

Der Open-Access-Publikationsserver der ZBW – Leibniz-Informationzentrum Wirtschaft  
*The Open Access Publication Server of the ZBW – Leibniz Information Centre for Economics*

Mirschel, Stefan; Rollberg, Roland; Steinmetz, Ulrich

## Working Paper

# Technologische Fundierung der Produktionsfunktion vom Typ D mit Hilfe von Verbrauchs- und Erzeugungsfunktionen

Wirtschaftswissenschaftliche Diskussionspapiere // Ernst-Moritz-Arndt-Universität  
Greifswald, Rechts- und Staatswissenschaftliche Fakultät, No. 04/2003

### Provided in cooperation with:

Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

Suggested citation: Mirschel, Stefan; Rollberg, Roland; Steinmetz, Ulrich (2003) :  
Technologische Fundierung der Produktionsfunktion vom Typ D mit Hilfe von Verbrauchs-  
und Erzeugungsfunktionen, Wirtschaftswissenschaftliche Diskussionspapiere // Ernst-Moritz-  
Arndt-Universität Greifswald, Rechts- und Staatswissenschaftliche Fakultät, No. 04/2003, <http://hdl.handle.net/10419/48892>

### Nutzungsbedingungen:

Die ZBW räumt Ihnen als Nutzerin/Nutzer das unentgeltliche, räumlich unbeschränkte und zeitlich auf die Dauer des Schutzrechts beschränkte einfache Recht ein, das ausgewählte Werk im Rahmen der unter

→ <http://www.econstor.eu/dspace/Nutzungsbedingungen>  
nachzulesenden vollständigen Nutzungsbedingungen zu vervielfältigen, mit denen die Nutzerin/der Nutzer sich durch die erste Nutzung einverstanden erklärt.

### Terms of use:

*The ZBW grants you, the user, the non-exclusive right to use the selected work free of charge, territorially unrestricted and within the time limit of the term of the property rights according to the terms specified at*

→ <http://www.econstor.eu/dspace/Nutzungsbedingungen>  
*By the first use of the selected work the user agrees and declares to comply with these terms of use.*

ERNST-MORITZ-ARNDT-UNIVERSITÄT GREIFSWALD

Lehrstuhl für Allgemeine Betriebswirtschaftslehre und Produktionswirtschaft

Technologische Fundierung der  
Produktionsfunktion vom Typ D mit Hilfe von  
Verbrauchs- und Erzeugungsfunktionen

Stefan Mirschel\*, Roland Rollberg\*, Ulrich Steinmetz\*\*

Diskussionspapier 04/2003

Mai 2003

Wirtschaftswissenschaftliche Diskussionspapiere

ISSN 1437 – 6989

<http://www.rsf.uni-greifswald.de/bwl/paper.html>

\* Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

\*\* Bayerische Julius-Maximilians-Universität Würzburg



# Inhaltsverzeichnis

<b>Abkürzungsverzeichnis</b> .....	<b>III</b>
<b>Symbolverzeichnis</b> .....	<b>III</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b> .....	<b>V</b>
<b>1 Notwendigkeit der technologischen Fundierung betriebswirtschaftlicher Produktionsfunktionen</b> .....	<b>1</b>
<b>2 Zwei ausgewählte Produktionsfunktionen</b> .....	<b>5</b>
2.1 Anforderungen an produktionswirtschaftliche Modelle.....	5
2.2 Die Produktionsfunktion vom Typ D als theoretisch erweiterbares Konzept.....	8
2.2.1 Grundlagen.....	8
2.2.2 Bildung der betriebswirtschaftlichen Produktionsfunktion.....	10
2.2.3 Beurteilung der Produktionsfunktion vom Typ D.....	11
2.3 Verbrauchs- und Erzeugungsfunktionen als Konzept zur Zusammenfassung ingenieurwissenschaftlicher Erkenntnisse.....	12
2.3.1 Formale Darstellung der Funktionen.....	12
2.3.2 Berücksichtigung von zeitveränderlichen Größen.....	14
2.3.3 Beurteilung der Verbrauchs- und Erzeugungsfunktionen.....	16
<b>3 Kombination der Produktionsfunktion vom Typ D mit Verbrauchs- und Erzeugungsfunktionen</b> .....	<b>18</b>
3.1 Grundlagen und Prämissen des Modells.....	18
3.2 Ermittlung der Direktverbrauchsmatrix.....	20
3.2.1 Aufstellen der Strukturmatrix.....	20
3.2.2 Ermittlung der Produktionskoeffizientenmatrix.....	21
3.2.3 Berechnung der Direktverbrauchsmatrix.....	23
3.2.4 Das Problem der Dimensionsaddition.....	24
3.2.5 Freie technologische Aktionsparameter.....	25
3.3 Ermittlung des Gesamtbedarfs.....	26
3.3.1 Berechnung der Gesamtverbrauchsmatrix.....	26
3.3.2 Ermittlung des vollständigen Bestandsveränderungsvektors sowie der Verbrauchs- und Erzeugungsmengen.....	27
3.3.3 Mengenzielbezogene Festlegung der technologischen Parameter.....	29
3.3.4 Formalzielbezogene Festlegung der technologischen Parameter.....	31
3.4 Beurteilung der kombinierten Produktionsfunktion.....	32
<b>4 Zusammenfassung und Ausblick</b> .....	<b>34</b>

---

<b>Anhang .....</b>	<b>36</b>
A.1 Produktionssystem mit Rückkopplung .....	36
A.2 Strukturmatrix.....	36
A.3 Verbrauchs- und Erzeugungsmatrizen.....	37
A.4 Ermittlung der Produktionskoeffizientenmatrix .....	37
A.5 Ermittlung der Verflechtungsmatrix.....	39
A.6 Gesamtverbrauchsmatrix .....	40
A.7 Ermittlung des vervollständigten Bestandsveränderungsvektors .....	41
A.8 Dimensionsnachweis der Objekte.....	42
<b>Literaturverzeichnis.....</b>	<b>44</b>

## Abkürzungsverzeichnis

BFuP	Betriebswirtschaftliche Forschung und Praxis
bspw.	beispielsweise
bzw.	beziehungsweise
E	Energie
et al.	et alii
f.	folgende
ff.	fortfolgende
Fn.	Fußnote
FL	Faktorlagerstelle
Hrsg.	Herausgeber
i. d. R.	in der Regel
M	Materie
PL	Produktlagerstelle
S.	Seite(n)
Sp.	Spalte(n)
TF	Transformationsstelle / Produktiveinheit / Produktionsstelle
u. U.	unter Umständen
v. a.	vor allem
vgl.	vergleiche
vs.	versus
WiSt	Wirtschaftswissenschaftliches Studium
WISU	Das Wirtschaftsstudium
z. B.	zum Beispiel
ZfB	Zeitschrift für Betriebswirtschaft

## Symbolverzeichnis

$\mathbf{b}$	Bestandsvektor
$\mathbf{bv}$	Bestandsveränderungsvektor
$\mathbf{bv}_L$	Bestandsveränderung eines Leitobjekts
$\mathbf{bv}_N$	Bestandsveränderung eines Nebenobjekts
$c_k$	Index der Verbrauchsobjektarten/-funktionen einer Stelle $k$
$C_k$	Indexmenge von $c_k$
$d$	Intensität
$\mathbf{d}$	Intensitätsvektor $k$
$d_k$	Index der Erzeugungsobjektarten/-funktionen einer Stelle $k$
$d_n$	Index der Erzeugungsobjektarten/-funktionen einer Transformationsstelle $n$
$D_k$	Indexmenge von $d_k$
$D_n$	Indexmenge von $d_n$
$\mathbf{e}$	Vektor der Einflußgrößen
$\mathbf{E}$	Einheitsmatrix

---

f	Transformationsfunktion
<b>F</b>	Verflechtungsmatrix eines Systems
g	Element der Gesamtverbrauchsmatrix
<b>G</b>	Gesamtverbrauchsmatrix eines Systems
h	Zählindex
i	Zählindex
j	Zählindex
J	Indexmenge des Zählindex j
k	Stelle eines Systems
K	Menge der Stellen
kk	Kopplungskoeffizient
m	Faktorlagerstelle eines Systems
M	Menge der Faktorlagerstellen
<b>m</b>	Mengenvektor
n	Transformations-/Aggregatstelle eines Systems
N	Menge der Transformations-/Aggregatstellen
o	Produktlagerstellen eines Systems
O	Menge der Produktlagerstellen
p	Erzeugungsfunktion eines Objekts
<b>p</b>	Erzeugungsvektor
$\dot{p}$	Erzeugungsgeschwindigkeit eines Objekts
$p_L$	Erzeugungsfunktion der Leiterzeugung eines Aggregats
<b>P</b>	Erzeugungsmatrix eines Systems
pk	Produktionskoeffizient und Element der Verflechtungsmatrix
<b>PK</b>	Produktionskoeffizientenmatrix eines Systems
$q_k$	Produkt- bzw. Erzeugungsobjekt, das eine Stelle k verläßt
$Q_k$	Menge von $q_k$
r	Input
<b>r</b>	Inputvektor
s	Element der Strukturmatrix
<b>S</b>	Strukturmatrix
t	Produktionszeit
v	Verbrauchsfunktion eines Objekts
<b>v</b>	Verbrauchsvektor
$\dot{v}$	Verbrauchsgeschwindigkeit eines Objekts
<b>V</b>	Verbrauchsmatrix eines Systems
$w_k$	Faktor- bzw. Verbrauchsobjekt, das in eine Stelle k eingeht
$W_k$	Menge von $w_k$
x	Output
<b>x</b>	Outputvektor
z	technologische Einstellungsgröße bzw. Parameter eines Aggregats
<b>z</b>	Einstellungsvektor eines Aggregates
$z^f$	Vektor der freien technologischen Größen bzw. Parameter
$z^r$	Vektor der mengenrelationsbestimmenden technologischen Größen bzw. Parameter

## **Abbildungsverzeichnis**

Abbildung 1:	Das Produktionssystem als offenes thermodynamisches System .....	7
Abbildung 2:	Produktion als Objektumwandlung auf unterschiedlichen Aggregationsebenen.....	13
Abbildung 3:	Graphische Darstellung der Struktur eines Produktionssystems .....	19
Abbildung 4:	Schema der Vorgehensweise des kombinierten Modells.....	35



# 1 Notwendigkeit der technologischen Fundierung betriebswirtschaftlicher Produktionsfunktionen

Ein zentraler Betrachtungsgegenstand sowohl der Ingenieur- als auch der Wirtschaftswissenschaften ist die betriebliche Produktion als zielgerichtete Kombination und Transformation von Elementarfaktoren zum Zwecke der Sach- und/oder Dienstleistungserstellung.<sup>1</sup> Allerdings beschreiten die beiden Wissenschaftsdisziplinen bei der Abbildung des Kombinations- und Transformationsprozesses unterschiedliche Wege. Und so verwundert es kaum, daß, beginnend mit CHENERYS Engineering Production Functions und GUTENBERGS Produktionsfunktion vom Typ B, immer wieder Versuche unternommen wurden, die beiden Wege zusammenzuführen, um die Erkenntnisse beider Disziplinen miteinander zu vereinen. Auf diese Weise kann die Entwicklung von Modellen der betriebswirtschaftlichen Produktionstheorie durch die empirisch gewonnenen und praxiserprobten Modelle der ingenieurwissenschaftlichen Produktionstechnik technologisch untermauert werden.

Betriebswirtschaftliche Produktionstheorie und ingenieurwissenschaftliche Produktionstechnik beschäftigen sich mit den Zusammenhängen zwischen Faktoren und Produkten als Ausgangs- und Endpunkte der Produktion, dem dazu nötigen Input und dem resultierenden Output als Objektzu- und -abfluß eines Produktionssystems sowie den im System stattfindenden Transformationsprozessen (Verbrauch und Erzeugung) als eigentlichem Kern der Produktion.<sup>2</sup> Beider Anliegen ist „die Analyse und Erklärung von Produktionssystemen“.<sup>3</sup>

Die funktionalistische Produktionstheorie trifft Musteraussagen zur empirisch fundierten Erfassung, Beschreibung und Erklärung der Zusammenhänge zwischen Verbrauch und Erzeugung. Dabei bedient sie sich eindeutig abbildender, reeller Funktionsgleichungen.<sup>4</sup> Sie wird auch empirische Theorie genannt, da sie aus auf Beobachtungen beruhenden Gesetzmäßigkeiten gebildet wird und ihre Aussagen als Kernbestandteile von Realtheorien gelten.<sup>5</sup> Viele funktionalistische Produktionsmodelle vereinfachen die tatsächlichen Beziehungen stark, indem sie organisatorische und technologische Details vernachlässigen.<sup>6</sup> Doch gab und gibt es in der funktionalistischen Produktionstheorie immer wieder Bemühungen, technologische Eigenschaften der Produktion besser zu berücksichtigen.<sup>7</sup>

---

1 Vgl. GUTENBERG (Grundlagen, 1983), S. 5, ferner u. a. ADAM (Produktionsmanagement, 1998), S. 1, BLOECH/BOGASCHEWSKY/GÖTZE/ROLAND (Einführung, 2001), S. 3 f., CORSTEN (Produktionswirtschaft, 2000), S. 1 f., ROLLBERG (Produktionsplanung, 2002), S. 129. Um dem Leser ein Literaturverzeichnis unterbreiten zu können, das sich nicht in der Auflistung zahlreicher betriebswirtschaftlicher Grundlagenwerke verliert, sollen an dieser Stelle exemplarisch einschlägige Standardwerke zitiert werden. Der an weitergehenden Ausführungen interessierte Leser kann den dort umfangreich angegebenen Literaturhinweisen folgen.

2 Vgl. EVERSHEIM, SPUR (Technologie, 1996), S. 11-1, FANDEL (Produktion, 1996), S. 11, KISTNER (Produktion, 1993), S. 2, SPUR (Produktion, 2000), S. L3 oder auch WÖHE/DÖHRING (Einführung, 1996), S. 342 f.

3 DINKELBACH, ROSENBERG (Umwelt, 2002), S. 8.

4 Vgl. MATTHES (Produktionstheorie, 1996), Sp. 1569 ff.

5 Vgl. MATTHES (Produktionstheorie, 1996), Sp. 1571.

6 Vgl. DOMSCHKE, SCHOLL, VOSS (Produktionsplanung, 1997), S. 5.

7 Letztlich zielt dies auf eine Zusammenführung vom physikalisch-technischen (Arbeit) und ökonomischen Leistungsbegriff (Mengenverbrauch vs. -erzeugung) ab. Vgl. hierzu HEINEN (Kostenlehre, 1983), S. 68 ff.

In diesem Zusammenhang ist der Ansatz CHENERYS, mit Engineering Production Functions das Wissen der Ingenieurwissenschaften für ökonomische Theorien zugänglich zu machen, als wegweisend zu bezeichnen.<sup>1</sup> Außer beim Faktor „Energie“ wird hier nur eine indirekte Beziehung zwischen Input und Output unterstellt, wobei technologische Variable die konkreten Einsatzmengen determinieren. Sein Vorhaben scheiterte jedoch an der Überbetonung des Energieeinsatzes, für den eine explizite Outputfunktion gesucht wurde, sowie an einer willkürlichen und künstlichen Trennung der Wirkung von Verbrauchs- und Gebrauchsobjekten auf die Transformation.<sup>2</sup>

GUTENBERG sucht bei seiner fast zeitgleich entwickelten Produktionsfunktion vom Typ B ebenfalls keinen direkten Zusammenhang zwischen Einsatz und Ausbringung, sondern erfaßt den Verbrauch von Einsatzfaktoren über die beiden Variable „technisch-physikalische Leistung oder Intensität“ (technische Leistungseinheiten pro Zeiteinheit) und „Betriebszeit“ sowie die konstante z-Situation, welche die kurzfristig nicht veränderbaren technologischen Eigenschaften des Aggregats beschreibt.<sup>3</sup> Hierzu nutzt er Kenntnisse über technologische Verbrauchsverläufe in Form von Funktionen oder Nomogrammen. Betriebswirtschaftlich interessanter als die technische Einsatzrelation (Verbrauch pro technische Leistungseinheit) ist naheliegenderweise die ökonomische Einsatzrelation (Verbrauch pro erzeugte Mengeneinheit).<sup>4</sup> Diese läßt sich aus der technischen Einsatzrelation eines Aggregats über eine Transformationsbeziehung zwischen technischer und ökonomischer Leistung (Mengeneinheiten pro Zeiteinheit) berechnen.<sup>5</sup> Die Outputmenge resultiert aus der Multiplikation der ökonomischen Intensität mit der Betriebszeit. Einzige Variable der Produktionsfunktion vom Typ B, die das Verhältnis zwischen Verbrauchs- und Erzeugungsmengen und somit die Produktionskoeffizienten determiniert, ist folglich die Intensität. GUTENBERGS Produktionsfunktion ist als Meilenstein auf dem Weg zur Verbindung betriebswirtschaftlichen und ingenieurwissenschaftlichen Wissens einzustufen. Doch ist der Umstand zu beklagen, daß eine Änderung der z-Situation immer auch zu einer neuen Produktionsfunktion führt.<sup>6</sup>

HEINEN versucht diesen Nachteil mit der Produktionsfunktion vom Typ C zu überwinden und verfeinert die Sicht auf die technologischen Parameter, indem er neben langfristig konstanten z-Parametern (z. B. Spannlänge und -durchmesser einer Drehmaschine) auch mittelfristig veränderliche u-Parameter (z. B. Magazinierung einer Werkzeugmaschine) und kurzfristig veränderliche l-Parameter definiert (z. B. Drehzahl und Vorschub einer Drehmaschine).<sup>7</sup> Letztlich sind aber auch HEINENS Verbrauchsfunktionen immer nur für ganz bestimmte u-z-Kon-

---

1 Anregungen zu diesen Überlegungen erhielt CHENERY von den von BREGUET in den 30er Jahren des 20. Jahrhunderts entwickelten Treibstoffverbrauchsformeln. Vgl. BLEIMANN (Darstellungsformen, 1981), S. 170.

2 Vgl. hierzu ausführlich CHENERY (Engineering Production Functions, 1949) und CHENERY (Production Functions, 1953). Vgl. zur Kritik ZSCHOCKE (Betriebsökonomie, 1974), S. 146 ff. und STEINMETZ (Gestaltung, 2001), S. 76 ff.

3 Tatsächlich werden in der z-Situation alle nicht intensitätsbestimmenden Einflußgrößen mit Ausnahme der Betriebszeit zusammengefaßt und konstant gehalten.

4 Vgl. GUTENBERG (Grundlagen, 1983), S. 326 ff.

5 Vgl. ADAM (Produktionsmanagement, 1998), S. 322 ff.

6 Vgl. ADAM (Produktionsmanagement, 1998), S. 331.

7 Vgl. HEINEN (Kostenlehre, 1983), S. 249, KERN (Produktionswirtschaft, 1992), S. 34 ff.

stellationen gültig.<sup>1</sup> Erweiterungen um eine prozeßorientierte Sicht, verschiedene Korrekturfaktoren und eine Berücksichtigung der Zeit in kinematischer Weise nähern das Modell zwar der Realität an, lassen es aber auch umfangreicher, komplexer und ab einem gewissen Grade „nicht mehr handhabbar“ werden.

Grundsätzlich ähnlich ausgerichtet sind auch die meisten Modelle der Produktionstechnik. Dabei werden allerdings wesentlich mehr und detaillierter technologische Größen sowie deren Auswirkungen auf Verbrauch und Erzeugung erfaßt, um so ingenieurwissenschaftliche Entscheidungen zu unterstützen. Die erfaßten Zusammenhänge bilden zumeist die Transformation eines bestimmten Objekts mit einem bestimmten Verfahren ab. Neben den rein verfahrensspezifischen müssen aber auch weitere Einflußgrößen beachtet werden. Diese sind vom verfahrensausführenden Aggregat und von dem durch das Verfahren zu bearbeitenden Objekt determiniert. Die zugrunde gelegten Gleichungen sind zwar von diesen Größen abhängig, i. d. R. jedoch nicht nur auf bestimmte Konstellationen der technologischen Parameter beschränkt.<sup>2</sup> Ziel dieser Produktionsmodelle ist nicht vorrangig die Ermittlung technischer oder ökonomischer Einsatzrelationen, sondern die Darstellung der Auswirkungen technologischer Einstellungen auf den Fertigungsprozeß, da die Modelle hauptsächlich für den technologischen Verfahrens- und Variantenvergleich, die Auslegung von Maschinen und die notwendige Gestaltung von Zwischen- und Vorprodukten entwickelt worden sind.<sup>3</sup> Der dadurch auch abgebildete Verbrauch von Rohstoffen für die Erzeugung von Produkten ist nur ein Aspekt unter vielen.<sup>4</sup> Die Einbringung dieses „Nebenprodukts“ ingenieurwissenschaftlicher Betrachtungen in die „Hülle“ empirisch wenig oder gar nicht unterlegter betriebswirtschaftlicher Produktionsfunktionen drängt sich unmittelbar auf.

Die exemplarisch vorgestellten betriebswirtschaftlichen Produktionsfunktionen berücksichtigen für ingenieurwissenschaftliche Entscheidungen nicht in ausreichendem Maße die Vielfalt der technologischen Aktionsparameter der Produktion, obgleich sie technologisch begründet sind.<sup>5</sup> Dagegen sind die ingenieurwissenschaftlichen Produktionsfunktionen äußerst detailliert und naturwissenschaftlich-technisch orientiert. Sie weisen einen hohen empirischen Gehalt auf, müssen aber für weitergehende Verflechtungsbetrachtungen zusammengefaßt und aufeinander abgestimmt werden, da sie meist isoliert nebeneinander stehen. Daher soll in diesem Arbeitsbericht ein Modell entwickelt werden, das einerseits den betriebswirtschaftlichen Anforderungen an die Produktionstheorie genügt, andererseits die ingenieurwissenschaft-

---

1 Vgl. HEINEN (Kostenlehre, 1983), Fn. 140, S. 272.

2 So fließen in die Berechnungen letztlich Größen des zu bearbeitenden Objektes, des ausführenden Aggregates und des allgemeinen Verfahrens ein, wobei möglichst viele Variable stellvertretend für technologische Freiheitsgrade einfließen sollen.

3 Vgl. hierzu EVERSHEIM, SPUR (Technologie, 1996); S. 11-2 ff., HIRSCH (Werkzeugmaschinen, 2000), S. 5, KOETHER, RAU (Fertigungstechnik, 1999), S. 11, SPUR (Produktion, 2000), S. L3. Die Detailliertheit dieser Modelle läßt sich beispielhaft den dort aufgezeigten Berechnungswegen entnehmen; vgl. KOETHER, RAU (Fertigungstechnik, 1999), S. 291 ff.

4 Vgl. EVERSHEIM, SCHUH (Gestaltung, 1999), S. 11-6 ff. Verbrauch und „Stückleistung je Zeiteinheit“ sind zwei weitere Kriterien zur Verfahrensauswahl, die neben produktbezogenen (z. B. Werkstückgeometrie oder Oberflächenanforderungen), wirtschaftlichen (z. B. die Anschaffungskosten einer Maschine) und umwelttechnischen sowie sozialen Kriterien (z. B. Lärm und Erschütterungen) eine Rolle spielen; vgl. WARNECKE, WESTKÄMPER (Fertigungstechnik, 1998), S. 15.

5 An dieser Stelle sei noch einmal auf das bereits erwähnte „Gefängnis“ der z-Situation bei GUTENBERG bzw. der u-z-Situation bei HEINEN für alle nicht die Intensität beeinflussenden Parameter verwiesen.

lichen Entwicklungen der Produktionstechnik weitgehend unverfälscht integriert und dabei die Auswahl technologischer Aktionsparameter möglichst nicht einschränkt. Anders formuliert besteht das Ziel dieses Arbeitsberichts also in der Verbindung des ingenieurwissenschaftlichen Erkenntnisstands mit der bekannten funktionalistischen Produktionstheorie. Eine Ausweitung hin zur Erfolgstheorie soll an dieser Stelle unterbleiben. Gleichwohl werden die Ergebnisse abschließend vor dem Hintergrund formaler Zielsetzungen diskutiert.

Hierzu werden in Unterkapitel 2.1 zunächst Anforderungen formuliert, die von aussagekräftigen betriebswirtschaftlichen Produktionsfunktionen zu erfüllen sind. Anschließend steht in Unterkapitel 2.2 die betriebswirtschaftliche Produktionsfunktion vom Typ D im Mittelpunkt des Interesses, die sich durch den Einsatz unterschiedlichster Transformationsfunktionen gestalten läßt, damit sehr anpassungsfähig ist, eine weitgehend realistische Abbildung auch komplexer Produktionssysteme erlaubt und wegen des zur Anwendung gelangenden Matrizenkalküls dennoch „handhabbar“, sprich „rechenbar“ bleibt. Unterkapitel 2.3 erläutert das betriebswirtschaftliche Modell der Verbrauchs- und Erzeugungsfunktionen, das in eleganter Weise Erkenntnisse der Ingenieurwissenschaften zu berücksichtigen vermag. Vor dem Hintergrund der eingangs formulierten Anforderungen werden die beiden Ansätze jeweils einer kritischen Würdigung unterzogen.

Die Verknüpfung der Verbrauchs- und Erzeugungsfunktionen mit der Produktionsfunktion vom Typ D ist Gegenstand des dritten Kapitels. Durch die Synthese sollen die Nachteile der beiden betriebswirtschaftlichen Modelle reduziert und ihre Vorteile vereint werden. Da Verbrauchs- und Erzeugungsfunktionen ingenieurwissenschaftlich fundiert werden können, sind sie gut dazu geeignet, die Produktionsfunktion vom Typ D empirisch zu untermauern. Unterkapitel 3.2 ist der Ermittlung der Direktverbrauchsmatrix, Unterkapitel 3.3 der der Gesamtverbrauchsmatrix gewidmet. Die Produktionsfunktion vom Typ D erfährt dabei nicht nur eine empirische Aufwertung, sondern wird zudem um den (gekoppelten) Mehrproduktfall einer Produktiveinheit erweitert. Ein eigener Abschnitt befaßt sich mit der technologischen Einstellung der Aggregate und ihrer Auswirkung auf das Produktionssystem. Unterkapitel 3.4 beantwortet die Frage, inwieweit die entwickelte Modellsynthese die in Unterkapitel 2.1 formulierten Anforderungen erfüllt.

Der Arbeitsbericht schließt mit einer kurzen Zusammenfassung der gewonnenen Erkenntnisse und einem Ausblick auf den weiteren Forschungsbedarf.

## 2 Zwei ausgewählte Produktionsfunktionen

### 2.1 Anforderungen an produktionswirtschaftliche Modelle

Nach GUTENBERG besteht der „Sinn aller betrieblichen Betätigung .. darin, Güter materieller Art zu produzieren oder Güter immaterieller Art bereitzustellen.“<sup>1</sup> Der Produktionsbegriff umfaßt somit nicht nur die rein materielle Fertigung von Sachleistungen, sondern auch die immaterielle Erzeugung von Dienstleistungen, deren Beitrag an der gesamtwirtschaftlichen Leistung rasant angestiegen ist.<sup>2</sup> Wird berücksichtigt, daß die Produktion als Teilgebiet des Wirtschaftens i. d. R. bei Objektknappheit erfolgt,<sup>3</sup> so gehört zur Definition des Begriffs unbedingt auch der gelenkte und damit zielorientierte Einsatz knapper Faktoren dazu, die ebenso materieller wie immaterieller Natur sein können.<sup>4</sup> DYCKHOFF bezieht den Aspekt des Werteschaffens als Grundanliegen der Produktion mit ein,<sup>5</sup> während CORSTEN und GÜNTHER/TEMPELMEIER betonen, daß Produktion nach bestimmten technologischen Regeln erfolgt.<sup>6</sup> Der wertschaffende Aspekt erscheint aber fragwürdig, weil dann nur ex post festgestellt werden kann, ob eine Produktion vorlag oder nicht.<sup>7</sup> Im folgenden ist unter Produktion der gelenkte Einsatz von materiellen und immateriellen Objekten in einem nach technologischen Regeln funktionierenden Kombinations- und Transformationsprozeß zu verstehen, der „neue“ Objekte hervorbringt.

Die Produktionstheorie bildet die komplexe Wirklichkeit in vereinfachten Modellen ab, aus denen im Idealfall Schlußfolgerungen in Form von Handlungsanweisungen gezogen werden können.<sup>8</sup> Mithin liefert die Produktionstheorie Real- und Erklärungsmodelle. Realmodelle müssen gewisse Mindest- und Vergleichsanforderungen erfüllen. Mindestanforderungen sind Widerspruchsfreiheit, Allgemeingültigkeit, empirischer Gehalt und faktische Überprüfbarkeit. Zu den wichtigsten Vergleichsanforderungen zählen der Bewährungsgrad, der Geltungsbereich und die Möglichkeit der Axiomatisierung.<sup>9</sup>

ADAM hat wesentliche Anforderungen an die Produktionstheorie als Lieferantin von Erklärungsmodellen formuliert:<sup>10</sup>

1. Sie muß sämtliche Determinanten des Faktorverbrauchs erfassen, vor allem jene, die das Mengengerüst der Kosten beeinflussen.
2. In einer Klasse betrachtete Objekte müssen homogen sein.

---

1 GUTENBERG (Grundlagen, 1983), S. 1.

2 Vgl. BODE, ZELEWSKI (Dienstleistungen, 1992), S. 594, FRIES (Industriebetrieb, 1999), S. 13 f.

3 Vgl. SCHIEMENZ, SCHÖNERT (Entscheidung, 2001), S. 14.

4 Vgl. BLOECH u. a. (Einführung, 2001), S. 3 f.

5 Vgl. DYCKHOFF (Produktion, 1994), S. 7.

6 Vgl. CORSTEN (Produktionswirtschaft, 2000) S. 11, GÜNTHER, TEMPELMEIER (Logistik, 2000), S. 6 f.

7 Vgl. STEINMETZ (Gestaltung, 2001), S. 36 f.

8 Vgl. KISTNER, STEVEN (Betriebswirtschaftslehre, 1999), S. 43 ff., REESE (Produktion, 1999), S. 745.

9 Vgl. SCHWEITZER, KÜPPER (Produktion und Kosten, 1997), S. 8 ff.

10 Vgl. ADAM (Produktionsmanagement, 1998), S. 296 ff.

3. Sie muß relevante technologische Tatbestände berücksichtigen und somit technologisch fundiert sein.
4. Sie muß sich auch auf den Mehrproduktfall erstrecken.
5. Sie darf nicht nur auf bestimmte Beziehungstypen von Funktionsvariablen (z. B. Substitutionalität, Limitationalität) zugeschnitten sein.
6. Der Mehrstufigkeit von Produktionsprozessen muß Rechnung getragen werden.
7. Die Produktionstheorie sollte ihre statische Betrachtungsweise überwinden.
8. Sie sollte alle mengenbeeinflussenden Funktionsbereiche eines Betriebs erfassen.
9. Die ökologischen Auswirkungen der Produktion dürfen nicht unberücksichtigt bleiben.

Deutlich soll an dieser Stelle die letzte Forderung ADAMS hervorgehoben werden, da grundsätzlich jede Produktion als Kuppelproduktion zu charakterisieren ist.<sup>1</sup> Denn die Transformation von Objekten führt i. d. R. nicht nur zum final erstrebten Produkt, sondern auch zu weiteren Nebenprodukten materieller oder energetischer Art.<sup>2</sup>

Die betriebliche Produktion kann als ein im thermodynamischen Sinne offenes System aufgefaßt werden, dessen Elemente untereinander in Beziehungen stehen und welches zwar gegen die Umwelt abgegrenzt wird, aber trotzdem für Energie (E) und Materie (M) durchlässig ist.<sup>3</sup> Es kann vereinfacht als Input-Output-System betrachtet werden, in dem Faktoren zu Produkten transformiert werden.<sup>4</sup> Ein derartiges System läßt sich weiter in Subsysteme, sogenannte Transformationsstellen (TF), unterteilen, in deren kleinster Ausprägung (Arbeitsystem, Produktiveinheit) ein eigenständiger Beitrag zur Lösung der Produktionsaufgabe geleistet wird.<sup>5</sup> Neben dem reinen Transformationsaspekt eines Prozesses muß auch dessen Verkettung in und unter den Produktiveinheiten berücksichtigt werden.<sup>6</sup> Abbildung 1 verdeutlicht diese Zusammenhänge graphisch.

Da ein offenes System den Austausch von Objekten mit der Systemumwelt ermöglicht, wirkt die frei festgelegte und jederzeit änderbare Systemgrenze als „Bilanzhülle“. Somit kann, wie in einer betriebswirtschaftlichen Bilanz auch, zunächst in Bestands- und Flußgrößen unterschieden werden.<sup>7</sup> Die Bestandsgrößen geben die im jeweils betrachteten System vorhandenen Objektbestände wieder. Die Flußgrößen „Input“ und „Output“ beschreiben demgegenüber die Erscheinungen an der festgelegten Systemgrenze, nämlich den Objektaustausch zwischen dem System und dessen Umgebung. Der Input bzw. Output einer Objektart vergrößert bzw. verkleinert deren Bestand im System.

---

1 „Kuppelproduktion (im allgemeinen) liegt in bezug auf ein Produktionssystem vor, wenn bei Erfüllung eines Systemzwecks wenigstens ein von diesem Zweck artverschiedener, beachteter Output unvermeidbar miterzeugt wird.“ DYCKHOFF (Kuppelproduktion, 1996), S. 176.

2 Vgl. KLINGELHÖFER (Entsorgung, 2000), S. 33 ff.

3 Vgl. BLOHM u. a. (Produktionswirtschaft, 1997), S. 23, GELLER (Thermodynamik, 2000), S. 9 f.

4 Vgl. DINKELBACH, ROSENBERG (Umwelt, 2002), S. 2 ff.

5 Vgl. DANGELMAIER (Fertigungsplanung, 2001) S. 5, EVERSHEIM (Produktionstechnik, 1996), Sp. 1536 f., ZÄPFEL (Grundzüge, 2001), S. 11 ff.

6 Vgl. BEA, SCHNAITMANN (Begriff, 1995), S. 279.

7 Vgl. STEINMETZ (Gestaltung, 2001), S. 49 f.

Allein auf der Basis dieser Größen lassen sich Produktionsprozesse jedoch nicht beschreiben. Deren Charakteristikum besteht ja weniger darin, daß ein Austausch über die Systemgrenzen hinweg erfolgt, sondern vielmehr in dem Phänomen, daß zum einen Objekte „untergehen“ und nach der Transformation nicht mehr existieren und zum anderen neue Objekte mit neuen Eigenschaften „entstehen“. Dies kann durch die Größen „Verbrauch“ und „Erzeugung“ erfaßt werden.<sup>1</sup> Neben dem Objektaustausch über die Systemgrenzen hinweg verursacht also auch die innerhalb des Systems stattfindende Transformation der Objekte Bestandsveränderungen.<sup>2</sup> Die Gebrauchsobjekte werden durch Verbrauch und Erzeugung allerdings nicht erfaßt, da sie selbst keiner Transformation unterliegen.<sup>3</sup>

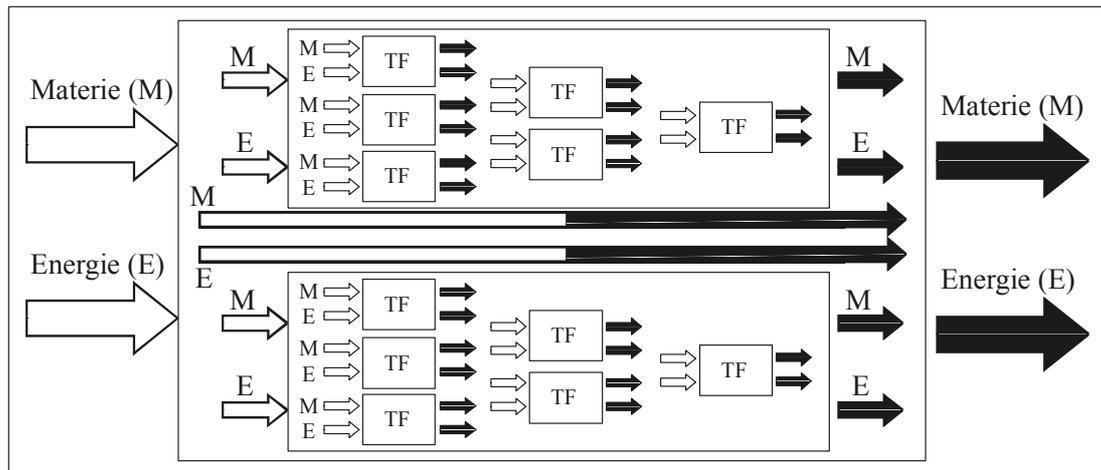


Abbildung 1: Das Produktionssystem als offenes thermodynamisches System

Somit sollten Produktionsfunktionen die Transformation in den Subsystemen beschreiben können, auf unterschiedlichen Aggregationsebenen der Systembetrachtung anwendbar sein und zwischen den Bestands- und den Flußgrößen sowie den Transformationsgrößen unterscheiden.

Verbrauch und Erzeugung entstehen nach obiger Definition unter technologischen Bedingungen, die systeminterner und -externer Herkunft sind. Während die Transformationsgrößen einen kausalen Zusammenhang zu bestimmten technologischen Konstellationen aufweisen müssen, ist dies für die Flußgrößen an der Systemgrenze nicht erforderlich.<sup>4</sup> Demnach ist an

1 Vgl. STEINMETZ (Gestaltung, 2001), S. 87 f.

2 Vgl. STEINMETZ (Gestaltung, 2001), S. 92. Es ist in diesem Zusammenhang erstaunlich, daß selbst in der ingenieurwissenschaftlichen Literatur vereinzelt die Auffassung vertreten wird, ein Aggregat sei eine „Black box“, in die Input eingeht und aus der Output herauskommt, wobei die Vorgänge in dieser „Box“ (Throughput) nicht weiter untersucht werden; vgl. DANGELMAIER, WARNECKE (Fertigungslenkung, 1997), S. 15.

3 Die Einteilung zwischen Verbrauchs- und Gebrauchsobjekt ist relativ. So behält z. B. eine Maschine kurzfristig ihre wesentlichen Eigenschaften, so daß von einem Objektgebrauch gesprochen werden kann. Langfristig kann sie jedoch durch Verschleiß unbrauchbar werden, womit ein Übergang in eine andere Objektart und folglich ein Verbrauch vorliegt. Vgl. STEINMETZ (Gestaltung, 2001), S. 40 ff.

4 Schon GUTENBERG weist darauf hin, daß zwischen Input und Output Produktionsstätten „zwischengeschaltet“ sind, deren „technische Eigenschaften“ den Verbrauch in „gesetzmäßiger Weise“ bestimmen. Vgl. GUTENBERG (Grundlagen, 1983), S. 327 f.

Produktionsfunktionen die Anforderung zu stellen, Mehrdeutigkeiten in der Mengenrelation der Flußgrößen durch die jeweiligen technologischen Bedingungen und deren Wirkungen auf die Transformationsgrößen erklären zu können.<sup>1</sup> Umgekehrt bedeutet dies, daß es möglich sein sollte, aus der Mengentransformation in einer totalen Betrachtung technologische Situationen oder Situationsverläufe zu rekonstruieren. Damit geht diese Forderung über den Anspruch ADAMS hinaus, relevante technologische Tatbestände zu berücksichtigen. Vielmehr wird eine eindeutige Beziehung zwischen Transformationsgrößen und technologischer Situation verlangt, die physikalischen Gesetzmäßigkeiten, beispielsweise dem Energie- und Masseerhaltungssatz,<sup>2</sup> entsprechen muß. Als Grundlage einer solchen Betrachtung, die notwendigerweise recht detailliert sein sollte, bieten sich ingenieurwissenschaftliche Modelle an, die die technologischen und physikalischen Einflußparameter der Transformationsgrößen „Verbrauch“ und „Erzeugung“ berücksichtigen. Sie sollen weitgehend unverändert in betriebswirtschaftliche Modelle eingefügt werden können und eben nicht einem bestimmten Funktionstyp oder einer Einschränkung der Aktionsparameter, wie etwa bei GUTENBERG, unterworfen sein.

## 2.2 Die Produktionsfunktion vom Typ D als theoretisch erweiterbares Konzept

### 2.2.1 Grundlagen

Für seine Untersuchungen unterteilt KLOOCK das Unternehmen in betriebliche Teileinheiten, deren kleinste Ausprägung die Produktiveinheit ist.<sup>3</sup> Dabei weist er jeder Produktiveinheit eine Transformationsfunktion zu, die die Beziehungen zwischen dem Input und dem Output wiedergibt. Es gelten zusätzlich folgende Prämissen:<sup>4</sup>

1. Zwischen den Faktoreinsatzmengen und der „technisch-physikalischen“ Leistung sowie zwischen „technisch-physikalischer“ und ökonomischer Leistung bestehen eindeutige Beziehungen.
2. Das Invarianzprinzip, also der unveränderte Aussagegehalt bei Aggregation, ist gültig.
3. Jede Produktiveinheit kann mehrere Faktoren von anderen Produktiveinheiten empfangen, aber nur ein Produkt abgeben, wobei Qualität und Leistungsfähigkeit konstant sind.
4. Jede Produktiveinheit ist ein Aggregat, das sich mit einer Transformationsfunktion beschreiben läßt.
5. Das Modell ist outputorientiert.
6. Das Unternehmen befindet sich im produktionswirtschaftlichen Gleichgewicht.
7. Es herrscht vollkommene Information.

---

1 Solche Mehrdeutigkeiten sind z. B. die Substitutionalität von Inputobjekten und in Analogie die variable Kopplung von Outputobjekten, die nur durch unvollständige technologische Beschreibungen oder durch die isolierte Betrachtung von Flußgrößen als „Phänomene“ der Produktion auftauchen. Auch stochastische Störgrößen wirken letztlich indirekt über nicht mit Sicherheit voraussagbare, technologische Konstellationen oder nicht beherrschte, aber i. d. R. bekannte Prozesse auf das Mengengerüst; vgl. hierzu OENNING (Kuppelproduktion, 1997), S. 57.

2 Vgl. zum Energie- und Masseerhaltungssatz KUCHLING (Physik, 2001), S. 108.

3 Vgl. KLOOCK (Input-Output-Modelle, 1969), S. 42 ff.

4 Vgl. KLOOCK (Input-Output-Modelle, 1969), S. 63 ff.

8. Das Modell ist statisch.
9. Es gibt konstante Lagerbestände.

$r_{ij}$  steht für die von der Produktiveinheit  $TF_i$  an die Produktiveinheit  $TF_j$  übermittelte Objektmenge und  $x_j$  für die Menge an Objekten, die letztlich an den Markt abgegeben werden. Um nun die Struktur eines Produktionssystems anzugeben, ist die **Strukturmatrix**  $S$  bei  $k$  Produktiveinheiten als  $k$ -quadratische Matrix zu bilden. Bei Gültigkeit der dritten Prämisse gilt für ein Element  $s_{ij}$  der Matrix:

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } r_{ij} > 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2-1)$$

Die Strukturmatrix gibt lediglich an, ob ein Objektstrom von  $TF_i$  nach  $TF_j$  fließt, nicht jedoch dessen Breite. So wie eine Direktbedarfsmatrix an den Stellen, an denen in der Strukturmatrix eine Eins zu finden ist, einen Produktionskoeffizienten aufweist, so stehen in der sogenannten **Direktverbrauchsmatrix**  $F$ , auch Verflechtungsmatrix genannt, Transformationsfunktionen  $f_{ij}$ . Die Transformationsfunktionen  $f_{ij}$  sind „umfassende Produktionskoeffizienten“, die folglich Auskunft darüber erteilen, welche Produktmenge der Stelle  $TF_i$  als Faktoreinsatzmenge in der Stelle  $TF_j$  erforderlich ist, um dort eine Produkteinheit zu erzeugen. Wird von Eigenverbrauch abstrahiert, so ist ihre Diagonale ausschließlich mit Nullen besetzt:

$$F(r) = \begin{pmatrix} 0 & f_{12} & \cdots & f_{1k} \\ f_{21} & 0 & \cdots & f_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{k1} & f_{k2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (2-2)$$

Der Umfang des Objektstroms zwischen einer liefernden Produktiveinheit  $TF_i$  und einer empfangenden Stelle  $TF_j$  ergibt sich aus der Multiplikation der entsprechenden Transformationsfunktion  $f_{ij}$  in Abhängigkeit von der jeweiligen Abgabemenge  $r_j$  des Empfängers mit eben dieser Menge. Die insgesamt im Unternehmen weitergeleitete Menge  $r_i$  des internen Lieferanten entspricht der Summe der an die empfangenden Produktiveinheiten  $TF_j$  abgegebenen Mengen  $r_{ij}$ , wobei für jedes Element  $r_{ij}$  der folgende funktionale Zusammenhang gilt:

$$r_{ij} = f_{ij}(r_j) \cdot r_j \quad \forall i, j. \quad (2-3)$$

Die Mengen aller im Unternehmen weitergelieferten Objekte ergeben sich nunmehr als:

$$r = F(r) \cdot r. \quad (2-4)$$

Wird zudem beachtet, daß ein bestimmter veränderlicher Vektor  $x$  die vom Markt geforderten Absatzmengen der einzelnen Objekte angibt, dann gelten für ein Produktionssystem mit  $k$  Objekten folgende **Input-Output-Gleichungen**:

$$\begin{cases} r_1 = f_{11}(r_1) \cdot r_1 + f_{12}(r_2) \cdot r_2 + \dots + f_{1k}(r_k) \cdot r_k + x_1 \\ r_2 = f_{21}(r_1) \cdot r_1 + f_{22}(r_2) \cdot r_2 + \dots + f_{2k}(r_k) \cdot r_k + x_2 \\ \vdots \\ r_k = f_{k1}(r_1) \cdot r_1 + f_{k2}(r_2) \cdot r_2 + \dots + f_{kk}(r_k) \cdot r_k + x_k \end{cases}, \text{ wobei } f_{ij}(r_j) = 0, \text{ wenn } i = j. \quad (2-5)$$

Oder komprimiert geschrieben:

$$\mathbf{r} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} + \mathbf{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{F}(\mathbf{r}))^{-1} \cdot \mathbf{x} \quad (2-6)$$

Wird die Direktverbrauchsmatrix von der Einheitsmatrix  $\mathbf{E}$  abgezogen und invertiert, ergibt sich die **Gesamtverbrauchsmatrix**  $\mathbf{G}$ .<sup>1</sup>

### 2.2.2 Bildung der betriebswirtschaftlichen Produktionsfunktion

GUTENBERG hatte festgestellt, daß der erforderliche Input nicht allein vom gewünschten Output abhängt, sondern auch von der Intensität, mit der das Aggregat betrieben wird.<sup>2</sup> Seine Produktionsfunktion berücksichtigt daher intensitätsabhängige Produktionskoeffizienten. Analog ergibt sich für ein Element  $r_{ij}$  folgender Zusammenhang:<sup>3</sup>

$$r_{ij} = f_{ij}(d_j, r_j) \cdot r_j \quad \forall i, j, \text{ wobei } f_{ij}(d_j, r_j) = 0, \text{ wenn } i = j. \quad (2-7)$$

Für das gesamte Produktionssystem gilt in Anlehnung an die im vorangegangenen Abschnitt verwandte Notation:

$$\mathbf{r} = \mathbf{F}(\mathbf{d}, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} + \mathbf{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{F}(\mathbf{d}, \mathbf{r}))^{-1} \cdot \mathbf{x}. \quad (2-8)$$

Derartige Produktionsfunktionen lassen sich nicht nur für Verbrauchs-, sondern auch für Gebrauchsobjekte (worunter auch Arbeitskräfte fallen können) aufstellen. Dabei ist der Einsatz unterschiedlichster Transformationsfunktionen mit vielfältigen Einflußgrößen denkbar.<sup>4</sup>

Als allgemeiner Ausdruck für die Produktionsfunktion vom Typ D läßt sich die Direktverbrauchsmatrix in nicht näher benannter Abhängigkeit von den Einflußgrößen  $\mathbf{e}$  angeben:<sup>5</sup>

$$\mathbf{r} = (\mathbf{E} - \mathbf{F}(\mathbf{e}))^{-1} \cdot \mathbf{x}. \quad (2-9)$$

1 Vgl. WALL (Input-Output-Analyse, 1994), S. 293.

2 Vgl. GUTENBERG (Grundlagen, 1983), S. 326 ff.

3 Vgl. KLOOCK (Input-Output-Modelle, 1969), S. 101 ff.

4 Vgl. KLOOCK (Input-Output-Modelle, 1969), S. 105 f. und S. 121 ff.

5 Vgl. KLOOCK (Diskussion, 1969), S. 55 f. KLOOCK nennt auch Mehrdeutigkeiten in der Art der Beziehung zwischen den Variablen als Einflußgrößen. Da aber bereits darauf hingewiesen worden ist, daß diese Beziehungen eindeutig technologisch determiniert sein müssen, soll dieser Aspekt nicht weiterverfolgt werden.

### 2.2.3 Beurteilung der Produktionsfunktion vom Typ D

Die Produktionsfunktion vom Typ D als betriebswirtschaftliche Anwendung der Input-Output-Analyse besitzt den Vorteil, mehrstufige Produktionssysteme abbilden zu können. Daher ist eine Partitionierung der Direktverbrauchsmatrix  $F$  nach der Art der Produktiveinheiten sinnvoll, um die Produktionsorganisation besser zu erfassen.<sup>1</sup> Hat ein Unternehmen  $m$  Input- und  $n$  Transformationsstellen, so kann  $F$  unterteilt werden in:<sup>2</sup>

$$F = \begin{pmatrix} F_{m,m} & F_{m,n} \\ F_{n,m} & F_{n,n} \end{pmatrix}. \quad (2 - 10)$$

Dabei gibt der Zeilenindex der Untermatrizen die Art der liefernden und der Spaltenindex die Art der empfangenden Stelle an.  $F_{m,n}$  ist beispielsweise die „Direktverbrauchsuntermatrix“ für die Mengen an Inputstellenobjekten, die zur Produktion der Transformationsstellenobjekte erforderlich sind.

Während bei GUTENBERGS Funktion vom Typ B nur  $F_{m,n}$  nicht null ist, erfaßt HEINENS Produktionsfunktion vom Typ C auch Verflechtungen zwischen Fertigungsstellen, die jedoch nicht zyklisch sein dürfen. In Erweiterung zu HEINEN läßt KLOOCKS Funktion vom Typ D auch mehrstufige Prozesse mit zyklischen Verflechtungen zu.<sup>3</sup> Somit vermag die Produktionsfunktion vom Typ D die Struktur und die Mechanismen eines Produktionssystems umfassend abzubilden. Darüber hinaus können mit ihrer Hilfe die Ergebnisse des Produktionsprozesses in Abhängigkeit von den gewählten Transformationsfunktionen vorherbestimmt werden.

Die Funktion vom Typ D weist nur einen geringen empirischen Gehalt auf. Sie verliert ihren unverbindlichen, allgemeinen und rein theoretischen Charakter erst durch Spezifizierung der zu verwendenden Transformationsfunktionen. Erst durch das Einsetzen konkreter Transformationsfunktionen mit entsprechendem empirischem Gehalt, in denen auch *sämtliche Determinanten des Verbrauchs* erfaßt werden können, gelingt die Synthese von Theorie und Empirie.<sup>4</sup> Dadurch ergibt sich für diesen Produktionsfunktionstyp ein sehr weites Anwendungsfeld. Je realistischer die Transformationsfunktionen jedoch werden, desto anspruchsvoller wird die mathematische Lösung des Gesamtproblems, wobei sich bei nichtlinearen Beziehungen, die bei technologischen Verfahrensberechnungen häufig auftreten, u. U. keine analytische Lösung mehr für den Gesamtverbrauch ermitteln läßt.<sup>5</sup>

Die Produktionsfunktion vom Typ D ist widerspruchsfrei und an Hand von realen Beispielen auch faktisch überprüfbar. Sie stellt nicht auf *bestimmte Beziehungstypen zwischen Verbrauch und Erzeugung* ab. Die Eindeutigkeit der technologischen Bestimmung von Verbrauch und Erzeugung und somit die *technologische Fundierung* an sich werden durch die Art der Transformationsfunktionen bestimmt. Die Strukturierung des Systems erlaubt eine saubere Tren-

1 Vgl. WÖHE/DÖRING (Einführung, 2002), S. 399

2 Vgl. KLOOCK (Diskussion, 1969), S. 59.

3 Vgl. KLOOCK (Diskussion, 1969), S. 64.

4 Vgl. SCHWEITZER (Industriebetriebslehre, 1994), S. 608.

5 Vgl. STEVEN (Produktionstheorie, 1998), S. 218.

nung der verschiedenen Objekte eines Systems in *homogene Objektklassen* durch eine beliebig feine Untergliederung. Sie ermöglicht ebenso die *Einbeziehung aller mengenbeeinflussenden Funktionsbereiche*. Jedoch findet eine Trennung in Fluß- und Transformationsgrößen des Systems nicht statt. Die Gültigkeit des Invarianzprinzips ermöglicht die Aggregierbarkeit und damit die Anwendung auf verschiedenen Aggregationsebenen.

Vor dem Hintergrund, daß jede Produktion Kuppelproduktion ist und somit zu mehr als nur einer Produktart führt, ist das Modell um die *Abbildung ökologischer Auswirkungen* zu ergänzen. Auch Abfall ist als Produkt zu betrachten, da er zu entsorgen und daher ebenfalls Objekt wirtschaftlichen Handelns ist.<sup>1</sup> Die Betrachtung muß folglich mehr als ein Produkt pro Aggregat zulassen, wobei die unterschiedlichen Objektarten in anderen Produktiveinheiten oder zur Bestandsänderung der Lager Verwendung finden können. ADAMS Forderung nach *Erfassung des Mehrproduktfalls* gilt also nicht nur für das gesamte System, sondern für jedes einzelne Aggregat.

Unerklärt bleibt bei KLOCK die Wahl des Intensitätsvektors  $d$ . Sofern keine Rückkopplungen existieren, können die Intensitäten der Aggregate sukzessiv gegen die Produktionsrichtung festgelegt werden. Treten jedoch Zyklen auf, so beeinflussen sich die Intensitäten der einzelnen Produktionsstufen gegenseitig, wodurch eine simultane Planung erforderlich wird.

Darüber hinaus wird die Verteilung der Entscheidungskompetenzen innerhalb des Unternehmens nicht berücksichtigt. Offen bleibt damit auch die Frage, ob die Intensität eines Aggregats allein von der Produktionsleitung (Top-down-Planung), allein vom Mitarbeiter an der Maschine (Bottom-up-Planung) oder in gegenseitiger Abstimmung (Gegenstromprinzip) festgelegt werden sollte.<sup>2</sup>

## 2.3 Verbrauchs- und Erzeugungsfunktionen als Konzept zur Zusammenfassung ingenieurwissenschaftlicher Erkenntnisse

### 2.3.1 Formale Darstellung der Funktionen

Verbrauch und Erzeugung stellen die Transformationsgrößen der Produktion dar. Die Trennung der Flußgrößen Input und Output von diesen Transformationsgrößen wird in Abbildung 2 verdeutlicht, wobei sich die Vorzeichenkonvention gemäß der thermodynamischen Auffassung an den Auswirkungen auf die Objektbestände im System orientiert. Einträge in das System sowie erzeugte Mengen sind mit positiven und Austritte sowie Verbräuche mit negativen Vorzeichen zu versehen. In das System eingebrachte Objektmengen gehen entweder in der Produktion unter oder verlassen das System nach einer gewissen Zeit unverändert. Umgekehrt können Objekte das System als Output verlassen, die zuvor erzeugt wurden oder aus der Umgebung in das System gelangten. Bei mehrstufigen Prozessen treten auch Objekte in Erscheinung, die in einer vorgelagerten Stufe erzeugt worden sind und in einer Folgestufe wieder verbraucht werden.

---

1 Vgl. MATSCHKE, LEMSER (Entsorgung, 1992), S. 87.

2 Vgl. STEVEN (Koordination, 2001), S. 969.

Mit der Zielsetzung, die technologischen Aktionsparameter weitgehend unverändert in die Betrachtung einzubeziehen, sollte eine geringe Aggregationsebene für die Verbrauchs- und Erzeugungsfunktionen angestrebt werden, etwa auf der Ebene einer einzelnen Produktiv-einheit oder sehr eng aneinander gekoppelter Produktiv-einheiten. Ein komplettes Produktionssystem kann dann durch eine Kombination entsprechender Teilmodelle beschrieben werden.

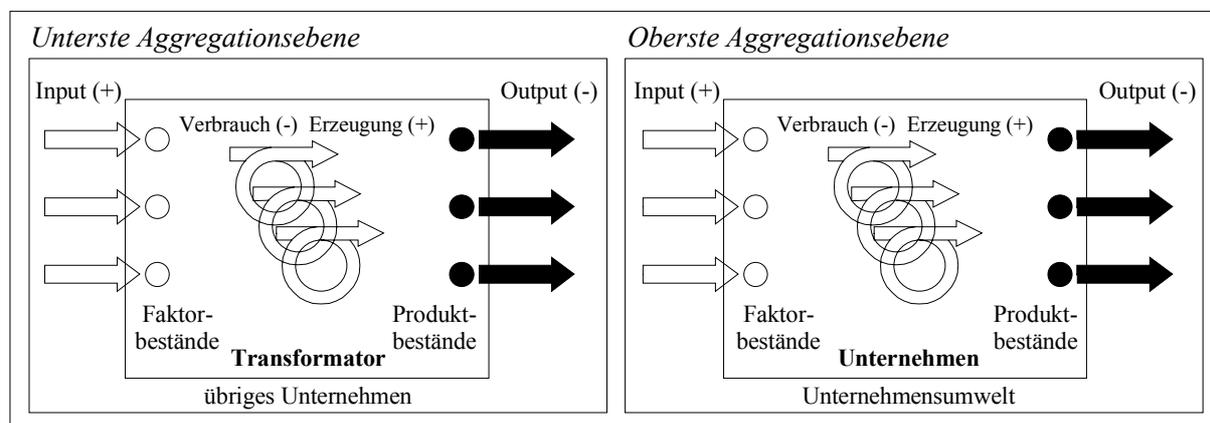


Abbildung 2: Produktion als Objektumwandlung auf unterschiedlichen Aggregationsebenen

Es sei nun  $v_i$  der Verbrauch und  $p_i$  die Erzeugung der Objektart  $i$ . In Abhängigkeit von der vorerst nicht näher differenzierten technologischen Situation  $z$  sind diese als Funktionen darstellbar.<sup>1</sup>

$$v_i = v_i(z). \quad (2-11)$$

$$p_i = p_i(z). \quad (2-12)$$

Für mehrere Objekte lassen sich die Gleichungen in Vektoren zusammenfassen:

$$v = v(z). \quad (2-13)$$

$$p = p(z). \quad (2-14)$$

Die Gleichungen zeigen, daß Verbrauch und Erzeugung nur indirekt über die technologischen Parameter miteinander verknüpft sind.

Verbrauch und Erzeugung sind, wie eingangs erwähnt, die Transformationsgrößen, die die Bestände im Falle des Verbrauchs vermindern und im Falle der Erzeugung erhöhen. Ein höherer Input in das System führt aber nur dann zu einem höheren Output, wenn die technologischen Parameter  $z$  und dadurch Verbrauch und Erzeugung entsprechend angepaßt werden. Erst dann ist es möglich, durch verstärkten Verbrauch und verstärkte Erzeugung auch höhere Faktormengen zu transformieren und höhere Produktmengen dem System zu entnehmen.

<sup>1</sup> Für die Gleichungen und die vektorielle Darstellung vgl. STEINMETZ (Gestaltung, 2001), S. 90.

Das Modell kann in Bestandsvektoren eingebettet werden, in denen neben den Transformationsgrößen auch die Flußgrößen und Anfangsbestände eingehen. Mit  $r$  für den Input- und  $x$  für den Outputvektor sowie  $b_0$  für den Vektor des Anfangsbestands bildet sich ein Bestandsvektor zum Ende einer Periode 1 nach folgender Gleichung:<sup>1</sup>

$$b_1 = b_0 + r_1 + v_1(z) + p_1(z) + x_1. \quad (2 - 15)$$

Für die weiteren Betrachtungen sei davon ausgegangen, daß die im System vorhandenen Bestände ausreichend sind und keine Fehlmengen auftreten, da die Modellierung der Transformation im Mittelpunkt steht.

Die vektorielle Darstellung erlaubt es, zum einen bislang isoliert nebeneinander stehende ingenieurwissenschaftliche Mengenmodelle miteinander zu verknüpfen und zum anderen sowohl betriebswirtschaftliche als auch ingenieurwissenschaftliche Transformationsfunktionen für Verbrauch und Erzeugung zu verwenden.<sup>2</sup> Die Zuordnung in den Bereich der BWL oder der Ingenieurwissenschaften ist damit abhängig von der Herkunft der gewählten Transformationsfunktionen. An dieser Stelle wird also erstmals die „leere Hülle“ einer der Produktionstheorie entspringenden Funktion mit ingenieurwissenschaftlichen Erkenntnissen gefüllt. Eine Umstellung zu einer expliziten Produktionsfunktion soll nicht erfolgen.

### 2.3.2 Berücksichtigung von zeitveränderlichen Größen

Die oben vorgestellten Verbrauchs- und Erzeugungsfunktionen sind statischer Natur. Sie stellen einen Sonderfall der kinematischen Betrachtung dar. Dies bedeutet, daß während der betrachteten Periode keine Änderungen der Verbrauchs- und Erzeugungsfunktionen auftreten. Innerhalb der statisch-konstanten Betrachtungsweise bleiben alle Verbrauchs- und Erzeugungsraten konstant, was seinen Ursprung in unveränderten technologischen Parametereinstellungen während der betrachteten Periode hat. Die Periode wird nur als Ganzes betrachtet, eine Mengenangabe zu bestimmten Zeitpunkten innerhalb der Periode ist nicht möglich.

Berücksichtigt man jedoch, daß zumindest einige technologische Parameter im Zeitverlauf einer Periode veränderlich sein können, muß das Modell um eine kinematische Betrachtungsweise erweitert werden.<sup>3</sup> Es wird also, analog zu HEINENS Produktionsfunktion vom Typ C, die schwankende Belastung von Aggregaten betrachtet. Dies ist insofern vorteilhaft, als in

---

1 Vgl. STEINMETZ (Gestaltung, 2001), S. 93.

2 So können z. B. beim Verfahren Längsdrehen die Menge bzw. die Produktionsgeschwindigkeiten des Verbrauchsobjekts Vorprodukt und des Erzeugungsobjekts Welle sehr leicht über die Hauptzeit, die durch die technologischen Einstellungen (Umdrehungsgeschwindigkeit und Vorschub) determiniert werden, und entsprechende Zeitzuschläge, wie sie im Maschinenbau empirisch ermittelt wurden, als Funktionen eingefügt werden. Der Energieverbrauch ist durch die Berechnung der notwendigen Leistung und über die Kenntnis der Zeit ermittelbar, in der diese abgerufen wird (vereinfachend kann hier die Hauptzeit genutzt werden). Auch der Verbrauch des Werkzeuges ist durch die Standzeitmodelle abzubilden, die die maximale Einsatzdauer eines Werkzeuges berechnen. Letztlich ist auch das Produkt Spanabfall volumenmäßig nichts anderes als der abgetragene Hohlzylinder. Über die Werkstoffdichte kann dieser Abfall auch in Gewichtseinheiten angegeben werden.

3 Vgl. STEINMETZ (Gestaltung, 2001), S. 94 ff.

den Ingenieurwissenschaften an Stelle von absoluten Mengenfunktionen oftmals Geschwindigkeitsfunktionen angegeben werden.

Obwohl ein solches Modell eine Zeitkomponente enthält, kann trotzdem nicht von einem dynamischen Modell gesprochen werden. Es wird nach wie vor nur eine Periode betrachtet, wengleich innerhalb dieser Periode einzelne Größen schwanken können. Dynamisch ist ein Modell aber erst dann, wenn es „die Zeit in dem Sinne berücksichtigt ..., daß sich die untersuchten ökonomischen Variablen auf mehrere Zeitpunkte oder Perioden beziehen und die zeitlich verzögerte Reaktion der betrachteten Variablen erfaßt wird.“<sup>1</sup> Eine zeitliche Verzögerung von Variablenreaktionen tritt bei kinematischen Modellen aber nicht auf; somit findet auch keine Untersuchung intertemporaler Wirkungszusammenhänge statt.<sup>2</sup> Geht man auf die physikalische Herkunft von „kinematisch“ und „dynamisch“ ein, so versteht sich die Kinematik als Bewegungslehre, bei der die Veränderung eines Objekts im Zeitablauf und die davon abgeleiteten Größen, wie Geschwindigkeit und Beschleunigung, von Interesse sind, nicht jedoch deren Ursache in Form der wirkenden Kräfte. Dagegen bezieht die Dynamik die den Bewegungen zugrundeliegenden Impulse und damit die wirkenden Kräfte mit ein und erklärt Veränderungen der Bewegungsgrößen in Abhängigkeit von zeitlich verzögerten Impulsen.<sup>3</sup>

Wird der technologische Parameter  $z_i \in z$  betrachtet, so ist seine Entwicklung in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  folgendermaßen darstellbar:<sup>4</sup>

$$z_i = z_i(t). \quad (2 - 16)$$

Auch der Vektor aller Aktionsparameter eines Aggregats kann somit von  $t$  abhängen:

$$z = z(t). \quad (2 - 17)$$

Da längerfristig aber alle technologischen Parameter zeitpunktabhängig variiert werden können, gilt für die langfristige Betrachtung:

$$v = v(z(t)). \quad (2 - 18)$$

$$p = p(z(t)). \quad (2 - 19)$$

Es ist naheliegend, daß über die im Zeitverlauf schwankenden technologischen Parameter ebenso Verbrauch und Erzeugung nicht konstante Verläufe aufweisen. Somit sind auch Momentanverbrauch und -erzeugung, die auch als Verbrauchs- und Erzeugungsraten bzw. -geschwindigkeiten bezeichnet werden, durch die jeweilige Ausprägung der Technologieparameter im Zeitpunkt  $t$  determiniert.<sup>5</sup> Formal läßt sich dies wie folgt ausdrücken:

---

1 MAY (Dynamische Produktionstheorie, 1992), S. 10.

2 Vgl. MAY (Dynamische Produktionstheorie, 1992), S. 10.

3 Vgl. STEVEN (Produktionstheorie, 1998), S. 20 f.

4 Zu dem Modell in Abhängigkeit von zeitveränderlichen Größen vgl. STEINMETZ (Gestaltung, 2001), S. 94 ff.

5 Vgl. STEINMETZ (Gestaltung, 2001), S. 94 ff.

$$\dot{v}_i = \frac{dv_i}{dt} \quad \text{bzw.} \quad \dot{p}_i = \frac{dp_i}{dt}. \quad (2-20)$$

$$\dot{v}_i(t) = \dot{v}_i(z(t)) \quad \text{bzw.} \quad \dot{p}_i(t) = \dot{p}_i(z(t)). \quad (2-21)$$

Um die Verbrauchs- bzw. Erzeugungsmengen eines bestimmten Zeitabschnitts zu berechnen, muß die Funktion der Verbrauchs- bzw. Erzeugungsrate über die Zeitdauer integriert werden:

$$v_i = \int_{t_0}^{t_1} \dot{v}_i(t) dt. \quad (2-22)$$

$$p_i = \int_{t_0}^{t_1} \dot{p}_i(t) dt. \quad (2-23)$$

Bei der statisch-konstanten Betrachtungsweise ist:

$$z(t) = z = \text{const.} \quad (2-24)$$

Damit sind auch Verbrauchs- und Erzeugungsraten gleichbleibend, und die Abhängigkeit beider bezieht sich lediglich auf die konstanten technologischen Bedingungen.

### 2.3.3 Beurteilung der Verbrauchs- und Erzeugungsfunktionen

Die Verbrauchs- und Erzeugungsfunktionen ermöglichen es, die Mechanismen der Produktion wiederzugeben und Produktionsergebnisse soweit vorherzubestimmen, wie sie *technologisch determiniert* sind. Da Gebrauchsobjekte definitionsgemäß weder einem Verbrauch noch einer Erzeugung unterliegen, muß ihre Beteiligung an der Produktion anderweitig dargestellt werden. Das geschieht durch eine gesonderte Erfassung des zeitlichen Verlaufs von Input und Output.<sup>1</sup>

Mit Hilfe des Modells kann über entsprechende Vektoren sowohl der *Mehrfaktoren-* als auch der *Mehrproduktfall* und somit auch der Regelfall der (*ökologischen*) *Kuppelproduktion* abgebildet werden.<sup>2</sup> Mehrstufige Produktionsprozesse lassen sich modellieren, indem für die einzelnen Stufen separat Verbrauchs- und Erzeugungsfunktionen aufgestellt und über Bestandsfunktionen miteinander sowie mit dem Systeminput und -output verknüpft werden.

Die Berücksichtigung empirischer Erkenntnisse aus benachbarten Wissenschaftsdisziplinen ist gegeben, da der Ansatz der Verbrauchs- und Erzeugungsfunktionen im Grunde nur zustandsabhängig determinierte Mengenfunktionen aus diesen Disziplinen benötigt, die ihrerseits widerspruchsfrei sein und empirischen Gehalt aufweisen müssen. Er ist nicht auf

1 Vgl. STEINMETZ (Gestaltung, 2001), S. 98 ff.

2 Die Darstellung des Mehrfaktoren- und Mehrproduktfalles in einer Erweiterung der Aktivitätsanalyse zur komponentenweisen Betrachtung eines Produktes findet sich z. B. bei KLINGELHÖFER (Entsorgung, 2000), S. 227 ff.

*bestimmte Beziehungstypen zwischen den Variablen* beschränkt und weist den enormen Vorteil auf, daß keine direkte Beziehung zwischen Verbrauchs- und Erzeugungsmengen notwendig ist, um das Modell aufzustellen. Damit erfüllt der Ansatz die Forderung nach Allgemeingültigkeit. Hinsichtlich der Anwendung auf technologisch determinierte Produktionssysteme ist auch von einer faktischen Überprüfbarkeit des Ansatzes auszugehen, da die zugrunde gelegten ingenieurwissenschaftlichen Zusammenhänge letztlich auch faktisch beobachtet worden sind. Somit sind die Mindestanforderungen an produktionstheoretische Modelle erfüllt.

Der Bewährungsgrad des Modells kann und soll hier nicht abgeschätzt werden. Es ist jedoch von Nachteil, daß eine sehr genaue technologische Beschreibung von Verbrauch und Erzeugung notwendig ist, so daß sich das Modell nur für sehr gut erforschte Produktionszweige eignet. Da der vorliegende Arbeitsbericht nicht auf analytische Produktionstheorien ausgerichtet ist, soll eine Axiomatisierung des Ansatzes nicht erfolgen. Die vektorielle Darstellung eröffnet jedoch die Möglichkeit, diesen Ansatz mit der axiomatisch begründeten Aktivitätsanalyse<sup>1</sup> zu verbinden. Es ist festzuhalten, daß der Geltungsbereich der Zusammenhänge durch die gewählten empirischen Funktionen bestimmt wird.

Die Forderung nach („ausreichender“) *Homogenität der betrachteten Objekte* stellt kein Problem dar, da eine Erweiterung oder Verfeinerung der Objektklassen durch eine Vergrößerung der Verbrauchs- und Erzeugungsvektoren erfolgen kann. Auch die Erfassung *aller mengenbeeinflussenden Funktionsbereiche* scheint prinzipiell möglich, indem zusätzlich Zusammenhänge rechtlich-ökonomischer Natur berücksichtigt werden.<sup>2</sup>

Die Berücksichtigung zeitveränderlicher Größen überwindet zwar die rein *statische Betrachtung*, die wünschenswerte dynamische Sichtweise, die die intertemporale Auswirkung von Entscheidungen insbesondere bei Änderung der technologischen Parameter erfaßt, wird dadurch jedoch nicht erreicht.

Der produktionstheoretische Ansatz unterscheidet explizit zwischen Bestands-, Fluß- und Transformationsgrößen des Systems. Der Zusammenhang zwischen den Größen läßt sich durch die oben dargelegte Bestandsgleichung herstellen.

---

1 Zur Aktivitätsanalyse vgl. einfürend FANDEL (Produktion, 1996), S. 34 ff., KISTNER (Produktion, 1993), S. 54 ff. Umfassend wurde sie erstmals 1951 von KOOPMANS dargestellt und von WITTMANN 1968 auf die betriebswirtschaftliche Produktionstheorie übertragen. Vgl. KOOPMANS (Activities, 1962) und WITTMANN (Produktionstheorie, 1968).

2 Vgl. dazu STEINMETZ (Gestaltung, 2001), S. 104 ff.

### 3 Kombination der Produktionsfunktion vom Typ D mit Verbrauchs- und Erzeugungsfunktionen

#### 3.1 Grundlagen und Prämissen des Modells

Die in Unterkapitel 2.3 vorgestellten Verbrauchs- und Erzeugungsvektoren sollen nunmehr als Transformationsfunktionen in die Produktionsfunktion vom Typ D aus Unterkapitel 2.2 eingehen. Dadurch wird einerseits die prinzipielle Abbildungsmöglichkeit von mehrstufigen Produktionsprozessen durch die Verbrauchs- und Erzeugungsfunktionen konkretisiert. Andererseits wird der Mangel der KLOCKschen Produktionsfunktion behoben, sich lediglich auf die Einproduktfertigung in einer Produktiveinheit zu konzentrieren, weil sich im Erzeugungsvektor mehrere Ausbringungsobjekte darstellen lassen.

Im folgenden wird ein Produktionssystem betrachtet, das in Lager- und Transformationsstellen unterteilt ist. Die Lagerstellen nehmen alle Objektbestände des Systems auf. Es erscheint hierbei sinnvoll, eine begriffliche Unterscheidung in Faktor- und Produktlagerstellen vorzunehmen.

Bezüglich der Gebrauchsobjekte führt die Unterteilung dazu, daß sie zwar bestandsmäßig in einer Lagerstelle erfaßt werden, sie aber gleichzeitig ein Subsystem, in dem eine Transformation stattfindet, – also eine Transformationsstelle – darstellen können. Das Gebrauchsobjekt „Drehmaschine“ ist demnach bestandsmäßig einer (Faktor-)Lagerstelle zugeordnet, repräsentiert in einer Dreherei aber gleichzeitig eine Transformationsstelle.

Voraussetzung der weiteren Betrachtung ist die völlige Homogenität der in einer Klasse zusammengefaßten Objekte. Dies ist vor allem für die saubere Trennung der Dimensionen (Einheiten) der Objekte notwendig. Diese Forderung schließt jedoch nicht die Möglichkeit aus, dimensionsverschiedene Objekte vorübergehend zu einem Bündel zusammenzufassen.

Wie bereits angesprochen, können geeignete Gebrauchsobjekte als Transformationsstelle aufgefaßt und auch zu einer graphischen Strukturierung des Systems genutzt werden. Deren Eigenschaften fließen in Form technologischer Parameter in die Verbrauchs- und Erzeugungsfunktionen ein; diese Funktionen sind folglich von den ausgewählten Gebrauchsfaktoren abhängig.

Abbildung 3 gibt ein auf diese Weise strukturiertes Produktionssystem wieder. Dabei bezeichnen FL die Faktorlager-, TF die Transformations- und PL die Produktlagerstellen. In den Transformationsstellen finden die Vorgänge statt, die zu den Transformationsgrößen Verbrauch  $\mathbf{v}$  und Erzeugung  $\mathbf{p}$  führen.  $\mathbf{r}$  steht für die zu verbrauchenden,  $\mathbf{t}$  für die zu gebrauchenden Objekte und  $\mathbf{x}$  für die erzeugten Objekte. Die gestrichelten Linien von den Faktorlagerstellen I und II geben den im Modell nicht explizit abgebildeten Gebrauch von Objekten wieder. Im hier dargestellten System besteht eine Rückkopplung zwischen den Transformationsstellen: Das zweite Erzeugungsobjekt der Transformationsstelle 4 wird zum zweiten Verbrauchsobjekt der Transformationsstelle 3. Mit Ausnahme von FL (I) und FL (II) werden die Stellen mit  $k$  indiziert, so daß die Mächtigkeit der Indexmenge  $K$  der Stellenzahl ohne die Faktorlagerstellen I und II entspricht.

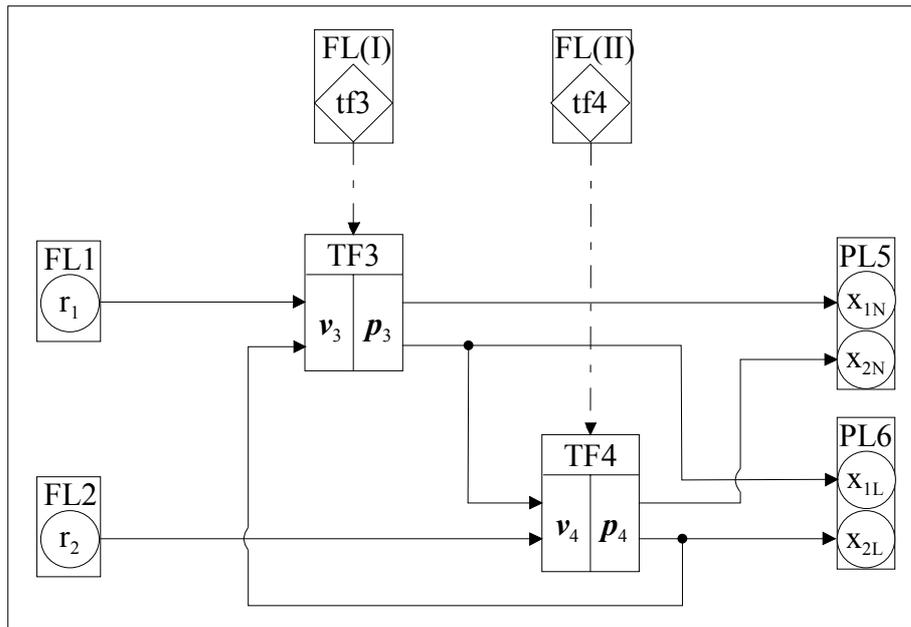


Abbildung 3: Graphische Darstellung der Struktur eines Produktionssystems

Ein Aggregat als Transformator wird mit Hilfe der Verbrauchs- und Erzeugungsfunktionen in Abhängigkeit von der jeweiligen technologischen Situation, wie in Unterkapitel 2.3 dargelegt, beschrieben. Für die Vektoren  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{p}$  der Verbrauchs- bzw. Erzeugungsfunktionen einer Stelle  $k$  gilt:

$$\mathbf{v}_k = (v_{kc}) \quad \forall c \in C_k \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{p}_k = (p_{kd}) \quad \forall d \in D_k. \quad (3-1)$$

Hierbei werden die verschiedenen Verbrauchsfunktionen mit  $c$  und die Erzeugungsfunktionen mit  $d$  indiziert. Mithin stellen  $C_k$  und  $D_k$  die zugehörigen Indexmengen der Funktionen einer Stelle  $k$  dar. Ihre Mächtigkeiten entsprechen der Anzahl der in einer Stelle  $k$  verbrauchten bzw. erzeugten Objektarten.

Damit werden die Erscheinungen in den Transformationsstellen erklärt, jedoch ohne direkte funktionale Abhängigkeit zwischen Verbrauchs- und Erzeugungsmengen. Der „Verbrauch eines Aggregats“ wird entweder den Faktorlagerstellen entnommen oder stammt aus der Erzeugung anderer Produktionsstufen; und die „Erzeugung eines Aggregats“ wird in anderen Produktionsstufen „verbraucht“ oder geht in die Produktlagerstellen ein.

Die weiteren Prämissen zur Aufstellung des Modells lauten:

1. Ein Aggregat (bzw. eine Transformationsstelle) kann mehrere Objektarten verbrauchen und erzeugen.
2. Jedes Aggregat besitzt genau so viele Verbrauchs- und Erzeugungsfunktionen wie Verbrauchs- und Erzeugungsojektarten.
3. Verbrauch und Erzeugung sind vollständig durch natur- und ingenieurwissenschaftliche Mengenmodelle determiniert.

4. Die technologische Situation eines Aggregats kann unabhängig von den Parametereinstellungen anderer Aggregate gewählt werden.
5. Es sind ausreichende Bestände vorhanden und von Schwund wird abstrahiert.
6. Es bestehen keine direkten Beziehungen zwischen den bestandsführenden Faktor- und Produktlagerstellen.
7. Es verbleiben nach Abschluß der Produktion keine Verbrauchs- oder Erzeugungsobjekte in den Transformationsstellen.
8. Transportwege und -zeiten sowie Fristen und Termine werden vernachlässigt.
9. Das Modell ist erzeugungs- bzw. outputorientiert und statisch.

## 3.2 Ermittlung der Direktverbrauchsmatrix

### 3.2.1 Aufstellen der Strukturmatrix

Die Strukturmatrix  $\mathbf{S}$  ist in Anlehnung an KLOCK eine  $|K|$ -quadratische Matrix der Untermatrizen  $\mathbf{S}_{ij}$ , wenn die Produktionsstruktur wie zuvor beschrieben wiedergegeben wird. Eine Untermatrix gibt die Beziehungen zwischen der Stelle  $i \in K$  und der Stelle  $j \in K$  wieder. Die Menge  $K$  aller Stellen setzt sich disjunkt und vollständig aus der Menge  $M$  der Faktorlager-, der Menge  $N$  der Transformations- und der Menge  $O$  der Produktlagerstellen zusammen. Ist die Strukturmatrix zyklensfrei, handelt es sich um eine obere Dreiecksmatrix.

Die Zeilenzahl einer Untermatrix  $\mathbf{S}_{ij}$  entspricht der Mächtigkeit der Menge  $Q_i$  der Objektarten  $q$ , die die Transformations- bzw. die Faktorlagerstelle  $i$  verlassen. Die Spaltenzahl entspricht der Mächtigkeit der Menge  $W_j$  der Objektarten  $w$ , die in die Transformations- bzw. Produktlagerstelle  $j$  eingehen. Jede Untermatrix ist demnach eine  $|Q_i| \times |W_j|$ -Matrix. Da von Eigenverbrauch innerhalb einer Stelle abstrahiert wird, befinden sich auf der Hauptdiagonalen der Strukturmatrix ausschließlich Nullmatrizen. Die gesamte Strukturmatrix besteht somit aus  $\sum_k |Q_k|$  Zeilen und  $\sum_k |W_k|$  Spalten:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} s_{1k'}^{11} & \dots & s_{1k'}^{1w_{k'}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1k'}^{q_1 1} & \dots & s_{1k'}^{q_1 w_{k'}} \end{pmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{pmatrix} s_{k'1}^{11} & \dots & s_{k'1}^{1w_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{k'1}^{q_{k'} 1} & \dots & s_{k'1}^{q_{k'} w_1} \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{0}) & \dots & (s_{1k'}^{Q_1 W_{k'}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (s_{k'1}^{Q_{k'} W_1}) & \dots & (\mathbf{0}) \end{pmatrix}$$

mit  $K = \{1, 2, \dots, k, \dots, k'\}$ .

(3-2)

Ein Element  $s_{ij}^{qw}$  einer Untermatrix  $\mathbf{S}_{ij}$  verfeinert die Beschreibung der Beziehungen zwischen zwei Stellen. Dabei gilt folgende Konvention:<sup>1</sup>

$$s_{ij}^{qw} = \begin{cases} 1, & \text{falls das Objekt } q \text{ des Aggregates bzw.} \\ & \text{der Faktorlagerstelle } i \text{ als Objekt } w \text{ des} \\ & \text{Aggregates bzw. der Produktlagerstelle } j \\ & \text{verbraucht bzw. in deren Bestand} \\ & \text{aufgenommen wird,} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit } i, j \in K, q \in Q_i, w \in W_j. \quad (3-3)$$

Die Differenzierung der Stellen erlaubt eine Partitionierung der Strukturmatrix hinsichtlich der Faktorlager-, Transformations- und Produktlagerstellen:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{mm} & \mathbf{S}_{mn} & \mathbf{S}_{mo} \\ \mathbf{S}_{nm} & \mathbf{S}_{nn} & \mathbf{S}_{no} \\ \mathbf{S}_{om} & \mathbf{S}_{on} & \mathbf{S}_{oo} \end{pmatrix} \quad \forall m \in M, \forall n \in N \text{ und } \forall o \in O. \quad (3-4)$$

Da zwischen den Faktor- und Produktlagerstellen untereinander keine Beziehungen bestehen sollen, sind nur die Matrizen  $\mathbf{S}_{mn}$ ,  $\mathbf{S}_{nn}$ , und  $\mathbf{S}_{no}$  besetzt, und dies i. d. R. nur schwach.<sup>2</sup>

Ein Erzeugungsobjekt eines Aggregats kann in mehrere Aggregate und Produktlagerstellen eingehen, so daß in einer Zeile der Matrix mehrere Stellen mit 1 besetzt sein können. Wenn es auch denkbar ist, daß mehrere Transformatoren ein artgleiches Objekt erzeugen, das an anderer Stelle verbraucht wird, so muß trotzdem jede aggregatspezifisch erzeugte Objektart als eigenständiges Verbrauchsobjekt aufgefaßt werden. Dies ist insbesondere bei einer Strukturierung alternativer Erzeugungsquellen für Verbrauchsobjekte eines Aggregats notwendig, da das Matrizenkalkül einen Alternativbezug von Objekten nicht ohne weiteres zu berücksichtigen vermag. Ist ein solcher Alternativbezug zu modellieren, muß hierfür entweder in der Transformationsstelle ein Parameter das Aufteilungsverhältnis angegeben oder dem Aggregat eine „künstliche Aufteilungsstelle“ vorgeschaltet werden. So gilt auch für die Produktlagerstellen, daß bei artgleichen Objekten in aggregatspezifische Lagerstellen unterschieden werden muß. Eine „künstliche Aufteilungsstelle“ hat hier recht wenig Sinn. Es kann also in diesem Modell des Matrizenkalküls jede Spalte nur an einer Stelle mit 1 besetzt sein.

### 3.2.2 Ermittlung der Produktionskoeffizientenmatrix

Die Produktionskoeffizientenmatrix  $\mathbf{PK}$  ist eine Diagonalmatrix, deren Diagonalelemente Untermatrizen sind. Diese Untermatrizen sind für die bestandsführenden Faktor- und Produktlagerstellen (quadratische) Einheitsmatrizen, da diese Stellen keine Transformation vornehmen und die eingegangenen Objektarten den abgegebenen entsprechen müssen. Die Zeilen-

1 Vgl. KLOCK (Input-Output-Modelle, 1969), S. 53 ff.

2 Für die aufgezeigte Produktionsstruktur ist eine solche dünn besetzte Strukturmatrix im Anhang A.2 dargestellt.

und Spaltenzahl der Untermatrizen der Transformationsstellen richtet sich nach der Anzahl empfangener bzw. abgegebener Objektarten. Da diese sich jedoch häufig bei der Produktion in der Anzahl unterscheiden, sind die Matrizen i. d. R. nicht quadratisch. Die Zeilenanzahl entspricht der Mächtigkeit der Menge  $C_n$  der Verbrauchsobjektarten, die Spaltenanzahl ist gleich der Mächtigkeit der Menge  $D_n$  der Erzeugungsobjektarten einer Transformationsstelle  $n \in N$  (es entstehen demnach  $|C_n| \times |D_n|$ -Matrizen). Es bildet sich somit eine folgendermaßen strukturierte Matrix:

$$PK = \begin{pmatrix} PK_{mm} & 0 & 0 \\ 0 & PK_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & PK_{oo} \end{pmatrix} \quad \forall m \in M, \forall n \in N \text{ und } \forall o \in O. \quad (3-5)$$

Die Untermatrizen der Transformationsstellen werden nun mit den Produktionskoeffizienten  $pk_{nij}$  aufgefüllt. Der Index  $n$  gibt die betrachtete Transformationsstelle, die Indizes  $i$  und  $j$  die Zeile bzw. Spalte in der sich bildenden Matrix  $PK_{nn}$  an. Dabei gilt für ein Element dieser Matrix:

$$pk_{nij} = \frac{-v_{ni}}{\sum_{\forall d \in D_n} p_{nd}} \quad \text{mit } i \in C_n, j \in J_n, n \in N \text{ und } |J_n| = |D_n|. \quad (3-6)$$

Mithin sind die sich ergebenden Produktionskoeffizienten einer Stelle zwar zeilen-, nicht aber spaltenspezifisch, weil die Summe im Nenner des Bruchs über alle Erzeugungsobjekte der betrachteten Stelle zu bilden und damit stellenspezifisch ist. Die Koeffizienten drücken also den spezifischen Verbrauch des Objekts  $i$  pro Erzeugungsobjektbündel der jeweiligen Stelle aus, wobei die Koeffizienten für eine Faktorart genau in der Anzahl auftreten, wie Objekte in der Stelle erzeugt werden.

Das gleiche Ergebnis ist zu erreichen, wenn die diagonale Verbrauchsmatrix  $V_{nn}$  mit einer diagonalen Erzeugungsmatrix  $P_{nn}$  multipliziert wird. Für die Verbrauchsmatrix werden die mit  $-1$  multiplizierten Verbrauchsvektoren  $v_n$  eines Aggregats  $n$  als Spaltenvektoren in die zugehörigen Transformationsstellen geschrieben. Die Erzeugungsmatrix bildet sich dadurch, daß in die Transformationsstellen Zeilenvektoren geschrieben werden, deren Spaltenzahl der Mächtigkeit von  $D_n$  entspricht und bei denen an jeder Stelle das folgende, gleichbleibende Element steht:

$$\frac{1}{\sum_{\forall d \in D_n} p_{nd}} \quad \text{mit } n \in N. \quad (3-7)$$

Wird die Verbrauchs- mit der Erzeugungsmatrix multipliziert, führt dies zu derselben Produktionskoeffizientenmatrix  $PK_{nn}$  wie bei Befolgung der zuvor gezeigten Rechenschritte. Die zuletzt beschriebene Vorgehensweise ist detaillierter in Anhang A.3 und A.4 dargelegt.

Zu beachten ist, daß die nach der Vorzeichenkonvention negativ angegebenen Verbrauchsfunktionen mit  $-1$  zu multiplizieren sind, weil sich sonst negative Produktionskoeffizienten ergäben. Diese führten jedoch in einer mehrstufigen Produktionsstruktur dazu, daß je nach

gerader oder ungerader Anzahl der durchlaufenen Stufen die Verbrauchsmengen mit unterschiedlichen Vorzeichen versehen wären.

Die mit diesem Vorgehen erzeugte Produktionskoeffizientenmatrix enthält nun zeilenweise gelesen den für jede Verbrauchsobjektart geltenden Produktionskoeffizienten und zwar so oft, wie er für mögliche Erzeugungsobjekte benötigt werden könnte. Spaltenweise lassen sich alle einer bestimmten Erzeugungsobjektart zugeordneten Produktionskoeffizienten herauslesen. Eine Verflechtung der Produktionsstruktur gibt diese Matrix gleichwohl nicht wieder.

Analog zu KLOCK sind die Produktionskoeffizienten nicht endgültig fixiert, sondern abhängig von der konkreten technologischen Situation. Diese Situation, die auch durch den Vektor  $z$  beschrieben werden kann, ist wesentlich umfangreicher und detaillierter als der ebenso technologisch determinierte Intensitätsvektor  $d$ , was bei der späteren Betrachtung der Möglichkeiten einer Systemsteuerung noch hilfreich sein wird.

### 3.2.3 Berechnung der Direktverbrauchsmatrix

Die Direktverbrauchs- oder Verflechtungsmatrix  $F$  kann durch die Multiplikation der Strukturmatrix  $S$  mit der Produktionskoeffizientenmatrix  $PK$  berechnet werden.

$$F = S \cdot PK . \quad (3 - 8)$$

Dieses Vorgehen weist jedem Produktionskoeffizienten den Platz zu, den er nach den geltenden Beziehungen im Produktionssystem einzunehmen hat. Des weiteren erfolgt die Zuordnung der Produktarten zu den entsprechenden Transformationsstellen und ihren Erzeugungen. Der „Produktionskoeffizient“ beträgt hier logischerweise 1, da ja keine „mengenändernde“ Transformation, sondern nur eine neue räumliche Zuordnung erfolgt. Mithin sind lediglich die Matrizen  $F_{mn}$ ,  $F_{nn}$ , und  $F_{no}$  mit Koeffizienten besetzt.<sup>1</sup>

Die sich nun in der Direktverbrauchsmatrix befindlichen Untermatrizen sind  $|Q_k| \times |D_k|$ -Matrizen. Die Multiplikation der an den einzelnen Stellen stehenden Untermatrizen von  $S$  und  $PK$  ist problemlos, da die Anzahl ( $|W_k|$ ) der Spalten einer Untermatrix der Strukturmatrix der Anzahl ( $|C_k|$ ) der Zeilen einer Untermatrix der Produktionskoeffizientenmatrix entspricht. Dies muß so sein, da ja  $W_k$  die Menge der Objektarten angibt, die in ein Aggregat eingeht, was definitionsgemäß genau den  $C_k$  Verbrauchsobjektarten eines Aggregats entspricht. Demnach ist die resultierende Matrix quadratisch und daher invertierbar, da ebenso die Anzahl der von den Stellen abgegebenen Objektarten  $|Q_k|$  mit der Anzahl der von ihnen erzeugten Objektarten  $|D_k|$  übereinstimmen muß. Somit liegt auch die Interpretation der Untermatrizen von  $F$  auf der Hand. Sie geben nun an, welche Produktionskoeffizienten zwischen den abgegebenen Objektarten einer (Liefer-)Stelle (Anzahl =  $|Q_i|$ , mit  $i \in K$ ) und den erzeugten Objektarten einer (Abnehmer-)Stelle (Anzahl =  $|D_j|$ , mit  $j \in K$ ) gültig sind.<sup>2</sup> Demnach müssen die Untermatrizen auf der Hauptdiagonale auch quadratische Nullmatrizen sein, da sich die Anzahl der Verbrauchsobjekte (Lieferbeziehungen) ein und derselben Stelle entsprechen

1 Vgl. dazu auch die im Anhang A.5 gebildete Verflechtungsmatrix A – 8.

2 Die Strukturmatrix gibt die Beziehungen zwischen den abgegebenen und *verbrauchten* Objektarten zwischen den Stellen  $i$  und  $j$  an.

müssen und von Selbstverbrauch abstrahiert worden ist. Die Unterteilung in Untermatrizen, die von der Bildung von  $S$  und  $PK$  und deren gemeinsamer Multiplikation herrührt, hat nur zuordnenden Charakter. Diese Partitionen bilden im Hinblick auf die Zeilen- und Spaltenzahl eine äquivalente Relation, so daß beispielsweise eine  $2 \times 3$ -Untermatrix an der Stelle  $(i,j)$  der Matrix auf eine  $3 \times 2$ -Untermatrix an der Stelle  $(j,i)$  schließen läßt.<sup>1</sup>

### 3.2.4 Das Problem der Dimensionsaddition

Zur Ermittlung der Produktionskoeffizienten sind die Erzeugungen eines Aggregats summiert worden. Nun ist einzuwenden, daß damit eine unzulässige Addition der Dimensionen der u. U. dimensionsverschiedenen Objekte verbunden wäre. Wenn tatsächlich dimensionsverschiedene Objekte in dem Sinne miteinander addiert würden, daß durch diese Addition ein neues Objekt entstehen sollte, so wäre dieser Einwand berechtigt. Tatsächlich wird aber durch die Addition kein neues Objekt gebildet (dies geschieht nur durch die Transformation im Aggregat), sondern ein Objektbündel bzw. eine Objektmenge betrachtet, die lediglich rechnerisch dazu dient, Teilproduktivitäten hinsichtlich des Bündels zu ermitteln. Diese sind durch die technologische Situation eindeutig festgelegt. Eine Vermengung von Objekten und ihrer Dimensionen findet nicht statt. Vielmehr sollte die Addition *nicht als Gleichung* zur Schaffung eines neuen Objekts, *sondern als Vereinigungsmenge* zweier Objekten verstanden werden. Diese Betrachtung ist um so notwendiger, als eine „Ein-Objekt-Produktion“ die Ausnahme und Kuppelproduktion der Regelfall ist. Die technologische Situation und die Kuppelproduktion zwingen aber dazu, mit der Erzeugung des einen Objekts auch immer die Erzeugung der gekoppelten Objekte hinzunehmen.

Diese Logik läßt sich am Beispiel eines Aggregats anschaulich erläutern, das aus den Verbrauchsobjekten Eisenerz, Möller und Strom die beiden Objekte Stahl und Abwärme unter einer bestimmten technologischen Situation erzeugt. Diese Situation legt nicht nur über die Verbrauchs- und Erzeugungsfunktionen die entsprechenden Mengen fest, die so lange konstant sind, wie sich die technologische Situation nicht ändert; sie legt mit den Mengen auch die Teilproduktivitäten und die Kopplungsbeziehung zwischen den Erzeugungsobjekten Stahl und Abwärme fest. Werden in der technologischen Situation  $z_1$  genau determinierte Mengen der Verbrauchsobjekte benötigt und dadurch ebenso genau zu berechnende Mengen an Erzeugungsobjekten hergestellt, so sind diese Mengenrelationen nur hinsichtlich dieser technologischen Situation gültig, und umgekehrt gibt es für diese Situation auch keine anderen Mengenverhältnisse. Da sich die Relationen der Mengen zueinander nur durch eine Veränderung der technologischen Situation ändern können, ist die momentane Betrachtung des Objektbündels Stahl/Abwärme im Verhältnis zu den Objekten Eisenerz, Möller und Strom durchaus zulässig, und auch die Bildung von Teilproduktivitäten ist problemlos. Eine Erhöhung der Verbrauchsmengen ist nur durch eine zeitliche Ausdehnung oder eine Intensivierung der Produktion, also durch eine Änderung der technologischen Situation möglich. Die zeitliche Ausdehnung ändert jedoch nicht die Teilproduktivitäten, und nach erfolgter technologischer Anpassung von  $z_1$  zu  $z_2$  zur Intensivierung der Erzeugung bleibt die Objektbündelbetrachtung

<sup>1</sup> Somit ist auch die spätere Inversion der partitionierten Matrix problemlos an Hand der Untermatrizen an Stelle der einzelnen Elemente durchführbar, da sie so konstruiert sind, daß die nötigen Operationen zwischen den Untermatrizen definiert sind. Vgl. hierzu HILLIER/LIEBERMAN (Operations Research, 1997), S. 824.

nach wie vor gültig, weil auch dann eine bestimmte Menge an Stahl und Abwärme erzeugt und eine bestimmte Menge an Eisenerz, Möller und Strom verbraucht wird.

Die im folgenden Unterkapitel zu bildende Gesamtbedarfsmatrix zeigt, daß eine unzulässige Vermengung von Objekten durch die Objektbündelbetrachtung weder bei den Verbrauchsnach noch bei den Erzeugungsobjekten erfolgt. Auch bleiben die Teilproduktivitäten nach wie vor interpretierbar, denn es wird, um bei obigem Beispiel zu bleiben, eine bestimmte Menge Strom für eine bestimmte Menge Stahl *und* Abwärme benötigt. Auch wenn der Strom nicht unmittelbarer Bestandteil des Stahls wird, so ist sein Verbrauch ohne diese erzeugte Menge Stahl nicht erklärbar. Es wird durch die Erzeugungsfunktion keineswegs unterstellt, daß jedes Verbrauchsobjekt auch (transformierte) Komponente jedes Erzeugungsobjekts werden muß. Ohnehin kürzt sich die Bündelbetrachtung bei der Ermittlung der Faktorlagerbestandsveränderung und Erzeugungsmengen heraus.<sup>1</sup>

Ob man daher die Dimensionsverschiedenheit durch eine Gewichtung der Erzeugungsobjekte hinsichtlich einer Bezugsgröße aufhebt, ist in diesem Zusammenhang eine Frage der Darstellung, nicht jedoch der Gültigkeit des Modells.<sup>2</sup> Diese Gleichnamigkeit könnte ohnehin nur auf Grund des durch die technologische Situation vorgegebenen Kopplungsverhältnisses der Erzeugungsobjekte untereinander erfolgen. Da die Zuordnung der Dimensionen an der Systemgrenze jedoch nicht vermengt wird, wäre diese Dimensionsangleichung für das Ziel des Modells nur rechnerischer Zusatzaufwand und verwischte überdies den Informationsgehalt der Direktbedarfs- und Gesamtverbrauchsmatrizen hinsichtlich der Dimensionen der Verbrauchsobjekte eines Erzeugungsobjekts.

### 3.2.5 Freie technologische Aktionsparameter

Die Verbrauchs- und Erzeugungsfunktionen werden, wie oben dargelegt, durch die technologische Einstellung der Aktionsparameter determiniert. Eine erwünschte Erzeugungsmenge kann nur durch eine geeignete Wahl der Parameter hergestellt werden. Von diesen Parametern können einer oder mehrere in den verschiedenen Gleichungen eines Transformators so enthalten sein, daß sie bei Bildung der Produktionskoeffizientenmatrix in allen Koeffizientengleichungen in gleicher Weise gekürzt werden können. Somit nehmen diese Parameter keinen Einfluß auf die Mengenrelation von Verbrauch und Erzeugung einer Transformation.

Gleichwohl sind sie deshalb nicht unbedeutend und können nicht außer acht gelassen werden, da sie trotzdem die absoluten Verbrauchs- und Erzeugungsmengen beeinflussen.<sup>3</sup> Sie ermöglichen eine Einstellung der Aggregate, also eine Änderung der technologischen Situation, ohne daß sich die Produktionskoeffizienten dadurch ändern. Daher können sie auch als freie technologische Aktions- oder Steuerungsparameter bezeichnet werden, weil sie innerhalb ei-

---

1 Vgl. dazu die ausführlichen Dimensionsnachweise für zwei Objekte in Anhang A.8.

2 Zur Diskussion der Anpassung verschiedener Dimensionen der Objekte aus Sicht der Komponenten eines Objektes bei Zerlegung desselben vgl. KLINGELHÖFER (2000, Entsorgung), S. 232 ff.

3 Kürzt sich z. B. der Parameter der Produktionszeit heraus, so bestimmen alle verbleibenden Parameter die Relation von Einsatz und Verbrauch, die Produktionszeit jedoch nicht. Es liegt aber auf der Hand, daß die Produktionszeit dazu verwandt werden kann, bei Konstanz aller anderen Parameter und somit bei konstanten Produktionskoeffizienten die produzierte Gesamtmenge zu steuern.

ner festgelegten Mengenrelation und unabhängig von den relationsbeeinflussenden Parametern die Anpassung der Mengen eines Transformators ermöglichen. Der technologische Zustand  $z$  kann nunmehr in die relationsbestimmenden Parameter  $z'$  und die freien Parameter  $z''$  differenziert werden. Wird ein System nur mit Hilfe der freien Parameter gesteuert, so ist es ein System mit quasi-konstanten Produktionskoeffizienten.<sup>1</sup>

Sofern die *relationsbestimmende* technologische Situation vorab, also vor Ermittlung des Mengengerüsts, festgelegt werden sollte, sind diese Steuerungsparameter gar die einzige Möglichkeit, im Rahmen ihrer Einstellgrenzen die erwünschten Erzeugungsmengen sicherzustellen. Umgekehrt kann, sofern kein freier technologischer Aktionsparameter vorhanden ist, die technologische Einstellung eines jeden Aggregats erst dann erfolgen, wenn die zu erzeugenden Mengen des Aggregats vollständig bekannt sind.<sup>2</sup> Diese Überlegungen sind im Hinblick auf die Beeinflußbarkeit von Rückkopplungen im folgenden noch relevant.

### 3.3 Ermittlung des Gesamtbedarfs

#### 3.3.1 Berechnung der Gesamtverbrauchsmatrix

An Hand der oben ermittelten Direktverbrauchsmatrix  $F$  kann nun die Gesamtverbrauchsmatrix  $G$  bestimmt werden. Es gilt:

$$(E - F)^{-1} = G. \quad (3 - 9)$$

Da die Matrix quadratisch ist und die Untermatrizen nur Partitionierungscharakter besitzen, kann die Invertierung problemlos mit dem Verfahren von GAUSS durchgeführt werden. Es ist somit auch eine Berechnung von  $G$  möglich, wenn Rückkopplungen im Produktionssystem vorhanden sind.<sup>3</sup>

Das Verfahren von VAZSONYI ermittelt für obere Dreiecksmatrizen, also bei zyklensfreier Produktion, die Matrix  $G$  mit geringerem Rechenaufwand. Es handelt sich letztlich um ein an Dreiecksmatrizen angepaßtes GAUSS-Verfahren zur Inversenermittlung.

1 Ebenso sind in KLOCKES Produktionsfunktion vom Typ D bei Verwendung GUTENBERGScher Transformationsfunktionen mit der Festlegung der Intensität  $d$  und der ohnehin unveränderlichen  $z$ -Situation alle mengenrelationsbeeinflussenden Parameter konstant. Somit sind auch die Produktionskoeffizienten quasi-konstanter Natur, und die festgelegten Gesamtmengen können nur noch über den freien Aktionsparameter „Produktionszeit“ erreicht werden.

2 Eine solche Situation ohne freien Aktionsparameter führt dazu, daß jede Veränderung eines Parameters nicht nur die Gesamtmengen von Verbrauch und Erzeugung, sondern auch die Relation der Mengen zueinander, also die Produktionskoeffizienten beeinflusst. Sie ist, um beim Vergleich mit der Produktionsfunktion vom Typ D in der vorangegangenen Fußnote zu bleiben, mit der Situation vergleichbar, in der die Gesamtmenge im KLOCKESchen Modell nur über eine simultane Anpassung von Zeit und Intensität zu erreichen ist (bspw. bei Berücksichtigung von Maschinenverschleiß; vgl. ADAM (Produktionsmanagement, 1998), S. 419 ff.).

3 Die Gesamtverbrauchsmatrix des rückgekoppelten Beispielsystems ist in Anhang A.6 dargestellt.

Die Elemente  $g_{ij}$  einer Gesamtverbrauchsmatrix ergeben sich folgendermaßen:<sup>1</sup>

$$g_{ij} = 0, \quad \text{für } i > j, \quad (3 - 10)$$

$$g_{ij} = 1, \quad \text{für } i = j, \quad (3 - 11)$$

$$g_{ij} = pk_{ij}, \quad \text{für } j > 1 \text{ und } j \leq \text{unterste Produktionsstufe}, \quad (3 - 12)$$

$$g_{ij} = \sum_{h=1}^{j-1} pk_{hj} \cdot g_{ih} \quad \text{sonst.} \quad (3 - 13)$$

Die Zeilen der Matrix  $G$  geben die Verwendung eines Verbrauchsobjekts, die Spalten dagegen die Stückliste eines zu erzeugenden Objekts an. Eine neuerliche Partitionierung nach den Beziehungen zwischen den einzelnen Stellen ist wie bei der Strukturmatrix auch für die Gesamtverbrauchsmatrix möglich.

$$G = \begin{pmatrix} G_{mm} & G_{mn} & G_{mo} \\ G_{nm} & G_{nn} & G_{no} \\ G_{om} & G_{on} & G_{oo} \end{pmatrix} \quad \forall m \in M, \forall n \in N \text{ und } \forall o \in O. \quad (3 - 14)$$

### 3.3.2 Ermittlung des vollständigen Bestandsveränderungsvektors sowie der Verbrauchs- und Erzeugungsmengen

Da in einem Aggregat mehr als nur eine Objektart erzeugt wird und die technologische Situation wiederum die Erzeugung aller Erzeugungsobjekte determiniert, muß ein Leitobjekt festgelegt werden, anhand dessen die technologische Einstellung eines Aggregates gesucht wird. Die Produktionsmenge dieses Leitobjekts ist mit Kopplungskoeffizienten<sup>2</sup> zu multiplizieren, um auf die Erzeugungsmengen der übrigen Objektarten schließen zu können. Das Leitobjekt einer Transformationsstelle kann frei gewählt werden.

Der Kopplungskoeffizient berechnet sich wie folgt:

$$kk_{nd} = \frac{p_{nd}}{p_{nL}} \quad \forall d \in D_n \text{ und } \forall n \in N. \quad (3 - 15)$$

Die Bestandsveränderungen der Leitobjekte, die in die Produktlagerstellen eingehen, können frei festgelegt werden. Da es sich um eine Erzeugung bzw. um einen Zugang zu den Produktlagerstellen handelt, wird diese Bestandsveränderung mit einem positiven Vorzeichen angegeben. Von der Menge des jeweiligen Leitobjekts sind die Mengen der übrigen Erzeugungsobjekte eines Transformators abhängig. Diese können nicht beliebig festgelegt werden, son-

1 Vgl. BLOECH/BOGASCHEWSKY/GÖTZE/ROLAND (Einführung, 2001), S. 186 f., VAZSONYI, A. (Planungsrechnung, 1962), S. 389.

2 Diese Koeffizienten sind wie die Produktionskoeffizienten nicht fix, sondern hängen von der technologischen Situation des Aggregates ab.

dem sind durch die Leitobjektmenge  $p_n^L$  und die technologische Situation des Aggregats  $n$  determiniert.

Der Bestandsveränderungsvektor  $bv_0$  beinhaltet diese *durch die Transformation erwünschten Bestandsveränderungen* der Produktlagerstellen. Hierbei sind aber wie dargelegt nur die erwünschten Bestandsveränderungen der Leitobjekte in den Produktlagerstellen bekannt, die Bestandsveränderung der gekoppelten Produkte dagegen selbstverständlich noch nicht. Der Vektor  $bv_0$  ist ein Teilvektor von  $bv$ , der sich zusammen mit den durch die Transformation erwünschten Bestandsveränderungen der Faktorlager- und Transformationsstellen ergibt. Da aber die Transformationsstellen per definitionem keine Bestände führen und die transformationsabhängigen Bestandsveränderungen der Faktorlagerstellen Ergebnis der Transformation selbst sind, sind ihre Stellen im Vektor  $bv$  mit Nullen besetzt. Die erwünschten Bestandsveränderungen der Faktor- bzw. Produktlagerstellen *außerhalb der Transformationsvorgänge*, somit also In- und Output, sind entsprechend im Inputvektor  $r$  bzw. Outputvektor  $x$  abzubilden. Im Gegensatz zu KLOCK wird die Gesamtverbrauchsmatrix eben deshalb nicht mit dem Outputvektor multipliziert, da ein Fluß aus dem System ebenso durch vorhandene Bestände abgedeckt werden kann und erst dann zwingend zu Transformationsvorgängen führt, wenn die Bestände nicht zur Deckung des Systemabflusses ausreichen.

Mit Hilfe der Kopplungsbeziehungen können nun die gekoppelten Erzeugungsmengen berechnet werden. An Hand der Gleichungen sind die exakten Bestandsveränderungen der übrigen Produkte, die nicht Leitobjekte sind, ermittelbar. Wenn keine Zyklen vorhanden sind, ist dieses Gleichungssystem von den Erzeugungen der höchsten Produktionsstufe ausgehend lösbar, da dann in die Gleichungen jeweils nur erwünschte Bestandsveränderungen eingehen, die auf Erzeugungen des betrachteten Aggregats oder höherer Produktionsstufen zurückzuführen sind. Da von Selbstverbrauch in den Transformationsstellen abstrahiert wird, finden sich in den Erzeugungsgleichungen eines Aggregats bei zyklensfreier Struktur nicht mehrere Bestandsveränderungen der zugehörigen Produktlagerstellen, die auf den Erzeugungen des betrachteten Aggregats beruhen. Durch diese Trennung und die Hierarchie der Beziehungen kann das Gleichungssystem zur Vervollständigung des Vektors  $bv_0$  sukzessiv gelöst werden.

Im Fall von Zyklen ist die Vervollständigung komplizierter. Durch die Rückkopplungen sind nun auch erwünschte Bestandsveränderungen, die aus Erzeugungen niedrigerer Produktionsstufen resultieren, in den Erzeugungsgleichungen höherer Produktionsreife zu beachten. Außerdem besteht die Möglichkeit, daß in den Erzeugungsgleichungen eines Aggregats Bestandsveränderungen auftreten, die auf verschiedenen Erzeugungen des betrachteten Aggregats selbst beruhen. Das Gleichungssystem kann nun nicht mehr sukzessiv, sondern muß teilweise oder ganz simultan gelöst werden. Je nach Komplexität und Zahl der Rückkopplungen kann dies in Extremfällen bis zur Unlösbarkeit des Gleichungssystems führen. Die Angabe eines vervollständigten Vektors  $bv$ , der neben den Bestandsveränderungen des Leitobjekts die der Nebenobjekte ausweist, ist dann nicht mehr möglich.<sup>1</sup>

An Hand des vervollständigten Vektors  $bv$  lassen sich die benötigten Erzeugungsmengen der Transformationsstellen und die Veränderung der Bestände in den Faktorlagerstellen berechnen. Der resultierende Mengenvektor  $m$  enthält nur positive Werte, die im Teilvektor  $m_m$  die Veränderung in den Faktorlagerstellen durch den Verbrauch während der Transformation, im

<sup>1</sup> Ein lösbares Gleichungssystem für die Produktionsstruktur des Beispiels enthält Anhang A.7.

Teilvektor  $\mathbf{m}_n$  die Erzeugungsmengen der Transformationsstellen und im Teilvektor  $\mathbf{m}_o$  die Veränderung in den Produktlagerstellen durch die Erzeugung während der Transformation angeben. Im Mengenvektor  $\mathbf{m}$  sind demnach alle Objektarten bis auf die nicht im Modell enthaltenen Gebrauchsobjekte erfaßt.

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{b}\mathbf{v} = \mathbf{m} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_m \\ \mathbf{m}_n \\ \mathbf{m}_o \end{pmatrix} \quad \forall m \in M, \forall n \in N \text{ und } \forall o \in O. \quad (3-16)$$

Die Verbrauchsmengen des gesamten Systems ergeben sich einerseits aus den negativen Bestandsveränderungen der Faktorlagerstellen und andererseits aus den Differenzen zwischen dem jeweiligen Zugang zu den Produktlagerstellen und der zugehörigen Erzeugungsmenge eines Aggregats, da außer den Gebrauchsobjekten selbst keine Objekte in den Transformationsstellen verbleiben.<sup>1</sup>

Für die Bestände an der Bilanzhülle des Systems sind nur die Teilvektoren  $\mathbf{m}_m$  und  $\mathbf{m}_o$  maßgeblich, da die in  $\mathbf{m}_n$  enthaltenen Erzeugungsmengen entweder in anderen Produktionsstufen verbraucht oder den Produktlagerstellen zugeordnet werden. Diese beiden Teilvektoren geben die aus der Transformation resultierende Bestandsveränderung der Faktor- und Produktlager an. Wenn die Bestandsgleichung 2 – 15 nur die bestandsführenden Stellen eines Systems wiedergibt, kann sie wie folgt lauten:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_{1m} \\ \mathbf{b}_{1o} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{0m} \\ \mathbf{b}_{0o} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{1m} \\ \mathbf{r}_{1o} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{1m} \\ \mathbf{x}_{1o} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathbf{m}_{1m} \\ \mathbf{m}_{1o} \end{pmatrix} \quad \forall m \in M \text{ und } \forall o \in O. \quad (3-17)$$

### 3.3.3 Mengenzielbezogene Festlegung der technologischen Parameter

Unter dem Sachziel der Produktion wird die Kombination und Transformation von Produktionsfaktoren zu neuen Gütern verstanden. Es werden die zu produzierenden Güter ihrer Art und sachlich erwünschten Menge nach festgelegt, weshalb im folgenden nicht von Sach-, sondern von Mengenzielen gesprochen werden soll.<sup>2</sup> Die mengenzielbezogene Festlegung der technologischen Parameter ist i. d. R. eine technische Aufgabe, die der Bestandsveränderungen hingegen eine betriebswirtschaftliche. Somit bedarf die Planung der Mengen und der Einstellung der Aggregate eines abgestimmten Vorgehens der Entscheidungsträger.

1 Vgl. dazu auch die Gleichungen A – 16 und A – 17 im Anhang A.8. Das Ergebnis der letztgenannten Differenz ist in jedem Falle negativ, da der Zugang zu den Produktlagerstellen kleiner als die Erzeugung ist, sofern diese weiterverarbeitet wird. Andernfalls ist das Erzeugungsobjekt ja kein Verbrauchsobjekt.

2 Vgl. u. a. FRIES (Betriebswirtschaftslehre, 1999), S. 4 f., ZELEWESI (Grundlagen, 1999), S. 56. Es ist in der Tat diskussionswürdig, inwiefern in marktwirtschaftlichen Systemen eine von Formalzielen losgelöste Festlegung der Produktionsmengen überhaupt möglich sein kann. Auch in Planwirtschaften muß letztlich dem Marktgedanken Rechnung getragen werden, denn die Festlegung bestimmter Produktionsmengen richtet sich auch dort nach den Bedürfnissen der Konsumenten. Mißachtet dies ein Plansystem, dann ist eine Volkswirtschaft wie ein Unternehmen dem Untergang geweiht, da Ressourcen dauerhaft verschwendet werden. Die anhaltende Misere der weitgehend ausgestorbenen, „sozialistischen“ Planwirtschaften untermauert diese These. Deshalb sei einfach nur vom Mengenziel die Rede, dessen Herkunft unklar sei.

Sofern keine Rückkopplungen in der Produktionsstruktur auftreten, kontinuierliche Einstellbereiche vorhanden sind und von Terminen sowie Fristen abstrahiert wird, ist eine sukzessive Festlegung der technologischen Parameter und damit der gesamten technologischen Situation des Produktionssystems gegen die Produktionsrichtung möglich. Mit der betriebswirtschaftlichen Festlegung der Bestandsveränderung des Leitobjekts steht die Leiterzeugung der Aggregate der höchsten Produktionsstufe fest, und es kann eine geeignete technologische Einstellung gesucht werden. Mit deren Festlegung stehen wiederum die Produktions- und Kopplungskoeffizienten dieser höchsten Produktionsstufe fest. Dadurch sind aber auch die Erzeugungsmengen vorangehender Stufen ermittelbar, für die nun wieder die geeignete technologische Einstellung zu finden ist. Die erzeugten Mengen entsprechen in einer solchen Lösung den sachlich erwünschten.

Treten jedoch Rückkopplungen auf, so sind bereits bei der Ermittlung der Erzeugungsmengen der Aggregate der höheren Produktionsstufen Produktionskoeffizienten von Aggregaten niedrigerer Produktionsstufen zu beachten. Ebenso ist das Auftreten von Bestandsveränderungen niedrigerer Produktionsstufen in den Erzeugungsgleichungen höherer Produktionsstufen problematisch, da diese Mengen erst feststehen, wenn die technologischen Bedingungen der betroffenen Aggregate festgelegt sind. Umgekehrt kann deren weiterverbrauchte Erzeugung erst nach Festlegung der technologischen Einstellungen in den höheren Aggregaten ermittelt werden, was wiederum die Bestandsveränderungen in den Produktlagerstellen beeinflusst. Es ergibt sich somit zwischen den von einer Rückkopplung betroffenen Aggregaten ein interdependentes technologisches Einstellungsproblem, das nur simultan gelöst werden kann. Zwangsläufig müssen dann betriebswirtschaftliche und ingenieurwissenschaftliche Entscheidungsträger zusammen nach Lösungen suchen. Das vorgestellte Modell unterstützt diese Zusammenarbeit, da es die Auswirkungen einer Änderung der technologischen Parameter, seien sie nun kurz-, mittel- oder langfristig variierbar, auf das Mengengerüst darstellen kann und sich dabei der von der ingenieurwissenschaftlichen Seite bereitgestellten Mengenmodelle bedient, die ja Teil einer weitergehenden technischen Analyse sind.

Bei der Vielzahl möglicher Aktionsparameter eines Aggregats wird dieses interdependente Problem schon in kleinen Systemen sehr umfangreich und u. U. nicht mehr rechnerisch lösbar sein.<sup>1</sup> Es wird jedoch durch die oben erwähnte Eigenschaft der freien Aktionsparameter gemildert. Besitzt jedes Aggregat, das von einer Rückkopplung betroffen ist, solche Parameter, so kann eine zulässige Lösung dadurch ermittelt werden, daß deren Verbrauchs- und Erzeugungsmengen mit diesen Parametern eingestellt werden, wobei sich die Produktionskoeffizienten dadurch nicht ändern. Die Mengenvariation ist hierbei auf die Möglichkeiten bzw. die Steuerungsbereiche der freien Parameter beschränkt. Eine zulässige Lösung auf dem Wege der freien Parameter ist aber nur durch Inkaufnahme höherer als der sachlich erwünschten Mengen bei einigen oder allen Erzeugungen möglich, wenn die „Freie-Parameter-Lösung“ nicht zufällig der simultanen Lösung entspricht. Es ist mithin nur dann möglich, Rückkopplungen in diesem Modell zu erfassen, wenn die technologische Situation vorab mengenzielbezogen festgelegt und die konkreten Mengen mit Hilfe der freien Parameter angesteuert werden können oder aber eine simultane Lösung der technologischen Einstellung gefunden werden kann. Prinzipiell ist die Berücksichtigung von Rückkopplungen durch dieses Modell jedoch möglich.

---

<sup>1</sup> Zulässige Lösungen können dann mit Heuristiken oder per Simulation gesucht werden.

Von Vorteil ist die Betrachtung von Verbrauchs- und Erzeugungsgeschwindigkeiten in Abhängigkeit von der technologischen Situation an Stelle von Verbrauchs- und Erzeugungsfunktionen. Durch Multiplikation dieser Geschwindigkeiten mit der jeweiligen Produktionszeit lassen sich die Verbrauchs- und Erzeugungsmengen der Aggregate ermitteln. Genau diese Produktionszeit kürzt sich aber als freier technologischer Parameter bei der Bildung der Produktionskoeffizienten heraus. Unter der Prämisse, daß Termine und Fristen vom Modell nicht berücksichtigt werden sollen, steht mit der Produktionszeit eines Aggregats also ein theoretisch unerschöpflicher, freier technologischer Aktionsparameter zur Verfügung.

Sollten die technologischen Einstellungen und damit die Verbrauchs- und Erzeugungsmengen im Zeitverlauf schwanken oder wird ein bestimmter Belastungsverlauf der Aggregate von Beginn an geplant, so kann im Falle zyklensfreier Produktion die technologische Situation sukzessiv wie oben beschrieben festgelegt werden. Es ist dann jedoch darauf zu achten, daß die Belastungsverläufe höherer Produktionsstufen tatsächlich durch eine ausreichende Erzeugung ihrer Verbrauchsobjekte gesichert sind. Das Problem der Festlegung der technologischen Parameter wird also um ein Abstimmungsproblem der Aggregate untereinander erweitert. Im Falle rückgekoppelter Produktion gilt auch hier, daß eine mengenzielgerechte Lösung nur dann gefunden werden kann, wenn das zugrundeliegende Simultanproblem (nun durch die notwendige zeitliche Abstimmung noch erweitert) lösbar ist oder für eine zulässige, aber vom Mengenziel abweichende Lösung wenigstens freie Aktionsparameter vorhanden sind.

### 3.3.4 Formalzielbezogene Festlegung der technologischen Parameter

Gesteht man den Sachzielen zu, Auskunft darüber zu erteilen, was grundsätzlich gemacht werden soll, so bestimmen Formalziele, wie dies zu geschehen hat. Formalziele lassen sich inhaltlich in technische, ökonomische, soziale und ökologische Ziele sowie nach ihrer Zielvorschrift in Extremal-, Satisfikations- und Meliorationsziele unterscheiden.<sup>1</sup> In der Produktion dominiert sowohl technisch als auch ökonomisch das sogenannte Wirtschaftlichkeitsprinzip.<sup>2</sup> Danach ist ein bestimmtes Ergebnis mit minimalem Mitteleinsatz zu erzielen, ohne daß bei gleichem Mitteleinsatz ein besseres Ergebnis erreichbar wäre (generelles Extremumprinzip).<sup>3</sup> Die Verfolgung des Wirtschaftlichkeitsprinzips korrespondiert daher letztlich mit entsprechenden Extremalzielen.<sup>4</sup>

Während die rein mengenzielbezogene Festlegung der technologischen Einstellung der Aggregate zumindest in einer zyklensfreien Struktur sukzessiv erfolgen konnte, gestaltet sich dies bei der formalzielbezogenen Entscheidung ungleich schwieriger.

Sieht die formale Zielsetzung etwa einen möglichst hohen Ausstoß an Produkten vor, dies kann beispielsweise bei staatlichen Versorgungsbetrieben der Fall sein, so sind die Über-

---

1 Vgl. hierzu ausführlicher beispielsweise ZELEWSKI (Grundlagen, 1999), S. 15 ff.

2 Vgl. u. a. NEBL (Produktionswirtschaft, 2001), S. 12, GÜNTHER/TEMPELMEIER (Logistik, 2000), S. 3 f., CORSTEN (Produktionswirtschaft, 2000), S. 45 f.

3 Vgl. MÜLLER-MERBACH (Input-Output-Modelle, 1981), S. 19 und SCHIERENBECK (Betriebswirtschaftslehre, 1987), S. 3.

4 Vgl. z. B. ROLLBERG (Unternehmensplanung, 2001), S. 8 ff.

legungen des vorangegangenen Abschnitts übertragbar. Ein solch simples Formalziel wird in der Regel jedoch kaum anzutreffen sein. Vielmehr wird es aus betriebswirtschaftlicher Sicht um die Maximierung des Gewinns oder die Minimierung der Kosten gehen. Dann ist aber die rein auf die erzielbaren Mengen gerichtete sukzessive Festlegung der technologischen Parameter nicht mehr anwendbar.

Die Festlegung der technologischen Einstellung eines Aggregats höherer Stufe kann zum Beispiel bei Verfolgung des Ziels der Kostenminimierung nicht ohne Berücksichtigung der vorangehenden Stufen und deren Kosten erfolgen. So kann eine isoliert für die letzte Produktionsstufe vorgenommene kostenminimale Parametereinstellung besonders teure Einstellungen in vorgelagerten Produktionsstufen erzwingen, womit das Gesamtoptimum verfehlt würde. Letztlich läßt sich ein solches Problem nur simultan lösen. Auch die Existenz freier technologischer Parameter bietet hier keine Hilfe. Erst recht gilt dies bei zyklischen Produktionssystemen.

Jedoch ist auch hier das vorgestellte Modell eine gute Grundlage, diese Entscheidungen zu unterstützen. Durch eine vollständige Beschreibung der Produktion hinsichtlich aller verbrauchten Objekte und eine entsprechende Bewertung des Verbrauchs können die Kosten der Produktion konkret beziffert werden. Da das zugrunde gelegte Mengenmodell zahlreiche technologische Parameter zur Steuerung des Systems bereithält, ist es somit möglich, zumindest auf heuristischem Wege eine „hinreichend kostengünstige“ Parametereinstellung für eine vorgegebene Leitobjektmenge zu ermitteln.

In einem ausgereiften Modell zur Ermittlung einer kostenminimalen Produktion muß zudem der Gebrauch von Potentialfaktoren abgebildet werden, da die zeitliche Inanspruchnahme derartiger Faktoren auch zu Kosten führt. Hierzu besteht weiterer Forschungsbedarf.

### 3.4 Beurteilung der kombinierten Produktionsfunktion

Die Kombination der beiden produktionstheoretischen Ansätze vereint auch deren Vorteile. Mit Hilfe der Produktionsfunktion vom Typ D kann die Struktur der Fertigung äußerst detailliert wiedergegeben werden. Durch Integration von Verbrauchs- und Erzeugungsvektoren, die letztlich technologisch fundierte Produktionsfunktionen der Ingenieurwissenschaften enthalten, gelingt nicht nur die Verbindung zweier Wissenschaftsdisziplinen, es wird zusätzlich auch der empirische Gehalt der Produktionsfunktion vom Typ D gesteigert, und die Ergebnisse der Transformation können sehr genau und technologisch detailliert angegeben werden. Theoretisch sind somit *sämtliche Determinanten* von Verbrauch und Erzeugung erfaßbar, ohne daß auf *festgelegte Beziehungstypen* zwischen Verbrauch und Erzeugung abgestellt wird. Die mangelnde Abbildung des *Mehrproduktfalls* eines Aggregats in der Produktionsfunktion vom Typ D wird durch die Synthese aufgehoben und die Abbildung der *Mehrstufigkeit* im Konzept der Erzeugungs- und Verbrauchsfunktionen konkretisiert. Dies steigert auch die Aussagekraft über die *ökologischen Auswirkungen* der Produktion.

Das Modell ist ebenso widerspruchsfrei, allgemeingültig und faktisch überprüfbar wie seine Grundmodelle. Es bleiben aber nach wie vor alle Kritikpunkte an der Produktionsfunktion vom Typ D bestehen, die durch die Verwendung der Verbrauchs- und Erzeugungsvektoren als Transformationsfunktionen nicht abgestellt werden können – so beispielsweise der Zwang

zu einer äußerst detaillierten Wiedergabe der Struktur in der Strukturmatrix oder die Verwendung von Matrizen, die in kleinen Produktionssystemen übersichtlich und gut handhabbar sind, in großen Systemen, die u. U. viele Rückkopplungen aufweisen, aber unübersichtlich und nur mit geeigneter Rechner-technik lösbar werden. Die Vorteile können sich also situationsbedingt auch in Nachteile verkehren. Die nur durch Kreierung „künstlicher Verteilungsaggregate“ abzubildende alternative Bezugsmöglichkeit eines Verbrauchsobjekts von verschiedenen Vorgängeraggregaten ist ein weiterer Kritikpunkt am Matrizenkalkül, der durch das Modell nicht aufgehoben werden kann.

Der Geltungsbereich beschränkt sich auf die Anwendung ingenieurwissenschaftlicher Produktionsfunktionen. Fertigungsvorgänge, die nicht technologisch beschrieben werden können oder für die keine empirisch gesicherten Funktionen vorliegen, sind mit dem vorgestellten Produktionsmodell nicht abbildbar. Die *Homogenität der betrachteten Objekte bzw. Objektbündel* ist unabdingbare Voraussetzung für die Anwendung des Modells. Die Objektbündelbetrachtung bietet all jenen Gemütern Angriffsfläche, die solch eine vorübergehende Bündelung einer „vorübergehenden Addition“ gleichsetzen und sie dadurch als unzulässig werten.

Die Gestalt des Vektors  $m$  erlaubt eine Aufspaltung der Transformationsauswirkungen in die betriebswirtschaftlich interessanten Bestandsveränderungen ( $m_m$  und  $m_o$ ) und die ingenieurwissenschaftlich interessanten Erzeugungen durch die Transformation ( $m_n$ ). Die Einbettung des Modells in die Bestandsgleichung eines Systems erlaubt die Erweiterung des Modells auf lose miteinander verbundene und durch Zwischenlager gepufferte Produktionssysteme.

Der Gebrauch von Potentialfaktoren kann durch ihre Abbildung in den In- und Outputvektoren sowie den Beständen eines Systems abgebildet werden. Um formalzielbezogene Entscheidungen mit dem vorgestellten Modell unterstützen zu können, muß die reine Mengenbetrachtung des Modells um eine Bewertung von Verbrauch und Erzeugung erweitert werden. Die formalzielbezogene Ausrichtung des Modells bedarf daher weiterer Untersuchungen. Das gleiche gilt für die Berücksichtigung unterschiedlicher Entscheidungsinstanzen innerhalb eines Unternehmens.

Das Invarianzprinzip als solches ist zwar gültig; eine Aggregation in dem Sinne, daß auf Informationen zur Lösung verzichtet werden kann, scheidet jedoch an der Detailliertheit der ingenieurwissenschaftlichen Funktionen.

Begrenzt ist die Anwendbarkeit des Modells auch im Falle zu berücksichtigender Rückkopplungen. Derartige Rückkopplungen sind zwar prinzipiell abbildbar; das entstehende Modell erfordert dann aber entweder eine simultane Bestimmung der technologischen Einstellungen oder eine Steuerung der Aggregate ausschließlich über freie technologische Parameter mit einer Inkaufnahme über das reine Mengenziel hinausgehender Produktionsmengen.

Eine Berücksichtigung der Zeit durch *Überwindung der rein statischen Betrachtung* ist im kinematischen Sinne möglich, bedarf aber insbesondere hinsichtlich der notwendigen Abstimmung der Aggregate weiterer Forschungen.

## 4 Zusammenfassung und Ausblick

Erklärtes Ziel dieses Beitrags ist die Verbindung ingenieurwissenschaftlicher und betriebswirtschaftlicher Modelle, ohne deren Aussagen zu beschneiden. Durch die Erweiterung der Produktionsfunktion vom Typ D um ingenieurwissenschaftlich fundierte Verbrauchs- und Erzeugungsvektoren konnte ein outputorientiertes Mengenmodell aufgestellt werden, das dieser Zielsetzung gerecht wird. Damit kann die Modellsynthese sowohl für betriebswirtschaftliche Entscheidungen beispielsweise im Rahmen der Beschaffungsplanung als auch für ingenieurwissenschaftliche Entscheidungen bei der Festlegung der Aggregateinstellungen eine Grundlage bieten. Bei komplexen Produktionsstrukturen ist jedoch eine unmittelbare Zusammenarbeit der Entscheidungsträger beider Disziplinen weiterhin unentbehrlich.

Die von STEINMETZ aufgezeigte Möglichkeit, die verbrauchs- und erzeugungsorientierte Sichtweise der Produktion um Zahlungsströme zu erweitern, erlaubt eine Nutzung des Modells auch für formalzielbezogene Entscheidungen. Hinzu kommt der bereits von KLOCK aufgezeigte Vorteil des Matrizenkalküls, über eine Bewertung von Verbrauch und Erzeugung theoretisch exakte Verrechnungspreise ermitteln zu können. In beiden Richtungen erschließt sich demnach weiterer Forschungsbedarf.

Die Vielzahl an Vektoren und Matrizen sowie der auszuführenden Rechenschritte nähren vor dem Hintergrund realistischer Produktionssystemgrößen den Wunsch, das Modell zu vereinfachen. Hierzu können weitergehende Überlegungen angestellt werden, die Mehrstufigkeit der Produktion an Hand der Erzeugungs- und Verbrauchsfunktionen unter Verzicht der Einbindung in die Produktionsfunktion vom Typ D abzubilden.

Es existiert weiterer Forschungsbedarf hinsichtlich einer dynamischen Betrachtung von Verbrauch und Erzeugung. Wie oben dargelegt, scheint dagegen die kinematische Sicht problemlos integrierbar zu sein, wenn statt der konstanten technologischen Einstellung der Aggregate deren technologische Entwicklung im Zeitverlauf und damit die Entwicklung von Verbrauch und Erzeugung im Zeitverlauf betrachtet werden.

Die bislang verwendeten Größen sind deterministischer Natur. Um sich der Realität stärker zu nähern, wäre es aber angebracht, auch stochastische Störgrößen abzubilden. Dann müßten bspw. die Produktionskoeffizienten in Form von Wahrscheinlichkeitsverteilungen erfaßt werden, was die Lösungsfindung insbesondere bei zyklischer Produktionsstruktur weiter erschwerete.

Somit bietet das hier vorgestellte kombinierte Modell weitergehenden Forschungsbedarf. Abschließend wird die prinzipielle Vorgehensweise noch einmal graphisch in Abbildung 4 veranschaulicht.

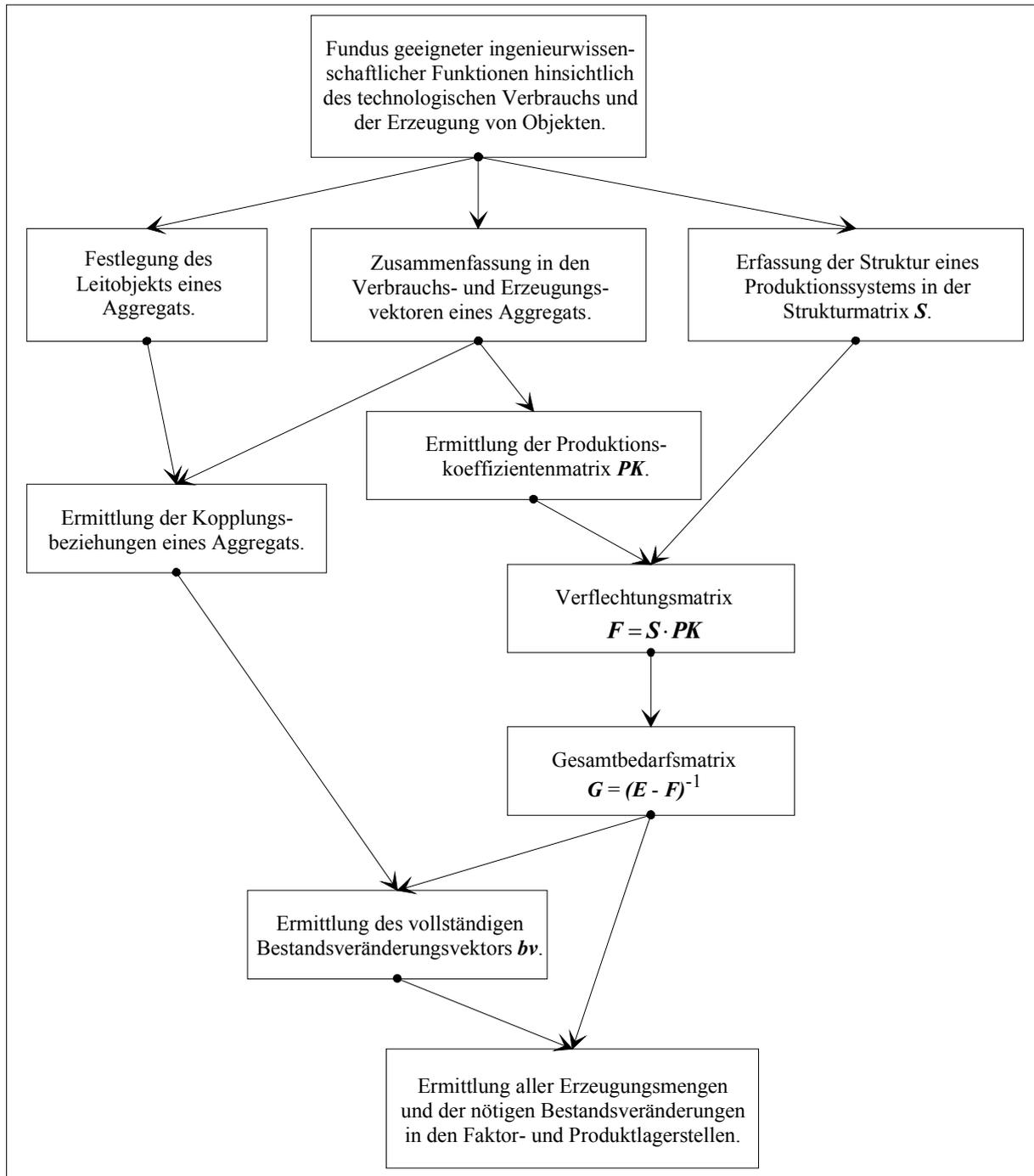


Abbildung 4: Schema der Vorgehensweise des kombinierten Modells



### A.3 Verbrauchs- und Erzeugungsmatrizen

Die Verbrauchs- und Erzeugungsmatrizen der Transformationsstellen als Schritt zur Ermittlung der Produktionskoeffizientenmatrix lauten:

$$V_{nn} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} -v_{31} \\ -v_{32} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -v_{41} \\ -v_{42} \end{pmatrix} \end{bmatrix}. \quad (\text{A} - 3)$$

Es ist zu beachten, daß wegen der negativen Vorzeichenkonvention des Verbrauchs dieser wiederum mit  $-1$  multipliziert werden muß, um keine negativen Produktionskoeffizienten zu erhalten. Ansonsten entsprechen die Untermatrizen auf der Hauptdiagonale den entsprechenden Verbrauchsvektoren der Transformationsstellen.

Die Besetzung der Untermatrizen der Erzeugungsmatrix erfolgt nach Gleichung 3 – 7.

Es ergibt sich somit folgende Erzeugungsmatrix.

$$P_{nn} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p_{31} + p_{32} & p_{31} + p_{32} \end{pmatrix} & (0 \ 0) \\ (0 \ 0) & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p_{41} + p_{42} & p_{41} + p_{42} \end{pmatrix} \end{bmatrix}. \quad (\text{A} - 4)$$

An dieser Stelle sei auf die Diskussion in Abschnitt 3.2.4 verwiesen. Die Addition der Erzeugungsfunktionen erfolgt nicht im Sinne einer Transformation zu einem neuen Objekt, sondern als Betrachtung eines Bündels von Objekten. Deshalb ist es im weiteren Verlauf ratsam, die Addition nicht auszuführen, da sich die Bündel ohnehin bei der Gesamtverbrauchsermittlung kürzen.

### A.4 Ermittlung der Produktionskoeffizientenmatrix

Die Multiplikation der Verbrauchs- mit der Erzeugungsmatrix ergibt den Teil der Produktionskoeffizientenmatrix, der sich auf die  $n$  Transformationsstellen bezieht. Mithin:

$$PK_{nn} = V_{nn} \cdot P_{nn}. \quad (\text{A} - 5)$$

Ob die Multiplikation nach den Elementen oder den Untermatrizen erfolgt, ist gleichgültig. Für obiges Beispiel ergibt sich somit:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{PK}_{nn} &= \left( \begin{array}{cc|cc} \left( \begin{array}{cc} \frac{-v_{31}}{p_{31} + p_{32}} & \frac{-v_{31}}{p_{31} + p_{32}} \\ \frac{-v_{32}}{p_{31} + p_{32}} & \frac{-v_{32}}{p_{31} + p_{32}} \end{array} \right) & & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \\ & & & \begin{pmatrix} \frac{-v_{41}}{p_{41} + p_{42}} & \frac{-v_{41}}{p_{41} + p_{42}} \\ \frac{-v_{42}}{p_{41} + p_{42}} & \frac{-v_{42}}{p_{41} + p_{42}} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & & & \end{array} \right) \\
 &= \left( \begin{array}{cc|cc} \begin{pmatrix} pk_{31} & pk_{31} \\ pk_{32} & pk_{32} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} pk_{41} & pk_{41} \\ pk_{42} & pk_{42} \end{pmatrix} & & \end{array} \right).
 \end{aligned} \tag{A-6}$$

Die Untermatrizen der Faktor- und Produktlagerstellen werden auf der Hauptdiagonalen mit 1 besetzt, so daß sich als vollständige Produktionskoeffizientenmatrix ergibt:

$$\mathbf{PK} = \left( \begin{array}{cc|cc|cc} (1) & (0) & (0 \ 0) & (0 \ 0) & (0 \ 0) & (0 \ 0) \\ (0) & (1) & (0 \ 0) & (0 \ 0) & (0 \ 0) & (0 \ 0) \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} pk_{31} & pk_{31} \\ pk_{32} & pk_{32} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} pk_{41} & pk_{41} \\ pk_{42} & pk_{42} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right). \tag{A-7}$$

## A.5 Ermittlung der Verflechtungsmatrix

Die Multiplikation der Struktur- mit der Produktionskoeffizientenmatrix ergibt die Verflechtungsmatrix (siehe Gleichung 3 – 8):

$$\mathbf{F} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{PK} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{pk}_{31} & \text{pk}_{31} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{pk}_{42} & \text{pk}_{42} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{pk}_{41} & \text{pk}_{41} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \text{pk}_{32} & \text{pk}_{32} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (\text{A} - 8)$$

Die den Koeffizienten  $\text{pk}_{42}$  enthaltende Untermatrix gibt an, wieviel vom Faktor  $r_2$  aus der Faktorlagerstelle 2 (Zeile 2 der Matrix  $\mathbf{F}$ ) verbraucht werden wird, wenn ein Erzeugungsbündel der beiden Erzeugungsobjekte des Transformators 4 (Spalten 5 und 6 der Matrix  $\mathbf{F}$ ) hergestellt werden soll.

Die den Koeffizienten  $\text{pk}_{32}$  enthaltende Untermatrix gibt die Rückkopplung wieder. Sie sagt aus, wieviel Mengeneinheiten des zweiten Erzeugungsobjektes des Transformators 4 (Zeile 6 der Matrix  $\mathbf{F}$ ) verbraucht werden wird, wenn ein Erzeugungsbündel der beiden Erzeugungsobjekte des Transformators 3 (Spalten 3 und 4 der Matrix  $\mathbf{F}$ ) hergestellt werden soll.



## A.7 Ermittlung des vervollständigten Bestandsveränderungsvektors

Die zur Ermittlung des vervollständigten Vektors  $\mathbf{bv}$  nötigen Kopplungskoeffizienten lauten (vgl. Gleichung 3 – 15):

$$kk_{31} = \frac{p_{31}}{p_{32=L}} \quad \text{und} \quad kk_{32} = \frac{p_{32}}{p_{32=L}} = 1. \quad (\text{A} - 10)$$

$$kk_{41} = \frac{p_{41}}{p_{42=L}} \quad \text{und} \quad kk_{42} = \frac{p_{42}}{p_{42=L}} = 1. \quad (\text{A} - 11)$$

Die Multiplikation der Gesamtverbrauchsmatrix  $\mathbf{G}_{no}$  mit dem unvollständigen Bestandsveränderungsvektor  $\mathbf{bv}_o$  gibt die Erzeugungsmengen der Transformationsstellen an:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{no} \cdot \mathbf{bv}_o &= \left( \begin{array}{cc} \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \frac{pk_{32} \cdot pk_{41}}{1 - pk_{32} \cdot pk_{41}} & \frac{pk_{41}}{1 - pk_{32} \cdot pk_{41}} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \frac{1}{1 - pk_{32} \cdot pk_{41}} & \frac{pk_{41}}{1 - pk_{32} \cdot pk_{41}} \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \frac{pk_{32}}{1 - pk_{32} \cdot pk_{41}} & \frac{pk_{32} \cdot pk_{41}}{1 - pk_{32} \cdot pk_{41}} \end{array} \right) & \left( \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \frac{pk_{32}}{1 - pk_{32} \cdot pk_{41}} & \frac{1}{1 - pk_{32} \cdot pk_{41}} \end{array} \right) \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} bv_{1N} \\ bv_{2N} \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c} bv_{1L} \\ bv_{2L} \end{array} \right) \end{array} \right) = \\ &= \left( \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} p_{31} \\ p_{32=L} \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c} p_{41} \\ p_{42=L} \end{array} \right) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} kk_{31} \cdot p_{32=L} \\ p_{32=L} \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c} kk_{41} \cdot p_{42=L} \\ p_{42=L} \end{array} \right) \end{array} \right). \end{aligned} \quad (\text{A} - 12)$$

Daraus resultiert folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & kk_{31} \cdot p_{32=L} = bv_{1N} \\ \text{II)} \quad & p_{32=L} = bv_{1N} \cdot \frac{pk_{32} \cdot pk_{41}}{1 - pk_{32} \cdot pk_{41}} + bv_{2N} \cdot \frac{pk_{41}}{1 - pk_{32} \cdot pk_{41}} + \\ & + bv_{1L} \cdot \frac{1}{1 - pk_{32} \cdot pk_{41}} + bv_{2L} \cdot \frac{pk_{41}}{1 - pk_{32} \cdot pk_{41}} \\ \text{III)} \quad & kk_{41} \cdot p_{42=L} = bv_{2N} \\ \text{IV)} \quad & p_{42=L} = bv_{1N} \cdot \frac{pk_{32}}{1 - pk_{32} \cdot pk_{41}} + bv_{2N} \cdot \frac{pk_{32} \cdot pk_{41}}{1 - pk_{32} \cdot pk_{41}} + \\ & + bv_{1L} \cdot \frac{pk_{32}}{1 - pk_{32} \cdot pk_{41}} + bv_{2L} \cdot \frac{1}{1 - pk_{32} \cdot pk_{41}}. \end{aligned} \quad (\text{A} - 13)$$

Ausgehend von den bekannten Bestandsveränderungen der Leitobjekte kann durch Umstellen der Gleichung II) nach einer der Bestandsveränderungen der Nebenobjekte und Einsetzen in IV) das Gleichungssystem aufgelöst werden. Mit dem nun vollständig bekannten Bestands-

veränderungsvektor sind alle notwendigen Bestandsveränderungen der Faktorlagerstellen, die Erzeugungsmengen der Transformationsstellen und die Bestandsveränderungen der Produktlagerstellen ermittelbar.

## A.8 Dimensionsnachweis der Objekte

Der Dimensionsnachweis soll an dieser Stelle nur für die Erzeugung  $p_{32}$  und die notwendige Bestandserhöhung in der Faktorlagerstelle 1 ( $-v_{31}$ ) erfolgen. Das Vorgehen ist jedoch prinzipiell für alle Objekte im System gültig.

Nach Festlegung der technologischen Situation sind die Produktionskoeffizienten und die Kopplungen konstant. Zu den auftretenden Problemen bei der Festlegung einer geeigneten Situation vgl. Abschnitt 3.3.3. Hier sei davon ausgegangen, daß eine geeignete Situation gefunden worden ist. Eine unzulässige Vermischung der Dimensionen findet nur dann nicht statt, wenn sich alle Erzeugungsbündel kürzen und letztlich nur die Gleichung  $p_{32} = p_{32}$  bzw.  $-v_{31} = -v_{31}$  verbleibt.

Nach den in Anhang A.7 ermittelten Gleichungen gilt für  $p_{32}$ :

$$\frac{bv_{1N} \cdot pk_{32} \cdot pk_{41} + bv_{2N} \cdot pk_{41} + bv_{1L} + bv_{2L} \cdot pk_{41}}{1 - pk_{32} \cdot pk_{41}} = p_{32}. \quad (A - 14)$$

An Stelle der verkürzt dargestellten Produktionskoeffizienten werden deren ausführliche Gleichungen eingesetzt (vgl. A.4):

$$\frac{bv_{1N} \cdot \frac{-v_{32}}{p_{31} + p_{32}} \cdot \frac{-v_{41}}{p_{41} + p_{42}} + bv_{2N} \cdot \frac{-v_{41}}{p_{41} + p_{42}} + bv_{1L} + bv_{2L} \cdot \frac{-v_{41}}{p_{41} + p_{42}}}{1 - \frac{-v_{32}}{p_{31} + p_{32}} \cdot \frac{-v_{41}}{p_{41} + p_{42}}} = p_{32}. \quad (A - 15)$$

Die Bestandsveränderungen der Produkte lassen sich ersetzen durch folgende Beziehungen:

$$bv_{1L} = p_{32} - (-v_{41}), \quad bv_{1N} = p_{31}, \quad (A - 16)$$

$$bv_{2L} = p_{42} - (-v_{32}), \quad bv_{2N} = p_{41}. \quad (A - 17)$$

Daraus folgt:

$$\frac{\left( p_{31} \cdot \frac{-v_{32}}{p_{31} + p_{32}} \cdot \frac{-v_{41}}{p_{41} + p_{42}} + p_{41} \cdot \frac{-v_{41}}{p_{41} + p_{42}} + p_{32} - (-v_{41}) + (p_{42} - (-v_{32})) \cdot \frac{-v_{41}}{p_{41} + p_{42}} \right)}{1 - \frac{-v_{32}}{p_{31} + p_{32}} \cdot \frac{-v_{41}}{p_{41} + p_{42}}} = p_{32}. \quad (A - 18)$$

$$\begin{aligned}
& p_{32} + p_{31} \cdot \frac{-v_{32}}{p_{31} + p_{32}} \cdot \frac{-v_{41}}{p_{41} + p_{42}} - (-v_{32}) \cdot \frac{-v_{41}}{p_{41} + p_{42}} = \\
& = p_{32} - p_{32} \cdot \frac{-v_{32}}{p_{31} + p_{32}} \cdot \frac{-v_{41}}{p_{41} + p_{42}}.
\end{aligned} \tag{A-19}$$

$$p_{32} + (p_{31} + p_{32}) \cdot \frac{-v_{32}}{p_{31} + p_{32}} \cdot \frac{-v_{41}}{p_{41} + p_{42}} - (-v_{32}) \cdot \frac{-v_{41}}{p_{41} + p_{42}} = p_{32}. \tag{A-20}$$

$$p_{32} = p_{32}. \tag{A-21}$$

Für die Bestandserhöhung der Stelle 1 ergibt sich:

$$\begin{aligned}
-v_{31} = & bv_{1N} \cdot \frac{pk_{31}}{1 - pk_{32} \cdot pk_{41}} + bv_{2N} \cdot \frac{pk_{31} \cdot pk_{41}}{1 - pk_{32} \cdot pk_{41}} + \\
& + bv_{1L} \cdot \frac{pk_{31}}{1 - pk_{32} \cdot pk_{41}} + bv_{2L} \cdot \frac{pk_{31} \cdot pk_{41}}{1 - pk_{32} \cdot pk_{41}}.
\end{aligned} \tag{A-22}$$

$$\begin{aligned}
& p_{31} \cdot \frac{-v_{31}}{p_{31} + p_{32}} + p_{41} \cdot \frac{-v_{31}}{p_{31} + p_{32}} \cdot \frac{-v_{41}}{p_{41} + p_{42}} + p_{32} \cdot \frac{-v_{31}}{p_{31} + p_{32}} - \\
& - (-v_{41}) \cdot \frac{-v_{31}}{p_{31} + p_{32}} + p_{42} \cdot \frac{-v_{31}}{p_{31} + p_{32}} \cdot \frac{-v_{41}}{p_{41} + p_{42}} - (-v_{32}) \cdot \frac{-v_{31}}{p_{31} + p_{32}} \cdot \frac{-v_{41}}{p_{41} + p_{42}} \\
-v_{31} = & \frac{p_{31} \cdot \frac{-v_{31}}{p_{31} + p_{32}} + p_{41} \cdot \frac{-v_{31}}{p_{31} + p_{32}} \cdot \frac{-v_{41}}{p_{41} + p_{42}} + p_{32} \cdot \frac{-v_{31}}{p_{31} + p_{32}} - (-v_{41}) \cdot \frac{-v_{31}}{p_{31} + p_{32}} + p_{42} \cdot \frac{-v_{31}}{p_{31} + p_{32}} \cdot \frac{-v_{41}}{p_{41} + p_{42}} - (-v_{32}) \cdot \frac{-v_{31}}{p_{31} + p_{32}} \cdot \frac{-v_{41}}{p_{41} + p_{42}}}{1 - \frac{-v_{32}}{p_{31} + p_{32}} \cdot \frac{-v_{41}}{p_{41} + p_{42}}}.
\end{aligned} \tag{A-23}$$

$$\begin{aligned}
-v_{31} - (-v_{31}) \cdot \frac{-v_{32}}{p_{31} + p_{32}} \cdot \frac{-v_{41}}{p_{41} + p_{42}} = & -v_{31} \cdot \frac{p_{31} + p_{32}}{p_{31} + p_{32}} - (-v_{31}) \cdot \frac{-v_{32}}{p_{31} + p_{32}} \cdot \frac{-v_{41}}{p_{41} + p_{42}} + \\
& + (-v_{41}) \cdot \left( \frac{-v_{31}}{p_{31} + p_{32}} \cdot \frac{p_{41} + p_{42}}{p_{41} + p_{42}} - \frac{-v_{31}}{p_{31} + p_{32}} \right).
\end{aligned} \tag{A-24}$$

$$-v_{31} = -v_{31}. \tag{A-25}$$

## Literaturverzeichnis

- ADAM, D. (Produktionsmanagement, 1998): Produktionsmanagement, 9. Auflage, Wiesbaden 1998.
- BEA, F. X., SCHNAITMANN, H. (Begriff, 1995): Begriff und Struktur betriebswirtschaftlicher Prozesse, in: WiSt, 24. Jg., 1995, S. 278–282.
- BLEIMANN, U. G. (Darstellungsformen, 1981): Darstellungsformen von Technologien in der Produktionstheorie – Entwicklungen und Strukturen, Frankfurt a. M. 1981.
- BLOECH, J., BOGASCHEWSKY, R., GÖTZE, U., ROLAND, F. (Einführung, 2001): Einführung in die Produktion, 4. Auflage, Heidelberg 2001.
- BLOHM, H., BEER, T., SEIDENBERG, U., SILBER, H. (Produktionswirtschaft, 1997): Produktionswirtschaft, 3. Auflage, Berlin 1997.
- BODE, J., ZELEWSKI, S. (Dienstleistungen, 1992): Die Produktion von Dienstleistungen, in: BFuP, 44. Jg., 1992, S. 594–607.
- CHENERY, H. B. (Engineering Production Functions, 1949): Engineering Production Functions, in: Quarterly Journal of Economics, 63. Jg., 1949, S. 507–531.
- CHENERY, H. B. (Production Functions, 1953): Process and Production Functions from Engineering Data, in: LEONTIEF, W. W. et al. (Hrsg.), Studies in the Structure of the American Economy, White Plains 1953, S. 297–325.
- CORSTEN, H. (Produktionswirtschaft, 2000): Produktionswirtschaft, 9. Auflage, München/Wien 2000.
- DANGELMAIER, W. (Fertigungsplanung, 2001): Fertigungsplanung, 2. Auflage, Berlin et al. 2001.
- DANGELMAIER, W., WARNECKE, H.-J. (Fertigungslenkung, 1997): Fertigungslenkung, Berlin et al. 1997.
- DELLMANN, K. (Produktion und Kosten, 1980): Betriebswirtschaftliche Produktions- und Kostentheorie, Wiesbaden 1980.
- DINKELBACH, W., ROSENBERG, O. (Umwelt, 2002): Erfolgs- und umweltorientierte Produktionstheorie, 4. Auflage, Berlin et al. 2002.
- DOMSCHKE, W., SCHOLL, A., VOSS, S. (Produktionsplanung, 1997): Produktionsplanung, 2. Auflage, Berlin et al. 1997.
- DYCKHOFF, H. (Produktion, 1994): Betriebliche Produktion, 2. Auflage, Berlin et al. 1994.
- DYCKHOFF, H. (Kuppelproduktion, 1996): Kuppelproduktion und Umwelt, in: Zeitschrift für angewandte Umweltforschung, 9. Jg., 1996, S. 173–187.
- EVERSHEIM, W. (Produktionstechnik, 1996): Produktionstechnik und -verfahren, in: KERN, W. (Hrsg.), Handwörterbuch der Produktionswirtschaft, 2. Auflage, Stuttgart 1996, Sp. 1534–1538.
- EVERSHEIM, W., SPUR, G. (Technologie, 1996): Produktionstechnologie, Einführung, in: EVERSHEIM, W., SCHUH, G. (Hrsg.), Produktion und Management, Bd. 2, 7. Auflage, Berlin et al. 1996, S. 11-1–11-15.
- EVERSHEIM, W., SCHUH, G. (Produktmanagement, 1999): Produktion und Management 2 – Produktmanagement, Berlin et al. 1999.
- EVERSHEIM, W., SCHUH, G. (Gestaltung, 1999): Produktion und Management 3 – Gestaltung von Produktionssystemen, Berlin et al. 1999.
- FANDEL, G. (Produktion, 1996): Produktion I, 5. Auflage, Berlin et al. 1996.
- FRIES, H.-P. (Industriebetrieb, 1999): Betriebswirtschaftslehre des Industriebetriebs, 5. Auflage, München/Wien 1999.

- GELLER, W. (Thermodynamik, 2000): Thermodynamik für Maschinenbauer, Berlin et al. 2000.
- GÜNTHER, H.-O., TEMPELMEIER, H. (Logistik, 2000): Produktion und Logistik, 4. Auflage, Berlin et al. 2000.
- GUTENBERG, E. (Grundlagen, 1983): Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre, Bd. 1: Die Produktion, 24. Auflage, Berlin et al. 1983.
- HEINEN, E. (Zielfunktion, 1962): Die Zielfunktion der Unternehmung, in: KOCH, H. (Hrsg.), Zur Theorie der Unternehmung – Festschrift zum 65. Geburtstag von Erich Gutenberg, Wiesbaden 1962, S. 9–71.
- HEINEN, E. (Kostenlehre, 1983): Betriebswirtschaftliche Kostenlehre, 6. Auflage, Wiesbaden 1983.
- HILLIER, F. S., LIEBERMAN, G. J. (Operations Research, 1997): Operations Research, 5. Auflage, München/Wien 1997.
- HIRSCH, A. (Werkzeugmaschinen, 2000): Werkzeugmaschinen, Braunschweig/Wiesbaden 2000.
- KERN, W. (Produktionswirtschaft, 1992): Industrielle Produktionswirtschaft, 5. Auflage, Stuttgart 1992.
- KISTNER, K. P. (Produktion, 1993): Produktions- und Kostentheorie, 2. Auflage, Stuttgart 1993.
- KISTNER, K.-P., STEVEN, M. (Betriebswirtschaftslehre, 1999): Betriebswirtschaftslehre im Grundstudium 1, 3. Auflage, Heidelberg 1999.
- KLINGELHÖFER, H. E. (Entsorgung, 2000): Betriebliche Entsorgung und Produktion, Wiesbaden 2000.
- KLOOCK, J. (Diskussion, 1969): Zur gegenwärtigen Diskussion der betriebswirtschaftlichen Produktions- und Kostentheorie, in: ZfB, Ergänzungsheft 1, 39. Jg., 1969, S. 49–82.
- KLOOCK, J. (Input-Output-Modelle, 1969): Betriebswirtschaftliche Input-Output-Modelle, Wiesbaden 1969.
- KOETHER, R., RAU, W. (Fertigungstechnik, 1999): Fertigungstechnik für Wirtschaftsingenieure, München/Wien 1999.
- KOOPMANS, T. C. (Activities, 1976): Analysis of Production as an efficient Combination of Activities, in: KOOPMANS, T. C. (Hrsg.), Activity Analysis of Production and Allocation, 8. Auflage, New Haven/London 1976, S. 33–97.
- KUCHLING, H. (Physik, 2001): Taschenbuch der Physik, 17. Auflage, München/Wien 2001.
- LAUX, H., LIERMANN, F. (Organisation, 1997): Grundlagen der Organisation, 4. Auflage, Berlin et al. 1997.
- MATSCHKE, M. J., LEMSER, B. (Entsorgung, 1992): Entsorgung als betriebliche Grundfunktion, in: BFuP, 44. Jg., 1992, S. 85–101.
- MATTHES, W. (Produktionstheorie, 1996): Produktionstheorie, funktionalistische, in: KERN, W. (Hrsg.), Handwörterbuch der Produktionswirtschaft, 2. Auflage, Stuttgart 1996, Sp. 1569–1584.
- MAY, E. (Dynamische Produktionstheorie, 1992): Dynamische Produktionstheorie auf Basis der Aktivitätsanalyse, Heidelberg 1992.
- MÜLLER-MERBACH, H. (Input-Output-Modelle, 1981): Die Konstruktion von Input-Output-Modellen, in: BERGNER, HEINZ (Hrsg.): Planung und Rechnungswesen in der Betriebswirtschaftslehre, Berlin 1981, S. 19–113.
- NEBL, T. (Produktionswirtschaft, 2001): Produktionswirtschaft, 4. Auflage, München/Wien 2001.

- OENNING, A. (Kuppelproduktion, 1997): Theorie betrieblicher Kuppelproduktion, Heidelberg 1997.
- PALUPSKI, R. (Management, 1998): Management von Beschaffung, Produktion und Absatz, Wiesbaden 1998.
- REESE, J. (Produktion, 1999): Produktion, in: CORSTEN, H., REISS, M. (Hrsg.), Betriebswirtschaftslehre, 3. Auflage, München/Wien 1999, S. 723–807.
- REFA (Hrsg.) (Betriebsorganisation, 1997): Methodenlehre der Betriebsorganisation – Datenermittlung, München 1997.
- ROLLBERG, R. (Unternehmensplanung, 2001): Integrierte Unternehmensplanung, Wiesbaden 2001.
- ROLLBERG, R. (Produktionsplanung, 2002): Integrierte Produktionsplanung – Vom theoretischen Ideal der Simultanplanung bis zum praktischen Kompromiß des „Advanced Planning and Scheduling (APS)“, in: KEUPER, F. (Hrsg.), Produktion und Controlling, Wiesbaden 2002, S. 127–155.
- SCHIEMENZ, B., SCHÖNERT, O. (Entscheidung, 2001): Entscheidung und Produktion, München/Wien 2001.
- SCHIERENBECK, H. (Betriebswirtschaftslehre, 1987): Grundzüge der Betriebswirtschaftslehre, 9. Aufl., München, Wien 1987.
- SCHWEITZER, M. (Industriebetriebslehre, 1994): Industriebetriebslehre, 2. Auflage, München 1994.
- SCHWEITZER, M., KÜPPER, H.-U. (Produktion und Kosten, 1997): Produktions- und Kostentheorie, 2. Auflage, Wiesbaden 1997.
- SPUR, G. (Produktion, 2000): Produktion, in: CZICHOS, H. (Hrsg.), Die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften, 31. Auflage, Berlin et al. 2000, S. L1 – L49.
- STEINMETZ, U. (Gestaltung, 2001): Die Gestaltung von Produktionsprozessen als Anwendung einer modifizierten Theorie der betrieblichen Produktion, Göttingen 2001.
- STEVEN, M. (Produktionstheorie, 1998): Produktionstheorie, Wiesbaden 1998.
- STEVEN, M. (Koordination, 2001): Die Koordination im Unternehmen, in: WISU, 30. Jg., 2001, S. 965–970.
- VAZSONYI, A. (Planungsrechnung, 1962): Die Planungsrechnung in Wirtschaft und Industrie, Wien/München 1962.
- WARNECKE, H.-J., WESTKÄMPER, E. (Fertigungstechnik, 1998): Einführung in die Fertigungstechnik, 3. Auflage, Stuttgart 1998.
- WALL, F. (Input-Output-Analyse, 1994): Die Input-Output-Analyse in der betriebswirtschaftlichen Produktionstheorie, in: WiSt, 23. Jg., 1994, S. 290–295.
- WITTMANN, W. (Produktionstheorie, 1968): Produktionstheorie, Berlin et al. 1968.
- WÖHE, G., DÖHRING, U. (Einführung, 2002): Einführung in die Allgemeine Betriebswirtschaftslehre, 21. Auflage, München 2002.
- ZÄPFEL, G. (Produktionswirtschaft, 1982): Produktionswirtschaft – Operatives Produktionsmanagement, Berlin/New York 1982.
- ZÄPFEL, G. (Grundzüge, 2001): Grundzüge des Produktions- und Logistikmanagement, 2. Auflage, München/Wien 2001.
- ZELEWSKI, S. (Grundlagen, 1999): Grundlagen, in: CORSTEN, H., REISS, M. (Hrsg.): Betriebswirtschaftslehre, 3. Auflage, München/Wien 1999, S. 1–125.
- ZSCHOCKE, D. (Betriebsökonomie, 1974): Betriebsökonomie – Stochastische und technologische Aspekte bei der Bildung von Produktionsmodellen und Produktionsstrukturen, Würzburg/Wien 1974.

## **Autoren**

**Dipl.-Wirtsch.-Ing. Stefan Mirschel** ist Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Allgemeine Betriebswirtschaftslehre und Produktionswirtschaft an der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald, E-Post: [stemi@uni-greifswald.de](mailto:stemi@uni-greifswald.de).

**Prof. Dr. rer. pol. habil. Roland Rollberg** ist Inhaber des Lehrstuhls für Allgemeine Betriebswirtschaftslehre und Produktionswirtschaft an der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald, E-Post: [rororo@uni-greifswald.de](mailto:rororo@uni-greifswald.de).

**Dr. rer. pol. Ulrich Steinmetz** ist Wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre und Industriebetriebslehre an der Bayerischen Julius-Maximilians-Universität Würzburg, E-Post: [ulrich.steinmetz@mail.uni-wuerzburg.de](mailto:ulrich.steinmetz@mail.uni-wuerzburg.de).