Mirschel, Stefan

Working Paper

Die Optionsbewertungsformel von Cox, Ross und Rubinstein im Zustandsgrenzpreismodell: ein dualitätstheoretischer Nachweis

Wirtschaftswissenschaftliche Diskussionspapiere // Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald, Rechts- und Staatswissenschaftliche Fakultät, No. 04/2006

Provided in cooperation with:
Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

Suggested citation: Mirschel, Stefan (2006) : Die Optionsbewertungsformel von Cox, Ross und Rubinstein im Zustandsgrenzpreismodell: ein dualitätstheoretischer Nachweis, Wirtschaftswissenschaftliche Diskussionspapiere // Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald, Rechts- und Staatswissenschaftliche Fakultät, No. 04/2006, http://hdl.handle.net/10419/32334

Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

Die Optionsbewertungsformel von Cox, Ross und Rubinstein im Zustandsgrenzpreismodell

Ein dualitätstheoretischer Nachweis

Stefan Mirschel

Diskussionspapier 04/2006
Mai 2006

Rechts- und Staatswissenschaftliche Fakultät

Wirtschaftswissenschaftliche
Diskussionspapiere

Anschrift
Dipl.-Wirtsch.-Ing. Stefan Mirschel
Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald
Rechts- und Staatswissenschaftliche Fakultät
Lehrstuhl für Allg. Betriebswirtschaftslehre und
Produktionswirtschaft
Friedrich-Loeffler-Str. 70
17489 Greifswald
Telefon: + 49(3834)86-2491
Fax: + 49(3834)86-2428
E-Mail: stemi@uni-greifswald.de

Die Optionsbewertungsformel von COX, ROSS und RUBINSTEIN im Zustandsgrenzpreismodell

Ein dualitätstheoretischer Nachweis

Stefan Mirschel

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis

bspw.	beispielsweise
bzw.	beziehungsweise
CRR	COX, ROSS und RUBINSTEIN
d. h.	das heißt
et al.	et alii
f.	folgende
ff.	fortfolgende
ggf.	gegebenenfalls
Hrsg.	Herausgeber
i. d. R.	in der Regel
insb.	insbesondere
Jg.	Jahrgang
Nr.	Nummer
S.	Seite
u. d. N.	unter den Nebenbedingungen
v. a.	vor allem
vgl.	vergleiche
z. B.	zum Beispiel
ZGPM	Zustandsgrenzpreismodell

Symbolverzeichnis

b	Index für Bewertungsprogramm
B	Betrag der risikolosen Anlage
d	Abwärtsfaktor
DP	Wert der dualen Grenzpreisfunktion
dsl	duale Schlupfvariable
en_s	Entnahme im Zustand s
ga_s	Geldanlage im Zustand s
GEN	Wert der gewichteten Entnahmen
$gw^p{}_s$	Pseudowahrscheinlichkeit im Zustand s
gw_s	Eintrittswahrscheinlichkeit im Zustand s
i	Platzhalterindex
IN	Investitionsauszahlung
j	Platzhalterindex
Kap	Kapazität
ka_s	Kreditaufnahme im Zustand s
max	Maximumoperator
max.	maximiere
min.	minimiere
opt	Index für Optimum
P	Grenzpreis
pa	Grenzzahlungsbereitschaft
pe	Grenzforderung
q	Aufzinsungsfaktor
u	Aufwärtsfaktor
WAR	Wert der ausgeschöpften Restriktionen
y_s	Optionsausübungsvariable im Zustand s
Z_0	Einzahlung je Kapazitätseinheit
δ	duale Strukturvariable der Mindestzielfunktionswertrestriktion
Δ	Menge des Basisguts
Δ^{Kap}	Kapazitätserhöhung
λ_s	duale Strukturvariable der Liquiditätsrestriktion im Zustand s
ψ_s	duale Strukturvariable der Optionsausübungsrestriktion im Zustand s

1 Optionen als Bewertungsgegenstände und Ziel der Untersuchung

Optionen sind an Wahlrechte gebundene Handlungsfreiräume, die unter Unsicherheit geschaffen und genutzt werden, um auf unterschiedliche Zukunftsentwicklungen zielsetzungsgerecht reagieren zu können.[1] Sie lassen sich wie jedes wirtschaftlich interessierende Objekt bewerten.

Die Unterscheidung in Finanz- und Realoptionen ist v. a. eine lokale Differenzierung des Bewertungsgegenstands.[2] Die auf Finanzmärkten anzutreffenden Finanzoptionen beziehen sich selbstverständlich auch auf reale, wenn auch nicht immer auf materielle Objekte. Der Markt, auf dem sie üblicherweise gehandelt werden, weist i. d. R. eine hohe Transparenz und vergleichsweise niedrige Transaktionskosten auf. Er kommt daher der Erfüllung zweier Anforderungen des vollkommenen Kapitalmarktes sehr nahe.[3] Ferner sind Finanzoptionen meistens ausgeprägt standardisiert und exklusiv. Als reale Optionen seien demgegenüber alle anderen Wahlrechte außerhalb der geregelten Finanzmärkte verstanden, die weit weniger standardisiert sind. Üblicherweise sind die „Nichtfinanzmärkte" intransparenter und durch höhere Transaktionskosten gekennzeichnet.

Da Optionen bedingte Handlungsmöglichkeiten erfassen, wird der Umgang mit Optionen grundsätzlich von der Methodik der flexiblen Planung erfaßt.[4] In Abhängigkeit von vermuteten Vorentwicklungen werden mit der flexiblen Planung bedingte Entscheidungen subjektiv zielsetzungsgerecht vorbereitet. Insofern lassen sich subjektive Optionswerte z. B. mit Hilfe des Zustandsgrenzpreismodells ermitteln, das auf der flexiblen Planung beruht und keinen vollkommenen Kapitalmarkt voraussetzt. Dieser Herangehensweise zur Optionsbewertung steht die finanzierungstheoretische Ermittlung von präferenzfreien Optionswerten unter der Voraussetzung vollkommener Märkte gegenüber. Ein bekanntes Modell dieses Theoriegebäudes ist das von COX, ROSS und RUBINSTEIN.[5] Werden dieselben Prämissen zugrunde gelegt, dann müssen sich jedoch die Ergebnisse beider Herangehensweisen entsprechen.[6]

Zunächst wird für einen späteren Vergleich das Optionsbewertungsmodell von COX, ROSS und RUBINSTEIN in Kapitel zwei in den wichtigsten Punkten erläutert. Das Ziel dieses Arbeitsberichts ist der dualitätstheoretische Nachweis, daß die flexible Planung

---

1 Vgl. TRIGEORGIS (1996), S. 151, der statt von Handlungsfreiräumen von Flexibilität spricht, die für ihn nichts anderes als die Ansammlung von Optionen verkörpert, die mit einem Objekt verbunden sind.

2 Der Begriff der „real option" geht wohl auf MYERS zurück. Vgl. MYERS (1977), S. 147. Letztlich läßt sich jede Investition als eine Option auf die Vereinnahmung unsicherer Zahlungsströme ansehen. Vgl. BREUER (2001), S. 231, DIXIT/PINDYCK (1994), S. 147. Zu einer Gegenüberstellung von Finanz- und Realoptionen vgl. z. B. KELLERMANN/FLOYD (2005), S. 63 f.

3 Zu den Anforderungen des vollkommenen Kapitalmarkts vgl. z. B. KRUSCHWITZ (2004), S. 41 f.

4 Vgl. allgemein zur flexiblen Planung HART (1940), S. 56 ff., HAX (1970), S. 136 ff., HAX (1985), S. 165 ff., HAX/LAUX (1972), LAUX (2005), S. 283 ff. und S. 308 ff. Vgl. zur getroffenen Aussage BREUER (2001), S. 249 f., FISCHER et al. (1999), S. 1211 ff., GÖTZE (2006), S. 411., TRIGEORGIS (1996), S. 151.

5 Zum Modell von COX, ROSS und RUBINSTEIN siehe Kapitel 2.

6 Vgl. BREUER (2001), S. 249 f., insb. Fußnote 15 auf S. 150, FISCHER et al. (1999), S. 1211 ff., TEISBERG (1995), S. 32.

im Rahmen des Zustandsgrenzpreismodells unter denselben Prämissen strukturell zur selben Optionsbewertung führt wie das Modell von COX, ROSS und RUBINSTEIN. Dazu wird in Unterkapitel 3.1 mit Hilfe des Zustandsgrenzpreismodells dualitätstheoretisch der subjektive Optionswert hergeleitet. In Unterkapitel 3.2 wird dieser Ansatz mit dem von COX, ROSS und RUBINSTEIN verglichen. Der Arbeitsbericht schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick auf weiteren Forschungsbedarf.

2 Präferenzfreie Optionsbewertung auf vollkommenen Kapitalmärkten nach COX, ROSS und RUBINSTEIN

Im folgenden wird der einfachste Fall eines Binomialmodells mit nur zwei Zeitpunkten betrachtet. Der Optionsinhaber erwirbt das Recht, gegen die Investitionsauszahlung IN in den Zuständen eins und zwei des Zeitpunkts eins die Kapazität einer bestehenden Produktionsanlage um den Betrag Δ^{Kap} zu erhöhen. Die Einzahlungen je Kapazitätseinheit bei Vollauslastung der bereits vorhandenen Kapazität im Zustand null des Zeitpunkts null betragen Z_0. Es wird vorausgesetzt, daß die Kapazität immer voll ausgelastet ist und sich die Einzahlungen bei Optionsausübung gemäß Δ^{Kap} erhöhen. Allerdings ist die Entwicklung der Einzahlungen unsicher. Im Zustand eins steigen sie um den Faktor u, in Zustand zwei sinken sie hingegen um den Faktor d. Die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von Zustand eins beträgt $0 < gw < 1$ und die von Zustand zwei entsprechend $1 - gw$. Der Wert der Optionsausübung kann in beiden Zuständen nur die Höhe der zusätzlichen Einzahlungen abzüglich der Investitionsauszahlung IN oder 0 sein, falls die Einzahlungen die Auszahlungen nicht oder gerade noch auszugleichen vermögen. Die Situation ist in Abbildung 1 grafisch verdeutlicht.

Entwicklung des

Basisguts			Optionswerts		
	gw	$u \cdot Z_0 \cdot \Delta^{Kap}$		gw	$P_1^O = \max\left\{u \cdot Z_0 \cdot \Delta^{Kap} - IN; 0\right\}$
$Z_0 \cdot \Delta^{Kap}$			P_0^O		
	1 - gw	$d \cdot Z_0 \cdot \Delta^{Kap}$		1 - gw	$P_2^O = \max\left\{d \cdot Z_0 \cdot \Delta^{Kap} - IN; 0\right\}$

Abbildung 1: Entwicklung von Basisgut und Optionswert im Binomialmodell

Neben der bereits getroffenen Annahme eines multiplikativen binomialen Veränderungsprozesses setzen COX, ROSS und RUBINSTEIN weitere Prämissen, um den Wert der Option im Zustand null zu ermitteln:[7]

a) Es gilt der vollkommene Kapitalmarkt (keine Steuern, keine Transaktionskosten, vollständige Information, unbegrenzte Geldaufnahme und -anlage)
b) Der einheitliche risikolose Aufzinsungsfaktor q ist konstant und größer null.
c) Ein Subjekt strebt stets nach höherem Vermögen.
d) Es gilt Arbitragefreiheit, so daß $u > q > d$ sein muß.

Die mit dem unsicheren Basisobjekt verbundenen Zahlungsströme werden von einer Investition in eine mit dem Basisobjekt vergleichbare risikobehaftete Anlage und in eine risikolose Anlage mit dem Aufzinsungsfaktor q repliziert. Hier sei davon ausgegangen, daß eine bestimmte Menge Δ mit der unsicheren Zahlung Z_0 verbunden und B

[7] Vgl. COX et al. (1979), S. 232, BLACK/SCHOLES (1973), S. 640, MERTON (1998), S. 327.

die Höhe der risikolosen Anlage ist. Dann ergibt sich für die zustandsspezifischen Optionswerte folgendes:[8]

$$P_0^O = \Delta \cdot Z_0 + B \tag{1}$$

$$P_1^O = \Delta \cdot u \cdot Z_0 + q \cdot B \tag{2}$$

$$P_2^O = \Delta \cdot d \cdot Z_0 + q \cdot B \tag{3}$$

Durch Umstellen der Gleichung (2) nach B oder Δ und Einsetzen in Gleichung (3) lassen sich Ausdrücke für Δ und B finden, die von den Optionswerten in den Zuständen eins und zwei, den Veränderungsparametern sowie dem Basiswert oder dem risikolosen Aufzinsungsfaktor abhängen.[9] Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichung (1) ein, dann ergibt sich als Wert der Option im Zustand null:

$$P_0^O = \frac{1}{q} \cdot \left(\frac{q-d}{u-d} \cdot P_1^O + \frac{u-q}{u-d} \cdot P_2^O \right) \tag{4}$$

Gemäß der gesetzten Prämisse d) bewegen sich die Quotienten vor den zustandsabhängigen Optionswerten zwischen null und eins. Wegen der Ähnlichkeit zu Eintrittswahrscheinlichkeiten werden die Ausdrücke auch als Pseudowahrscheinlichkeiten bezeichnet.[10] Sie ersetzen die im Kalkül untergehenden subjektiven Eintrittswahrscheinlichkeiten. Sofern alle Subjekte vom selben risikolosen Zins und derselben unsicheren Entwicklung des Basisguts ausgehen (Prämisse a)), teilen sie trotz unterschiedlicher Präferenzen dieses Ergebnis, da sich andernfalls Arbitragemöglichkeiten ergäben.[11] Deshalb wird auch von präferenzfreier oder „objektiver" Optionsbewertung gesprochen.[12] Werden die Optionswerte in den Zuständen eins und zwei durch die in Abbildung 1 angegebenen Ausdrücke ersetzt, resultiert schließlich:

$$P_0^O = \frac{1}{q} \cdot \left(gw^p \cdot \max\left\{ u \cdot Z_0 \cdot \Delta^{Kap} - IN; 0 \right\} + \left(1 - gw^p\right) \cdot \max\left\{ d \cdot Z_0 \cdot \Delta^{Kap} - IN; 0 \right\} \right) \tag{5}$$

[8] Vgl. COX et al. (1979), S. 233.

[9] Vgl. auch im folgenden COX et al. (1979), S. 233.

[10] Vgl. COX et al. (1979), S. 235 f.

[11] Vgl. auch im folgenden COX et al. (1979), S. 235 f.

[12] Vgl. z. B. AMRAM/KULATILAKA (1999), S. 112. Die Bezeichnung der präferenzfreien Optionswerte als risikoneutral (vgl. COX et al. (1979), S. 235, TRIGEORGIS (1996), S. 157) ist begrifflich unsauber, müssen die Marktteilnehmer allesamt doch nicht risikoneutral sein. KRUSCHWITZ und LÖFFLER definieren die Objektivität einer Bewertung allein schon dadurch, daß sie statt auf subjektive Präferenzen auf am Markt gehandelte Duplikationswertpapiere zurückgreift. Vgl. KRUSCHWITZ/LÖFFLER (2003), S. 1336. Die Wahl der Duplikationswertpapiere bleibt aber bei finanzmarktfernen Objekten in der Realität äußerst subjektiv.

3 Subjektive Optionsbewertung auf vollkommenen Kapitalmärkten mit dem Zustandsgrenzpreismodell

3.1 Basisprogramm

Das Zustandsgrenzpreismodell (im folgenden ZGPM) ist ein von HERING entwickeltes Entscheidungsmodell, das auf dem WEINGARTNER-HAX-Modell zur linearen Investitionsprogrammplanung und den Bewertungsansätzen nach LAUX/FRANKE, JAENSCH und MATSCHKE sowie dem Prinzip der flexiblen Planung beruht.[13] Es fungiert trotz seiner investitionstheoretischen Herkunft als Basis für eine einheitliche Investitions- und Finanzierungstheorie, auf der beruhend folglich unter denselben Annahmen auch der Optionswert nach COX, ROSS und RUBINSTEIN herzuleiten sein muß.[14]
Zunächst ist ein Basisprogramm aufzustellen, mit dessen Hilfe ein Subjekt seinen Investitions- und Finanzierungsplan vor dem Kauf der Option optimiert.[15] Als Zielfunktion wird die Summe der mit den subjektiven Eintrittswahrscheinlichkeiten gewichteten Entnahmen en in den drei Zuständen maximiert:[16]

$$\text{max. GEN;} \qquad \text{GEN} := en_0 + gw \cdot en_1 + (1 - gw) \cdot en_2 \tag{6}$$

Das Restriktionssystem besteht lediglich aus den Liquiditätsnebenbedingungen der drei Zustände, die sicherstellen, daß zu keinem Zeitpunkt die Liquidität von null unterschritten wird, und den obligatorischen Nichtnegativitätsbedingungen. Der Saldo aus Entnahme en, der Geldanlage ga und der Geldaufnahme ka darf die Einzahlungen in keinem Zustand überschreiten, die aus der Nutzung der vorhandenen (nicht disponiblen) Kapazität Kap herrühren. Im Falle eines vollkommenen Kapitalmarktes ist die Anlage und Aufnahme von Geld zum risikolosen Zins in unbegrenzter Höhe möglich. Weil das Modell nur zwei Zeitpunkte aufweist, ist die Geldanlage und -aufnahme nur im Zustand null möglich und wird in den Zuständen eins und zwei verzinst zurückgezahlt. Somit gilt folgendes Restriktionssystem:

$$en_0 + ga_0 - ka_0 \le Z_0 \cdot Kap \tag{7}$$

$$en_1 - q \cdot ga_0 + q \cdot ka_0 \le u \cdot Z_0 \cdot Kap \tag{8}$$

$$en_2 - q \cdot ga_0 + q \cdot ka_0 \le d \cdot Z_0 \cdot Kap \tag{9}$$

$$en_0, en_1, en_2, ga_0, ka_0 \ge 0 \tag{10}$$

---

[13] Vgl. HERING (2006), S. 43 ff. Das Grundmodell zur linearen Investitionsprogrammplanung geht auf WEINGARTNER und HAX zurück. Vgl. WEINGARTNER (1974), S. 139 ff., HAX (1964) S. 435 ff. Zum zweistufigen Vorgehen von JAENSCH und MATSCHKE vgl. u. a. JAENSCH (1966), S. 138 f. und MATSCHKE (1969), S. 59. Zum Modell von LAUX und FRANKE vgl. LAUX/FRANKE (1969), S. 210 ff. Zur flexiblen Investitionsplanung vgl. ausführlich INDERFURTH (1982).

[14] Vgl. HERING (2006), S. 247 ff.

[15] Die Begriffe des Basis- und später des Bewertungsprogramms gehen auf MATSCHKE zurück. Vgl. MATSCHKE (1969), S. 59.

[16] Vgl. zur Begründung dieser Zielfunktion HERING (2003), S. 57 f. und insbesondere des sogenannten Flaschenhalsproblems bei davon abweichender Maximierung uniformer Entnahmeströme KLINGELHÖFER (2003), S. 286, KLINGELHÖFER (2004), S. 75, Fn. 202.

Jedes lineare primale Problem besitzt eine duale Entsprechung.[17] Besitzt das primale Problem eine endliche optimale Lösung GEN^{opt}, so besitzt auch das duale Problem eine endliche optimale Lösung WAR^{opt}, und die Zielfunktionswerte sind gleich groß. Das Dualproblem minimiert den Wert der ausgeschöpften Restriktionen und sichert somit die beste Verwendung der knappen Ressourcen bzw. den minimalen Zielwertverlust bei Einhaltung der Restriktionen. Die dualen Strukturvariablen geben dabei den Wert der primalen Restriktionen an. Wenn sie gleich null sind, dann ist bei nicht entarteter Lösung die dazugehörige primale Restriktion unwirksam. Die den dualen Restriktionen zugeordneten dualen Schlupfvariablen präsentieren den Wertverlust der Primalvariablen. Wenn sie größer null sind, dann sind die dazugehörigen Strukturvariablen Nichtbasisvariablen. Die Dualvariablen lassen mithin eine wesentlich tieferreichende Interpretation des Zielfunktionswertes im Optimum zu. Die zu jeder dualen Restriktion zugeordnete Primalvariable ist im folgenden nach der Restriktion in eckigen Klammern angegeben. Das duale Basisprogramm lautet mit λ als dualer Strukturvariable einer Liquiditätsrestriktion:

min. WAR; $\quad WAR = Z_0 \cdot Kap \cdot \left(\lambda_0 + u \cdot \lambda_1 + d \cdot \lambda_2\right)$ (11)

u. d. N.:

$$\lambda_0 \geq 1 \qquad [en_0] \qquad (12)$$

$$\lambda_1 \geq gw \qquad [en_1] \qquad (13)$$

$$\lambda_2 \geq 1 - gw \qquad [en_2] \qquad (14)$$

$$\lambda_0 - q \cdot \left(\lambda_1 + \lambda_2\right) \geq 0 \qquad [ga_0] \qquad (15)$$

$$-\lambda_0 + q \cdot \left(\lambda_1 + \lambda_2\right) \geq 0 \qquad [ka_0] \qquad (16)$$

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \qquad (17)$$

Unter den Voraussetzungen,[18] daß

- eine endliche Lösung des primalen Basisprogramms existiert,
- in keinem Zustand Geld mit null bewertet wird, weil es in unbegrenzter Höhe zu einem nichtnegativen Zinssatz angelegt werden kann und daher
- jedem Geldbetrag in den Zuständen in einer Partialbetrachtung einer positiver Wert beigemessen wird,

stellen die Dualvariablen der Liquiditätsrestriktionen den zustandsbezogenen Wert des Geldes dar.[19]

---

[17] Vgl. allgemein zur Dualitätstheorie und den darauf aufbauenden Ausführungen z. B. HILLIER/LIEBERMAN (1997), S. 125 ff.

[18] Vgl. zu den Voraussetzungen HERING (2003), S. 147 f.

[19] Vgl. dazu und zu den daraus ableitbaren zustandsabhängigen Diskontierungsfaktoren WEINGARTNER (1974), S. 24 ff. und HAX (1964), S. 439 ff.

Die beiden Ungleichungen (15) und (16) erzwingen:

$$\lambda_0 = q \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) \tag{18}$$

Existiert eine optimale, nicht entartete Lösung, so findet in mindestens einem Zustand eine Entnahme statt. Allerdings würde eine Entnahme im Zustand null den Zielwert im Vergleich zu einer Entnahme in den Zuständen eins und zwei verringern und folglich nicht optimal sein, weil das Geld zum risikolosen Zins angelegt werden kann und so um den in null zu q angelegten Betrag höhere Entnahmen in den beiden unsicheren Zuständen möglich sind. Deren Gewichtungsfaktoren ergeben in der Summe eins, und somit steigert die Geldanlage statt einer Entnahme im Zustand null den Zielwert genau um die risikolose Verzinsung des Geldbetrags. Unter Arbitragefreiheit finden sogar auf jeden Fall in beiden unsicheren Zuständen eins und zwei Entnahmen statt, da sonst Gelder unbewertet verfielen. Zum Nachweis dieser Eigenschaft sei angenommen, daß im Zustand null doch eine Entnahme stattfände. Dann würde (12) als Gleichung erfüllt und somit $\lambda_0 = 1$ sein. Die in jedem Falle gültige Gleichung (18) kann dann jedoch niemals erfüllt sein, denn im Falle von Entnahmen in den Zuständen eins und zwei ist wegen der als Gleichung erfüllten Restriktionen (13) und (14) die Summe aus $\lambda_1 + \lambda_2$ genau eins. Bei einem sinnvollen Aufzinsungsfaktor q größer eins resultiert ein Widerspruch. Bei keinen Entnahmen in den Zuständen eins und zwei sind die Dualwerte λ_1 und λ_2 gemäß (13) und (14) sogar größer oder gleich den Gewichtungsfaktoren und somit Gleichung (16) erst recht nicht zu erfüllen. Somit gibt es niemals im Zustand null, sondern nur in den Zuständen eins oder zwei eine Entnahme. Zudem ist $\lambda_0 = q$ gültig, weil die Geldanlage oder -aufnahme zum risikolosen Zinssatz die einzigen Grenzprojekte sind. Gleichung (18) kann demnach umgestellt werden zu:

$$1 = \lambda_1 + \lambda_2 \tag{19}$$

Dies führt zu $\lambda_2 = 1 - gw$, wenn im Zustand eins eine Entnahme stattfindet. Im Falle einer nicht entarteten Lösung kann aufgrund der Komplementaritätsbedingung $en_2 \cdot (\lambda_2 - (1 - gw)) = 0$ auf $en_2 > 0$ geschlossen werden,[20] denn der Term in Klammern ist null. Wird also in Zustand eins Geld entnommen, dann auch in Zustand zwei. Somit lautet der Zielwert des Basisprogramms im Optimum:

$$GEN^{opt} = WAR^{opt} = q \cdot Z_0 \cdot Kap + gw \cdot u \cdot Z_0 \cdot Kap + (1 - gw) \cdot d \cdot Z_0 \cdot Kap \tag{20}$$

Der Zielwert des Basisprogramms entspricht genau der Summe aus der eine Periode lang verzinsten Einzahlung im Zustand null und den mit dem jeweiligen Gewichtungsfaktor multiplizierten, um den Faktor u gestiegenen und um den Faktor d gesunkenen Einzahlungen in den unsicheren Zuständen eins und zwei.

[20] Zu den Beziehungen zwischen Primal- und Dualprogramm und den daraus resultierenden Komplementaritätsbedingungen vgl. HILLIER/LIEBERMAN (1997), S. 133 ff.

3.2 Bewertungsprogramm

Für die Bewertung der Option muß die optionale Kapazitätserweiterung in einem Bewertungsprogramm berücksichtigt werden.[21] Die beschriebene Situation läßt sich als Kauf der optionalen Kapazitätserweiterung durch das Unternehmen interpretieren.[22] Deshalb ist die maximale Zahlungsbereitschaft oder minimale Zahlungsforderung P gesucht. Bei der Grenzpreisermittlung ist der alte Zielfunktionswert der gewichteten Entnahmen mindestens einzuhalten, damit sich das Subjekt nicht schlechter stellt.[23] Die Zielsetzung des Basisprogramms findet sich somit im Restriktionssystem des Bewertungsprogramms wieder. Da das Programm in jedem Falle lösbar sein und nicht nur ein positiver Grenzpreis gefordert werden soll, wird dieser aufgeteilt in die zu maximierende Grenzzahlungsbereitschaft pa und die zu minimierende Grenzforderung pe. Letztere bedeutet, daß die Kapazitätserweiterung aus Sicht des Unternehmens eine Einzahlung erforderlich macht, um es nicht schlechter zu stellen.
In der Liquiditätsnebenbedingung des Zustands null müssen die Grenzzahlungsbereitschaft pa und die Grenzforderung pe eingefügt werden. In den Liquiditätsnebenbedingungen der Zustände eins und zwei sind die Zahlungswirkungen der Kapazitätserweiterung einzufügen, wozu zusätzlich die Variable y_s in beiden Zuständen eingeführt wird, die den Umfang der Nutzung der Option angibt. Die Option kann höchstens einmal ausgeübt werden, so daß die Variable y_s in jedem Zustand kleiner oder gleich eins sein muß.[24] Es ergibt sich das folgende primale Bewertungsprogramm:

$$\max.\, P; \quad P := pa - pe \tag{21}$$

u. d. N.:

$$en_0 + ga_0 - ka_0 + pa - pe \le Z_0 \cdot Kap \tag{22}$$

$$en_1 - q \cdot ga_0 + q \cdot ka_0 + y_1 \cdot \left(IN - u \cdot Z_0 \cdot \Delta^{Kap}\right) \le u \cdot Z_0 \cdot Kap \tag{23}$$

$$en_2 - q \cdot ga_0 + q \cdot ka_0 + y_2 \cdot \left(IN - d \cdot Z_0 \cdot \Delta^{Kap}\right) \le d \cdot Z_0 \cdot Kap \tag{24}$$

$$y_1 \le 1 \tag{25}$$

$$y_2 \le 1 \tag{26}$$

$$-en_0 - gw \cdot en_1 - (1 - gw) \cdot en_2 \le -GEN^{opt} \tag{27}$$

$$pa, pe, en_0, en_1, en_2, ga_0, ka_0, y_1, y_2 \ge 0 \tag{28}$$

---

[21] Zum Begriff des Bewertungsprogramms vgl. MATSCHKE (1969), S. 59.

[22] Zu Konfliktsituationen der Art der Eigentumsänderung vgl. ausführlicher MATSCHKE (1975), S. 30 ff. und MATSCHKE/BRÖSEL (2005), S. 78 ff.

[23] Vgl. MATSCHKE (1975), S. 250 ff.

[24] Sollte sich die Optionsausübung in einem Zustand auch nur geringfügig lohnen, so wird das Programm die obere Grenze von y wählen, so daß problemlos die Annahme erfüllt wird, daß die zusätzliche Kapazität vollständig bereitgestellt und ausgeschöpft wird.

Das duale Bewertungsprogramm lautet mit den dualen Strukturvariablen ψ_s^b für die jeweilige obere Schranke der Optionsausübungsvariable y_s und δ^b für die Mindestzielfunktionswertrestriktion:

$$\min . DP; \quad DP := Z_0 \cdot Kap \cdot \left(\lambda_0^b + u \cdot \lambda_1^b + d \cdot \lambda_2^b\right) + \psi_1^b + \psi_2^b - \delta^b \cdot GEN^{opt} \tag{29}$$

u. d. N.:

$$\lambda_0^b \geq 1; \quad -\lambda_0^b \geq -1 \qquad [pa, pe] \tag{30}$$

$$\lambda_0^b - \delta^b \geq 0 \qquad [en_0] \tag{31}$$

$$\lambda_1^b - \delta^b \cdot gw \geq 0 \qquad [en_1] \tag{32}$$

$$\lambda_2^b - \delta^b \cdot (1 - gw) \geq 0 \qquad [en_2] \tag{33}$$

$$\lambda_0^b - q \cdot \left(\lambda_1^b + \lambda_2^b\right) \geq 0 \qquad [ga_0] \tag{34}$$

$$-\lambda_0^b + q \cdot \left(\lambda_1^b + \lambda_2^b\right) \geq 0 \qquad [ka_0] \tag{35}$$

$$\lambda_1^b \cdot \left(IN - u \cdot Z_0 \cdot \Delta^{Kap}\right) + \psi_1^b \geq 0 \qquad [y_1] \tag{36}$$

$$\lambda_2^b \cdot \left(IN - d \cdot Z_0 \cdot \Delta^{Kap}\right) + \psi_2^b \geq 0 \qquad [y_2] \tag{37}$$

$$\lambda_0^b, \lambda_1^b, \lambda_2^b, \psi_1^b, \psi_2^b, \delta^b \geq 0 \tag{38}$$

Die Schlußfolgerung, daß bei nicht entarteter Lösung in den Zuständen eins und zwei, aber nicht im Zustand null Entnahmen getätigt werden, bleibt aus denselben Gründen wie im Basisprogramm gültig. Dann gelten auch folgende Gleichungen:

$$\lambda_1^b = \delta^b \cdot gw \tag{39}$$

$$\lambda_2^b = \delta^b \cdot (1 - gw) \tag{40}$$

Wegen der dualen Nebenbedingungen (30) ist $\lambda_0^b = 1$, weshalb sich mit den Restriktionen (34) und (35) ergibt:

$$\lambda_0^b = q \cdot \left(\lambda_1^b + \lambda_2^b\right) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{q} = \lambda_1^b + \lambda_2^b \tag{41}$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke (39) und (40) in diese Gleichung resultiert:

$$\delta^b \cdot gw + \delta^b \cdot (1 - gw) = \frac{1}{q} \quad \rightarrow \quad \delta^b = \frac{1}{q} \tag{42}$$

Wird GEN^{opt} von Ausdruck (20) ersetzt, dann lautet der optimale Grenzpreis:

$$P^{opt} = DP^{opt} = Z_0 \cdot Kap + \delta^b \cdot gw \cdot u \cdot Z_0 \cdot Kap + \delta^b \cdot (1-gw) \cdot d \cdot Z_0 \cdot Kap + \psi_1^b +$$

$$\psi_2^b - \delta^b \cdot q \cdot Z_0 \cdot Kap - \delta^b \cdot gw \cdot u \cdot Z_0 \cdot Kap - \delta^b \cdot (1-gw) \cdot d \cdot Z_0 \cdot Kap \tag{43}$$

Wegen Gleichung (42) vereinfacht sich dieser Ausdruck zu:

$$P^{opt} = \psi_1^b + \psi_2^b \tag{44}$$

Die maximale Grenzzahlungsbereitschaft entspricht demnach bei nicht entarteter Lösung der Summe der Dualwerte der Optionsausübungsrestriktionen in den beiden möglichen Ausübungszuständen. Die Dualrestriktionen (36) und (37) ermöglichen eine noch genauere Interpretation. Durch Einfügen der nicht negativen dualen Schlupfvariablen $dsl(y_1)$ kann die Ungleichung (36) in eine Gleichung umgeformt werden:

$$\lambda_1^b \cdot \left(IN - u \cdot Z_0 \cdot \Delta^{Kap}\right) + \psi_1^b - dsl(y_1) = 0 \tag{45}$$

Im Falle der Optionsausübung ist $y_1 > 0$ und daher $dsl(y_1) = 0$, so daß gilt:

$$\psi_1^b = \lambda_1^b \cdot \left(u \cdot Z_0 \cdot \Delta^{Kap} - IN\right) \tag{46}$$

Sollte dagegen die Option im Zustand 1 ungenutzt verfallen, so ist $y_1 = 0$. Eine marginale Lockerung oder Verschärfung der Optionsmengenrestriktion hat dann keinen Einfluß auf die Grenzzahlungsbereitschaft. Folglich ist auch $\psi_1^b = 0$ und die duale Schlupfvariable, welche den Zahlungsbereitschaftsverlust durch eine erzwungenen Optionsausübung angibt, größer null. Da die duale Schlupfvariable dann nach der Gleichung

$$dsl(y_1) = \underbrace{-\lambda_1^b \cdot \left(u \cdot Z_0 \cdot \Delta^{Kap} - IN\right)}_{I} \tag{47}$$

berechnet wird, der Wert aber positiv sein muß, ist im Falle der ungenutzten Option der Term I negativ, der strukturgleich in der Berechnung der Dualvariable ψ_1^b auftritt. Somit ist zu schlußfolgern:

$$\psi_1^b = \max\left\{\lambda_1^b \cdot \left(u \cdot Z_0 \cdot \Delta^{Kap} - IN\right); 0\right\} \tag{48}$$

Für die Dualvariable der zweiten Optionsausübungsrestriktion läßt sich dieser Zusammenhang strukturgleich in äquivalenter Weise herleiten. Daher gilt für den Grenzpreis im Optimum:

$$P^{opt} = \max\left\{\lambda_1^b \cdot \left(u \cdot Z_0 \cdot \Delta^{Kap} - IN\right); 0\right\} + \max\left\{\lambda_2^b \cdot \left(d \cdot Z_0 \cdot \Delta^{Kap} - IN\right); 0\right\} \tag{49}$$

Da im Bewertungsprogramm der Grenzpreis im Zustand null maximiert wird, sind die Dualvariablen λ_1^b und λ_2^b zustandsabhängige Abzinsungsfaktoren, so daß der Optionspreis im klassischen Binomialmodell nichts anderes als die Summe der diskontierten Optionswerte der Zustände ist. Somit ist der Optionswert ein Kapitalwert zustandsspezifischer und unsicherer Zahlungsströme.[25]
Werden die Dualvariablen der Liquidationsrestriktionen gemäß Gleichungen (39) und (40) substituiert, wobei δ nach Gleichung (42) ersetzt wird, dann resultiert eine zur Bewertungsformel von COX, ROSS und RUBINSTEIN strukturell äquivalente Optionsbewertungsgleichung, bei der allerdings an Stelle präferenzfreier Pseudowahrscheinlichkeiten subjektive Eintrittswahrscheinlichkeiten stehen:

$$P^{opt} = \frac{1}{q} \cdot \left(gw \cdot \max\left\{ u \cdot Z_0 \cdot \Delta^{Kap} - IN; 0 \right\} + (1 - gw) \cdot \max\left\{ d \cdot Z_0 \cdot \Delta^{Kap} - IN; 0 \right\} \right) \quad (50)$$

Es ist nun aber nur noch ein unwesentlicher Schritt, statt subjektiver Wahrscheinlichkeiten die präferenzfreien Pseudowahrscheinlichkeiten einzusetzen, sofern das Subjekt die dazu notwendigen weiteren Prämissen als erfüllt ansieht.[26] Somit läßt sich das präferenzfreie Optionsbewertungskalkül strukturell aus dem ZGPM ableiten.

3.3 Vergleich mit der präferenzfreien Optionsbewertung

Unter identischen Prämissen entspricht der nach dem ZGPM ermittelte Grenzpreis strukturell der Optionsbewertungsformel von COX, ROSS und RUBINSTEIN für den binomialen Fall mit zwei Zeitpunkten. Dieses Ergebnis sollte sich auch für den mehrperiodigen Fall bei sonst unveränderten Prämissen zeigen lassen. Die Tatsache, daß die CRR-Optionswertbestimmung letztlich auf Zustandsbäumen beruht, legt dieses Resultat nahe.[27]
Ein Unterschied besteht aber darin, daß der ZGPM-Optionswert ein auf subjektiven Eintrittswahrscheinlichkeiten beruhender subjektiver Wert ist. Die Pseudowahrscheinlichkeiten sind kein endogenes Ergebnis dieses Modells.
Obgleich der Zustandsbaum Grundlage beider Modelle ist, gibt es darüber hinaus bei Mehrperiodigkeit einen weiteren wesentlichen Modellierungsunterschied. Im mehrperiodigen Fall ist nämlich zu beachten, daß aus der dichotomen Verteilung der Auf- und Abwärtsbewegungen eine zustandsreplizierende Struktur resultiert.[28] Daher ergeben sich bspw. nach vier Perioden nur fünf unterschiedliche Zukunftsausprägungen.

---

25 Vgl. auch STEFFENS (2003), S. 211.

26 Ferner könnte auch der Weg über ARROW-DEBREU-Papiere beschritten werden, deren Preise im Zustand null jedoch bekannt sein müssen und von jedem dahingehend zu akzeptieren sind, daß sie die Zeit- und Risikopräferenzen implizit abbilden. Der Austausch subjektiver Wahrscheinlichkeiten gegen Pseudowahrscheinlichkeiten erfolgt dann nicht mittels Duplikationsportfolio, sondern mit Hilfe der sie implizierenden Arrow-Debreu-Papiere. Deren Preisbildung setzt die Information über alle am Markt gehandelten Wertpapiere sowie deren Vollständigkeit und Abgeschlossenheit voraus. Vgl. zu diesem Weg und dessen Übertragung auf unvollkommene Märkte ausführlich JOHANNWILLE (2000), S. 69 ff., 125 ff. und 195 ff. sowie KRUSCHWITZ (2004), S. 325 ff.

27 Vgl. auch die Herleitung z. B. bei HERING (2006), S. 202 ff.

28 Vom Zustand null ausgehend, führt eine Auf- und anschließende Abwärtsbewegung zu denselben Zustandsparametern wie eine Ab- und anschließende Aufwärtsbewegung.

Bei der Modellierung im ZGPM müssen jedoch trotz gleicher Zukunftsausprägung alle Zustandsäste einzeln betrachtet werden. Im Beispiel sind also statt fünf insgesamt $2^4 = 16$ Endzustände zu beachten. STEFFENS bezeichnet die Modellierung dieser (zunächst) überflüssig erscheinenden Zustände als künstlich.[29] Allerdings verbindet sich damit bei Mehrperiodigkeit die Möglichkeit, auf konstante Auf- und Abwärtsfaktoren zu verzichten und hinsichtlich dieser Faktoren unterschiedliche Szenarien zu untersuchen.
Im Modell von COX, ROSS und RUBINSTEIN wird die Ganzzahligkeit der Optionsausübung vorausgesetzt. Diese Prämisse findet sich in der ZGPM-Modellierung explizit nicht wieder, denn es ist ein rein lineares Modell. Allerdings führt die einfache Problemstruktur dazu, daß eine Option in den jeweiligen Zuständen entweder ganz oder gar nicht ausgeübt wird, denn entweder ist der damit verbundene Einzahlungsüberschuß positiv oder nicht.[30]

[29] Vgl. STEFFENS (2003), S. 177

[30] Im Grenzfall kann er null sein, was einer entarteten Lösung entspricht.

4 Zusammenfassung und Ausblick

Das einleitend formulierte Ziel, die flexible Planung in Form des ZGPM als Basis auch für die finanzierungstheoretisch begründete CRR-Optionsbewertungsformel darzulegen, konnte erreicht werden. Wie sich zeigt, führt unter identischen Prämissen das ZGPM zu einem strukturell äquivalenten Grenzpreis, wobei allerdings die Pseudowahrscheinlichkeiten kein modellendogenes Ergebnis sind.
Ferner ergibt sich weiterer Forschungsbedarf auf dem Gebiet der subjektiven Optionsbewertung zunächst in der Untersuchung mehrperiodiger Optionen. Hierbei können insbesondere variable an Stelle konstanter Auf- und Abwärtsfaktoren einer Analyse unterzogen werden. Außerdem können Optionen untersucht werden, die in Wechselbeziehungen mit anderen Objekten stehen, die ebenfalls Planungsgegenstände sind. Das ZGPM baut außerdem nicht auf der Annahme eines vollkommenen Kapitalmarkts auf, so daß dessen Prämissen zumindest teilweise aufgehoben werden können und sich somit subjektive Optionswerte auf unvollkommenen Märkten ermitteln lassen sollten. Auch verbundene Optionen sollten sich analysieren lassen.[31] Gegebenenfalls ist dann darauf zu achten, ob die rein lineare Abbildung die vollständige Ausübung der Optionen sicherstellt, oder ob eine gemischt-ganzzahlige Programmierung erfolgen muß, deren Ergebnis zur genaueren dualen Analyse linear nachgebildet werden kann.

---

[31] Vgl. z. B. MOSTOWFI (2000), S. 132 ff.

Literaturverzeichnis

AMRAM, M., KULATILAKA, N. (1999): Real Options, Boston 1999.

BLACK, F., SCHOLES, M. (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities. In: Journal of Political Economy, 81. Jg. (1973), S. 637-654.

BREUER, W. (2001): Investition II – Entscheidung bei Risiko, Wiesbaden 2001.

COX, J. C., ROSS, S. A., RUBINSTEIN, M. (1979): Option Pricing – A Simplified Approach. In: Journal of Financial Economics, 7. Jg. (1979), S. 229-263.

DIXIT, A. K., PINDYCK, R. S. (1994): Investment under Uncertainty, Princeton 1994.

FISCHER, T. R., HAHNENSTEIN, L., HEITZER, B. (1999): Kapitalmarkttheoretische Ansätze zur Berücksichtigung von Handlungsspielräumen in der Unternehmensbewertung. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 69. Jg. (1999), S. 1207-1231.

GÖTZE, U. (2006): Investitionsrechnung, 5. Aufl., Berlin et al. 2006.

HART, A. G. (1940): Anticipations, Uncertainty, and Dynamic Planning, Chicago 1940 (2. Nachdruck, New York 1965).

HAX, H. (1964): Investitions- und Finanzplanung mit Hilfe der linearen Programmierung. In: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 16. Jg. (1964), S. 430-446.

HAX, H. (1970): Investitionsentscheidungen bei unsicheren Erwartungen. In: HAX, H. (Hrsg.): Entscheidungen bei unsicheren Erwartungen, Köln/Opladen 1970, S. 129-140.

HAX, H. (1985): Investitionstheorie, 5. Aufl., Heidelberg 1985.

HAX, H., LAUX, H. (1972): Flexible Planung – Verfahrensregeln und Entscheidungsmodelle für die Planung bei Ungewißheit. In: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 24. Jg. (1972), S. 318-340.

HERING, T. (2003): Investitionstheorie, 2.Auflage, München/Wien 2003.

HERING, T. (2006): Unternehmensbewertung, 2. Auflage, München/Wien 2006.

HILLIER, F. S., LIEBERMAN, G. J. (1997): Operations Research, 5. Auflage, München/ Wien 1997.

INDERFURTH, K. (1982): Starre und flexible Investitionsplanung, Wiesbaden 1982.

JAENSCH, G. (1966): Wert und Preis der ganzen Unternehmung, Köln et al. 1966.

JOHANNWILLE, U. (2000): Arbitragefreie Bewertung unternehmerischer Investitionsprojekte, Lohmar/Köln 2000.

KELLERMANNS, F. W., FLOYD, S. W. (2005): The Effect of Strategic Consensus on Organizational Flexibility. In: KALUZA, B., BLECKER, T. (Hrsg.): Erfolgsfaktor Flexibilität, Berlin 2005, S. 55-70.

KLINGELHÖFER, H. E. (2003): Investitionsbewertung auf unvollkommenen Kapitalmärkten unter Unsicherheit. In: Betriebswirtschaftliche Forschung und Praxis, 55. Jg. (2003), S. 279-305.

KLINGELHÖFER, H. E. (2004): Finanzwirtschaftliche Bewertung von Umweltschutzinvestitionen, unveröffentlichte Habilitationsschrift, Greifswald 2004.

KRUSCHWITZ, L. (2004): Finanzierung und Investition, 4. Auflage, München/Wien 2004.

KRUSCHWITZ, L., LÖFFLER, A. (2003): Semi-subjektive Bewertung. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 73. Jg. (2003), S. 1335-1345.

LAUX, H. (2005): Entscheidungstheorie, 6. Auflage, Berlin et al. 2005.

LAUX, H., FRANKE, G. (1969): Zum Problem der Bewertung von Unternehmungen und anderen Investitionsgütern. In: Unternehmensforschung, 13. Jg. (1969), S. 205-223.

MATSCHKE, M. J. (1969): Der Kompromiß als betriebswirtschaftliches Problem bei der Preisfestsetzung eines Gutachters im Rahmen der Unternehmungsbewertung. In: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 21. Jg. (1969), S. 57-77.

MATSCHKE, M. J. (1975): Der Entscheidungswert der Unternehmung, Wiesbaden 1975.

MATSCHKE, M. J., BRÖSEL, G. (2005): Unternehmensbewertung, Wiesbaden 2005.

MERTON, R. C. (1998): Applications of Option-Pricing Theory. In: American Economic Review, 88. Jg. (1998), S. 343-349.

MOSTOWFI, M. (2000): Bewertung von Unternehmensakquisitionen unter Berücksichtigung von Realoptionen, Frankfurt a. M. 2000.

MYERS, S. C. (1977): Determinants of Corporate Borrowing. In: Journal of Financial Economics, 5. Jg. (1977), S. 147-175.

STEFFENS, C. (2003): Kapitalmarktorientierte Bewertung Flexibler Fertigungssysteme, Hamburg 2003.

TEISBERG, E. O. (1995): Methods for Evaluating Capital Investment Decisions under Uncertainty. In: TRIGEORGIS, L. (Hrsg.): Real Options in Capital Investment, Westport 1995, S. 31-46.

TRIGEORGIS, L. (1996): Real Options, Cambridge 1996.

WEINGARTNER, H. M. (1974): Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems, 3. Auflage, London 1974.

Wirtschaftswissenschaftliche Diskussionspapiere der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald zum ZGPM und verwandten Modellen

BYSIKIEWICZ, M., MATSCHKE, M. J., BRÖSEL, G.: Einige grundsätzliche Bemerkungen zur Entscheidungswertermittlung im Rahmen der Konfliktsituation vom Typ der Spaltung, Diskussionspapier Nr. 02/2005.

MIRSCHEL, S., LERM, M.: Zur Interpretation der Dualvariable der Mindestzielfunktionswertrestriktion im Zustandsgrenzpreismodell, Diskussionspapier Nr. 07/2004.

MIRSCHEL, S., KLINGELHÖFER, H. E., LERM, M.: Bewertung von Stimmrechtsänderungen, Diskussionspapier Nr. 03/2004.

Alle bisher erschienenen Diskussionspapiere können unter
http://www.rsf.uni-greifswald.de/bwl/paper.html
abgerufen werden.

ISSN 1437 – 6989