MODI-Verfahrens auf die duale Modellierung des Transportproblems vgl. insbesondere DOMSCHKE (1995), S. 129 ff.

meorten und andererseits auch produktartenübergreifend zu diesen Zielabnahmeorten statt. Gerade die Erweiterung des klassischen Transportproblems um diesen letzten Aspekt bewirkt, daß das relaxierte Problem im allgemeinen eine nichtganzzahlige Optimallösung besitzt, da die unterschiedlichen Produktionskoeffizienten die jeweils zur Verfügung stehenden Gesamtkapazitäten im Normalfall nicht ganzzahlig aufteilen und daraus dann nichtganzzahlige Produkt-, Transport- und Absatzmengen resultieren werden. Schließlich werden beim hier betrachteten Problem auch weder die komplette Bedienung aller Bedarfe in den Nachfrageorten noch die vollständige Ausschöpfung aller Fertigungskapazitäten in den Produktionsorten gefordert. Sind im Grenzfall sämtliche Deckungsspannen negativ, so wird überhaupt nicht gefertigt, transportiert und abgesetzt.

Nachdem das Produktionsprogramm-, Transport- und Absatzmengenplanungsproblem mit dem Ziel der Deckungsbeitragsmaximierung als ein Transportproblem mit einer Zielwertminimierung dargestellt wurde, muß eine zulässige Startlösung für die nachfolgende Optimierung mit der angepaßten Schrittsteinmethode generiert werden. Dafür stehen bezogen auf das klassische Transportproblem diverse Verfahren wie die Nordwesteckenregel, die Methode des Spalten- und die des Zeilenminimums, die Matrixminimummethode oder die VOGELsche Approximationsmethode zur Verfügung.[1] Da jedoch zu erwarten ist, daß wegen der Komplexität des Problems die modifizierte Schrittsteinmethode schon recht komplex werden wird, sollte ein Verfahren gewählt werden, welches bereits eine recht gute Startlösung erwarten läßt. Dafür prädestiniert ist die VOGELsche Approximationsmethode, weil sie wie kein anderes der genannten Verfahren Grenzkostenvergleiche ins Kalkül einbezieht und so häufig sehr gute heuristische Ergebnisse liefert.[2] Andererseits kann auch eine aus der Lösung des relaxierten Problems gewonnene zulässige Lösung eine gute Basis der Optimierung sein, da wegen der „Verwandtschaft“ zwischen relaxiertem und unrelaxiertem Problem auch gewisse Ähnlichkeiten zwischen den jeweiligen Optimallösungen wahrscheinlich sind. modifizieren

3.2 Start mit VOGELscher Approximation oder Rundungslösung des relaxierten Problems

Sowohl für die VOGELsche Approximation als auch für die Schrittsteinmethode wird ein tabellarisches Transportschema benötigt, welches in der Kopfspalte die Angebotsorte und in der Kopfzeile die Nachfrageorte mit den zugehörigen Mengenbeschränkungen in Fußspalte und -zeile sowie Transportkostensätze in den spezifischen angebots- und nachfrageortbezogenen Feldern erfaßt.[3] Dieses Schema ist problemadäquat zu modifizieren. Dazu werden die Spalten zusätzlich nach den zu fertigenden Produktarten unterteilt. Je Produktart wird dann die Untergliederung in die Nachfrage- bzw. Absatzorte vorgenommen. In den produktionsort-,

[1] Zu diesen und weiteren Startheuristiken vergleiche unter anderem DOMSCHKE (1995), S. 118 ff., HILLIER/LIEBERMAN (1997), S. 187 ff., MÜLLER-MERBACH (1973), OHSE (1987), 305 ff., S. 307 ff., ZIMMERMANN/STACHE (2001), S. 91 ff.

[2] Lobend über die häufig der Optimallösung nahe kommenden heuristischen Ergebnisse der VOGELschen Approximationsmethode äußert sich auch DOMSCHKE (1995), S. 118. Testreihen ergaben, daß auch im Vergleich mit anderen Startheuristiken diese Methode die dem Optimum am nächsten liegenden Lösungen liefert, vgl. hierzu OHSE (1987), S. 309 f. und die dort zitierten Untersuchungen.

[3] Allgemeine Darstellungen eines Transporttableaus finden sich bspw. in HILLIER/LIEBERMAN (1997), S. 185 und ZIMMERMANN/STACHE (2001), S. 91.

produkt- und absatzortbezogenen Feldern müssen nun auch die Produktionskoeffizienten und die negativierten Deckungsspannen der jeweiligen Produktarten produktionsort- sowie produkt- und absatzortspezifisch erfaßt werden:

	Produkt 1			…	Produkt K			Prod.-kap.
	Absatzort 1	…	Absatzort J	…	Absatzort 1	…	Absatzort J	
Prod.-ort 1	$-DS_{111}$ pk_{11}	…	$-DS_{1J1}$ pk_{11}	…	$-DS_{11K}$ pk_{1K}	…	$-DS_{1JK}$ pk_{1K}	KAP_1
…	…	…	…	…	…	…	…	…
Prod.-ort I	$-DS_{I11}$ pk_{I1}	…	$-DS_{IJ1}$ pk_{I1}	…	$-DS_{I1K}$ pk_{IK}	…	$-DS_{IJK}$ pk_{IK}	KAP_I
Absatzkap.	ABS_{11}	…	ABS_{J1}	…	ABS_{1K}	…	ABS_{JK}	

Die Suche nach der deckungsbeitragsmaximalen Lösung beginnt mit der Überprüfung, ob überhaupt ein bezogen auf die Produktionsorte interdependentes Problem vorliegt. Da an jedem Produktionsort ein Engpaß existiert, ist als entsprechendes Optimierungskriterium grundsätzlich die relative (also auf den Engpaßfaktor bezogene) Deckungsspanne zu wählen.[1] Produktionsorte, welche nicht einmal für einen Absatzort bei irgendeinem Produkt eine negative negativierte (relative) Deckungsspanne aufweisen, können aus der Betrachtung generell gestrichen werden, da mit jeglicher Fertigung keinerlei Deckungsbeitrag erwirtschaftet werden kann. Ist es möglich, bei allen verbleibenden Produktionsorten ausschließlich die Produkt-Absatzort-Kombination mit der (betragsmäßig) größten relativen Deckungsspanne bis zum genauen Erreichen der Produktionskapazitätsgrenze zu realisieren, ohne daß an irgendeinem Absatzort die zulässige Absatzmenge überschritten wird, ist das Deckungsbeitragsmaximum mit Realisierung der daraus resultierenden Produktions-, Transport- und Absatzmengen erreicht. In dieser Situation besteht kein produktionsortinterdependentes Planungsproblem.

Liegt jedoch ein auf die Produktionsorte bezogen interdependentes Problem vor, so ist es zur Erzeugung einer möglichst guten Ausgangslösung notwendig, relative Deckungsspannen verschiedener Produktionsorte miteinander zu vergleichen. Dies beinhaltet jedoch die Schwierigkeit, daß an jedem Produktionsort ein anderer Engpaßfaktor existieren kann und somit eine Vergleichbarkeit der relativen Deckungsspannen nicht gegeben ist. In diesem Fall bietet sich die Division der produktionsortspezifischen Produktionskoeffizienten durch die am jeweiligen Produktionsort vorhandene Produktionskapazität an.

Die sich aus der Division der Deckungsspannen durch diese Relativgrößen ergebenden, auf relativen Kapazitätsbeanspruchungen basierenden relativen Deckungsspannen behalten als Vergleichskriterium innerhalb eines Produktionsortes ihre Gültigkeit und ermöglichen gleichzeitig den Vorteilhaftigkeitsvergleich zwischen verschiedenen Produktionsorten, weil sie die vereinheitlichte Dimension Geldeinheit(en) besitzen.

Ein auf die aus der relativen Kapazitätsbeanspruchung gewonnenen relativen Deckungsspannen bezogenes Transportschema ist zur Erzeugung einer Ausgangslösung des untersuchten Problems mittels VOGELscher Approximation geeignet, wie ein Beispiel verdeutlichen soll.

[1] Zur Bestimmung eines optimalen Produktionsprogramms bei einem Engpaß auf der Basis relativer Deckungsspannen vgl. ADAM (1998), S. 224 ff.

Ein Unternehmen mit drei Produktionsstandorten für jeweils zwei Produktarten verfügt über zwei Absatzorte. In der folgenden Tabelle stehen in den inneren Datenfeldern oben die Differenzen zwischen jeweiligem Absatzpreis und variablem Produktions- und Transportkostensatz sowie darunter die dafür jeweils gültigen Produktionskoeffizienten. Die rechte Spalte enthält die Produktionskapazitätsgrenzen, und die unterste Zeile beinhaltet die Absatzhöchstgrenzen:

	Produkt 1		Produkt 2		Prod.
	Absatzort 1	Absatzort 2	Absatzort 1	Absatzort 2	-kap.
Prod.-ort 1	10–8–3=–1	16–8–1=7	24–10–10=4	20–10–2=8	200
	7	7	12	12	
Prod.-ort 2	10–2–2=6	16–2–2=12	24–9–6=9	20–9–4=7	150
	6	6	15	15	
Prod.-ort 3	10–4–4=2	16–4–3=9	24–12–9=3	20–12–7=1	300
	10	10	9	9	
Absatzkap.	20	30	50	10	

Beispielhaft soll für das auf Produktionsort 1, Absatzort 2 und Produkt 1 bezogene Feld die Berechnung der relativen, negativierten Deckungsspannen auf Basis der relativen Kapazitätsbeanspruchung verdeutlicht werden:

$$-DS_{121} : \frac{pk_{11}}{KAP_1} = -7 : \frac{7}{200} = -200 \quad \text{GE}$$

Zur Feststellung des produktionsortsinterdependenten Planungsproblems wird für jedes Feld ein solcher Wert ermittelt und im Tableau anstelle der Deckungsspanne eingetragen:

	Produkt 1		Produkt 2		Prod.
	Absatzort 1	Absatzort 2	Absatzort 1	Absatzort 2	-kap.
Prod.-ort 1	200/7	–200	–66 2/3	–133 1/3	200
	7	7	12	12	
Prod.-ort 2	–150	–300	–90	–70	150
	6	6	15	15	
Prod.-ort 3	–60	–270	–100	–33 1/3	300
	10	10	9	9	
Absatzkap.	20	30	50	10	

Die betragsmäßig größte negative relative Deckungsspanne ergibt sich über alle Produktionsorte für Produkt 1 an Absatzort 2. Abgesehen von dem am Produktionsort 1 auftretenden Problem des nichtganzzahligen Quotienten aus der Produktionskapazität und dem Produktionskoeffizienten des Produktes 1, was wegen der Ganzzahligkeitsbedingung ein zulässiges Deckungsbeitragsmaximum mit einer geringeren als der maximalen nichtganzzahligen Produktionsmenge des Produktes 1 am Produktionsort 1 für den Absatzort 2 bewirken kann, ergibt sich eine maximale Menge an Produkt 1 über alle Produktionsorte zum Verkauf an Absatzort 2 von:

$$x_{\text{Produkt 1}} = \lfloor 200/7 \rfloor + 150/6 + 300/10 = 83 > 30 = \text{Absatzrestriktion an Absatzort 2}$$

In der Berechnung stellt die nach unten eckige Klammer den Operator zur ganzzahligen Abrundung des Quotienten dar. Allein die am Produktionsort 3 gefertigte Menge des Produktes 1 zum Transport an den Absatzort 2 entspricht schon dem dort maximal absetzbaren Kontingent. Somit besteht ein produktionsortsinterdependentes Planungsproblem.

Mit Hilfe der VOGELschen Approximation läßt sich für dieses komplexe Planungsproblem eine zulässige Ausgangslösung finden.[1] Hierbei wird je Zeile und Spalte die Differenz aus zweitgeringster und geringster relativer negativer Deckungsspanne gebildet und das Feld mit dem geringsten diesbezüglichen Deckungsbeitragswert in der Zeile oder Spalte der betragsmäßig größten Differenz mit der maximal möglichen Menge belegt. Anschließend sind die noch offenen Absatzmengen der Spalte und ungenutzten Kapazitäten der Zeile um die entsprechenden Mengen zu verringern. Dieses Vorgehen wiederholt sich so lange, bis wegen ausgeschöpfter Absatz- und/oder Kapazitätsrestriktionen keine einzige Mengeneinheit irgendeinem Feld mehr sinnvoll zugeordnet werden kann. Wird dieses Verfahren auf das Beispiel angewendet, ergibt sich als zulässige Ausgangslösung mit Hilfe der VOGELschen Approximation:

	Produkt 1				Produkt 2				Prod. -kap.	1	2	3	4	5
	A 1		A 2		A 1		A 2							
1	-	200/7 7	-	–200 7	6	–66 2/3 12	10	–133 1/3 12	~~200~~ ~~80~~ 8	$66\frac{2}{3}$	$66\frac{2}{3}$	$66\frac{2}{3}$	$66\frac{2}{3}$	$66\frac{2}{3}$
2	20	–150 6	-	–300 6	2	–90 15	-	–70 15	~~150~~ ~~30~~ 0	150	60	20	90	-
3	-	–60 10	30	–270 10	-	–100 9	-	–33 1/3 9	~~300~~ 0	170	-	-	-	-
A	~~20~~ 0		~~30~~ 0		~~50~~ ~~48~~ 42		~~10~~ 0							
1	90		30		10		63 1/3							
2	178 4/7		-		23 1/3		63 1/3							
3	-		-		23 1/3		63 1/3							
4	-		-		23 1/3		-							
5	-		-		66 2/3		-							

Nach Rücktransformation der Ausgangslösung in das (ursprüngliche) Transportschema mit negativierten Deckungsspannen und Produktionskoeffizienten sowie ungenutzten Restkapazitäten ergibt sich:

	Produkt 1				Produkt 2				Restprod.-kapazität
	Absatzort 1		Absatzort 2		Absatzort 1		Absatzort 2		
Prod.-ort 1	-	1 7	-	–7 7	6	–4 12	10	–8 12	8
Prod.-ort 2	20	–6 6	-	–12 6	2	–9 15	-	–7 15	0
Prod.-ort 3	-	–2 10	30	–9 10	-	–3 9	-	–1 9	0
Restabsatzkap.	0		0		42		0		

1 Gute Kurzbeschreibungen der VOGELschen Approximationsmethode finden sich in DOMSCHKE (1995), S. 122 und ZIMMERMANN/STACHE (2001), S. 96.

Deckungsbeitrag: DB = 4 · 6 + 8 · 10 + 6 · 20 + 9 · 2 + 9 · 30 = 512 GE

Die mit dem Simplex-Algorithmus berechnete Optimallösung des relaxierten Problems lautet:

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th colspan="4">Produkt 1</th><th colspan="4">Produkt 2</th><th rowspan="2">Restprod.-kapazität</th></tr>
<tr><th colspan="2">Absatzort 1</th><th colspan="2">Absatzort 2</th><th colspan="2">Absatzort 1</th><th colspan="2">Absatzort 2</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Prod.-ort 1</td><td rowspan="2">-</td><td>1</td><td rowspan="2">-</td><td>–7</td><td rowspan="2">$6{,}\overline{6}$</td><td>–4</td><td rowspan="2">10</td><td>–8</td><td rowspan="2">0</td></tr>
<tr><td>7</td><td>7</td><td>12</td><td>12</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Prod.-ort 2</td><td rowspan="2">-</td><td>–6</td><td rowspan="2">25</td><td>–12</td><td rowspan="2">-</td><td>–9</td><td rowspan="2">-</td><td>–7</td><td rowspan="2">0</td></tr>
<tr><td>6</td><td>6</td><td>15</td><td>15</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Prod.-ort 3</td><td rowspan="2">-</td><td>–2</td><td rowspan="2">5</td><td>–9</td><td rowspan="2">$27{,}\overline{7}$</td><td>–3</td><td rowspan="2">-</td><td>–1</td><td rowspan="2">0</td></tr>
<tr><td>10</td><td>10</td><td>9</td><td>9</td></tr>
<tr><td>Restabsatzkap.</td><td colspan="2">20</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">$15{,}\overline{5}$</td><td colspan="2">0</td><td></td></tr>
</table>

Deckungsbeitrag: DB = $4 \cdot 6{,}\overline{6} + 8 \cdot 10 + 12 \cdot 25 + 9 \cdot 5 + 3 \cdot 27{,}\overline{7} = 535$ GE

Wird die unzulässige relaxierte Lösung in ein zulässiges Ergebnis mittels Abrundung auf ganze Zahlen und eventueller Neuverteilung der freiwerdenden Ressourcen umgewandelt, kann folgende Ausgangslösung gebildet werden:

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th colspan="4">Produkt 1</th><th colspan="4">Produkt 2</th><th rowspan="2">Restprod.-kapazität</th></tr>
<tr><th colspan="2">Absatzort 1</th><th colspan="2">Absatzort 2</th><th colspan="2">Absatzort 1</th><th colspan="2">Absatzort 2</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Prod.-ort 1</td><td rowspan="2">-</td><td>1</td><td rowspan="2">-</td><td>–7</td><td rowspan="2">6</td><td>–4</td><td rowspan="2">10</td><td>–8</td><td rowspan="2">8</td></tr>
<tr><td>7</td><td>7</td><td>12</td><td>12</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Prod.-ort 2</td><td rowspan="2">-</td><td>–6</td><td rowspan="2">25</td><td>–12</td><td rowspan="2">-</td><td>–9</td><td rowspan="2">-</td><td>–7</td><td rowspan="2">0</td></tr>
<tr><td>6</td><td>6</td><td>15</td><td>15</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Prod.-ort 3</td><td rowspan="2">-</td><td>–2</td><td rowspan="2">5</td><td>–9</td><td rowspan="2">27</td><td>–3</td><td rowspan="2">-</td><td>–1</td><td rowspan="2">7</td></tr>
<tr><td>10</td><td>10</td><td>9</td><td>9</td></tr>
<tr><td>Restabsatzkap.</td><td colspan="2">20</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">17</td><td colspan="2">0</td><td></td></tr>
</table>

Deckungsbeitrag: DB = 4 · 6 + 8 · 10 + 12 · 25 + 9 · 5 + 3 · 27 = 530 GE

Wegen der Abrundung frei werdende Ressourcenkapazitäten können nirgends sinnvoll zusätzlich genutzt werden, da bezogen auf die Abrundung am Produktionsort 1 zwar die Fertigung eines Produktes 1 für den Absatzort 1 möglich wäre, dies aber eine Deckungsbeitragssenkung von 1 GE zur Folge hätte, weswegen auch die Besetzung des Feldes 111 im weiteren grundsätzlich ausgeschlossen wird. Mit der am Produktionsort 3 freigesetzten Ressource im Umfang von 7 KE läßt sich dort kein einziges Produkt für irgendeinen Absatzort zusätzlich fertigen.

Die aus der Optimallösung des relaxierten Problems erzeugte zulässige Lösung des unrelaxierten Problems ist für dieses Beispiel erstens besser als die mit Hilfe der VOGELschen Approximation gewonnene Lösung und zweitens nur knapp 1 % (genauer 0,9346 %) schlechter als die Optimallösung des relaxierten Problems. Demgegenüber ist die VOGELsche Approximationslösung rund 4,3 % (genauer 4,2991 %) gringer als diese. Da der abzuleitende Lösungsalgorithmus recht komplex sein wird, sollte eine möglichst gute Ausgangslösung als

Startlösung gewählt werden. In diesem Falle empfiehlt es sich, die durch Rundung der nicht zulässigen „relaxierten Lösung" gefundene Startlösung zu wählen. Es kann aber nicht ausgeschlossen werden, daß bei anderer Datensituation die VOGELsche Approximation zu einer besseren Ausgangslösung gelangt. Somit ist es vorteilhaft, beide Verfahren in diesem Anfangsschritt zu nutzen, um anschließend die bessere Lösung als Startlösung weiterzuverwenden. Im Sinne eines pragmatisch-heuristischen Vorgehens kann auch bezogen auf das Zahlenbeispiel ganz auf weitere Optimierungsschritte verzichtet werden, da der mit der Rundungslösung erzielbare Gesamtdeckungsbeitrag höchstens noch um rund 0,9434 % gesteigert werden kann, denn dann entspricht er dem als obere Schranke des unrelaxierten Problems dienenden maximalen Deckungsbeitrag des relaxierten Problems.

Weiterhin bleibt festzuhalten, daß bereits sowohl die VOGELsche Approximation als auch das Simplex-Verfahren mit anschließender Rundung zu einer Entartung der Lösung geführt haben, da die Summe aus Zeilen- und Spaltenzahl sieben beträgt und jeweils nur fünf Felder belegt sind, für eine Nichtentartung aber genau ein belegtes Feld weniger als die Summe aus Zeilen- und Spaltenzahl notwendig ist. Genau so viele belegte Felder sind Voraussetzung zur Anwendung der Schrittsteinmethode, so daß, wenn eine unmodifizierte Anwendung des Algorithmus möglich wäre, die Belegung eines leeren Feldes mit einer Null zu erfolgen hätte. Insbesondere für die mittels Abrundung aus der Lösung des relaxierten Problems gewonnene zulässige Lösung des unrelaxierten Problems muß diese Null-Ergänzung für die erste Spalte vorgenommen werden, da sonst keine geschlossenen Verschiebepfade für Felder dieser Spalte existieren. Darum wird im folgenden bei der Beispielfortführung von einer „Null-Belegung" auf Feld 211 ausgegangen.

3.3 Optimallösung mit modifizierter Schrittsteinmethode

3.3.1 Problembedingte Anpassungen der Schrittsteinmethode

Zur Optimierung der Ausgangslösung soll ein auf Basis der Schrittsteinmethode zu entwickelnder Algorithmus angewendet werden.[1] Die konventionelle Schrittsteinmethode zur Lösung von klassischen Transportproblemen basiert auf der Überlegung, daß im Transportschema für jedes unbelegte Feld ein geschlossener Pfad ausgehend von einem solchen Feld über im weiteren ausschließlich belegte Felder gefunden und probeweise eine Mengeneinheit des Transportgutes auf das unbelegte Feld umgeschichtet werden kann. Die damit verbundenen Kostenwirkungen werden mit Hilfe der Transportkostensätze der auf dem geschlossenen Pfad liegenden Felder mittels Addition und Subtraktion berechnet. Über den Pfad mit der größten Kostenverringerung werden schließlich die maximal auf diesem Pfad möglichen Umschichtungen realisiert. Damit wird mindestens von einem Feld die gesamte Menge entfernt (bei Entartungen sind auch die Entleerungen mehrerer Felder möglich). Anschließend werden für diese neue Lösung ausgehend von den unbelegten Feldern erneut geschlossene Pfade zur Kostenverringerung gesucht.

[1] Eine genauere Kurzbeschreibung der Schrittsteinmethode ist bei ZIMMERMANN/STACHE (2001), S. 96 f. zu finden.

Das hier betrachtete Problem der simultanen Produktionsprogramm- sowie Transport- und Absatzmengenplanung ganzzahliger Produktmengen ist jedoch viel komplexer als das klassische Transportproblem. Im Gegensatz zur VOGELschen Approximation werden zur Ermittlung von möglichen Zielwertverbesserungen nicht die auf relativer Kapazitätsbeanspruchung basierenden negativierten relativen Deckungsspannen verwendet, sondern die tatsächlichen negativierten Deckungsspannen, die allerdings noch hinsichtlich der Produktionskapazitätsknappheit am jeweiligen Produktionsort bewertet werden müssen.

Die Modellstruktur bewirkt weiterhin, daß nicht nur zu wenige Felder (entartete Lösung), sondern auch zu viele Felder (überbestimmte Lösung) bereits in der Ausgangslösung oder im Laufe der Lösung mit Mengen belegt sind/werden. Im ersten Fall sind im allgemeinen gemäß der Schrittsteinmethode Felder mit Nullen zu belegen. Im anderen Fall sind *sämtliche* mögliche Pfade ausgehend von einem unbelegten Feld zu ermitteln und in die Analyse einzubeziehen. Auch haben die Verschiebepfade hier eine andere Bedeutung als im einfachen Transportproblem, bei dem die Entleerung eines Feldes den Verzicht eines Angebotsortes (zugunsten eines anderen) auf den Transport bestimmter Mengen an einen Nachfrageort bedeutet. Die so freigesetzte Angebotskapazität wird zur Belieferung eines anderen Nachfageortes genutzt. Im Zuge der Produktmengenverlagerung entlang eines Verschiebepfades bezogen auf das hier vorliegende Problem werden bei einem Feld, das Produktmengen abgibt (im folgenden Geberfeld genannt), Produktionskapazitäten freigesetzt, welche für die Fertigung irgendeines Produktes an dem betroffenen Produktionsort genutzt werden können. Im Gegenzug verbraucht ein Feld, auf das Produktmengen verlagert werden (im folgenden Empfängerfeld genannt), Produktionskapazitäten des zugehörigen Produktionsstandortes.

Innerhalb eines geschlossenen Verschiebepfades gibt es je betroffenen Produktionsort ein Geber- und ein Empfängerfeld. Einerseits hängt die Freisetzung der Produktionskapazität nicht nur von der verlagerten Produktmenge, sondern auch von dem Produktionskoeffizienten des Geberfeldes ab, und andererseits wird die auf dem Empfängerfeld realisierbare Produktmenge nicht nur von der zur Verfügung stehenden Produktionskapazität, sondern auch von dessen Produktionskoeffizienten bestimmt. Somit wird sich die bezogen auf einen Produktionsort von dem Geberfeld entfernte Produktmenge in der Regell von der auf dem Empfängerfeld hinzugefügten Produktmenge unterscheiden. Das Problem verkompliziert sich insofern zusätzlich, als am Produktionsort möglicherweise noch ungenutzte Kapazität vorhanden ist, welche die Produktmenge des Empfängerfeldes zusätzlich erhöhen kann. Umgekehrt ist auch eine Erhöhung der am Produktionsort ungenutzten Restkapazität wegen der Kapazitätsnutzungsverschiebung vom Geber- zum Empfängerfeld denkbar, wenn durch die Produktmengenverringerung auf dem Geberfeld mehr Kapazitätseinheiten freigesetzt werden, als die Produktmengenerhöhung auf dem Empfängerfeld beansprucht (Ganzzahligkeitsproblematik).

Möglicherweise ungenutzte Restproduktionskapazität an einem Produktionsort bewirkt auch, daß es dort sowohl Felder (Produkt-Absatzort-Kombinationen) geben kann, auf denen eine Produktmengenerhöhung möglich ist, ohne die Produktmenge auf einem anderen Feld des Produktionsortes zu senken, als auch Felder, auf denen dies unmöglich ist. Diesbezüglich soll im folgenden bei Unmöglichkeit von einem produktartbezogen ausgelasteten, anderenfalls von einem produktartbezogen unterausgelasteten Produktionsort gesprochen werden.

Unterausgelastete Produktionsorte können für den abzuleitenden Algorithmus zwei Auswirkungen haben. Erstens findet durch sie eine gewisse Entkopplung von Feldern auf einem geschlossenen Verschiebepfad im Transportschema statt, was im Extremfall sogar zu offenen Verschiebepfaden führen kann; im Gegensatz zur klassischen Schrittsteinmethode, bei der nur geschlossene Verschiebepfade existieren. Zweitens können sich beispielsweise bei der Produktmengenverlagerung von Produktionsorten hin zu unterausgelasteten Produktionsorten bezogen auf die Gesamtzahl belegter Felder im Transportschema mehr belegte Felder ergeben, als eine Nichtentartung des Problems erfordert (Überbestimmung). Dadurch entstehen anders als bei der klassischen Schrittsteinmethode für unbelegte Felder im Transportschema mehrere mögliche Verschiebepfade, die es alle bezüglich einer besseren Zielerreichung zu untersuchen gilt. Zusätzlich ergeben sich unter Umständen auch ausschließlich auf belegten Feldern verlaufende Verschiebepfade, die ebenfalls zu prüfen sind.

Eine weitere Schwierigkeit bei der Anpassung der Schrittsteinmethode an das vorliegende Problem ergibt sich daraus, daß die Schrittsteinmethode von konstanten Grenzkosten je Produktmengeneinheit ausgeht. Dies hat zur Folge, daß Kostenverringerungspotentiale anhand von potentiellen Verschiebungen jeweils einer Mengeneinheit entlang der Verschiebepfade identifiziert werden können. Die Multiplikation der betragsmäßig größten Kostenverringerung einer verschobenen Produktmengeneinheit mit der Gesamtverschiebemenge ergibt schließlich die gesamte Einsparung. Demgegenüber kann der negativierte Deckungsbeitrag aufgrund der vorliegenden Problemstruktur, insbesondere wegen der Ganzzahligkeitsbedingungen, nichtlinear mit zu- oder abnehmender Verschiebemenge fallen oder steigen. Es ist sogar möglich, daß mit der Erhöhung der Verschiebemenge um eine Mengeneinheit der negativierte Deckungsbeitrag fällt, bei Verschiebung einer weiteren Mengeneinheit jedoch steigt. Zur Ermittlung der stärksten Verringerung (oder des betragsmäßig größten Anstiegs) des negativierten Deckungsbeitrags reicht somit keine Grenzdeckungsbeitragsbetrachtung für eine Verschiebemengeneinheit aus. Vielmehr ist es erforderlich, für sämtliche Verschiebepfade *alle* möglichen Mengenverschiebungen hinsichtlich der Deckungsbeitragsänderung zu untersuchen, um schließlich die Mengenverschiebung mit der betragsmäßig größten Deckungsbeitragssteigerung zu realisieren. Dies kann zu einer nur unvollständigen Entleerung aller Geberfelder auf dem Verschiebepfad führen und eine Überbestimmung des Problems mit den bereits oben erwähnten Folgen bewirken.

Der gerade beschriebene Umstand läßt die notwendigen Berechnungen zur Lösungsfindung im Extremfall bis zur Vollenumeration ausufern, wenn der abzuleitende Lösungsalgorithmus nicht wirksame Mechanismen zu deren Eingrenzung beinhaltet. Derartige Eingrenzungsmechanismen sollen in Form von Abschätzungen erfolgen. Für jedes Feld auf einem Verschiebepfad, der gleichgültig bei welcher Mengenverschiebung mit Sicherheit niemals eine Verbesserung der Lösung bewirkt, soll eine negativierte Deckungsbeitragsänderungsabschätzung berechnet werden, die einen positiven Wert besitzt. Derartige Verschiebepfade brauchen nicht weiter berücksichtigt zu werden, da nur Verringerungen des Gesamtdeckungsbeitrags bei beliebigen Mengenverschiebungen auf diesen Pfaden resultieren können. Diese Abschätzungen müssen also so getroffen werden, daß sie für jedes Feld angeben, ob bei einer Mengenerhöhung auf diesem Feld der Deckungsbeitrag insgesamt überhaupt zunehmen kann. Damit aber kein Feld übersehen wird, welches potentiell zu einer Deckungsbeitragserhöhung beitragen kann, muß die Deckungsbeitragsänderung durch Erhöhung einer Mengeneinheit auf dem entsprechenden Feld so optimistisch wie möglich geschätzt werden. Dafür müssen die Gesamtdeckungsbeitragserhöhungen auf allen Empfängerfeldern des betrachteten Verschiebepfades systematisch überschätzt und die Gesamtdeckungsbeitragsverringerungen auf den zugehörigen Verschiebepfadgeberfeldern systematisch unterschätzt werden. So ergibt sich als

Summe stets eine Gesamtdeckungsbeitragsänderungsüberschätzung. Mit solch einer Schätzung werden auf jeden Fall *alle* Felder erkannt, die bei einer Mengenverschiebung tatsächlich eine Deckungsbeitragserhöhung bewirken können. Natürlich werden auch Felder als potentielle Deckungsbeitragserhöhungsfelder identifiziert, bei denen die spätere Überprüfung dies nicht bestätigt.

Im Anschluß an die Abschätzungen wird für alle untersuchten Felder, deren negativierte Deckungsbeitragsänderungsabschätzungen über die entsprechenden Verschiebepfade Werte kleiner null ergeben haben, jeweils die realisierbare Produktmengenverschiebung ermittelt, welche die betragsmäßig größte negativierte Deckungsbeitragsänderung bewirkt. Diese Werte werden den Feldern als Entscheidungsgrößen zugeordnet. Im Sinne der klassischen Schrittsteinmethode ist nun das betrachtete Feld mit dem betragsmäßig größten negativen Wert zu wählen und über dessen zugehörigem Verschiebepfad die ermittelte Produktmenge auf das Feld zu verschieben. Anschließend beginnt mit erneutem Verfahrensdurchlauf eine weitere Optimierungsstufe, bis keine weitere Lösungsverbesserung mehr erzielt werden kann.

Bevor auf die innerhalb einer Optimierungsstufe im einzelnen durchzuführenden Schritte genauer eingegangen wird, sollen diese noch anhand der zu unterscheidenden Verschiebepfade kurz systematisiert werden. Die simpelste Form von Verschiebepfaden stellen im folgenden als „einfache offene Verschiebepfade" bezeichnete Pfade dar, die von einem Feld direkt zu einem oder zwei anderen Feldern an unterausgelasteten Produktions- oder/und Absatzorten führen und auf denen eine Verschiebung von Mengeneinheiten möglich ist. Ganz ähnlich können „einfache geschlossene Verschiebepfade" charakterisiert werden. Sie sind quasi die Zusammenfügung mehrerer einfacher offener Verschiebepfade in der Weise, daß sich als Pfadform ein Rechteck bildet. Zwei diagonal gegenüberliegende Felder dienen als Geberfelder für die anderen beiden Empfängerfelder. Allerdings müssen im Falle von Unterauslastungen nicht von jedem Geberfeld auf jedes Empfängerfeld Mengeneinheiten transferiert werden. Tritt dieser Fall ein, handelt es sich um einen *entkoppelten* einfachen geschlossenen Verschiebepfad. Die Untersuchung dieser beiden Verschiebepfadtypen erfolgt im ersten Optimierungsschritt des abzuleitenden Algorithmus.

Werden Mengen von ihrem ursprünglichen Geberfeld weiter als bis zu unmittelbar folgenden Empfängerfeldern mittels zusätzlicher Geber- und Empfängerfelder transferiert, so daß offene Verschiebepfade mit mehr als einem Geberfeld und geschlossene Verschiebepfade mit mehr als zwei Geber- und Empfängerfeldern entstehen, wird diesen Pfaden jeweils das Adjektiv „komplex" an Stelle von „einfach" zur konkreteren Bezeichnung vorangestellt. Auch komplexe geschlossene Verschiebepfade können in entkoppelter Form auftreten. Die Länge derartiger Verschiebepfade ist grundsätzlich nur durch die Größe des betrachteten Optimierungsproblems beschränkt. Mit diesen beiden Verschiebepfadtypen beschäftigt sich der zweite Optimierungsschritt.

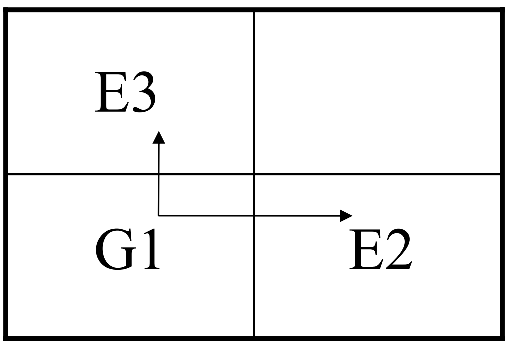
Bezogen auf die offenen Verschiebepfade ist noch hervorzuheben, daß stets von dominanten offenen Verschiebepfaden ausgegangen wird. Unter dominanten offenen Verschiebepfaden sollen Pfade verstanden werden, die nach jedem Geberfeld, wenn möglich, also bei entsprechender Entkopplung, auch noch ein oder mehrere direkt folgende Empfängerfelder mit einbeziehen, wenn die dortige negativierte Deckungsspanne negativ ist, damit der Gesamtdeckungsbeitrag durch die Mengenverschiebung möglichst stark ansteigt.

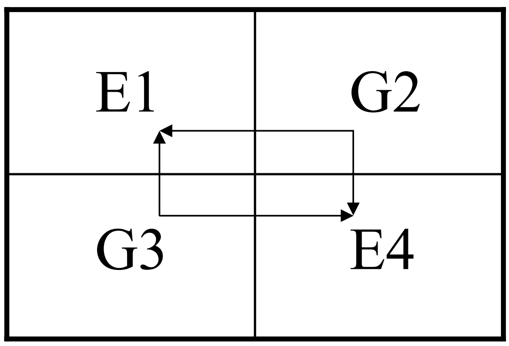
3.3.2 Erster Optimierungsschritt - einfache offene und geschlossene Pfade

Bevor konkrete Berechnungsvorschriften für einfache offene und geschlossene Pfade hergeleitet werden, empfiehlt es sich, die möglichen Pfade allgemein zu strukturieren. Einfache offene Pfade beginnen stets mit einem Geberfeld, welches im folgenden mit G1 bezeichnet wird. Sie enden stets bei einem oder mehreren Empfängerfeldern an unterausgelasteten Produktions- und /oder produktbezogenen Absatzorten, die direkt durch einen Mengentransportpfeil mit G1 verbunden werden können. Die Empfängerfelder werden mit einem „E" gekennzeichnet und zusätzlich durchnumeriert, wobei die Nummer 1 nicht mehr vergeben wird. Sämtliche Felder werden zur Konkretisierung weiterhin mit den zugehörigen Produktionsort-, Absatzort- und Produktartnummern ijk indiziert.

Demgegenüber beginnen einfache geschlossene Pfade stets mit dem Empfängerfeld, auf welchem originär die Produktmenge erhöht werden soll. Es erhält die Bezeichnung E1. Der Verschiebepfad läuft dann bei fehlender Entkopplung dort stets weiter über das zweite betroffene Feld an diesem Produktionsort, das den Namen G2 erhält. Das dritte Feld des Verschiebepfades stellt das sich bezogen auf Feld E1 in derselben Spalte befindende Geberfeld dar. Bezeichnet wird dieses Feld mit G3. Auch hier kann eine Entkopplung von E1 existieren. Ist jedoch E1 von G2 und G3 entkoppelt, bricht der ganze Verschiebepfad zusammen, da das Feld zumindest mit einer bestimmten maximalen Produktmenge zusätzlich belegt werden kann, ohne die Produktmengen von G2 und G3 zu verringern. Das letzte Feld des Verschiebepfades ist das verbleibende Empfängerfeld diagonal gegenüber von E1, das die Bezeichnung E4 erhält. Somit gibt der Buchstabe der Feldernamen jeweils den Charakter des betreffenden Feldes und die anschließende Nummer die „normale" Position des Feldes im Verschiebezyklus an. Nicht unerwähnt bleiben soll, daß die tatsächliche Berücksichtigung eines jeden Feldes nach E1 von seiner Positionsnummer wegen eventueller Entkopplungen abweichen kann. Zur Kennzeichnung der konkret zu einem Verschiebepfad zugehörigen Felder werden diese wie schon bei einfachen offenen Verschiebepfaden zusätzlich jeweils mit den Produktionsort-, Absatzort- und Produktartnummern ijk indiziert.

Beispielhaft seien hier im Sinne von Referenzpfaden je ein möglicher einfacher offener (links) und geschlossener (rechts) Verschiebepfad graphisch veranschaulicht:[1]





Verlaufen sowohl einfache offene als auch einfache geschlossene Verschiebepfade zwar zwischen eventuell unterschiedlichen Produktions- oder/und Absatzorten, aber nur innerhalb

[1] Obwohl es natürlich auch andere Verlaufsmöglichkeiten von einfachen offenen und geschlossenen Verschiebepfaden gibt, sind diese beiden Darstellungen als Referenzen in der Weise zu verstehen, daß die Bezeichnungen der einzelnen Felder sich stets an diesen orientieren.

einer einzigen Produktart, so sind die bereits oben erwähnten Deckungsbeitragsabschätzungen bei Mengenveränderungen nicht notwendig, weil wegen übereinstimmender Produktionskoeffizienten die verschobenen Produktmengen identisch sind. Somit ist die bereits aus der klassischen Schrittsteinmethode bekannte Addition und Subtraktion einfacher Stückkosten (= negativierte Deckungsspannen bezogen auf das vorliegende Problem) zur Ermittlung der Vorteilhaftigkeit einer innerhalb der zulässigen Grenzen beliebig hohen Mengenverschiebung ausreichend.

Angenommen für die oben beispielhaft aufgeführten Verschiebepfade trifft dies zu, so ergeben sich die mit der Verschiebung einer Mengeneinheit verbundenen negativierten Deckungsbeitragsänderungen bei fehlenden Entkopplungen wie folgt:

für den einfachen offenen Verschiebepfad:

$$-DB_{G1} = -(-DS_{G1}) + (-DS_{E2}) + (-DS_{E3}) \tag{1}$$

und für den einfachen geschlossenen Verschiebepfad:

$$-DB_{E1} = -DS_{E1} - (-DS_{G2}) - (-DS_{G3}) + (-DS_{E4}) \tag{2}$$

Bezogen auf das Beispiel des vorangegangenen Unterkapitels ergeben sich für die mittels Abrundung der Lösung des relaxierten Problems gewonnene Startlösung die im folgenden Transportschema eingezeichneten, obigen Anforderungen genügenden einfachen offenen und geschlossenen Verschiebepfade sowie je zwei einfache offene und geschlossene Pfade, deren mögliche Kapazitätsumschichtungen über eine Produktgrenze hinweg erfolgen:

	Produkt 1						Produkt 2						Restprod.-kapazität
	Absatzort 1			Absatzort 2			Absatzort 1			Absatzort 2			
Prod.-ort 1	-	1	7	-	–7	7	6	–4	12	10	–8	12	8
Prod.-ort 2	0	–6	6	25	–12	6	-	–9	15	-	–7	15	0
Prod.-ort 3	-	–2	10	5	–9	10	27	–3	9	-	–1	9	7
Restabsatzkap.	20			0			17			0			

Einige Anmerkungen sind zu obiger Darstellung noch notwendig. Erstens gibt es natürlich auch noch einfache offene Verschiebepfade mit möglichen Mengenverschiebungen von Feld 112 zu 111 und von Feld 122 zu 111, aber da wegen der mit jeder auf das Produkt 1 bezogenen Fertigungsmengenlieferung von Produktionsort 1 zu Absatzort 1 ein Verlust entsteht, darf das Feld 111 in der optimalen Lösung nicht belegt sein. Zweitens sind die Pfeile von Feld 112 zu 312 (in beide Richtungen), von Feld 312 zu 212 und von Feld 211 zu 311 gestrichelt dargestellt, da hier Entkopplungen vorliegen, denn die Bedarfe beider Produktarten sind im Absatzort 1 unterausgelastet. Somit können die Produktmengen auf Feldern dieses Absatzortes, ohne eine Mengenreduzierung auf Geberfeldern am gleichen Absatzort vorzunehmen, erhöht werden. Allerdings müssen Mengenverringerungen wegen Mengenerhöhungen auf Empfängerfeldern des gleichen Produktionsortes unter Umständen dennoch erfolgen. Weiterhin ist der Verschiebepfeil zwischen den Feldern 112 und 121 ebenfalls gestrichelt dargestellt, weil das Feld 121 ohne Produktmengenreduktion auf Feld 112 mit einer Produktmengeneinheit belegt werden kann, denn es ist genügend Restproduktionskapazität am Produktionsort 1 vorhanden.

Für nur auf eine Produktart bezogene Pfade ergeben sich folgende exakte Vorteilhaftigkeitsberechnungen:[1]

Verschiebepfad von Feld 122 zu 112: $-DB_{G1_{122}} = -(-DS_{G1_{122}}) + (-DS_{E2_{112}}) = 8 - 4 = 4$

Verschiebepfad 1 von Feld 221: $-DB_{G1_{221}} = -(-DS_{G1_{221}}) + (-DS_{E2_{211}}) + (-DS_{E3_{121}})$
$= 12 - 6 - 7 = -1 \ \text{GE/ME}$

Verschiebepfad 1 von Feld 321: $-DB_{G1_{321}} = -(-DS_{G1_{321}}) + (-DS_{E2_{311}}) + (-DS_{E3_{121}})$
$= 9 - 2 - 7 = 0 \ \text{GE/ME}$

Verschiebepfad auf Feld 322: $-DB_{E1_{322}} = -DS_{E1_{322}} - (-DS_{G2_{312}}) - (-DS_{G3_{122}}) + (-DS_{E4_{112}})$
$= -1 - (-3) - (-8) + (-4) = 6 \ \text{GE/ME}$

Verschiebepfad auf Feld 311: $-DB_{E1_{311}} = -DS_{E1_{311}} - (-DS_{G2_{211}}) - (-DS_{G3_{321}}) + (-DS_{E4_{221}})$
$= -2 - (-9) - (-6) + (-12) = 1 \ \text{GE/ME}$

Positive negativierte Deckungsbeitragsänderungen bedeuten Verringerungen des Deckungsbeitrags. Somit ist nur der zweite offene Verschiebepfad vorteilhaft.

Wechselt innerhalb eines einfachen Verschiebepfades die betrachtete Produktart, sind die Produktionskoeffizienten der entsprechenden Produktarten mit ins Kalkül einzubeziehen. Weiterhin wird auch bei Vollauslastung insbesondere in diesem Fall die am jeweiligen Produktionsort noch vorhandene Restkapazität relevant. Zur Ableitung der jetzt notwendigen Deckungsbeitragsabschätzungen soll mit den offenen Verschiebepfaden begonnen werden. Die Schrittsteinmethode geht von einer Grenzkostenbetrachtung aus: Wenn die Verschiebung einer Mengeneinheit auf einem Verschiebepfad im Vergleich zu allen anderen Verschiebepfaden die größte Kostenverringerung bewirkt, so ist es stückbezogen am günstigsten, die maximal auf diesem Verschiebepfad umschichtbare Produktmenge zu verlagern. Diese Aussage ist wegen der unterschiedlichen Produktionskoeffizienten, der möglicherweise vorhandenen Restkapazitäten an den Produktionsorten und der Ganzzahligkeitsbedingungen für das vorliegende Problem nicht zutreffend. Ist Restkapazität an dem betrachteten Produktionsort vorhanden, braucht, so lange diese zur Fertigung von Produkten für das betrachtete Feld genutzt werden kann, keine Kapazität durch anderweitige Produktionsmengenverringerung freigesetzt zu werden. Reicht die Restkapazität dort jedoch für kein vollständiges Produkt aus, so kann sie gemeinsam mit der freigesetzten Kapazität vom Geberfeld des Produktionsortes und abhängig von den Produktionskoeffizienten auf den beiden betrachteten Feldern eine nur proportionale oder sogar eine überproportionale Produktmengenerhöhung auf dem zu belegenden Feld bewirken. Deswegen reicht es in diesem Fall nicht aus, zur Vorteilhaftigkeitsprüfung eines Verschiebepfades nur probehalber die Verschiebung einer Mengeneinheit zu testen. Erst mit der Umlagerung mehrerer, aber möglicherweise nicht unbedingt aller Kapazitätseinheiten wird somit unter Umständen die maximal erreichbare Deckungsbeitragserhöhung bewirkt

[1] Bezogen auf die beiden mit „Verschiebepfad 1“ benannten offenen einfachen Pfade sei angemerkt, daß darunter jeweils die im obigen Tableau nach links verlaufenden Pfade ausgehend vom jeweils aufgeführten Feld verstanden werden.

Analog zur klassischen Schrittsteinmethode sollen Abschätzungen vorgenommen werden, die als Vorteilhaftigkeitsindikator auf der Verschiebung einer Produktmengeneinheit basieren. Somit soll für jedes betrachtete Feld eine Deckungsbeitragsänderung abgeschätzt werden, welche je verschobene Produktmengeneinheit die günstigstenfalls erreichbare „Deckungsbeitragsverbesserung" angibt.

Da bei den zunächst zu behandelnden **offenen Verschiebepfaden** grundsätzlich von einem Geberfeld ausgegangen wird, erhöht sich betragsmäßig der negativierte Deckungsbeitrag dort ohne Abschätzung um das Produkt aus Produktionsmengenreduktion n und zugehöriger negativierter Deckungsspanne:

$$-DB_{G1} = -\left(n \cdot (-DS_{G1})\right)$$

Gehört das folgende Empfängerfeld nun zum selben Produktionsort, ist die dortige Produktmengenerhöhung abhängig von der freigesetzten Produktionskapazität und der Restproduktionskapazität am Produktionsort. Für die dortige negativierte Deckungsbeitragsveränderung gilt somit in Abhängigkeit von der Produktionsmengenreduktion n auf dem Geberfeld:

$$-DB_{E2} = \left\lfloor \frac{n \cdot pk_{G1} + RestKap_{E2}}{pk_{E2}} \right\rfloor \cdot (-DS_{E2})$$

Für den Vorfaktor der negativierten Deckungsspanne sind Abschätzungen erstens bezogen auf die Abrundungsvorschrift und zweitens hinsichtlich der im ersten Summanden des Zählers enthaltenen Produktionsmengenreduktion n des Geberfeldes zu treffen. Da die negativierte Deckungsbeitragsänderung optimistisch geschätzt werden soll, ist dieser Vorfaktor systematisch zu überschätzen. Dies geschieht erstens durch Vernachlässigung der Abrundung und zweitens mittels Aufspaltung des Vorfaktors in zwei Faktoren:

$$\left\lfloor \frac{n \cdot pk_{G1} + RestKap_{E2}}{pk_{E2}} \right\rfloor \leq \frac{n \cdot pk_{G1} + RestKap_{E2}}{pk_{E2}} \leq n \cdot \frac{pk_{G1} + RestKap_{E2}}{pk_{E2}}$$

Es ergibt sich folgende Abschätzung für die negativierte Deckungsbeitragsänderung des Empfängerfeldes:

$$-DB_{E2}^{schätz+} = n \cdot \frac{pk_{G1} + RestKap_{E2}}{pk_{E2}} \cdot (-DS_{E2})$$

Da die Produktionsmengenreduktion n des Geberfeldes als separater Faktor eingeht, entsteht, analog zur klassischen Schrittsteinmethode, eine lineare Abhängigkeit der negativierten Deckungsbeitragsänderungsschätzung des Empfängerfeldes von der Produktionsmengenreduktion des Geberfeldes. Damit ergibt sich die Abschätzung der negativierten Deckungsbeitragsänderung gemeinsam für das Geber- und Empfängerfeld wie folgt:

$$-\overline{DB}_{G1}^{schätz} = -\left(n \cdot (-DS_{G1})\right) + n \cdot \frac{pk_{G1} + RestKap_{E2}}{pk_{E2}} \cdot (-DS_{E2})$$

$$= n \cdot \left(-(-DS_{G1}) + \frac{pk_{G1} + RestKap_{E2}}{pk_{E2}} \cdot (-DS_{E2}) \right)$$

Der hintere Faktor obigen Ausdrucks ist für das Vorzeichen des gesamten Ausdrucks verantwortlich. Somit kann zur Abschätzung einer günstigen oder ungünstigen negativierten Deckungsbeitragsänderung die Produktionsmengenreduktion n des Geberfeldes vernachlässigt werden:

$$-DB_{G1}^{schätz} = -(-DS_{G1}) + \frac{pk_{G1} + RestKap_{E2}}{pk_{E2}} \cdot (-DS_{E2}) \tag{3}$$

Zu dieser Abschätzung wird im Sinne des weiter oben abgebildeten einfachen offenen Verschiebepfades noch die negativierte Deckunggsspanne des Empfängerfeld E3 addiert, das frei werdende Produktmenge am Absatzort aufnimmt, wenn bezogen auf dieses Empfängerfeld an dessen Produktionsort Restproduktionskapazität vorhanden ist. Ansonsten endet der offene Verschiebepfad bereits nach diesen beiden Feldern. Gleichung drei kann somit sowohl als geschätzte negativierte Deckungsbeitragsänderung bezogen auf einen vollständigen (dem wird hier gefolgt) oder unvollständigen Verschiebepfad angesehen werden.

Mit Hilfe des hergeleiteten Ausdrucks können die negativierten Deckungsbeitragsänderungen der einfachen offenen Verschiebepfade von Feld 221 zu 212 und 121, von Feld 312 zu 311 und von Feld 321 zu 312 und 121 hinsichtlich ihrer jeweiligen Vorteilhaftigkeit abgeschätzt werden:

Verschiebepfad von Feld 221 zu 212 und 121:

$$-DB_{G1_{221}}^{schätz} = -(-DS_{G1_{221}}) + \frac{pk_{G1_{221}} + RestKap_{E2_{212}}}{pk_{E2_{212}}} \cdot (-DS_{E2_{212}}) + (-DS_{E3_{121}})$$

$$= -(-12) + \frac{6+0}{15} \cdot (-9) + (-7) = 1{,}4 \quad \text{GE/ME}$$

Verschiebepfad von Feld 312 zu 311:

$$-DB_{G1_{312}}^{schätz} = -(-DS_{G1_{312}}) + \frac{pk_{G1_{312}} + RestKap_{E2_{311}}}{pk_{E2_{311}}} \cdot (-DS_{E2_{311}})$$

$$= -(-3) + \frac{9+7}{10} \cdot (-2) = -0{,}2 \quad \text{GE/ME}$$

Verschiebepfad von Feld 321 zu 312 und 121:

$$-DB_{G1_{321}}^{schätz} = -(-DS_{G1_{321}}) + \frac{pk_{G1_{321}} + RestKap_{E2_{312}}}{pk_{E2_{312}}} \cdot (-DS_{E2_{312}}) + (-DS_{E3_{121}})$$

$$= -(-9) + \frac{10+7}{9} \cdot (-3) + (-7) = -3\frac{2}{3} \quad \text{GE/ME}$$

Von den Schätzwerten sind die letzten beiden negativ. Somit lohnt sich möglicherweise eine Mengenverschiebung entlang dieser Pfade. Da die Restfertigungskapazität im Produktionsort 1 nur zur Erzeugung einer zusätzlichen Produktmengeneinheit ausreicht, gilt der unter Umständen vorteilhafte einfache offene Verschiebepfad von Feld 321 nur für die Verlagerung einer einzigen Produktmengeneinheit.[1]

Im Gegensatz zu einem offenen beginnt ein **geschlossener Verschiebepfad** stets mit einem zu belegenden Feld, weswegen die Abschätzungen darauf abzustimmen sind. Befindet sich das eventuell mit Menge zu belegende Startempfängerfeld E1 an einem ausgelasteten Absatzort, so muß mit der Produktmengenbelegung dieses Feldes das dem Verschiebepfad zugehörige belegte Feld G3 am selben Absatzort genau um diese Produktmenge reduziert werden. Das innerhalb des Verschiebepfades zum gleichen Produktionsort wie das Startempfängerfeld gehörende Geberfeld G2 muß Produktionsmengen zur Freisetzung von Produktionskapazitätseinheiten absenken. Dies geschieht in Abhängigkeit von der mit einer Belegung des Startfeldes einhergehenden Produktionskapazitätsbeanspruchung und der eventuell am Produktionsort vorhandenen Restproduktionskapazität. Die damit verbundene Änderung des negativierten Deckungsbeitrags in Abhängigkeit von der Produktionsmengenerhöhung n auf dem Startempfängerfeld berechnet sich wie folgt:

$$-DB_{G2} = \left\lceil \frac{n \cdot pk_{E1} - RestKap_{G2}}{pk_{G2}} \right\rceil \cdot (-DS_{G2})$$

Für den Vorfaktor der negativierten Deckungsspanne sind Abschätzungen erstens bezogen auf die Aufrundungsvorschrift und zweitens hinsichtlich der im Minuenden des Zählers enthaltenen Produktmengenerhöhung n des Empfängerfeldes zu treffen. Da die negativierte Deckungsbeitragsänderung optimistisch geschätzt werden soll, ist dieser Vorfaktor insgesamt systematisch zu unterschätzen. Dies geschieht erstens durch Vernachlässigung der Aufrundung und zweitens mittels Aufspaltung des Vorfaktors in zwei Faktoren:

$$\left\lceil \frac{n \cdot pk_{E1} - RestKap_{G2}}{pk_{G2}} \right\rceil \geq \frac{n \cdot pk_{E1} - RestKap_{G2}}{pk_{G2}} \geq n \cdot \frac{pk_{E1} - RestKap_{G2}}{pk_{G2}}$$

Es ergibt sich folgende Abschätzung für die negativierte Deckungsbeitragsänderung des Geberfeldes G2:

$$-DB_{G2}^{schätz+} = n \cdot \frac{pk_{E1} - RestKap_{G2}}{pk_{G2}} \cdot (-DS_{G2})$$

Da die Produktionsmengenerhöhung n des Empfängerfeldes als separater Faktor eingeht, entsteht, analog zur klassischen Schrittsteinmethode, eine lineare Abhängigkeit der negativierten Deckungsbeitragsänderungsschätzung des Geberfeldes von der Produktmengenerhöhung des Empfängerfeldes. Damit ergibt sich die Abschätzung der negativierten Deckungsbeitragsänderung gemeinsam für das Geber- und Empfängerfeld wie folgt:

---

[1] Danach schrumpft der Pfad auf die Felder 321 und 312 zusammen und wird unvorteilhaft, wie aus der obigen Rechnung unter Vernachlässigung des letzten Summanden ableitbar ist.

$$-\overline{DB}_{E1}^{schätz} = n \cdot (-DS_{E1}) - n \cdot \frac{pk_{E1} - RestKap_{G2}}{pk_{G2}} \cdot (-DS_{G2})$$

$$= n \cdot \left(-DS_{E1} - \frac{pk_{E1} - RestKap_{G2}}{pk_{G2}} \cdot (-DS_{G2}) \right)$$

Der hintere Faktor obigen Ausdrucks ist für das Vorzeichen des gesamten Ausdrucks verantwortlich. Somit kann zur Abschätzung einer günstigen oder ungünstigen negativierten Deckungsbeitragsänderung die Produktmengenerhöhung n des Empfängerfeldes vernachlässigt werden. Liegt das Startempfängerfeld E1 an einem ausgelasteten Absatzort, ist diese Abschätzung um die Deckungsspanne des belegten Feldes G3 wegen der Produktmengenverringerung auf diesem Feld zu ergänzen. Dies erfolgt mittels Subtraktion der negativierten Deckungsspanne des Feldes G3. Schließlich gilt es noch, das Feld E4 hinsichtlich seiner aus einer Produktmengenänderung erwachsenden Deckungsbeitragsänderung zu untersuchen. Es handelt sich um ein Empfängerfeld, welches die auf den beiden Geberfeldern G2 und G3 – G2 am selben Produktions- und G3 am selben Absatzort des Startempfängerfeldes E1 – freigesetzten Kapazitäten in Form einer Produktmengenerhöhung aufnimmt. Da ein Empfängerfeld betrachtet wird, kann zumindest teilweise auf die bereits erfolgten Abschätzungen für Empfängerfelder bei offenen Verschiebepfaden zurückgegriffen werden. Das betrachtete Empfängerfeld gehört zum selben Produktionsort wie das Geberfeld G3. Folgende Abschätzung für das Empfängerfeld gilt diesbezüglich:

$$-DB_{E4}^{schätz+} = \frac{pk_{G3} + RestKap_{E4}}{pk_{E4}} \cdot (-DS_{E4})$$

Jedoch läßt diese Abschätzung außer acht, daß das betrachtete Empfängerfeld ebenfalls zum selben Absatzort gehört wie das Geberfeld G2. Somit beeinflußt die von diesem Geberfeld entfernte Produktmenge ebenfalls die mögliche Produktmengenerhöhung des Empfängerfeldes E4. Eine diesbezügliche, im Sinne der Deckungsbeitragsänderung möglichst günstige Abschätzung einer solchen Produktionsmengenerhöhung wird im folgenden hergeleitet. Die für das betrachtete Geberfeld bereits hergeleitete Mengenabschätzung ist hier ungeeignet, da sie, im Sinne einer möglichst optimistischen Schätzung für Geberfelder, eine systematisch zu geringe Produktmengenverringerung ermittelt. Jedoch ist jetzt, im Sinne einer möglichst optimistischen Schätzung für Empfängerfelder, eine systematisch zu große Produktmengenerhöhung zu ermitteln. Damit muß wieder bei der tatsächlichen Produktmengenänderung auf dem Geberfeld G2 angesetzt werden (vgl. $-DB_{G2}$).

Für den Vorfaktor der negativierten Deckungsspanne sind wiederum Abschätzungen zu treffen, allerdings im Gegensatz zur bisher erfolgten Abschätzung nach unten ist hier eine nach oben erforderlich. Darum kann leider auf die Aufrundungsvorschrift nicht verzichtet werden. Aber hinsichtlich der im Minuenden des Zählers enthaltenen Produktionsmengenerhöhung n des Startempfängerfeldes E1 ist eine Aufrundung mittels Aufspaltung und Vernachlässigung eines Teils des Vorfaktors möglich:

$$\left\lceil \frac{n \cdot pk_{E1} - RestKap_{G2}}{pk_{G2}} \right\rceil \le \left\lceil \frac{n \cdot pk_{E1}}{pk_{G2}} \right\rceil \le n \cdot \left\lceil \frac{pk_{E1}}{pk_{G2}} \right\rceil$$

In obigem Ausdruck ist die Produktmenge ein separater Vorfaktor. Somit kann zur Abschätzung einer günstigen oder ungünstigen negativierten Deckungsbeitragsänderung wieder auf die Produktmengenerhöhung n des Empfängerfeldes E1 verzichtet werden. Es ergibt sich folgende möglichst günstige Abschätzung für die negativierte Deckungsbeitragsänderung des Empfängerfeldes E4 auf der Basis der auf eine Mengeneinheit bezogenen Deckungsbeitragsänderungsschätzung des Feldes G2:

$$-DB_{E4}^{schätz*} = \left\lceil \frac{pk_{E1}}{pk_{G2}} \right\rceil \cdot (-DS_{E4})$$

Da die produktmengenbezogenen Deckungsbeitragsabschätzungen bezüglich beider Geberfelder G2 und G3 für das betrachtete Empfängerfeld E4 – quasi als das Kopplungsempfängerfeld zwischen beiden Geberfeldern – relevant sind, müssen sie in die Abschätzung der produktmengenbezogenen Deckungsbeitragsänderung des Feldes E4 einfließen. Beide Geberfelder begrenzen die mit ihrer Kapazitätsfreisetzung zusätzlich dem Empfängerfeld E4 zuweisbare Produktmenge. Entweder wird von dem Geberfeld G2 die Produktmenge so stark verringert, daß auch die Nutzung sämtlicher freigesetzter Produktionskapazitäten des Geberfeldes G3 zuzüglich eventueller Restproduktionskapazitäten durch das koppelnde Empfängerfeld E4 nicht diese Produktmengenverringerung ausgleichen kann (freie Produktionskapazität begrenzt), oder es verbleibt auch nach Produktmengenerhöhung auf dem Empfängerfeld E4 noch von dem Geberfeld G3 freigesetzte Produktionskapazität, da das Geberfeld G2 zu wenig Produktmenge abgegeben hat (freie Produktmenge begrenzt). Als Spezialfall kann es auch gerade zum Ausgleich kommen. Demzufolge ist die den geringeren Wert ergebende Mengenabschätzung relevant und somit das Minimum zu wählen:[1]

$$-DB_{E4}^{schätz+*} = \min\left\{ \frac{pk_{G3} + RestKap_{E4}}{pk_{E4}}, \left\lceil \frac{pk_{E1}}{pk_{G2}} \right\rceil \right\} \cdot (-DS_{E4})$$

Der Schätzer für die negativierte Deckungsbeitragsänderung des Startempfängerfeldes E1 für die Belegung mit einer Produktmengeneinheit ergibt sich aus der Addition und Subtraktion der jeweiligen Größen (negativierte Deckungsspannen oder Schätzer) der Felder des Verschiebepfades:

$$\begin{aligned} -DB_{E1}^{schätz} &= -DS_{E1} - (-DB_{G2}^{schätz}) - (-DS_{G3}) + (-DB_{E4}^{schätz+*}) \\ &= -DS_{E1} - \frac{pk_{E1} - RestKap_{G2}}{pk_{G2}} \cdot (-DS_{G2}) - (-DS_{G3}) \\ &\quad + \min\left\{ \frac{pk_{G3} + RestKap_{E4}}{pk_{E4}}, \left\lceil \frac{pk_{E1}}{pk_{G2}} \right\rceil \right\} \cdot (-DS_{E4}) \end{aligned} \tag{4}$$

Diese Abschätzung gilt jedoch nur, wenn ausschließlich Felder ausgelasteter Absatz- und Produktionsorte zum Verschiebepfad gehören, wenn also bezogen auf die Felder des Ver-

[1] Dies gilt auch für den Spezialfall des Ausgleichs, der dann die Wahl des Minimums aus zwei gleichgroßen Werten vorschreibt.

schiebepfades keine so hohen Restkapazitäten existieren, daß eine Produktmengenerhöhung dort ohne eine Produktmengenverringerung auf allen Geberfeldern des Pfades nicht möglich ist. Ist dies jedoch möglich, so erfolgt eine Entkopplung der Verschiebepfadfelder (im Extremfall wird sogar der einfache geschlossene zu einem einfachen offenen Verschiebepfad) mit entsprechenden Auswirkungen auf die Abschätzvorschrift. Eine andere Entkopplung kann auftreten, wenn auf einem Geberfeld nicht genügend Produktmengeneinheiten vorhanden sind, um, wegen unterschiedlich hoher Produktionskoeffizienten, auf einem zugehörigen Empfängerfeld die Produktmenge auch nur um eine Einheit zu erhöhen. Auch dies beeinflußt die Abschätzvorschrift.

Die im folgenden zu untersuchenden **Entkopplungen** können an jeder Stelle des Verschiebepfades auftreten, wodurch die kausale Abschätzungskette gestört wird. Entkopplungen entstehen erstens immer dann, wenn ein Geberfeld keine Produktmengenverringerung hinnehmen muß, damit auf dem zugehörigen Empfängerfeld eine Produktmengenerhöhung erfolgen kann.[1] Zweitens kann nicht genügend Produktmenge auf einem Geberfeld vorhanden sein, um, wegen der Produktionskoeffizienten auf beiden betroffenen Feldern, das zugehörige Empfängerfeld auch nur mit einer einzigen Mengeneinheit mehr zu belegen. Einfache Verschiebepfade können an vier Stellen einmal entkoppelt werden, nämlich zwischen den Feldern E1 und G2, E1 und G3, G2 und E4, G3 und E4. Es sind aber auch mehrfache Entkopplungen denkbar. Im Extremfall kann die Produktmenge auf E1 ohne Mengenverringerungen auf Geberfeldern erhöht werden. Eine derartige Pfadverkürzung kann aber nicht mehr als geschlossener Pfad angesehen werden. Im hier verwendeten Sinn soll ein einfacher geschlossener Verschiebepfad maximal zwei Entkopplungen und nur an benachbarten Stellen enthalten. Andere oder weitere Entkopplungen bei einfachen geschlossenen Verschiebepfaden führen zu einfachen offenen Pfaden.

Zunächst werden nur einmal entkoppelte Verschiebepfade betrachtet. Während bei der Abschätzformel für einfache geschlossene Verschiebepfade ohne Entkopplungen bisher das dem Startempfängerfeld E1 gegenüberliegende Empfängerfeld E4 als Pfadkopplungsfeld diente, fällt diese Kopplungsfunktion jetzt weg. Ausgehend vom Feld E1 wird in Richtung G2, E4, G3 bis zur Entkopplung abgeschätzt und wenn notwendig zusätzlich gegenläufig beginnend mit Feld G3 in umgekehrter Richtung hin zu E1 ebenfalls bis zur Entkopplung. Befindet sich die Entkopplung zwischen den Feldern G2 und E4 entfällt der Abschätzeinfluß des Feldes G2 auf E4. Somit muß bezogen auf E4 nicht mehr das Minimum aus zwei Werten gewählt werden, und es ergibt sich auf der Basis des Ausdrucks (4) folgende Abschätzvorschrift:

$$-DB_{E1}^{schätz} = -DS_{E1} - \frac{pk_{E1} - RestKap_{G2}}{pk_{G2}} \cdot (-DS_{G2}) - (-DS_{G3}) \qquad (5)$$

$$+ \frac{pk_{G3} + RestKap_{E4}}{pk_{E4}} \cdot (-DS_{E4})$$

[1] Dies tritt ein, wenn entweder ausreichend freie Produktions- oder/und Absatzkapazität am jeweils gemeinsamen Produktions- oder Absatzort beider Felder vorhanden ist.

Liegt die Entkopplung zwischen E4 und G3, entfällt ebenfalls der Minimierungsoperator bei der auf E4 bezogenen Abschätzung. Aber jetzt ist ausschließlich der hintere Term der beiden ursprünglich zur Minimierung heranzuziehenden Ausdrücke zur Abschätzung zu verwenden:

$$-DB_{E1}^{schätz} = -DS_{E1} - \frac{pk_{E1} - RestKap_{G2}}{pk_{G2}} \cdot (-DS_{G2}) - (-DS_{G3}) + \left\lceil \frac{pk_{E1}}{pk_{G2}} \right\rceil \cdot (-DS_{E4}) \qquad (6)$$

Tritt die Entkopplung zwischen E1 und G2 auf, umfaßt die Abschätzung beginnend bei E1 nur dieses Feld und die gegenläufige Abschätzung in geordneter Reihenfolge die Felder G3, E4 und G2. Somit ist für das Geberfeld G2 eine möglichst günstige, also stets zu geringe Abschätzung der Gesamtdeckungsbeitragsverringerung wegen der Produktmengenreduktion vorzunehmen. Die Produktmengenreduktion erfolgt auf G2 in dem Umfang, wie sich die Produktmenge auf E4 erhöht, da beide Felder demselben Absatzort zugeordnet sind. Das Feld G3 gibt jedoch neben der verfügbaren Restkapazität an diesem Produktionsort vor, um wieviel sich die Menge auf E4 erhöht, und es gilt:

$$-DB_{E4} = \left\lfloor \frac{n \cdot pk_{G3} + RestKap_{E4}}{pk_{E4}} \right\rfloor \cdot (-DS_{E4})$$

Der Vorfaktor der negativierten Deckungsspanne ist möglichst günstig, also auf jeden Fall nicht größer als tatsächlich, abzuschätzen:

$$\left\lfloor \frac{n \cdot pk_{G3} + RestKap_{E4}}{pk_{E4}} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n \cdot pk_{G3}}{pk_{E4}} \right\rfloor \geq n \cdot \left\lfloor \frac{pk_{G3}}{pk_{E4}} \right\rfloor$$

Damit ergibt sich eine auf eine Produktmengeneinheit bezogene negativierte Deckungsbeitragsabschätzung für das Geberfeld G2 basierend auf einer Mengenabschätzung des Empfängerfeldes E4:

$$-DB_{G2}^{schätz*} = \left\lfloor \frac{pk_{G3}}{pk_{E4}} \right\rfloor \cdot (-DS_{G2})$$

Schließlich läßt sich folgende negativierte Deckungsbeitragsabschätzvorschrift für das Startempfängerfeld E1 des zwischen E1 und G2 entkoppelten einfachen geschlossenen Verschiebepfades formulieren:

$$-DB_{E1}^{schätz} = -DS_{E1} - (-DS_{G3}) + \frac{pk_{G3} + RestKap_{E4}}{pk_{E4}} \cdot (-DS_{E4}) - \left\lfloor \frac{pk_{G3}}{pk_{E4}} \right\rfloor \cdot (-DS_{G2}) \qquad (7)$$

Die letzte mögliche Entkopplung kann zwischen den Feldern E1 und G3 auftreten. In diesem Fall gibt es nur die von Feld E4 in Richtung Feld G3 laufende Abschätzung. Bis zum Feld E4 verläuft die Abschätzung feldbezogen analog wie bei der Schätzvorschrift (6). Nur für das Feld G3 muß eine Abschätzung verwendet werden, die sich an der Mengenerhöhung auf Feld E4 orientiert und diese als untere Schranke so bestimmt, daß der Deckungsbeitragsverlust auf Feld G3 möglichst optimistisch geschätzt wird. Die tatsächliche Deckungsbeitragsänderung auf Feld E4 läßt sich im hier betrachteten Fall in Abhängigkeit von der Mengenerhöhung auf

Feld E4, die wiederum der Mengenverringerung auf Feld G2 entspricht, darstellen, und es gilt folgendes:

$$-DB_{G3} = \left\lceil \frac{\left\lceil \frac{n \cdot pk_{E1} - RestKap_{G2}}{pk_{G2}} \right\rceil \cdot pk_{E4} - RestKap_{G3}}{pk_{G3}} \right\rceil \cdot (-DS_{G3})$$

Der Mengenvorfaktor ist nun wieder so nach unten abzuschätzen, daß die Produktmenge n, welche die Mengenerhöhung auf Feld E1 repräsentiert, als separater Faktor resultiert:

$$\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{n \cdot pk_{E1} - RestKap_{G2}}{pk_{G2}} \right\rceil \cdot pk_{E4} - RestKap_{G3}}{pk_{G3}} \right\rceil \geq \frac{\frac{n \cdot pk_{E1} - RestKap_{G2}}{pk_{G2}} \cdot pk_{E4} - RestKap_{G3}}{pk_{G3}}$$

$$\frac{\frac{n \cdot pk_{E1} - RestKap_{G2}}{pk_{G2}} \cdot pk_{E4} - RestKap_{G3}}{pk_{G3}} \geq n \cdot \frac{\frac{pk_{E1} - RestKap_{G2}}{pk_{G2}} \cdot pk_{E4} - RestKap_{G3}}{pk_{G3}}$$

Somit kann die auf eine Produktmengeneinheit des Feldes E1 bezogene Deckungsbeitragsänderung auf Feld G3 mit Hilfe dieses Ausdrucks optimistisch abgeschätzt werden:

$$-DB_{G3}^{schätz*} = \frac{\frac{pk_{E1} - RestKap_{G2}}{pk_{G2}} \cdot pk_{E4} - RestKap_{G3}}{pk_{G3}} \cdot (-DS_{G3})$$

Als Abschätzformel der Deckungsbeitragsänderung für den entkoppelten einfachen geschlossenen Verschiebepfad bezogen auf Feld E1 ergibt sich demzufolge:

$$-DB_{E1}^{schätz} = -DS_{E1} - \frac{pk_{E1} - RestKap_{G2}}{pk_{G2}} \cdot (-DS_{G2}) + \left\lceil \frac{pk_{E1}}{pk_{G2}} \right\rceil \cdot (-DS_{E4}) \tag{8}$$

$$- \frac{\frac{pk_{E1} - RestKap_{G2}}{pk_{G2}} \cdot pk_{E4} - RestKap_{G3}}{pk_{G3}} \cdot (-DS_{G3})$$

Mit Hilfe der vier hergeleiteten Schätzvorschriften läßt sich der noch nicht untersuchte einmal entkoppelte einfache Verschiebepfad analysieren. Der zum E1-Feld 212 gehörende Pfad läßt sich dem Fall der Abschätzformel (8) zuordnen, und die Berechnung liefert:

$$-DB_{E1_{212}}^{schätz} = -9 - \frac{15-0}{6} \cdot (-12) + \left\lceil \frac{15}{6} \right\rceil \cdot (-9) - \frac{\frac{15-0}{6} \cdot 10 - 7}{9} \cdot (-3) = 0 \quad GE/ME$$

Es verbleibt schließlich ein einfacher geschlossener Verschiebepfad, der jedoch zweimal entkoppelt ist. Konkret handelt es sich um den Pfad mit dem Startempfängerfeld 121. Da die Entkopplungen zwischen den Feldern 121 (= E1) und 112 (= G1) einerseits und zwischen den Feldern 112 und 312 (= E4) andererseits liegen, ist das Feld 112 vollständig entkoppelt. Es braucht hier nicht berücksichtigt zu werden, weswegen der einfache geschlossene Verschiebepfad zu dem bereits untersuchten einfachen offenen Verschiebepfad des Geberfeldes 321 zu den Empfängerfeldern 312 und 121 degeneriert. Die Abschätzung für diesen einfachen offenen Verschiebepfad hat schon eine eventuelle Vorteilhaftigkeit einer Produktmengenverlagerung ergeben.

Damit ist die Abschätzung einfacher Verschiebepfade beendet. Es bleibt festzuhalten, daß die Verlagerungen von Produktmengen auf die Felder 121 und 312 potentiell lohnend erscheint, wobei allerdings nur maximal eine Produktmengeneinheit verlagert werden kann, da der Produktionsort 1 dadurch ausgelastet wird.

Nach der klassischen Schrittsteinmethode sind vor der Auswahl des besten Verschiebepfades zur Mengenverlagerung erst sämtliche, also insbesondere auch längere Pfade auf ihre Vorteilhaftigkeit hin zu überprüfen.[1] Diesem Prinzip soll hier jedoch nicht gefolgt werden, denn, wie noch deutlich werden wird, es kann der Rechenaufwand zum Auffinden der Optimallösung u. U. recht stark reduziert werden, wenn die bis hierher gefundenen potentiell erfolgreichen Verschiebepfade zunächst hinsichtlich der jeweils höchsten **Deckungsbeitragssteigerungsmöglichkeit** untersucht werden. Im Gegensatz zur Schrittsteinmethode, bei der sofort die maximal mögliche Mengenverschiebung auf dem stückbezogen günstigsten einfachen Verschiebepfad zu realisieren wäre, ist diese Analyse notwendig, weil die Ganzzahligkeitsbedingungen des Problems keine Entscheidungen auf Basis von Grenzdeckungsbeitragsänderungen zulassen. Vielmehr müssen die aus den möglichen Mengenverschiebungen der erfolgversprechenden Verschiebepfade tatsächlich resultierenden Deckungsbeitragsänderungen ermittelt werden. Aus diesen ist die Mengenverschiebung mit der höchsten Deckungsbeitragssteigerung auszuwählen und zu realisieren und das Procedere des ersten Optimierungsschrittes so lange zu wiederholen, bis keine Deckungsbeitragsverbesserungen durch einfache Verschiebepfade mehr erreicht werden können. Resultat dieser Methode ist eine zulässige Lösung, die im nächsten Optimierungsschritt mit Hilfe von komplexen offenen und geschlossenen Verschiebepfaden weiter verbessert werden soll. Schließlich wird unter der Voraussetzung vorhandener Verschiebemöglichkeiten die Mengenverlagerung auf einem komplexen Verschiebepfad realisiert, welche die stärkste Deckungsbeitragserhöhung bewirkt, und es wird mit der Untersuchung einfacher Verschiebepfade zum vorherigen Optimierungsschritt zurückgekehrt. Dieses Vorgehen wiederholt sich so lange, bis keine Deckungsbeitragssteigerungsmöglichkeit mehr gefunden werden kann.

Bezogen auf die klassische Schrittsteinmethode entspräche dieses Vorgehen der vorgezogenen Untersuchung von Vierfeldverschiebepfaden mit anschließender maximaler Mengenverschiebung auf dem stückbezogen erfolgreichsten. Längere Verschiebepfade würden erst untersucht, wenn keine günstigen Vierfeldpfade mehr vorhanden sind. Nach Verschiebung auf einem längeren Pfad sind erst wieder die Vierfeldpfaduntersuchungen notwendig, bevor erneut die längeren Pfade analysiert werden. Bringt kein einziger Verschiebepfad mehr günstige

[1] Die längeren Verschiebepfade werden im folgenden Unterkapitel den komplexen Verschiebepfaden zugeordnet.

Resultate, ist das Optimum gefunden. Dieses Procedere gelangt auch zum Optimum, da der finale Optimaltest identisch ist mit der unmodifizierten Schrittsteinmethode, allerdings können mehr benutzte Verschiebepfade notwendig sein. Das gestufte Verfahren ist also weniger effizient.

Jedoch gilt die letzte Aussage nicht für das hier entwickelte Verfahren, denn die Ermittlung der potentiellen Vorteilhaftigkeit basiert zu einem Großteil auf Abschätzungen. Mit zunehmender Länge der Verschiebepfade werden die Schätzungen schlechter, da einzelfeldbezogen mit zunehmender Ungenauigkeit abgeschätzt wird. Somit liefern kürzere Schätzpfade validere Ergebnisse, wodurch letztlich weniger tatsächliche probeweise Mengenverschiebungen auf verschiedenen Pfaden zur Ermittlung der höchsten Deckungsbeitragssteigerung durchgeführt werden müssen. Es ist also, wenn möglich, sinnvoller, statt einer Mengenverlagerung auf einem komplexen Pfad mehrere Verschiebungen auf einfachen Pfaden mit schließlich identischem Endergebnis durchzuführen.

Für die beiden potentiell günstigen Verschiebepfade von den Startgeberfeldern 312 und 321 ist jetzt einerseits jeweils die tatsächliche Vorteilhaftigkeit zu prüfen und andererseits für den Pfad von Feld 312 bei Vorteilhaftigkeit die günstigste Mengenverschiebung zu ermitteln. Auf dem Pfad von Feld 321 kann nur eine Mengeneinheit verlagert werden. Als exakte Berechnungen ergeben sich für die beiden Pfade in Abhängigkeit von der Mengenreduzierung n des Geberfeldes G1:

$$\begin{aligned} -DB_{E1_{312}} &= -n \cdot (-DS_{G1_{312}}) + \left\lfloor \frac{n \cdot pk_{G1_{312}} + RestKap_{E2_{311}}}{pk_{E2_{311}}} \right\rfloor \cdot (-DS_{E2_{311}}) \\ &= -n \cdot (-3) + \left\lfloor \frac{n \cdot 9 + 7}{10} \right\rfloor \cdot (-2) \end{aligned}$$

Es gibt grundsätzlich zwei Möglichkeiten zu prüfen, ob diese Vorschrift für irgendein n zwischen 1 und 27 ein negatives Ergebnis liefern kann. Einerseits können alle Werte eingesetzt und die zugehörigen Ergebnisse berechnet werden. Andererseits kann aber auch allgemein ermittelt werden, ob überhaupt ein negatives Ergebnis möglich ist. Dieser zweite Weg soll hier gewählt werden. Wenn gezeigt werden kann, daß der hintere abzurundende Ausdruck im zu untersuchenden Bereich niemals größer als n sein kann, ist ein negatives Gesamtergebnis ausgeschlossen, da bereits die Differenz aus dem dreifachen n und dem doppelten n nie negativ sein kann. Somit ist zu zeigen:

$$\left\lfloor \frac{n \cdot 9 + 7}{10} \right\rfloor \leq n$$

Dies gilt, wenn für den Term im Abrundungsoperator gilt:

$$\frac{n \cdot 9 + 7}{10} < n + 1$$

Die Ungleichung kann umgeformt werden:

$$\frac{n \cdot 9 + 7}{10} < n + 1 \;\Leftrightarrow\; 0{,}9 \cdot n + 0{,}7 < n + 1 \;\Leftrightarrow\; -0{,}3 < 0{,}1 \cdot n \;\Leftrightarrow\; -3 < n$$

Da n nur zwischen 0 und 27 zulässig ist und somit insbesondere nicht kleiner als –3 werden kann, ist eine Deckungsbeitragserhöhung durch eine Mengenverlagerung auf diesem Verschiebepfad ausgeschlossen.

Schließlich ist noch der offene Verschiebepfad von Feld 321 zu untersuchen. Da dort nur eine Verschiebung von maximal einer Mengeneinheit möglich ist, bietet sich die exakte Berechnung mit n=1 an:

$$-DB^{n=1}_{G1_{321}} = -(-DS_{G1_{321}}) + \left\lfloor \frac{pk_{G1_{321}} + RestKap_{E2_{312}}}{pk_{E2_{312}}} \right\rfloor \cdot (-DS_{E2_{312}}) + (-DS_{E3_{121}})$$

$$= -(-9) + \left\lfloor \frac{10+7}{9} \right\rfloor \cdot (-3) + (-7) = -1 \quad \text{GE}$$

Somit bewirkt die Verschiebung einer Mengeneinheit auf dem einfachen offenen Verschiebepfad entweder von Startgeberfeld 321 zu den Feldern 312 und 121 oder von Startgeberfeld 221 zu den Feldern 211 und 121 eine Deckungsbeitragserhöhung um eine Geldeinheit. Welche Verschiebung genutzt wird, ist gleichgültig. Hier wird der letztgenannte Verschiebepfad genutzt und auf das bereits mit einer Null belegte Feld eine Produktmengeneinheit verlagert.

Als neues Tableau mit eingezeichneten neu entstandenen einfachen offenen und geschlossenen Verschiebepfaden ergibt sich:

	Produkt 1				Produkt 2				Restprod.-kapazität
	Absatzort 1		Absatzort 2		Absatzort 1		Absatzort 2		
Prod.-ort 1	-	1 7	1	–7 7	6	–4 12	10	–8 12	1
Prod.-ort 2	1	–6 6	24	–12 6	-	–9 15	-	–7 15	0
Prod.-ort 3	-	–2 10	5	–9 10	27	–3 9	-	–1 9	7
Restabsatzkap.	19		0		17		0		

Wegen der Neubelegung eines Feldes[1] hat sich das Tableau zu einem überbestimmten gewandelt, wodurch jetzt prinzipiell *zwei* geschlossene Verschiebepfade für jedes probeweise einzulastende nicht belegte Feld existieren.[2] Weiterhin ist ein Verschiebepfad aus nur belegten Feldern entstanden. Zur Verdeutlichung, daß auf diesem Pfad grundsätzlich Verlagerungen sowohl von jedem als auch auf jedes Feld erfolgen können, wurden Doppelpfeile im Tableau verwendet, wobei eine tatsächliche Mengenerhöhung auf Feld 112 allerdings nicht

[1] Genau genommen sind sogar zwei Felder neu belegt worden, aber wegen der Unterbestimmung des vorherigen Tableaus wurde ja bereits das Feld 211 mit einer Null besetzt. Deswegen wird dieses Feld jetzt nicht als neu besetztes angesehen.

[2] Es müssen allerdings nicht in jedem Falle einfache Verschiebepfade sein.

möglich ist.[1] Im Tableau sind zur Wahrung einer gewissen Übersichtlichkeit nur neu entstandene einfache Verschiebepfade eingezeichnet. Von den bereits vor der Mengenverschiebung identifizierten Verschiebepfaden sind der offene von Feld 122 zu 112 und die geschlossenen auf die Felder 212, 311 und 322 ebenfalls noch zulässig. Allerdings gelten auf den betroffenen Feldern identische oder restproduktionskapazitätsbezogen sogar teilweise verschärfte Bedingungen im Vergleich zur Situation vorher, weswegen diese Pfade unvorteilhaft geblieben sind.

Unter den neu entstandenen einfachen Verschiebepfaden sind vier offene, die alle, bezogen auf die Situation vor der Verkürzung, aus offenen Verschiebepfaden entstanden sind, die auch eine Mengenverlagerung auf Feld 121 beinhalteten. Da diese Verschiebemöglichkeit wegen zu geringer Restproduktionskapazität am Produktionsort 1 nicht mehr besteht, können die Deckungsbeitragswirkungen bezogen auf eine Mengenverschiebung auf diesen kürzeren offenen Verschiebepfaden keinesfalls günstiger geworden sein. Demzufolge sind Mengenverschiebungen auf den einfachen offenen Pfaden von den Feldern 221 und 321 mit Ausnahme der Verlagerung auf Feld 211 auf jeden Fall ungünstig. Der Verschiebepfad von Feld 221 zu 211 ist deswegen noch zu untersuchen, da vorher gemeinsam mit dem Feld 121 eine Mengenverlagerung zu einer Deckungsbeitragssteigerung geführt hat. Da sich beide Felder auf die gleiche Produktart beziehen und Produktionsort 2 bezüglich dieser Produktart ausgelastet ist, ist keine Deckungsbeitragsänderungsschätzung notwendig. Nach Berechnungsvorschrift (1) ergibt sich aus der Addition der negativierten Deckungsspanne des Feldes 211 zur doppelt negativierten Deckungsspanne des Feldes 221 ein Wert von 6 GE/ME, welcher eine ungünstige Deckungsbeitragsänderung bei der Verlagerung einer Produktmengeneinheit entlang des Pfades bedeutet und insgesamt anzeigt, daß der Pfad nicht zu nutzen ist.

Für die anderen im obigen Tableau eingezeichneten Pfade sind wieder Abschätzungen vorzunehmen, um mit Sicherheit ungünstige Pfade ausschließen zu können. Zunächst werden die geschlossenen Verschiebepfade auf die Felder 222 und 322 untersucht. Da diese Pfade keinerlei Entkopplungen aufweisen, ist Abschätzung (4) zu verwenden. Bezogen auf den geschlossenen Verschiebepfad auf Feld 212 ist wegen der Entkopplung zwischen den Feldern 212 (= E1) und 112 (= G3) Schätzvorschrift (8) zu nutzen. Nach den bereits aufgezeigten Berechungsvorschriften ergeben sich folgende auf eine Mengeneinheit bezogene geschätzte negativierte Deckungbeitragsänderungen:

Startfeld	222	322	212
–DB geschätzt [GE/ME]	18	1,8	5,5

Bei den beiden geschlossenen Verschiebepfaden über die ausschließlich bereits belegten Felder kann prinzipiell jedes Feld des Pfades als Startempfängerfeld angesehen werden. Allerdings reicht es natürlich aus, sich jeweils nur eines herauszugreifen und die Mengenverschie-

[1] Deshalb ist die rechte Hälfte des Pfeils von Feld 121 zu diesem Feld hin gestrichelt dargestellt. Weiterhin ist der komplette Doppelpfeil zwischen den Feldern 112 und 312 unterbrochen gezeichnet, weil beide Felder wegen der absatzbezogenen Unterauslastung dort generell entkoppelt sind.

bung aus dessen Perspektive zu analysieren.[1] Wird für einen der beiden Verschiebepfade das Feld 121 als Startempfängerfeld E1 gewählt, so ergibt sich wegen der Entkopplung dieses Pfades zwischen den Feldern 112 (= G2) und 312 (= E4) die zu treffende Abschätzung nach Vorschrift (5). Der andere Verschiebepfad ist zweimal entkoppelt, wodurch sich ein Pfad nur bestehend aus den Feldern 121, 321 und 312 ergibt, mit 321 als einzigem Empfängerfeld. Für den Verschiebepfad auf das Feld 111 gilt analoges, denn für das Feld 111 gilt eine positive negativierte Deckungsspanne, weswegen die Mengenbelegung bereits generell ausgeschlossen wurde. Dies allein rechtfertigt schon die vollständige Entkopplung dieses Feldes vom zugehörigen Verschiebepfad.[2] Einziges verbleibendes Empfängerfeld dieses Pfades ist das Feld 221. Die negativierten Deckungsbeitragsänderungen beider letztgenannter Verschiebepfade lassen sich unter Vernachlässigung der jeweiligen Berechnung für Feld E4 ermitteln, wenn für den Pfad auf Feld 321 Schätzung (4) und für den Pfad auf Feld 221 Vorschrift (2) zur exakten Berechnung verwendet wird.[3] Wieder tabellarisch dargestellt, errechnen sich diese Werte negativierter Deckungsbeitragsänderungen:

Startfeld	121	321	221
–DB [GE/ME]	–1 ⅔ (geschätzt)	–1 (geschätzt)	1 (exakt)

Die Abschätzungen zweier Verschiebepfade haben potentielle Deckungsbeitragssteigerungen angezeigt. Allerdings ist an dieser Stelle schon festzuhalten, daß höchstens die Nutzung einer der beiden Verschiebepfade günstig sein wird, denn es handelt sich bei den beiden Pfaden um die auf die vier besetzten Felder bezogenen Pfade. Somit sind also zumindest drei Felder Bestandteil beider Pfade, jedoch einmal als Geber- und einmal als Empfängerfeld.[4] Wären beide Pfade günstig, könnten sie ununterbrochen hintereinander genutzt werden, und eine unsinnige Steigerung des Deckungsbeitrags ins Unendliche ergäbe sich. Im folgenden werden die beiden Verschiebepfade hinsichtlich ihrer exakten Deckungsbeitragsänderungen bei Mengenverlagerungen untersucht.

Auf das Startempfängerfeld 121 können maximal 5 Produktmengeneinheiten verlagert werden. Die aus der Mengenverlagerung resultierende Deckungsbeitragsänderung errechnet sich in Abhängigkeit von der verlagerten Menge n nach folgender Vorschrift:

---

[1] Dies gilt selbstverständlich nur für Felder, die auf dem gerade betrachteten Pfad nicht vollständig entkoppelt, sondern mit den anderen Pfadfeldern verbunden sind. So ist es beispielsweise unsinnig, Feld 112 als Startempfängerfeld zu wählen, weil es erstens an einem unterausgelasteten Absatzort liegt und zweitens, wegen der Belegung des Feldes 121 mit nur einer Mengeneinheit und diesbezüglich zu geringem Produktionskoeffizienten, keine Mengenverlagerungen von diesem Feld auf das Feld 112 möglich sind.

[2] Es gibt sogar noch eine andere, physische Entkopplung des Feldes 111 vom Feld 211: die Unterauslastung des Absatzortes 1 bezüglich des Produktes 1.

[3] Eine exakte Berechnung ist für den Pfad auf Feld 221 deswegen möglich, weil sämtliche Felder des Pfades ausschließlich auf Produkt 1 bezogen sind.

[4] In diesem speziellen Fall sind nur drei und nicht alle vier Felder Bestandteil beider Pfade, da Feld 112 nicht als Empfängerfeld fungieren kann, denn auf Feld 121 befindet sich nur eine Produktmengeneinheit. Der Verzicht auf diese Mengeinheit liefert in Verbindung mit der Restproduktionskapazität am Produktionsort jedoch nicht genügend Kapazität zur Belegung des Feldes 112 mit einer Produktmengeneinheit.

$$
\begin{aligned}
-DB_{E1_{121}} &= n \cdot (-DS_{E1_{121}}) - \left\lceil \frac{n \cdot pk_{E1_{121}} - RestKap_{G2_{112}}}{pk_{G2_{112}}} \right\rceil \cdot (-DS_{G2_{112}}) - n \cdot (-DS_{G3_{321}}) \\
&\quad + \left\lfloor \frac{n \cdot pk_{G3_{321}} + RestKap_{E4_{312}}}{pk_{E4_{312}}} \right\rfloor \cdot (-DS_{E4_{312}}) \\
&= n \cdot (-7) - \left\lceil \frac{n \cdot 7 - 1}{12} \right\rceil \cdot (-4) - n \cdot (-9) + \left\lfloor \frac{n \cdot 10 + 7}{9} \right\rfloor \cdot (-3)
\end{aligned}
$$

Werden für n die möglichen Mengen 1 bis 5 eingesetzt, resultieren folgende negativierten Deckungsbeitragsänderungen:

n_{121}	1	2	3	4	5
$-DB_{E1_{121}}$ [GE]	3	3	2	5	4

Wegen der Belegung des Feldes 121 mit nur einer Produktmengeneinheit kann die Menge auf Empfängerfeld 321 des nächsten zu untersuchenden Pfades auch nur um eine Einheit erhöht werden. Die exakte Berechung für die Verlagerung ergibt:

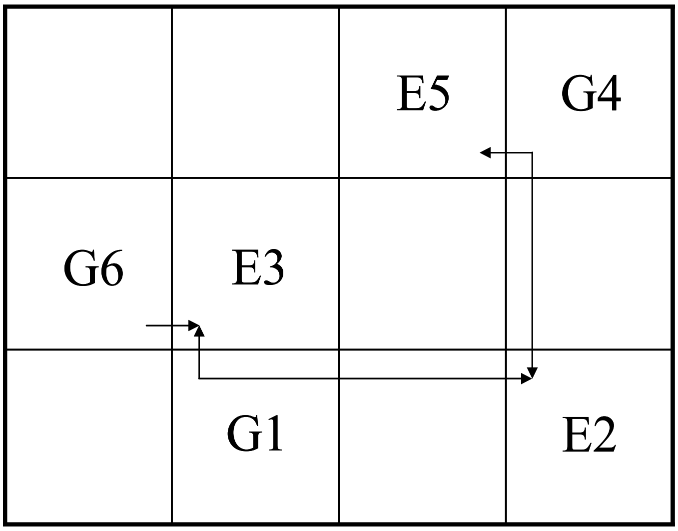
$$
\begin{aligned}
-DB_{E1_{321}}^{n=1} &= -DS_{E1_{321}} - \left\lceil \frac{pk_{E1_{321}} - RestKap_{G2_{312}}}{pk_{G2_{312}}} \right\rceil \cdot (-DS_{G2_{312}}) - (-DS_{G3_{121}}) \\
&= -9 - \left\lceil \frac{10-7}{9} \right\rceil \cdot (-3) - (-7) = 1
\end{aligned}
$$

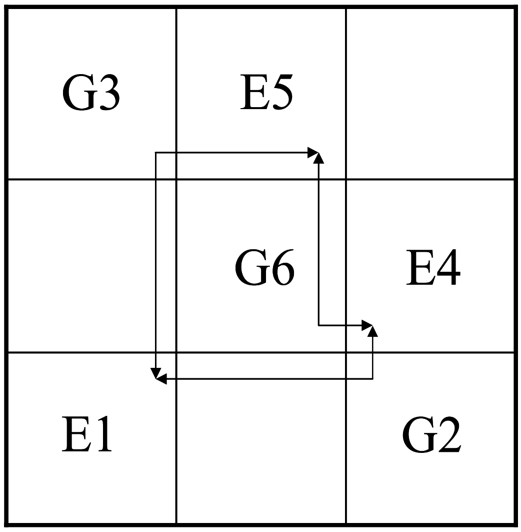
Unter Berücksichtigung der für die beiden Pfade erhaltenen Ergebnisse läßt sich feststellen, daß keine Gesamtdeckungsbeitragssteigerung auf der Basis einfacher Verschiebepfade mehr möglich ist. Allerdings existieren auch noch längere, nicht untersuchte sowohl offene als auch geschlossene Pfade, die im folgenden als „komplexe" Pfade thematisiert werden.

3.3.3 Zweiter Optimierungsschritt - komplexe offene und geschlossene Pfade

Analog zur Schrittsteinmethode lassen sich auch für das vorliegende Problem längere Verschiebefade bilden als die bisher behandelten. Dies gilt sowohl für offene, folglich mit einem Geberfeld beginnende, als auch geschlossene, also mit einem Empfängerfeld startende, nicht entkoppelte und entkoppelte Pfade.

Komplexe offene Verschiebepfade enden nicht am auf das Startgeberfeld folgenden Empfängerfeld, sondern daran anschließend gibt es mindestens ein weiteres Geberfeld. Wenn diese Pfade jedoch mehr als zwei Geberfelder enthalten, wird zur Abschätzung keines der äußeren Geberfelder als Startgeberfeld verwendet, sondern eines der möglichst weit in der Mitte liegenden, um keine der beiden vom Startgeberfeld ausgehenden Abschätzstränge unnötig lang werden zu lassen.[1] Auch bei komplexen geschlossenen Verschiebepfaden existiert wenigstens jeweils ein Geber- und Empfängerfeld mehr, wodurch grundsätzlich geringstenfalls sechs Felder, freilich mit Entkopplungsmöglichkeiten, einbezogen sind. In Abhängigkeit vom behandelten Problem ergibt sich die Maximalzahl der zu einem geschlossenen Pfad gehörigen Felder als das verdoppelte Minimum über die Zeilen- und Spaltenzahl des zugehörigen Tableaus, wobei die Kopf- und Fußspalten und -zeilen nicht mitzuzählen sind. Für das hier betrachtete Beispiel kann es somit komplexe geschlossene Pfade mit höchstens sechs Feldern geben, da das Tableau im obigen Sinne aus drei Zeilen und vier Spalten besteht. Dementsprechend werden die zu treffenden Abschätzungen auch nur bis zu dieser Felderzahl hergeleitet. Die für größere Probleme zu verwendenden Abschätzungen ergeben sich dann in Fortführung der hier aufgezeigten Bildungsschemata. Wieder beispielhaft im Sinne von Referenzpfaden sollen ein komplexer offener (links) und geschlossener (rechts) Verschiebepfad mit jeweils zugehöriger Feldbenennung graphisch dargestellt werden:[2]





So wie der offene Verschiebepfad hier aufgeführt ist, existiert beim Feld E5 eine Unterauslastung des Absatzortes; ohne diese endete der Pfad mit G4. Er kann aber auch noch länger sein, wenn es einerseits vor G6 noch ein Empfängerfeld am die gleiche Produktart betreffenden identischen Absatzort und/oder andererseits noch weitere Geber- und Empfängerfelder hinter E5 gibt, ohne dabei einen geschlossenen Pfad entstehen zu lassen. Sowohl für den offenen als auch den geschlossenen Pfad wird hierbei von keinerlei relevanten Entkopplungen ausgegangen.[3]

Zunächst ist wieder eine Abschätzvorschrift für den Fall eines **komplexen offenen Verschiebepfades** zu entwickeln. Dafür kann bis zum Feld E2 der Schätzausdruck eines einfachen

---

[1] Jede Verlängerung eines Abschätzstranges erhöht die mit seiner Abschätzung verbundene Ungenauigkeit, da sich seine Abschätzung aus den einzelfeldbezogenen Schätzungen zusammensetzt.

[2] Obwohl es natürlich auch andere Verlaufsmöglichkeiten von komplexen offenen und geschlossenen Verschiebepfaden gibt, sind diese beiden Darstellungen als Referenzen in der Weise zu verstehen, daß die Bezeichnungen der einzelnen Felder sich stets an diesen orientieren.

[3] Dabei ist zu beachten, daß relevante Entkopplungen den offenen Verschiebepfad schlicht und einfach verkürzen, weswegen es genaugenommen unsinnig ist, hier überhaupt von relevanten Entkopplungen zu sprechen.

offenen Pfades genutzt werden. Für die folgenden Felder sind erneut Abschätzungen vorzunehmen. Die Deckungsbeitragsänderung des Feldes G4 ist wieder systematisch zu unterschätzen. Prinzipiell hängt diese Veränderung von der zusätzlichen Menge auf Feld E2 ab, welche sich nach untenstehendem Ausdruck in Abhängigkeit von der Mengenänderung n auf G1 ergibt:

$$n_{E2} = \left\lfloor \frac{n + \mathrm{RestKap}_{E2}}{pk_{E2}} \right\rfloor$$

Eine Abschätzung kann wie folgt vorgenommen werden:

$$\left\lfloor \frac{n \cdot pk_{G1} + \mathrm{RestKap}_{E2}}{pk_{E2}} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n \cdot pk_{G1}}{pk_{E2}} \right\rfloor \geq n \cdot \left\lfloor \frac{pk_{G1}}{pk_{E2}} \right\rfloor$$

Als optimistische auf eine Produktmengeneinheit des Feldes G1 bezogene negativierte Deckungsbeitragsabschätzung des Feldes G3 wird somit nachstehender Ausdruck verwendet:

$$-DB_{G4}^{\text{schätz*}} = \left\lfloor \frac{pk_{G1}}{pk_{E2}} \right\rfloor \cdot (-DS_{G4})$$

Für das hinter G4 liegende Empfängerfeld E5 muß eine systematische Überschätzung erfolgen, wobei die Produktmengenänderung durch das Feld G4 mitbestimmt wird. Die tatsächliche Mengenänderung dieses Feldes wurde gerade thematisiert. Für die Mengenänderung auf Feld E5 gilt:

$$\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n \cdot pk_{G1} + \mathrm{RestKap}_{E2}}{pk_{E2}} \right\rfloor \cdot pk_{G4} + \mathrm{RestKap}_{E5}}{pk_{E5}} \right\rfloor \leq \frac{\frac{n \cdot pk_{G1} + \mathrm{RestKap}_{E2}}{pk_{E2}} \cdot pk_{G4} + \mathrm{RestKap}_{E5}}{pk_{E5}}$$

$$\frac{\frac{n \cdot pk_{G1} + \mathrm{RestKap}_{E2}}{pk_{E2}} \cdot pk_{G4} + \mathrm{RestKap}_{E5}}{pk_{E5}} \leq n \cdot \frac{\frac{pk_{G1} + \mathrm{RestKap}_{E2}}{pk_{E2}} \cdot pk_{G4} + \mathrm{RestKap}_{E5}}{pk_{E5}}$$

Also kann für die auf eine Mengeneinheit des Feldes G1 bezogene negativierte Deckungsbeitragsänderung des Feldes E5 geschätzt werden:

$$-DB_{E5}^{\text{schätz*}} = \frac{\frac{pk_{G1} + \mathrm{RestKap}_{E2}}{pk_{E2}} \cdot pk_{G4} + \mathrm{RestKap}_{E5}}{pk_{E5}} \cdot (-DS_{E5})$$

Der zweite Abschätzstrang von Startgeberfeld G1 verläuft über die Felder E3 und G6. Hierbei ist keine Abschätzung für Feld E3 notwendig, da die Mengenabnahme auf Feld G1 identisch ist mit der Mengenzunahme auf Feld E3. Bezogen auf das sich anschließende Geberfeld G6 kann auf die Abschätzung des Feldes G2 bei einfachen offenen Verschiebepfaden zurückgegriffen werden. In Übertragung dieser Schätzung kann für Feld G6 abgeschätzt werden, wenn die Produktmenge auf Feld G1 um eine Einheit verringert wird:[1]

$$-\,DB_{G6}^{schätz*} = \frac{pk_{E3} - RestKap_{G6}}{pk_{G3}} \cdot (-DS_{G6})$$

Die negativierte Deckungsbeitragsschätzung des gesamten offenen Verschiebepfades ergibt sich als Zusammenführung der Einzelschätzungen, wobei diese für Empfängerfelder addiert und für Geberfelder subtrahiert werden:

$$\begin{aligned} -\,DB_{G1}^{schätz} = &-(-DS_{G1}) + \frac{pk_{G1} + RestKap_{E2}}{pk_{E2}} \cdot (-DS_{E2}) - \left\lfloor \frac{pk_{G1}}{pk_{E2}} \right\rfloor \cdot (-DS_{G4}) \\ &+ \frac{\dfrac{pk_{G1} + RestKap_{E2}}{pk_{E2}} \cdot pk_{G4} + RestKap_{E5}}{pk_{E5}} \cdot (-DS_{E5}) + (-DS_{E3}) \\ &- \frac{pk_{E3} - RestKap_{G6}}{pk_{G3}} \cdot (-DS_{G6}) \end{aligned} \tag{9}$$

Für größere komplexe offene Verschiebepfade verlängert sich die Abschätzung, wobei für die Feldeinzelschätzungen analog zum gerade dargestellten Vorgehen vorgegangen werden muß. Daraus wird ersichtlich, daß die Qualität der Abschätzungen mit zunehmender Länge immer schlechter wird, da die Einzelschätzungen für auf dem Verschiebepfad weit hinten liegende Felder immer ungenauer werden. Dies trifft ebenso für die komplexen geschlossenen Pfade zu. Deswegen sind auch vor der Berücksichtigung der komplexen Verschiebepfade sämtliche einfache Pfade hinsichtlich ihrer Vorteilhaftigkeit zu prüfen und ggf. zu nutzen.

Bezieht sich im obigen offenen Verschiebepfad das Feld E2 auf die gleiche Produktart wie Feld G1, braucht für dieses Feld keine Abschätzung zu erfolgen, sondern es kann die tatsächliche Änderung verwendet werden. Dies gilt dann auch für das Feld G4. Analoges gilt für das Feld G6 bezogen auf Feld E3. Erst wenn ein Feld des Verschiebepfades auf eine andere Produktart bezogen ist, muß mit den Abschätzungen begonnen werden. Angenommen, Feld E5 ist im obigen Ausdruck das erste auf ein anderes Produkt bezogene Feld, dann kann der im Zähler stehende Bruch des Schätzausdrucks dieses Feldes vernachlässigt werden, weil bis dahin überall jeweils genau eine Mengeneinheit verlagert wurde.

Auch für den **komplexen geschlossenen Verschiebepfad** ist eine Abschätzungsformel herzuleiten. Hierfür können zwei bereits gefundene Schätzausdrücke zu Hilfe genommen werden. Beides sind Abschätzungen für entkoppelte einfache geschlossene Pfade. Konkret handelt es sich um die Abschätzungen (8) und (7). Bei erstgenannter Abschätzung befindet sich die Entkopplung zwischen den Feldern E1 und G3 und bei zweitgenannter zwischen den Feldern E1 und G2. Bezogen auf den hier vorliegenden Fall dient das Geberfeld G6 als Kopplungsfeld, weswegen jetzt nicht das Minimum, sondern das Maximum über die beiden Schätzgrößen der Felder E4 und E5 gebildet werden muß. Werden also die beiden Schätzausdrücke (8) und (7)

[1] Dies bedeutet gleichzeitig, daß sich die Produktmenge auf E3 um eine Mengeneinheit erhöht.

im Sinne von zwei Abschätzsträngen an die Feldbenennung bei komplexen geschlossenen Verschiebepfaden angepaßt und vereinigt mit dem Feld G6 als Kopplungsfeld, gilt folgende Schätzformel:

$$-DB_{E1}^{schätz} = -DS_{E1} - \frac{pk_{E1} - RestKap_{G2}}{pk_{G2}} \cdot (-DS_{G2}) + \left\lceil \frac{pk_{E1}}{pk_{G2}} \right\rceil \cdot (-DS_{E4}) \tag{10}$$

$$- (-DS_{G3}) + \frac{pk_{G3} + RestKap_{E5}}{pk_{E5}} \cdot (-DS_{E5})$$

$$- \max \left\{ \frac{\frac{pk_{E1} - RestKap_{G2}}{pk_{G2}} \cdot pk_{E4} - RestKap_{G6}}{pk_{G6}}, \left\lfloor \frac{pk_{G3}}{pk_{E5}} \right\rfloor \right\} \cdot (-DS_{G6})$$

Solange sich auch hierbei die jeweils betroffenen Felder auf das gleiche Produkt beziehen wie das Startempfängerfeld, sind keine feldbezogenen Abschätzungen notwendig, sondern es wird jeweils die eine Mengeneinheit des Feldes E1 verlagert.

Wenn der geschlossene Verschiebepfad noch mehr Felder umfassen sollte, verlängert sich auch die Abschätzung, wobei das Kopplungsfeld stets eines der am weitesten vom Startempfängerfeld gelegenen Felder ist, damit die Abschätzstränge wegen des zunehmenden Fehlers möglichst kurz gehalten werden. Bei einem Acht-Felder-Verschiebezyklus ist das Kopplungsfeld wieder ein Empfängerfeld, bei zehn Feldern ein Geberfeld usw. Zur Bildung der Schätzvorschriften kann auf die noch zu untersuchenden Entkopplungsabschätzungen für den Sechs-Felder-Fall zurückgegriffen werden.

Es können wieder **einmalige und zweimalige Entkopplungen** auftreten, wobei die zweimaligen dazu führen, daß Teile des geschlossenen Verschiebepfades für die Untersuchungen irrelevant werden und sich die Abschätzungen aus den Schätzvorschriften des nicht oder der einmal entkoppelten Schätzvorschriften unter Vernachlässigung einzelner Ausdrücke ergeben. Zwischen allen Feldern des Verschiebepfades können einfache Entkopplungen auftreten. Am einfachsten lassen sich aus dem Ausdruck (10) die Vorschriften für Entkopplungen zwischen den Feldern E5 und G6 sowie E4 und G6 herleiten. In diesen beiden Fällen erübrigt sich der Maximumoperator für das Kopplungsfeld G6, welches jetzt entweder zum Abschätzstrang des Feldes E1 (bei Entkopplung zwischen E5 und G6) oder zum Strang des Feldes G3 (bei Entkopplung zwischen E4 und G6) gehört, und es resultiert in der gerade genutzten Reihenfolge:

$$-DB_{E1}^{schätz} = -DS_{E1} - \frac{pk_{E1} - RestKap_{G2}}{pk_{G2}} \cdot (-DS_{G2}) + \left\lceil \frac{pk_{E1}}{pk_{G2}} \right\rceil \cdot (-DS_{E4}) \tag{11}$$

$$- (-DS_{G3}) + \frac{pk_{G3} + RestKap_{E5}}{pk_{E5}} \cdot (-DS_{E5})$$

$$-\frac{\frac{pk_{E1}-RestKap_{G2}}{pk_{G2}}\cdot pk_{E4}-RestKap_{G6}}{pk_{G6}}\cdot(-DS_{G6})$$

$$-DB_{E1}^{schätz}=-DS_{E1}-\frac{pk_{E1}-RestKap_{G2}}{pk_{G2}}\cdot(-DS_{G2})+\left\lceil\frac{pk_{E1}}{pk_{G2}}\right\rceil\cdot(-DS_{E4}) \tag{12}$$

$$-(-DS_{G3})+\frac{pk_{G3}+RestKap_{E5}}{pk_{E5}}\cdot(-DS_{E5})-\left\lfloor\frac{pk_{G3}}{pk_{E5}}\right\rfloor\cdot(-DS_{G6})$$

Für die verbleibenden vier einmaligen Entkopplungsmöglichkeiten sind zusätzliche Abschätzungen zu treffen. Bezogen auf die Entkopplung zwischen Feld G3 und E5 kann auf der Basis der Vorschrift (11) eine Abschätzung hergeleitet werden, wobei für das Feld E5 die Schätzung zu modifizieren ist. Weil es ein Empfängerfeld ist, muß die tatsächliche Mengenverringerung auf Feld G6 in Abhängigkeit von der Mengenerhöhung n auf Feld E1 systematisch überschätzt werden:

$$\left\lceil\frac{\left\lceil\frac{n\cdot pk_{E1}-RestKap_{G2}}{pk_{G2}}\right\rceil\cdot pk_{E4}-RestKap_{G6}}{pk_{G6}}\right\rceil\leq\left\lceil\frac{\left\lceil\frac{n\cdot pk_{E1}}{pk_{G2}}\right\rceil\cdot pk_{E4}}{pk_{G6}}\right\rceil\leq n\cdot\left\lceil\frac{\left\lceil\frac{pk_{E1}}{pk_{G2}}\right\rceil\cdot pk_{E4}}{pk_{G6}}\right\rceil$$

Somit resultiert als Abschätzung der negativierten Deckungsbeitragsänderung bei einer Entkopplung zwischen den Feldern G3 und E5:

$$-DB_{E1}^{schätz}=-DS_{E1}-\frac{pk_{E1}-RestKap_{G2}}{pk_{G2}}\cdot(-DS_{G2})+\left\lceil\frac{pk_{E1}}{pk_{G2}}\right\rceil\cdot(-DS_{E4}) \tag{13}$$

$$-\frac{\frac{pk_{E1}-RestKap_{G2}}{pk_{G2}}\cdot pk_{E4}-RestKap_{G6}}{pk_{G6}}\cdot(-DS_{G6})$$

$$+\left\lceil\frac{\left\lceil\frac{pk_{E1}}{pk_{G2}}\right\rceil\cdot pk_{E4}}{pk_{G6}}\right\rceil\cdot(-DS_{E5})-(-DS_{G3})$$

Tritt die Entkopplung nicht zwischen den Feldern G3 und E5, sondern zwischen G3 und E1 auf, so ist eine weitere Abschätzung für das Feld G3 notwendig. Diese Abschätzung ist wegen der Betrachtung eines Geberfeldes als systematische Unterschätzung auszugestalten. Als Ausgangspunkt der Schätzung dient die tatsächliche Mengenverringerung auf Feld G3 in Abhängigkeit von der Mengenerhöhung auf Feld E1:

$$\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{n \cdot pk_{E1} - RestKap_{G2}}{pk_{G2}} \right\rceil \cdot pk_{E4} - RestKap_{G6}}{pk_{G6}} \right\rceil \cdot pk_{E5} - RestKap_{G3}}{pk_{G3}} \right\rceil$$

$$\geq n \cdot \frac{\dfrac{\dfrac{pk_{E1} - RestKap_{G2}}{pk_{G2}} \cdot pk_{E4} - RestKap_{G6}}{pk_{G6}} \cdot pk_{E5} - RestKap_{G3}}{pk_{G3}}$$

Mit Hilfe dieser Abschätzung und der Vorschrift (13) läßt sich die negativierte Deckungsbeitragsänderungsschätzung bei einer Entkopplung zwischen den Feldern G3 und E1 wie folgt formulieren:

$$\begin{aligned} -DB_{E1}^{schätz} = & -DS_{E1} - \frac{pk_{E1} - RestKap_{G2}}{pk_{G2}} \cdot (-DS_{G2}) + \left\lceil \frac{pk_{E1}}{pk_{G2}} \right\rceil \cdot (-DS_{E4}) \\ & - \frac{\dfrac{pk_{E1} - RestKap_{G2}}{pk_{G2}} \cdot pk_{E4} - RestKap_{G6}}{pk_{G6}} \cdot (-DS_{G6}) \\ & + \left\lceil \frac{\left\lceil \dfrac{pk_{E1}}{pk_{G2}} \right\rceil \cdot pk_{E4}}{pk_{G6}} \right\rceil \cdot (-DS_{E5}) \\ & - \frac{\dfrac{\dfrac{pk_{E1} - RestKap_{G2}}{pk_{G2}} \cdot pk_{E4} - RestKap_{G6}}{pk_{G6}} \cdot pk_{E5} - RestKap_{G3}}{pk_{G3}} (-DS_{G3}) \end{aligned} \tag{14}$$

Schließlich sind noch die Verschiebepfade mit jeweils einer Entkopplung zwischen den Feldern E4 und G2 sowie G2 und E1 zu untersuchen. Zunächst wird eine Abschätzvorschrift für den erstgenannten Pfad abgeleitet. Für den zweitgenannten kann unter Rückgriff auf diese Herleitung ebenfalls eine Schätzformel gebildet werden. Die zusätzliche Mengenbelegung auf Empfängerfeld E4 basiert auf der Mengenverringerung auf G6, die bezogen auf E4 möglichst groß zu schätzen ist. Analog zur Abschätzung des komplexen offenen Verschiebepfades ergibt sich für diese Mengenschätzung:

$$\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n \cdot pk_{G3} + RestKap_{E5}}{pk_{E5}} \right\rfloor \cdot pk_{G6} + RestKap_{E4}}{pk_{E4}} \right\rfloor \leq n \cdot \frac{\frac{pk_{G3} + RestKap_{E5}}{pk_{E5}} \cdot pk_{G6} + RestKap_{E4}}{pk_{E4}}$$

Die Abschätzungen der anderen Felder sind identisch mit denen der Schätzvorschrift (12). Es läßt sich somit insgesamt für den komplexen offenen Verschiebepfad mit einer Entkopplung zwischen den Feldern E4 und G2 formulieren:

$$\begin{aligned} -DB_{E1}^{schätz} = {} & -DS_{E1} - \frac{pk_{E1} - RestKap_{G2}}{pk_{G2}} \cdot (-DS_{G2}) \\ & - (-DS_{G3}) + \frac{pk_{G3} + RestKap_{E5}}{pk_{E5}} \cdot (-DS_{E5}) - \left\lfloor \frac{pk_{G3}}{pk_{E5}} \right\rfloor \cdot (-DS_{G6}) \\ & + \frac{\frac{pk_{G3} + RestKap_{E5}}{pk_{E5}} \cdot pk_{G6} + RestKap_{E4}}{pk_{E4}} (-DS_{E4}) \end{aligned} \tag{15}$$

Beim Verschiebepfad mit der Entkopplung zwischen G2 und E1 entspricht die Mengenverringerung auf Feld G2 der Mengenzunahme auf Feld E4. Die Schätzung für das Geberfeld G2 muß demnach von der tatsächlichen Mengenerhöhung auf E4 ausgehen und diese möglichst gering abschätzen:

$$\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n \cdot pk_{G1} + RestKap_{E2}}{pk_{E2}} \right\rfloor \cdot pk_{G3} + RestKap_{E4}}{pk_{E4}} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n \cdot pk_{G1}}{pk_{E2}} \right\rfloor \cdot pk_{G3}}{pk_{E4}} \right\rfloor \geq n \cdot \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{pk_{G1}}{pk_{E2}} \right\rfloor \cdot pk_{G3}}{pk_{E4}} \right\rfloor$$

Die Abschätzung der negativierten Deckungsbeitragsänderung des entkoppelten Verschiebepfades läßt sich mit Hilfe des Ausdrucks (15) durch Austausch der dortigen Einzelschätzung für Feld G2 mit der gerade vorgenommenen Abschätzung für $n = 1$ gewinnen:

$$\begin{aligned} -DB_{E1}^{schätz} = {} & -DS_{E1} - (-DS_{G3}) + \frac{pk_{G3} + RestKap_{E5}}{pk_{E5}} \cdot (-DS_{E5}) \\ & - \left\lfloor \frac{pk_{G3}}{pk_{E5}} \right\rfloor \cdot (-DS_{G6}) + \frac{\frac{pk_{G3} + RestKap_{E5}}{pk_{E5}} \cdot pk_{G6} + RestKap_{E4}}{pk_{E4}} \cdot (-DS_{E4}) \\ & - \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{pk_{G1}}{pk_{E2}} \right\rfloor \cdot pk_{G3}}{pk_{E4}} \right\rfloor \cdot (-DS_{G2}) \end{aligned} \tag{16}$$

Anhand des bereits eingeführten **Beispiels** sollen auch die Abschätzungen für komplexe Verschiebepfade illustriert werden. Zunächst werden diesbezüglich die offenen Pfade beleuchtet. Das folgende Tableau zeigt die bereits bekannte Mengenbelegung der einzelnen Felder mit zusätzlich eingezeichneten zu untersuchenden komplexen offenen Verschiebepfaden. Da jedoch insgesamt zwölf dieser Pfade existieren, wurden vorerst nur die vier davon im Tableau aufgenommen, die Feld 112 als ein Endempfängerfeld besitzen:

	Produkt 1				Produkt 2				Restprod.-kapazität
	Absatzort 1		Absatzort 2		Absatzort 1		Absatzort 2		
Prod.-ort 1	-	1 7	1	–7 7	6	–4 12	10	–8 12	1
Prod.-ort 2	1	–6 6	24	–12 6	-	–9 15	-	–7 15	0
Prod.-ort 3	-	–2 10	5	–9 10	27	–3 9	-	–1 9	7
Restabsatzkap.	19		0		17		0		

Für alle aufgeführten Pfade mit Ausnahme des sechs Felder umfassenden wird das Feld 122 als Startgeberfeld bestimmt, denn dadurch können für diese Pfade für die beiden unmittelbar an Feld 122 angrenzenden Felder exakte Berechnungen erfolgen. Bezüglich der beiden über Feld 222 führenden Verschiebepfade kann somit für die Felder 122, 112 und 222 als negativierte Deckungsbeitragsänderung berechnet werden:

$$-DB^{\text{exakt}}_{G1_{122\text{ bis }222}} = -(-8) + (-4) + (-7) = -3$$

Für die beiden Pfade ergibt sich schließlich folgende Abschätzung:

$$-DB^{\text{schätz}}_{G1_{122\text{ bis }221}} = -3 - \frac{15-0}{6} \cdot (-12) = 27$$

$$-DB^{\text{schätz}}_{G1_{122\text{ bis }211}} = -3 - \frac{15-0}{6} \cdot (-6) = 12$$

Auch für den Vier-Felder-Verschiebepfad von Feld 112 bis Feld 321 kann mit Ausnahme des letztgenannten Feldes auf Abschätzungen verzichtet werden. Als Schätzwert der negativierten Deckungsspanne ergibt sich für das zugehörige Startgeberfeld 122:

$$-DB^{\text{schätz}}_{G1_{122\text{ bis }321}} = -(-8) + (-4) + (-1) - \frac{9-7}{10} \cdot (-9) = 4{,}8$$

Startgeberfeld des noch zu untersuchenden Sechs-Felder-Verschiebepfades ist gemäß Abschätzung (9) Feld 321. Für den gesamten linken „Abschätzast“ brauchen wieder keine Schätzungen vorgenommen zu werden; somit werden die diesbezüglichen Einzelfeldschätzungen durch exakte Feldberechungen ersetzt. Es resultiert folgende Abschätzvorschrift mit zugehörigem negativiertem Deckungsbeitragsänderungsschätzwert:

$$
\begin{aligned}
-DB^{\text{schätz}}_{G1_{321}} &= -(-DS_{G1_{321}}) + \frac{pk_{G1_{321}} + RestKap_{E2_{322}}}{pk_{E2_{322}}} \cdot (-DS_{E2_{322}}) - \left\lfloor \frac{pk_{G1_{321}}}{pk_{E2_{322}}} \right\rfloor \cdot (-DS_{G4_{122}}) \\
&\quad + \frac{\dfrac{pk_{G1_{321}} + RestKap_{E2_{322}}}{pk_{E2_{322}}} \cdot pk_{G4_{122}} + RestKap_{E5_{112}}}{pk_{E5_{122}}} \cdot (-DS_{E5_{122}}) + (-DS_{E3_{221}}) \\
&\quad - (-DS_{G6_{211}}) \\
&= -(-9) + \frac{10+7}{9} \cdot (-1) - \left\lfloor \frac{10}{9} \right\rfloor \cdot (-8) + \frac{\dfrac{10+7}{9} \cdot 12 + 1}{12} \cdot (-4) + (-12) - (-6) \\
&= 1\frac{2}{9} \text{ GE/ME}
\end{aligned}
$$

Die acht weiteren komplexen offenen Verschiebepfade finden sich in folgendem Tableau:

	Produkt 1						Produkt 2						Restprod.-kapazität
	Absatzort 1			Absatzort 2			Absatzort 1			Absatzort 2			
Prod.-ort 1	-	1	7	1	–7	7	6	–4	12	10	–8	12	1
Prod.-ort 2	1	–6	6	24	–12	6	-	–9	15	-	–7	15	0
Prod.-ort 3	-	–2	10	5	–9	10	27	–3	9	-	–1	9	7
Restabsatzkap.	19			0			17			0			

Weil jedes Feld des die Felder 211, 221, 321 und 312 umfassenden Verschiebepfades sowohl Geber- als auch Empfängerfeld sein kann, wurden im Tableau jeweils Doppelpfeile verwendet. Zur Abschätzung der Deckungsbeitragsänderungen fungieren für jeweils vier Verschiebepfade die Felder 221 und 321 als Startgeberfelder. Für sämtliche Pfade, die Produktart 1 am Absatzort 1 beinhalten, ist nur bezogen auf jeweils eines der vier Felder des Verschiebepfades eine Abschätzung notwendig. Als negativierte Deckungsbeitragsschätzungen ergeben sich für diese Verschiebepfade:

$$-DB^{\text{schätz}}_{G1_{221\,\text{bis}\,122}} = -(-12) + (-6) + (-7) - \frac{7-1}{12} \cdot (-8) = 3 \text{ GE/ME}$$

$$-DB^{\text{schätz}}_{G1_{221\,\text{bis}\,112}} = -(-12) + (-6) + (-7) - \frac{7-1}{12} \cdot (-4) = 1 \text{ GE/ME}$$

$$-DB^{\text{schätz}}_{G1_{221\,\text{bis}\,312}} = -(-12) + (-6) + (-9) - \frac{10-7}{9} \cdot (-3) = -2 \text{ GE/ME}$$

$$-\mathrm{DB}^{\text{schätz}}_{\mathrm{G1}_{321\,\text{bis}\,122}} = -(-9) + (-2) + (-7) - \frac{7-1}{12} \cdot (-8) = 4 \quad \text{GE/ME}$$

$$-\mathrm{DB}^{\text{schätz}}_{\mathrm{G1}_{321\,\text{bis}\,112}} = -(-9) + (-2) + (-7) - \frac{7-1}{12} \cdot (-4) = 2 \quad \text{GE/ME}$$

$$-\mathrm{DB}^{\text{schätz}}_{\mathrm{G1}_{321\,\text{bis}\,211}} = -(-9) + (-12) - (-6) + \frac{10+7}{9} \cdot (-3) = -2\frac{2}{3} \quad \text{GE/ME}$$

Schließlich sind noch die beiden nicht Produktart 1 am Absatzort 1 umfassenden Verschiebepfade zu analysieren. Ihre negativierten Deckungsbeitragsänderungen lassen sich mit Hilfe von Schätzvorschrift (9) unter Vernachlässigung der Felder G4 und E5 abschätzen. Als Abschätzung für den Pfad mit den Feldern 221 (= G1), 212 (= E2), 121 (= E3) und 122 (= G6) läßt sich ein Wert von 5,4 GE/ME ermitteln, und für den Verschiebepfad mit dem Startgeberfeld 321 und den weiteren Feldern 312 (= E2), 121 (= E3) und 122 (= G6) errechnet sich der Wert ⅓ GE/ME.

Als letztes sind Abschätzungen für die komplexen geschlossenen Verschiebepfad vorzunehmen. Dem folgenden Tableau ist zu entnehmen, daß bezogen auf das vorliegende Beispiel nur zwei Pfade dieser Art existieren:

	Produkt 1				Produkt 2				Restprod.-kapazität
	Absatzort 1		Absatzort 2		Absatzort 1		Absatzort 2		
Prod.-ort 1	-	1 7	1	−7 7	6	−4 12	10	−8 12	1
Prod.-ort 2	1	−6 6	24	−12 6	-	−9 15	-	−7 15	0
Prod.-ort 3	-	−2 10	5	−9 10	27	−3 9	-	−1 9	7
Restabsatzkap.	19		0		17		0		

Dadurch, daß für den Verschiebepfad mit dem Startempfängerfeld 311 drei Entkopplungen existieren, die wieder mittels unterbrochener Linien gekennzeichnet werden, zerfällt dieser Pfad in zwei bereits untersuchte und als unvorteilhaft erkannte Einzelpfade. Im Gegensatz dazu tritt bei dem anderen Pfad nur eine Entkopplung zwischen den Feldern 112 und 312 auf. Startempfängerfeld dieses Pfades ist das Feld 222. Im Sinne des eingeführten Referenzpfades tritt die Entkopplung zwischen den Feldern E5 und G6 auf. Es kann somit grundsätzlich Vorschrift (11) zur Abschätzung verwendet werden. Dabei ist allerdings zu beachten, daß für die Felder 122 und 112 keine Abschätzungen notwendig sind, sondern exakte Berechnungen vorgenommen werden können.

$$-\mathrm{DB}^{\text{schätz}}_{\mathrm{E1}_{222}} = -\mathrm{DS}_{\mathrm{E1}_{222}} - \frac{\mathrm{pk}_{\mathrm{E1}_{222}} - \mathrm{RestKap}_{\mathrm{G2}_{221}}}{\mathrm{pk}_{\mathrm{G2}_{221}}} \cdot (-\mathrm{DS}_{\mathrm{G2}_{221}}) + \left\lceil \frac{\mathrm{pk}_{\mathrm{E1}_{222}}}{\mathrm{pk}_{\mathrm{G2}_{221}}} \right\rceil \cdot (-\mathrm{DS}_{\mathrm{E4}_{321}})$$

$$-(-\mathrm{DS}_{\mathrm{G3}_{122}}) + (-\mathrm{DS}_{\mathrm{E5}_{112}})$$

$$-\frac{\frac{pk_{E1_{222}}-RestKap_{G2_{221}}}{pk_{G2_{221}}}\cdot pk_{E4_{321}}-RestKap_{G6_{312}}}{pk_{G6_{312}}}\cdot(-DS_{G6_{312}})$$

$$=-7-\frac{15-0}{6}\cdot(-12)+\left\lceil\frac{15}{6}\right\rceil\cdot(-9)-(-8)+(-4)-\frac{\frac{15-0}{6}\cdot 10-7}{9}\cdot(-3)$$

$$=6\ \text{GE/ME}$$

Sämtliche Abschätzungen für komplexe Verschiebepfade haben zwei potentiell günstige Mengenverlagerungsmöglichkeiten offenbart. Jedoch kann auch hierbei wieder höchstens eine der beiden tatsächlich lohnend sein, da beide identifizierten Pfade dieselben Felder umfassen, jedoch im einen Fall als Geber- und im anderen als Empfängerfelder. Hierfür sind wieder exakte Berechnungen vorzunehmen, die für die beiden Pfade nach diesen Vorschriften zu erfolgen haben:

$$-DB_{G1_{221}}=-n\cdot(-DS_{G1_{221}})+n\cdot(-DS_{E2_{211}})+n\cdot(-DS_{E3_{321}})$$

$$-\left\lceil\frac{n\cdot pk_{E3_{321}}-RestKap_{G6_{312}}}{pk_{G6_{312}}}\right\rceil\cdot(-DS_{G6_{312}})$$

$$=n\cdot(-(-12)+(-6)+(-9))-\left\lceil\frac{n\cdot 10-7}{9}\right\rceil\cdot(-3)=3\cdot\left(\left\lceil\frac{n\cdot 10-7}{9}\right\rceil-n\right)$$

$$-DB_{G1_{321}}=-n\cdot(-DS_{G1_{321}})+n\cdot(-DS_{E3_{221}})-n\cdot(-DS_{G6_{211}})$$

$$-\left\lfloor\frac{n\cdot pk_{G1_{321}}-RestKap_{E2_{312}}}{pk_{E2_{312}}}\right\rfloor\cdot(-DS_{E2_{312}})$$

$$=n\cdot(-(-9)+(-12)-(-6))+\left\lfloor\frac{n\cdot 10+7}{9}\right\rfloor\cdot(-3)=3\cdot\left(n-\left\lfloor\frac{n\cdot 10+7}{9}\right\rfloor\right)$$

Wenn gezeigt werden kann, daß der in Klammern stehende Term des ersten Ausdrucks im zu untersuchenden Bereich niemals kleiner null sein kann, ist ein negatives Gesamtergebnis ausgeschlossen. Somit ist zu zeigen:

$$\left\lceil\frac{n\cdot 10-7}{9}\right\rceil\geq n$$

Dies gilt, wenn für den Term im Aufrundungsoperator gilt:

$$\frac{n\cdot 10-7}{9}>n-1$$

Die Ungleichung kann umgeformt werden:

$$\frac{n \cdot 10 - 7}{9} > n - 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{10}{9} \cdot n - \frac{7}{9} > n - 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{9} \cdot n + \frac{2}{9} > 0 \;\Leftrightarrow\; n > -2$$

Da n nur zwischen 0 und 24 zulässig ist und somit insbesondere nicht kleiner als –2 werden kann, ist eine Deckungsbeitragserhöhung durch eine Mengenverlagerung auf diesem Verschiebepfad ausgeschlossen.

Prinzipiell kann für den negativierten Deckungsbeitragsausdruck des zweiten zu betrachtenden Verschiebepfades analog verfahren werden. Da jedoch Feld 321 nur mit einer Produktmengeneinheit zusätzlich belegt werden kann, weil auf Feld 211 bloß eine Produktmengeneinheit vorhanden ist, kann die resultierende negativierte Deckungsbeitragsänderung auch unmittelbar berechnet werden:

$$-\mathrm{DB}_{\mathrm{G1}_{321}} = 3 \cdot \left(1 - \left\lfloor \frac{1 \cdot 10 + 7}{9} \right\rfloor\right) = 0 \quad \mathrm{GE/ME}$$

Damit wurden sämtliche komplexen Verschiebepfade untersucht, ohne eine Gesamtdeckungsbeitragssteigerungsmöglichkeit identifiziert zu haben. Wäre die Suche positiv verlaufen, hätten in der Reihenfolge ihrer Vorteilhaftigkeit alle günstigen Mengenverschiebungen durchgeführt werden müssen. Anschließend hätten erster und zweiter Optimierungsschritt so lange wiederholt werden müssen, bis, wie hier bereits nach einmaligem Prozedurdurchlauf eingetreten, keine weiteren Gesamtdeckungsbeitragsverbesserungen hätten gefunden und realisiert werden können. Ergebnis der Optimierung sind aus Sicht des planenden Unternehmens drei Arten von Informationen: erstens die optimalen Produktionsprogramme für jeden Produktionsort, zweitens die optimalen Transportmengen aus den Produktions- in die Absatzorte und drittens die optimalen absatzortspezifischen Vertriebsmengen der jeweiligen Produktarten. Im einzelnen lauten diese Optimalpläne tabellarisch erfaßt wie folgt:

	Produkt 1 [ME]	Produkt 2 [ME]
Produktionsort P1	1	16
Produktionsort P2	25	-
Produktionsort P3	5	27
Absatzort A1	1	33
Absatzort A2	30	10
von P1 zu A1	-	6
von P1 zu A2	1	10
von P2 zu A1	1	-
von P2 zu A2	24	-
von P3 zu A1	-	27
von P3 zu A2	5	-

Der daraus resultierende Gesamtdeckungsbeitrag läßt sich einerseits aus der Summe der Produkte aus jeweils optimaler Erzeugnismenge und zugehöriger Deckungsspanne oder aus dem um die eine Geldeinheit aus der Optimierung erhöhten Gesamtdeckungsbeitrag der abgerundeten Lösung des relaxierten Problems berechnen:

$$DB_{max} = 1 \cdot 7 + 6 \cdot 4 + 10 \cdot 8 + 1 \cdot 6 + 24 \cdot 12 + 5 \cdot 9 + 27 \cdot 3 = 531\,\text{GE} = 530 + 1$$

Dies ist nicht die einzige optimale Lösung, denn wie die letzte exakte Berechnung ergab, liefert die Verlagerung einer Produktmengeneinheit von den Feldern 211 und 321 auf die Felder 221 und 312 einen gleich hohen Gesamtdeckungsbeitrag.

4 Kritische Würdigung des Lösungsalgorithmus

Im vorliegenden Arbeitsbericht wurde zunächst ein Modell zur Bestimmung der Produktions-, Transport- und Absatzprogramme für beliebig viele Produkte, Absatz- und Produktionsorte mit jeweils einem dominanten Engpaß je Produktionsort aufgestellt. Dabei ließen sich eine relaxierte und eine unrelaxierte Form des Modells unterscheiden. Darauf aufbauend wurde ein auf der Schrittsteinmethode beruhender Algorithmus zur Bestimmung einer ganzzahligen Optimallösung des Problems entwickelt.

Das präsentierte Modell bildet die interdependenten Problembereiche der Planung von Produktionsprogrammen, Transportplänen und Absatzmengen ab, wodurch es bedeutend komplexer ist als das einfache Modell zur Transportplanung, zu dessen Lösungswertermittlung die klassische Schrittsteinmethode dient. Deswegen gestaltet sich auch der hergeleitete Lösungsalgorithmus wesentlich komplizierter. Ein Vorteil des Verfahrens ist die aus der Schrittsteinmethode übernommene ausnahmslose Erzeugung zulässiger Lösungen bei jedem Optimierungsschritt. Weiterhin konnten mit der Vorschaltung einerseits der „abgerundeten" Optimallösung des relaxierten Problems und andererseits einer problemangepaßten VOGELschen Approximation zur Bildung einer zulässigen Ausgangslösung Verfahren gefunden werden, die bereits sehr gute Startlösungen erwarten lassen. Weiterhin kann die Optimallösung des relaxierten Problems gleichzeitig als Qualitätsindikator jeder gefundenen Lösung des unrelaxierten Problems dienen, wodurch eine Abwägung zwischen dem noch zu erwartenden Aufwand für das Auffinden der Optimallösung und dem Steigerungspotential der derzeit besten Lösung möglich wird.

Die Problemstruktur bewirkt, daß nicht nur wie beim einfachen Transportproblem geschlossene Mengenverschiebepfade entstehen, sondern auch eine Vielzahl offener. Gerade diese Menge an offenen Verschiebepfaden macht das abgeleitete Verfahren jedoch insbesondere auf die komplexen Pfade bezogen recht unübersichtlich. Da in praxisrelevanten Problemstellungen die Variablenzahl viel größer sein dürfte, stellt dies auch das Haupthindernis einer praktischen Anwendung des Verfahrens dar. Ein ähnliches Problem stellen in diesem Zusammenhang die mit zunehmender Problemgröße erstens sich stark verkomplizierenden und anwachsenden Schätzausdrücke und zweitens die zwangsläufig damit verbundene gesteigerte Ungenauigkeit dieser Ausdrücke dar. Werden jedoch komplexe (offene) Pfade bei der Suche nach guten Lösungen ignoriert, wird also stets nur der erste Optimierungsschritt durchgeführt, so ist das Verfahren als eine gute Heuristik anzusehen, die nicht zu komplex ist, denn auch die notwendigen Abschätzsausdrücke bleiben hinreichend einfach. Dennoch bleibt natürlich die leider problemstrukturinhärente unter Umständen recht große Zahl der zu untersuchenden Verschiebepfade zu beklagen.

Durch die Konstruktion des Modells ist es zumindest theoretisch möglich, mehrere vorab nicht dominierte Engpässe an den Produktionsorten und auch bei den Transportmöglichkeiten zu integrieren, indem weitere Nebenbedingungen eingefügt werden. Auf diese Weise könnte das betrachtete Modell realitätsnäher gestaltet werden. Dadurch steigt aber die Modellkomplexität in nicht unerheblichem Maße. Die Lösung des relaxierten Problems stellt dabei kein Problem dar, da das Modell linear und der Simplex-Algorithmus anwendbar bleibt. Aber der entwickelte Algorithmus für das unrelaxierte Problem wäre zunächst untauglich. Eine mögliche Modifikation bestünde in der Planung von Alternativpfaden mit jeweils unterschiedlichen produktionsort- und transportbezogenen Kapazitätsbeanspruchungen und anschließendem deckungsbeitragsbezogenem Vergleich dieser Pfade. Dadurch ergäben sich quasi mehrere der verwendeten Tableaus simultan; oder anders ausgedrückt, es wären mehrdimensionale Tableaus aufzubauen. Ein solches Vorgehen verkompliziert das ohnehin schon komplexe Verfahren erheblich, wodurch auch an seiner Praktikabilität generell gezweifelt werden muß.

Schließlich geht das vorgestellte Modell nur von statisch deterministischen Größen aus. Eine erste Möglichkeit, sowohl geplante als auch zufällige Datenänderungen zu erfassen, besteht in der Entwicklung und Verwendung unterschiedlicher Planungsszenarien (Szenariotechnik[1]). Die Produktions-, Transport- und Absatzprogramme werden dann jeweils abhängig vom tatsächlich eintretenden Szenario angepaßt. Um drohende Fehlmengen infolge zufällig eintretender Parameteränderungen abfangen zu können, könnten auf der Basis stochastischer Größen Sicherheitsbestände in zusätzlich zu modellierenden Produktlagern an den Produktions- und Absatzorten geplant und gehalten werden.

Das vorliegende Modell kann in einem ersten Schritt auch als Standortplanungsmodell uminterpretiert werden, indem die Produktionsorte nur als potentielle Orte angesehen werden, an denen Fertigungsbetriebe errichtet werden könnten. Erst wenn die Optimierung die Fertigung von Erzeugnissen an einem Ort ergeben hat, wird dort Transport- und Produktionskapazität aufgebaut und zwar nur für die dort zu fertigenden Produktarten. In einem zweiten Schritt könnten in das Modell Investitionskosten integriert werden, die davon abhängen, welche Produkte am entsprechenden Ort und welche Gesamtmengen von diesen gefertigt werden sollen.

Abschließend ist zu resümieren, daß das präsentierte Modell zur simultanen Produktionsprogramm-, Transport- und Absatzmengenplanung Erweiterungen in viele Richtungen zuläßt und daß das relaxierte und unrelaxierte Modell mit den jeweils zugehörigen aufgezeigten Lösungsalgorithmen als theoretische Grundlagen für die Entwicklung von Heuristiken zur Auswertung auch komplexerer Modelle dienen können. Es ist jedoch zu erwarten, daß durch Erweiterungen die jetzt schon begrenzte analytische Handhabbarkeit des unrelaxierten Problems recht schnell noch weiter eingeschränkt wird oder gar verlorengeht.

1 Zur Szenarioplanung vgl. bspw. GÖTZE (1993).

Literaturverzeichnis

ADAM, D. (1996): Planung und Entscheidung, 4. Auflage, Wiesbaden 1996.

ADAM, D. (1998): Produktionsmanagement, 9. Auflage, Wiesbaden 1998.

CORSTEN, H., CORSTEN H., SARTOR, C. (2005): Operations Research, München 2005.

DANTZIG, G. B. (1951): Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities, in: KOOPMANS, T. C. (Hrsg.), Activity Analysis of Production and Allocation, New York/London 1951, S. 339-347.

DANTZIG, G. B. (1966): Lineare Programmierung und Erweiterungen, Berlin et al. 1966.

DOMSCHKE, W. (1995): Logistik: Transport, 4. Auflage, München/Wien 1995.

DOMSCHKE, W. (1997): Logistik: Rundreisen und Touren, 4. Auflage, München/Wien 1997.

ELLINGER, T., BEUERMANN, G., LEISTEN, R. (2003): Operations Research: Eine Einführung, 6. Auflage, Berlin et al. 2003.

GÖTZE, U. (1993): Szenario-Technik in der strategischen Unternehmensplanung, 2. Auflage, Wiesbaden 1993.

GÜNTHER, H.-O., TEMPELMEIER, H. (2000): Produktion und Logistik, 4. Auflage, Berlin et al. 2000.

HILLIER, F. S., LIEBERMAN, G. J. (1997): Operations-Research: Einführung, 5. Auflage, München/Wien 1997.

HITCHCOCK, F. L. (1941): The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities, in: Journal of Mathematics and Physics 20, 1941, S. 244.

KOOPMANS, T. C. (1949): Optimum Utilization of the Transportation System, in: Supplement to Econometrica 17, 1949, S. 136-146.

MÜLLER-MERBACH, H. (1973): Operations Research, 3. Auflage, München 1973.

OHSE, D. (1987): Transportprobleme, in: GAL, T. (Hrsg.), Grundlagen des Operations Research, Band 2, Berlin et al. 1987, S. 261-359.

WITTE, T., DEPPE, J. F., BORN, A. (1975): Lineare Programmierung, Wiesbaden 1975.

ZIMMERMANN, W., STACHE U. (2001): Operations-Research: Quantitative Methoden zur Entscheidungsvorbereitung, 10. Auflage, München/Wien 2001.