



Universidad de Buenos Aires  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

# Biblioteca Digital FCEN-UBA

## Tratamiento BRST lagrangiano de coordenadas colectivas

Garrahan, Juan Pedro

1997

Tesis Doctoral

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Buenos Aires

[www.digital.bl.fcen.uba.ar](http://www.digital.bl.fcen.uba.ar)

Contacto: [digital@bl.fcen.uba.ar](mailto:digital@bl.fcen.uba.ar)

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Fuente / source:

Biblioteca Digital de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

TRATAMIENTO BRST LAGRANGIANO  
DE COORDENADAS COLECTIVAS

JUAN PEDRO GARRAHAN

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de  
Buenos Aires

Área: Ciencias Físicas

Director de Tesis: Dr. Daniel R. Bes

Lugar de trabajo: Departamento de Física,  
Comisión Nacional de Energía Atómica

Abril 1997

29271

52

## Resumen

Se describe el tratamiento de las coordenadas colectivas en sistemas que presentan ruptura de simetría a nivel de las soluciones clásicas desde el punto de vista de la integral de camino lagrangiana. El tratamiento se basa en el formalismo de Anticampos. En primer lugar, se aplica el tratamiento a un modelo mecánico sencillo. Se introducen coordenadas colectivas, y el sistema de gauge resultante es cuantizado por medio del formalismo de Anticampos. Se calculan las correcciones a dos loops de los estados vibracionales y la energía colectiva a un loop, mostrando que los resultados son independientes de los parámetros de fijado de gauge. A continuación, se desarrolla el tratamiento para un caso más general, que incluye modelos solitónicos como el de Skyrme y el  $O(3)$ , y que corresponde al movimiento de una partícula en una variedad de Riemann sujeta a un potencial. Las soluciones estáticas son sólo invariantes ante un subgrupo de las simetrías de la acción, lo que da lugar a modos cero. Se introducen coordenadas colectivas, y la teoría de gauge resultante es cuantizada en el formalismo de Anticampos. Se calcula la función de partición intrínseca a dos loops y el hamiltoniano colectivo efectivo a un loop, y se muestra que los resultados son independientes del fijado de gauge. Se describe brevemente la equivalencia con el tratamiento BRST hamiltoniano. Finalmente, se discute el problema de los fijados de gauge canónicos. Se muestra que se pueden obtener resultados correctos a dos loops en un gauge similar al gauge de Coulomb si se define la integral de camino por medio de una discretización del intervalo temporal y de la prescripción de evaluación en el punto medio.

### Lagrangian BRST treatment of collective coordinates

The treatment of collective coordinates from the point of view of the lagrangian path integral in systems displaying a breakdown of symmetries at the level of classical solutions is described. The treatment is based in the Antifield formalism. In the first place, the treatment is applied to a simple mechanical model. Collective coordinates are introduced, and the resulting gauge system is quantized by means of the Antifield formalism. Two-loops corrections to the vibrational states and the collective energy to one loop are calculated, showing that the results are independent of the gauge fixing parameters. Next, the treatment is developed for a more general case, which includes solitonic models like the Skyrme and  $O(3)$  models, and which corresponds to the motion of a particle in a Riemannian manifold subject to a potential. The static solutions are only invariant under a subgroup of the symmetries of the action, which gives rise to zero modes. Collective coordinates are introduced, and the resulting gauge theory is quantized in the Antifield formalism. The intrinsic partition function is calculated to two loops and the effective collective hamiltonian to one loop, and it is shown that the results are gauge independent. The equivalence with the hamiltonian BRST treatment is briefly described. Finally, the problem of canonical gauges is discussed. It is shown that it is possible to obtain correct results at two loops in a gauge similar to the Coulomb gauge if the path integral is defined by means of a discretization of the time interval and of the prescription of mid point evaluation.

Coordenadas colectivas; solitones; BRST; formalismo de anticampos.  
Collective coordinates; solitons; BRST; antifield formalism.

## AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi mayor gratitud a las personas sin cuya colaboración, apoyo y amistad esta Tesis no hubiera sido posible. A Daniel Bes, por dirigirme, compartir sus ideas, comentarios y críticas, y por su apoyo permanente; a Martín Kruczenski, por todo el tiempo que trabajamos juntos, y Carlos Schat; y a Norberto Scoccola.

Quiero agradecer también a los amigos del TANDAR María Fernanda D'Atri, Roberto De Luca, Javier Guevara, Gad Levinton, Valeria Mesquida, Gabriela Pasquini, Guillermo Segura, Esteban Seva, Fernando Simonotti, Dardo Tomasi, Raúl Vallejos y Eduardo Vergini.

Agradezco al Departamento de Física de CNEA, en especial a María Cristina Cambiaggio, Anibal Gattone y Marcos Saraceno.

CONICET financió este trabajo a través de Becas de Iniciación y Perfeccionamiento.

A Michelle  
y Fiona

# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Cuantización BRST de teorías de gauge</b>	<b>5</b>
2.1	Formulación hamiltoniana de teorías de gauge . . . . .	5
2.2	Teoría BRST clásica . . . . .	9
2.3	Teoría BRST cuántica . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Formalismo de anticampos</b>	<b>17</b>
3.1	Formulación lagrangiana de teorías de gauge . . . . .	17
3.2	Teoría clásica de anticampos . . . . .	19
3.2.1	Anticampos y anticorchetes . . . . .	19
3.2.2	La ecuación maestra . . . . .	21
3.3	Teoría cuántica de anticampos . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Un modelo simple</b>	<b>25</b>
4.1	El modelo . . . . .	25
4.2	Soluciones estáticas y coordenadas colectivas . . . . .	27
4.3	Formalismo de anticampos . . . . .	28
4.4	Tratamiento perturbativo . . . . .	32
4.4.1	La descripción a orden cero . . . . .	32
4.4.2	La acción cuadrática . . . . .	33
4.4.3	Correcciones de orden superior . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Tratamiento de coordenadas colectivas en un modelo general</b>	<b>41</b>
5.1	El modelo . . . . .	41
5.2	Soluciones estáticas y coordenadas colectivas . . . . .	43
5.3	Formalismo de anticampos . . . . .	45
5.3.1	Solución de la ecuación maestra clásica . . . . .	45
5.3.2	Solución de la ecuación maestra cuántica . . . . .	46

5.3.3	Fijado de gauge e integral de camino . . . . .	47
5.4	Cuantización BRST hamiltoniana . . . . .	49
5.5	Tratamiento perturbativo . . . . .	52
5.5.1	Correcciones a dos loops . . . . .	55
5.5.2	El hamiltoniano colectivo . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Tratamiento de coordenadas colectivas en gauges canónicos</b>	<b>61</b>
6.1	Gauge de Coulomb . . . . .	63
6.2	Correcciones a dos loops . . . . .	67
6.3	El hamiltoniano colectivo . . . . .	70
<b>7</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>73</b>
<b>A</b>	<b>Formalismo canónico con variables bosónicas y fermiónicas</b>	<b>77</b>
<b>B</b>	<b>Algunas propiedades de los grupos de Lie</b>	<b>81</b>
<b>C</b>	<b>Relaciones útiles para el cálculo de diagramas</b>	<b>85</b>

# Capítulo 1

## Introducción

La correcta cuantificación de las coordenadas colectivas ha sido un tema central en el estudio de modelos solitónicos. Por ejemplo, en el modelo de Skyrme [1, 2] los bariones son los solitones de un lagrangiano quirial  $SU(2)_L \times SU(2)_R/SU(2)_V$  y los grados de libertad internos (spin e isospin) se describen como excitaciones colectivas del solitón [3]. Estas excitaciones colectivas aparecen típicamente como fluctuaciones de energía cero alrededor de una solución clásica que rompe cierta invariancia de la acción. Para tratar los modos cero los grados de libertad asociados con los movimientos colectivos deben ser separados. Como esto es difícil de conseguir en el caso general, se pueden introducir las coordenadas colectivas explícitamente como grados de libertad *adicionales*. Este procedimiento se conoce como el método de coordenadas colectivas [4, 5, 6, 7].

La manera general de introducir variables colectivas es como parámetros dependientes del tiempo de las transformaciones de los campos originales [8]. La teoría transformada, que depende del conjunto sobrecompleto de campos originales más coordenadas colectivas es una teoría de gauge.

El tratamiento más riguroso de teorías de gauge es el basado en la simetría BRST [9, 10, 11]. La aplicación del método BRST hamiltoniano [12, 13, 14, 15, 16, 17] a la cuantificación de coordenadas colectivas en sistemas finitos fue desarrollado en [18, 19, 20, 21, 22, 23]. Las coordenadas colectivas se introducen como parámetros de las transformaciones de simetría que son rotas (o parcialmente rotas) por las soluciones clásicas. La teoría de gauge resultante se cuantifica siguiendo el procedimiento BRST canónico usual: se introducen multiplicadores de Lagrange y ghosts por cada grado de libertad de gauge, se construye una carga BRST hermitica y nilpotente, y se definen los estados y operadores físicos como aquellos in-

variantes ante la simetría global BRST. La teoría de gauge se reemplaza entonces por una teoría invariante BRST con el gauge fijado, en la cual las variables colectivas son físicas, y los modos cero son cancelados por los multiplicadores de Lagrange y los ghosts. Modelos solitónicos sencillos fueron estudiados usando este formalismo [24, 25]. La cuantificación BRST de coordenadas o campos colectivos en teoría de campos fue presentada en [26], donde se discute el caso en el que las transformaciones no están restringidas a formar un grupo o ser simetrías de la acción.

La cuantificación BRST puede formularse como una integral de camino lagrangiana por medio del formalismo de Anticampos [27, 28, 29, 30, 31, 32]. Dada una teoría de gauge con sus correspondientes ghosts se introducen anticampos, y se define una estructura de anticorchetes. La acción BRST con el gauge fijado se obtiene de la solución de la ecuación maestra. Todo el procedimiento se formula en el espacio de las variables lagrangianas.

El formalismo de Anticampos es considerado actualmente el método más poderoso de cuantificación de teorías de gauge. Permite tratar todos los casos conocidos de teorías de gauge, tanto las teorías en las que las transformaciones de gauge son linealmente independientes y cuya álgebra es de Lie, como por ejemplo, las teorías de Yang-Mills, como aquellas en las que el álgebra de gauge forma una álgebra de Lie a menos de términos proporcionales a las ecuaciones de movimiento (álgebras abiertas). Ejemplo de estas últimas son algunas teorías de supergravedad.

Esta Tesis describe el tratamiento de las coordenadas colectivas en sistemas que presentan ruptura de simetría a nivel de las soluciones clásicas desde el punto de vista de la integral de camino lagrangiana. El tratamiento se basa en la aplicación del formalismo de Anticampos.

La organización de esta Tesis es la siguiente. Los capítulos 2 y 3 describen brevemente los formalismos BRST hamiltoniano y de Anticampos, respectivamente. Han sido incluidos para hacer la presentación autoconsistente. Descripciones extensas de estos dos temas se pueden encontrar en las referencias [16, 17, 32].

En el capítulo 4 se aplica el tratamiento BRST lagrangiano a un modelo sencillo [33]. Corresponde a una partícula en 3 dimensiones sujeta a un potencial central que posee una familia de mínimos lejos del origen, y es la generalización al caso no-abeliano del modelo estudiado en [19, 21]. El tratamiento perturbativo a partir de una expansión alrededor de uno de los mínimos posee modos de energía cero. Para tratar estos modos cero se introducen coordenadas colectivas correspondientes a rotaciones de las coordenadas. El sistema de gauge resultante es cuantificado por medio del formalismo de Anticampos, y se elige un gauge fijado de gauge que permite con-

trolar los modos cero y realizar cálculos perturbativos. A través de técnicas de temperatura finita se calculan las correcciones a dos loops de los estados vibracionales, y la energía colectiva a orden más bajo y un loop, mostrando que los resultados son independientes de los parámetros de fijado de gauge.

El capítulo 5 desarrolla el tratamiento para un caso más general [34]. Estudia el movimiento de una partícula en una variedad de Riemann, que corresponde al espacio de configuración del sistema, sujeta a un potencial. La acción es invariante ante un grupo finito de transformaciones globales, pero las soluciones estáticas son sólo invariantes ante un subgrupo. Esto da lugar a modos cero al expandir alrededor de una solución clásica. Se introducen coordenadas colectivas como parámetros de las transformaciones de simetría, y la teoría de gauge resultante es cuantificada por medio del formalismo de Anticampos. Se elige un fijado de gauge que permite controlar los modos cero y calcular correcciones por medio de teoría de perturbaciones. Se calcula la función de partición intrínseca a dos loops y el hamiltoniano colectivo efectivo a un loop, y se muestra que los resultados son independientes de los parámetros de fijado de gauge. También se describe brevemente la equivalencia con el tratamiento BRST hamiltoniano.

El tratamiento estudiado en el capítulo 5 incluye modelos solitónicos como el de Skyrme y el  $O(3)$ , así como también modelos mecánicos como el del capítulo 4. A pesar que estos casos podrían ser tratados con las técnicas usuales de Faddev y Popov, el tratamiento de anticampos sería necesario para tratar, por ejemplo, solitones supersimétricos cuando el álgebra supersimétrica sea abierta, es decir, a menos de términos proporcionales a las ecuaciones de movimiento.

En el capítulo 6 se discute el problema de los fijados de gauge canónicos [35]. Si se elige un fijado de gauge mediante el cual se anulan los modos cero y de las coordenadas colectivas solamente se conservan las necesarias para describir el movimiento colectivo, se obtienen resultados incorrectos a dos loops [21, 36]. Este hecho está relacionado con una ambigüedad de orden en la acción cuántica, y es necesario introducir términos de orden  $\hbar^2$  para obtener resultados correctos [37]. En este capítulo se muestra que se pueden reproducir los resultados del capítulo 5 en un gauge canónico similar al gauge de Coulomb del electromagnetismo si se define con cuidado la integral de camino por medio de una discretización del intervalo temporal y de la prescripción de evaluación en el punto medio.

El tratamiento de coordenadas colectivas presentado en esta Tesis es adecuado para el estudio de la dinámica de baja energía de solitones con cargas topológicas iguales a uno, para los cuales el espacio de soluciones estáticas está dado por la órbita de una solución ante el grupo de simetría

de la acción. Los modos cero corresponden a vectores tangentes al espacio de soluciones. Cabe aclarar que en el tratamiento desarrollado aquí se consideran solamente los movimientos colectivos cuyos momentos de inercia son finitos, es decir, los modos cero con norma finita. En general pueden existir modos cero con parámetros de inercia infinitos, como es el caso de los modelos sigma [38], en los cuales estos movimientos corresponden a simetrías de la acción espontáneamente rotas por el vacío. Es posible incluir las coordenadas colectivas correspondientes a los movimientos con inercia infinita, pero la finitud de la energía requiere que los valores de estas coordenadas sean constantes.

Un aspecto no estudiado en el presente trabajo es el de renormalización ultravioleta, ya que esto depende del modelo particular al cual se le aplique el formalismo.

Finalmente, en el capítulo 7 se dan las conclusiones. Los apéndices contienen información complementaria sobre el formalismo canónico y grupos de Lie, y definiciones y relaciones utilizadas en el cálculo de los diagramas.

## Capítulo 2

# Cuantización BRST de teorías de gauge

Este capítulo contiene un breve resumen del formalismo hamiltoniano de cuantización de teorías de gauge basado en la simetría BRST [12, 13, 14, 15]. Se describe el análisis de los sistemas con libertad de gauge como sistemas hamiltonianos con vínculos, la introducción de ghosts que dan lugar a la simetría BRST [9, 10, 11], tanto clásica como cuántica, y la cuantización canónica por el método de operadores. Discusiones extensas de estos temas se pueden encontrar en las referencias [16, 17].

### 2.1 Formulación hamiltoniana de teorías de gauge

La propiedad principal de una teoría de gauge es la presencia de funciones del tiempo arbitrarias en las soluciones a las ecuaciones de movimiento. Esto implica que las variables canónicas no son todas independientes, y que existen entre ellas relaciones llamadas vínculos. Por lo tanto, una teoría de gauge es un sistema hamiltoniano con vínculos.

El análisis hamiltoniano de un sistema con vínculos se inicia con la acción iagrangiana

$$S_0[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}), \quad (2.1)$$

dependiente de las variables  $q^i$  del espacio de configuración, que supondremos bosónicas (conmutativas).

Las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\delta S_0}{\delta q^i(t)} = \frac{\partial L}{\partial q^i}(t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(t) = 0, \quad (2.2)$$

se obtienen de pedir que la acción sea estacionaria ante variaciones de las coordenadas que se anulen en los extremos. Las ecuaciones pueden reescribirse como

$$\ddot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i}. \quad (2.3)$$

Las aceleraciones pueden ser determinadas unívocamente a un dado tiempo por las posiciones y velocidades si y sólo si el determinante

$$\det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \right) \quad (2.4)$$

es no nulo. Si el determinante es nulo las soluciones a las ecuaciones de movimiento contendrán funciones arbitrarias del tiempo. Esto es lo que ocurre en el caso de las teorías de gauge.

El primer paso en el formalismo hamiltoniano es definir los momentos canónicos  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ . Si el determinante (2.4) es cero no es posible invertir las velocidades como funciones de las coordenadas y los momentos. En este caso los momentos no son todos independientes y existen relaciones

$$\phi_{m_1}(q, p) = 0, \quad (2.5)$$

llamadas vínculos primarios.

El siguiente paso es la definición del hamiltoniano canónico mediante la transformada de Legendre  $H_c = \dot{q}^i p_i - L$ . El hamiltoniano  $H_c$  es función de las coordenadas y los momentos, pero está bien definido solamente en la variedad del espacio de fases determinada por los vínculos primarios. Las ecuaciones de Euler-Lagrange son equivalentes a las ecuaciones de Hamilton obtenidas de

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}^i p_i - H_c) = 0 \quad (2.6)$$

ante variaciones independientes de las coordenadas y los momentos, sujetas a las condiciones

$$\phi_{m_1} = 0, \quad \delta \phi_{m_1} = 0. \quad (2.7)$$

Las ecuaciones de Hamilton también se pueden obtener del principio variacional

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}^i p_i - H_c - u^{m_1} \phi_{m_1}) = 0, \quad (2.8)$$

para variaciones arbitrarias  $\delta q^i$ ,  $\delta p_i$ ,  $\delta u^{m_1}$  sujetas solamente a la condición  $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$ . Las variaciones están libres de las restricciones (2.7)

debido a la introducción de nuevas variables  $u^{m_1}$ , que aparecen como multiplicadores de Lagrange para imponer los vínculos primarios. Las ecuaciones de movimiento para una función arbitraria  $F(q, p)$  se pueden escribir en término del corchete de Poisson

$$\dot{F} = \{F, H_c\} + u^{m_1} \{F, \phi_{m_1}\}. \quad (2.9)$$

Los vínculos primarios deben conservarse en el tiempo (condición de consistencia), es decir,

$$\dot{\phi}_{m_1} = \{\phi_{m_1}, H_c\} + u^{m_1} \{\phi_{m_1}, \phi_{m_1}\} = 0. \quad (2.10)$$

Las ecuaciones anteriores pueden dar lugar a nuevas relaciones entre las coordenadas y los momentos  $\phi_{m_2}$ , llamadas vínculos secundarios. Estos también deben conservarse en el tiempo, así que deben imponerse condiciones similares a (2.10), lo que puede dar lugar a vínculos terciarios  $\phi_{m_3}$ , etc. Al finalizar el algoritmo de consistencia se tiene el conjunto total de vínculos del sistema  $\{\phi_a\} = \{\phi_{m_1}, \phi_{m_2}, \dots\}$ .

Si las condiciones  $\phi_a$  no son todas independientes se denomina a los vínculos como reducibles. Si los vínculos son independientes, se los denomina irreducibles, y es el caso que se considerará aquí.

Una función  $F(q, p)$  se llama de primera clase si

$$\{F, \phi_a\} \approx 0 \quad \forall \phi_a, \quad (2.11)$$

donde el símbolo  $\approx$  (igualdad débil) indica que la expresión vale sobre la superficie  $\phi_a = 0$ . Si (2.11) no se cumple la función es de segunda clase. En particular, se pueden separar los vínculos en vínculos de primera y de segunda clase.

Los vínculos de segunda clase, que vienen de a pares en el caso bosónico, representan pares de variables conjugadas redundantes en la teoría y se suelen eliminar mediante una modificación del corchete de Poisson, llamada corchete de Dirac. En lo que sigue se supondrá que todos los vínculos son de primera clase, es decir, que los vínculos de segunda clase (si los hubiera) fueron eliminados mediante corchetes de Dirac.

Los vínculos de primera clase son generadores de transformaciones de gauge. Llamando  $G_a$  a los vínculos, las condiciones de primera clase son

$$\{G_a, G_b\} = C_{ab}{}^c G_c, \quad (2.12)$$

$$\{H_c, G_a\} = V_a{}^b G_b. \quad (2.13)$$

La última ecuación es consecuencia de las condiciones de consistencia (2.10), y en lo que sigue supondremos al hamiltoniano en involución con los vínculos, es decir,  $V_a^b = 0$ . Las transformaciones de gauge generadas por las  $G_a$  son

$$\delta_\epsilon F = \epsilon^a \{F, G_a\}, \quad (2.14)$$

y dejan invariante la acción (2.1).

De las relaciones (2.12) se puede deducir el álgebra de las transformaciones de gauge. Si las  $C_{ab}^c$  dependen de las coordenadas o momentos el álgebra puede ser abierta. Si las  $C_{ab}^c$  son constantes el álgebra de gauge es un álgebra de Lie, y es el caso que consideraremos aquí.

La evolución más general físicamente permisible debe permitir realizar transformaciones de gauge arbitrarias mientras el sistema evoluciona en el tiempo. Para generar este movimiento se define el hamiltoniano extendido

$$H_E = H_c - \lambda^a G_a. \quad (2.15)$$

Para variables invariantes de gauge (funciones de primera clase) la evolución generada por  $H_c$  y por  $H_E$  es la misma. Para las demás sólo  $H_E$  toma en cuenta toda la libertad de gauge.

Las ecuaciones de movimiento se derivan de la acción extendida

$$S_E = \int (\dot{q}^i p_i - H_E), \quad (2.16)$$

y se reducen a

$$\dot{F} \approx \{F, H_E\}, \quad (2.17)$$

$$G_a \approx 0. \quad (2.18)$$

La acción extendida es invariante ante las transformaciones de gauge (2.14) si se define la transformación de los multiplicadores de Lagrange

$$\delta_\epsilon \lambda^a = -\dot{\epsilon}^a + \epsilon^b \lambda^c C_{bc}^a. \quad (2.19)$$

Los multiplicadores de Lagrange  $\lambda^a$  pueden ser considerados variables canónicas como las  $q^i$  y  $p_i$  si se incluyen los momentos conjugados  $b_a$ , y el término cinético en la acción extendida

$$\int \dot{\lambda}^a b_a dt. \quad (2.20)$$

Los  $b_a$  deben anularse. Estas condiciones aparecen como vínculos primarios y expresan la arbitrariedad de los multiplicadores de Lagrange. Los vínculos

$G_a$  aparecen como vínculos secundarios al requerir que los vínculos primarios  $b_a \approx 0$  se conserven en el tiempo.

La libertad de gauge implica que existen más de un conjunto de variables canónicas para una dada situación física. Para eliminar esta ambigüedad es posible imponer restricciones adicionales sobre las variables canónicas, llamadas funciones de fijado de gauge. Si las condiciones de gauge son sobre las variables  $(q, p)$ ,

$$\chi^a(q, p) = 0, \quad (2.21)$$

se las denomina condiciones de gauge canónicas. Para fijar el gauge completamente deben satisfacer la condición

$$\det\{\chi^a, G_b\} \neq 0, \quad (2.22)$$

que corresponde a la condición para vínculos de segunda clase. Por lo tanto, luego de fijar el gauge no quedan vínculos de primera clase y se elimina totalmente la libertad de gauge.

También es posible fijar el gauge mediante condiciones sobre las variables canónicas y los multiplicadores de Lagrange y sus derivadas. Estas condiciones se conocen como gauges no canónicos. Los gauges derivativos corresponden a condiciones

$$\dot{\lambda}^a + f^a(q, p, \lambda) = 0, \quad (2.23)$$

y los gauges de multiplicador a

$$\lambda^a + \chi^a(q, p) = 0. \quad (2.24)$$

## 2.2 Teoría BRST clásica

La idea central de la teoría BRST es reemplazar la simetría de gauge por una simetría fermiónica global, conocida como simetría BRST, actuando en un espacio de fases extendido por la presencia de nuevas variables llamadas ghosts. La propiedad fundamental de la simetría BRST es la nilpotencia, lo que permite definir la cohomología de la transformación de BRST. La identificación con la teoría de gauge original se debe al hecho que la cohomología a número de ghost cero (ver más abajo) es igual al conjunto de observables (funciones invariantes de gauge) de la teoría original.

Se define el espacio de fases extendido agregando a las variables canónicas  $(q, p)$  una variable fermiónica  $\eta^a$ , llamada ghost, y sus momento conjugado

$\mathcal{P}_a$ , por cada vínculo de primera clase,

$$\{\mathcal{P}_a, \eta^b\} = -\delta_a^b, \quad (2.25)$$

$$\{\mathcal{P}_a, q^i\} = \{\mathcal{P}_a, p_i\} = \{\eta^a, q^i\} = \{\eta^a, p_i\} = 0, \quad (2.26)$$

$$\epsilon(\eta^a) = \epsilon(\mathcal{P}_a) = 1, \quad (2.27)$$

donde  $\{\cdot, \cdot\}$  corresponde al corchete de Poisson generalizado, y  $\epsilon$  a la paridad de Grassmann, descriptos en el apéndice A. Los ghosts son reales y sus momentos imaginarios

$$(\eta^a)^* = \eta^a, \quad (\mathcal{P}_a)^* = -\mathcal{P}_a. \quad (2.28)$$

Se define además una estructura llamada número de ghost asignándole a las variables canónicas el siguiente número de ghost:

$$\text{gh } q^i = \text{gh } p_i = 0, \quad \text{gh } \eta^a = -\text{gh } \mathcal{P}_a = 1, \quad (2.29)$$

y definiendo que el número de ghost de un producto de variables es igual a la suma del número de ghost de los factores.

Se define el generador de la simetría BRST (carga BRST),

$$sF = \{F, \Omega\}, \quad (2.30)$$

con las siguientes propiedades:

$$\epsilon(\Omega) = 1, \quad \text{gh } \Omega = 1, \quad \Omega^* = \Omega, \quad \{\Omega, \Omega\} = 0. \quad (2.31)$$

La última de las propiedades implica la nilpotencia de la simetría BRST  $s^2 = 0$ . Esta propiedad es no trivial, ya que al ser  $\Omega$  fermiónica el corchete de Poisson (generalizado) es simétrico.

Si el álgebra de los generadores  $G_a$  (2.12) es de Lie ( $C_{ab}^c$  constantes) la carga BRST que satisface las propiedades (2.31) esta dada por

$$\Omega = \eta^a G_a + \frac{1}{2} C_{ab}^c \eta^a \eta^b \mathcal{P}_c. \quad (2.32)$$

Cuando se considera la acción extendida (2.16) y se toman a los multiplicadores de Lagrange  $\lambda^a$  como variables canónicas es necesario introducir nuevas variables fermiónicas  $\bar{\eta}_a$ , llamadas antighosts, y sus momentos conjugados  $\bar{\mathcal{P}}^a$ , correspondientes a los vínculos  $b_a \approx 0$ , y con las propiedades

$$\{\bar{\eta}_a, \bar{\mathcal{P}}^b\} = -\delta_a^b, \quad (2.33)$$

$$\text{gh } \bar{\eta}_a = -\text{gh } \bar{\mathcal{P}}^a = -1, \quad \epsilon(\bar{\eta}_a) = \epsilon(\bar{\mathcal{P}}^a) = 1, \quad (2.34)$$

$$(\bar{\eta}_a)^* = \bar{\eta}_a, \quad (\bar{\mathcal{P}}^a)^* = -\bar{\mathcal{P}}^a. \quad (2.35)$$

En el espacio de fases extendido con los multiplicadores de Lagrange y los antighosts la carga BRST es

$$\Omega = \eta^a G_a - i\bar{\mathcal{P}}^a b_a + \frac{1}{2} C_{ab}{}^c \eta^a \eta^b \mathcal{P}_c. \quad (2.36)$$

La transformación BRST  $s$  actúa como un diferencial sobre funciones del espacio de fases extendido. Se define  $\text{Ker } s$  al conjunto de funciones aniquiladas por  $s$

$$F \in \text{Ker } s \Leftrightarrow sF = 0, \quad (2.37)$$

llamadas BRST cerradas, e  $\text{Im } s$  al conjunto de las funciones que son la transformada BRST de otra función

$$F \in \text{Im } s \Leftrightarrow F = sF', \quad (2.38)$$

llamadas BRST exactas. Por la nilpotencia de  $s$  todas las funciones BRST exactas son BRST cerradas.  $\text{Ker } s$  se puede dividir en clases tal que dos funciones en una misma clase difieran por una función BRST exacta. Estas clases se llaman clases de cohomología de  $s$ , y al conjunto de las clases de cohomología  $H^*(s)$  se lo denomina cohomología

$$H^*(s) = \frac{\text{Ker } s}{\text{Im } s}. \quad (2.39)$$

La observación fundamental sobre la que se basa el tratamiento BRST es que la cohomología a número de ghost cero  $H^0(s)$  (el conjunto de funciones BRST cerradas módulo las BRST exactas de número de ghost cero) es igual al conjunto de funciones invariantes de gauge de la teoría de gauge original

$$H^0(s) = \{\text{observables clásicos}\}. \quad (2.40)$$

Se llama observables BRST a las funciones del espacio de fases extendido que satisfacen

$$sF \equiv \{F, \Omega\} = 0, \quad (2.41)$$

$$\text{gh } F = 0, \quad (2.42)$$

$$F^* = F, \quad (2.43)$$

identificando funciones que difieran en una BRST exacta. Si  $F_0$  es una función invariante de gauge existe un correspondiente observable BRST  $F$  y que es igual a  $F_0$  cuando los ghosts se anulan.

En el espacio de fases original la evolución está determinada por el hamiltoniano  $H_E = H_c - \lambda^a G_a$ . Como  $H_c$  es invariante de gauge existe una extensión BRST que genera la dinámica en el espacio de fases extendido

$$H_c \rightarrow H_{\text{BRST}}, \quad \{H_{\text{BRST}}, \Omega\} = 0. \quad (2.44)$$

Si  $F$  es la extensión de la función invariante de gauge  $F_0$  entonces

$$\dot{F} = \{F, H_{\text{BRST}}\}, \quad (2.45)$$

equivale a las ecuaciones (2.17)-(2.18). La evolución generada por  $H_{\text{BRST}}$  no tiene ambigüedades, así que corresponde a un determinado fijado de gauge. Si se cambia la extensión BRST del hamiltoniano,

$$H_{\text{BRST}} \rightarrow H_{\text{BRST}} + i\{K, \Omega\}, \quad \epsilon(K) = 1, \quad K^* = K \quad (2.46)$$

la dinámica de los observables BRST no se modifica, pero si cambia la dinámica de las funciones no invariantes BRST. El cambio (2.46) corresponde a un cambio en el fijado de gauge, y  $K$  se conoce como el fermión de fijado de gauge.

Se puede elegir el hamiltoniano BRST como

$$H_{\text{BRST}} = H_c + i\{K, \Omega\}, \quad (2.47)$$

con  $gh K = -1$  para que  $H_{\text{BRST}}$ , además de ser bosónico y real, tenga número de ghost cero, lo que implica la conservación del número de ghost en las trayectorias. La acción de la que se deriva la dinámica en el espacio de fases extendido es

$$S_K = \int_{t_1}^{t_2} \left( \dot{q}^i p_i + \dot{\lambda}^a b_a + \dot{\eta}^a \mathcal{P}_a + \dot{\bar{\eta}}_a \bar{\mathcal{P}}^a - H_c + i\{K, \Omega\} \right). \quad (2.48)$$

Esta acción no es invariante de gauge debido al término BRST exacto  $-i\{K, \Omega\}$ , pero es invariante ante transformaciones BRST globales.

### 2.3 Teoría BRST cuántica

La cuantización canónica de la teoría BRST clásica implica la realización como operadores lineales actuando en un espacio de Hilbert de todas las variables del espacio de fases extendido, y con un producto interno tal que las variables canónicas reales (imaginarias) se convierten en operadores

hermíticos (antihermíticos). Las relaciones de conmutación y anticonmutación se definen a partir de los corchetes de Poisson

$$[F, G] = i\hbar\{F, G\}, \quad (2.49)$$

donde  $[\cdot, \cdot]$  indica el conmutador graduado, definido en el apéndice A. Las relaciones de conmutación<sup>1</sup> no nulas son

$$[p_i, q^j] = -i\hbar\delta_i^j, \quad (2.50)$$

$$[b_a, \lambda^b] = [\mathcal{P}_a, \eta^b] = [\bar{\eta}_a, \bar{\mathcal{P}}^b] = -i\hbar\delta_a^b. \quad (2.51)$$

Al cuantificar, la carga BRST se convierte en un operador lineal hermítico

$$\Omega^\dagger = \Omega, \quad (2.52)$$

y la condición clásica de nilpotencia de la transformación BRST se convierte en

$$[\Omega, \Omega] = 0 \Rightarrow \Omega^2 = 0. \quad (2.53)$$

También se define el operador antihermítico número de ghost

$$\mathcal{G} = \frac{i}{2} (\eta^a \mathcal{P}_a - \mathcal{P}_a \eta^a - \bar{\eta}_a \bar{\mathcal{P}}^a + \bar{\mathcal{P}}^a \bar{\eta}_a), \quad (2.54)$$

$$\mathcal{G}^* = -\mathcal{G}, \quad (2.55)$$

que determina los números de ghost de los operadores

$$[\mathcal{G}, q^i] = [\mathcal{G}, p_i] = [\mathcal{G}, \lambda^a] = [\mathcal{G}, b_a] = 0, \quad (2.56)$$

$$[\mathcal{G}, \eta^a] = \eta^a, \quad [\mathcal{G}, \mathcal{P}_a] = -\mathcal{P}_a, \quad [\mathcal{G}, \bar{\eta}_a] = -\bar{\eta}_a, \quad [\mathcal{G}, \bar{\mathcal{P}}^a] = \bar{\mathcal{P}}^a. \quad (2.57)$$

Se define un observable BRST como un operador  $A$  que conmuta con la carga

$$[A, \Omega] = 0. \quad (2.58)$$

Como la descripción de la teoría de gauge en término del espacio de fases extendido tiene grados de libertad redundantes es necesario imponer alguna restricción que seleccione un subespacio físico del espacio de Hilbert. Esta restricción es que los estados físicos sean BRST invariantes

$$\Omega|\psi\rangle = 0. \quad (2.59)$$

<sup>1</sup>De aquí en más se usará "conmutación" en el sentido generalizado.

La nilpotencia del operador  $\Omega$  permite definir la cohomología cuántica de manera similar a caso clásico. Para los operadores se tiene

$$[A, \Omega] = 0 \Leftrightarrow A \text{ es BRST cerrado,} \quad (2.60)$$

$$A = [B, \Omega] \Leftrightarrow A \text{ es BRST exacto.} \quad (2.61)$$

Los operadores BRST exactos son BRST cerrados. La cohomología de operadores  $H_{\text{op}}^*(\Omega)$  corresponde a las clases de equivalencia de operadores BRST cerrados módulo BRST exactos.

También se puede definir la cohomología de los estados, ya que debido a (2.53)

$$\Omega(\Omega|\chi\rangle) = \Omega^2|\chi\rangle = 0. \quad (2.62)$$

Entonces,

$$\Omega|\psi\rangle = 0 \Leftrightarrow |\psi\rangle \text{ es BRST cerrado,} \quad (2.63)$$

$$|\psi\rangle = \Omega|\chi\rangle \Leftrightarrow |\psi\rangle \text{ es BRST exacto,} \quad (2.64)$$

y se define la cohomología de estados  $H_{\text{st}}^*(\Omega)$  como el conjunto de clases de equivalencia de estados BRST cerrados módulo BRST exactos.

La identificación de los observables  $A$  y  $A + [K, \Omega]$ , para  $K$  arbitrario es posible debido a que los dos operadores tienen los mismos elementos de matriz entre estados físicos

$$\langle\psi_1|A + [K, \Omega]|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|A|\psi_2\rangle + \langle\psi_1|\Omega K + K\Omega|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|A|\psi_2\rangle, \quad (2.65)$$

con

$$\Omega|\psi_1\rangle = \Omega|\psi_2\rangle = 0. \quad (2.66)$$

Los estados BRST exactos  $\Omega|\chi\rangle$  tienen norma nula

$$\langle\chi|\Omega^\dagger\Omega|\chi\rangle = \langle\chi|\Omega^2|\chi\rangle = 0, \quad (2.67)$$

y el producto escalar con cualquier estado físico es cero

$$\langle\psi|\Omega|\chi\rangle = \langle\chi|\Omega|\psi\rangle^\dagger = 0, \quad (2.68)$$

así que no contribuyen a las amplitudes físicas. Por lo tanto, es posible identificar los estados nulos con cero y llegar a la conclusión que los estados físicos están dados por las clases de equivalencia de la cohomología BRST.

Los observables clásicos estaban caracterizados no solo por ser BRST invariantes sino también por tener número de ghost cero. Para incorporar

esta propiedad en la teoría cuántica es necesario imponer que los operadores y estados físicos tengan número de ghost cero

$$[\mathcal{G}, A] = 0, \quad \mathcal{G}|\psi\rangle = 0. \quad (2.69)$$

Por lo tanto, los operadores y estados físicos están dados por las cohomologías  $H_{\text{op}}^0(\Omega)$  y  $H_{\text{st}}^0(\Omega)$ .



## Capítulo 3

# Formalismo de anticampos

El formalismo de anticampos o formalismo de Batalin-Vilkovisky [27, 28, 29, 30, 31] provee un método general para la cuantificación de teorías de gauge dentro en una formulación lagrangiana. La transformación BRST [9, 10, 11] y un formalismo canónico son definidos en el espacio de variables lagrangianas por la introducción de ghosts y anticampos. Una acción cuántica con el gauge fijado se obtiene de una ecuación (ecuación maestra) más ciertas condiciones de contorno. El procedimiento es algebraico y directo, pero, sin embargo, poderoso. El formalismo de anticampos es descrito extensamente en las referencias [17, 32].

### 3.1 Formulación lagrangiana de teorías de gauge

Consideremos un sistema cuya dinámica está gobernada por una acción clásica  $S_0[q]$ , que depende de las coordenadas  $q^i$  del espacio de configuración, y que suponemos como la integral de un lagrangiano local en el tiempo,

$$S_0[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}). \quad (3.1)$$

Las ecuaciones de movimiento son

$$\frac{\delta S_0}{\delta q^i(t)} = \frac{\partial L}{\partial q^i}(t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(t) = 0. \quad (3.2)$$

Supongamos que la acción es invariante ante un conjunto de transformaciones de gauge, es decir, ante transformaciones de las coordenadas  $q$ 's

parametrizadas por funciones arbitrarias de  $t$ . Las transformaciones infinitesimales se pueden escribir

$$\delta_\epsilon q^i = R_{(0)a}^i \epsilon^a + R_{(1)a}^i \dot{\epsilon}^a + \cdots + R_{(s)a}^i \frac{d^s \epsilon^a}{dt^s}, \quad (3.3)$$

para algún  $s$  finito.

Adoptemos una notación compacta (notación de DeWitt) en la que los índices  $i, a$ , etc., incluyen la dependencia en  $t$ , y que las sumas sobre  $i, a$ , etc., implican integrales sobre  $t$ . Con esta notación  $q^i$  corresponde a una historia  $q^i(t)$  en el espacio de configuración, y la ecuación (3.3) es

$$\delta_\epsilon q^i = R_a^i \epsilon^a \left( \Leftrightarrow \delta_\epsilon q^i(t) = \int dt' R_a^i(t, t') \epsilon^a(t') \right), \quad (3.4)$$

donde el núcleo

$$R_a^i(t, t') = R_{(0)a}^i(t) \delta(t - t') + R_{(1)a}^i(t) \delta'(t - t') + \cdots \quad (3.5)$$

La invariancia de la acción ante las transformaciones de gauge,

$$\delta_\epsilon S_0 = S_{0,i} \delta_\epsilon q^i = S_{0,i} R_a^i \epsilon^a = 0 \quad (, i \equiv \delta / \delta q^i), \quad (3.6)$$

implica las identidades de Noether

$$S_{0,i} R_a^i = 0. \quad (3.7)$$

Una consecuencia de las relaciones (3.7) es que las ecuaciones de movimiento no son independientes. Las transformaciones de gauge mapean soluciones de las ecuaciones de movimiento y, por lo tanto, aparecen funciones arbitrarias de  $t$  en las soluciones más generales de las ecuaciones. Sin embargo, diferentes soluciones relacionadas por una transformación de gauge no representan distintos estados físicos del sistema. Para eliminar esta arbitrariedad es necesario imponer restricciones sobre las coordenadas, llamadas funciones de fijado de gauge.

Las identidades (3.7) también indican que la cuantificación de teorías de gauge tiene problemas. Si se diferencia la ecuación (3.7) respecto de  $q^i$  se obtiene

$$(S_{0,j} R_a^j)_{,i} = S_{0,ij} R_a^j + S_{0,j} R_{a,i}^j = 0 \Rightarrow S_{0,ij} R_a^j|_\Sigma = 0, \quad (3.8)$$

donde  $\Sigma$  es el conjunto de soluciones clásicas  $q_0$  definidas por  $S_{0,i}|_{q_0} = 0$ . Supongamos que se quisiese cuantificar la teoría expandiendo en término de

fluctuaciones alrededor de alguna solución clásica. En ese caso no se podrían definir los propagadores, ya que estos involucran la inversa del hessiano singular  $S_{0,ij}$ .

El conjunto de generadores  $R_a^i$  es completo, en el sentido que

$$S_{0,i}X^i = 0 \Rightarrow X^i = R_a^i\mu^a(q) + M^{ij}(q)S_{0,i}, \quad M^{ij} = -M^{ji}. \quad (3.9)$$

Si los generadores  $R_a^i$  son linealmente independientes sobre  $\Sigma$  la teoría se llama irreducible. Cuando existen dependencias entre los generadores, la teoría es reducible. En lo que sigue supondremos que la teoría es irreducible.

El álgebra de las transformaciones de gauge se obtiene conmutando transformaciones de la acción

$$(\delta_\epsilon\delta_\mu - \delta_\mu\delta_\epsilon)S_0 = \epsilon^a\mu^b S_{0,i} \left( R_a^j R_{b,j}^i - R_b^j R_{a,j}^i \right) = 0, \quad (3.10)$$

y si se factorizan los parámetros  $\epsilon^a$  y  $\mu^b$

$$S_{0,i} \left( R_a^j R_{b,j}^i - R_b^j R_{a,j}^i \right) = 0. \quad (3.11)$$

De la ecuación (3.9) se obtiene el álgebra de los generadores de gauge

$$R_a^j R_{b,j}^i - R_b^j R_{a,j}^i = -C_{ab}^c R_c^i + M_{ab}^{ij} S_{0,j}, \quad M_{ab}^{ij} = -M_{ab}^{ji}. \quad (3.12)$$

El álgebra se llama abierta si  $M_{ab}^{ij} \neq 0$ . Si  $M_{ab}^{ij} = 0$  el álgebra es cerrada, y es un álgebra de Lie si las  $C_{ab}^c$  son constantes. Aquí sólo consideraremos el caso en el que el álgebra es de Lie.

## 3.2 Teoría clásica de anticampos

### 3.2.1 Anticampos y anticorchetes

La acción clásica  $S_0[q^i]$  es invariante ante las transformaciones de gauge (3.3), que consideramos irreducibles y cuya álgebra es de Lie. El primer paso en el formalismo de anticampos consiste en introducir por cada generador de la simetría de gauge un ghost fermiónico  $\eta^a$ . El conjunto de campos  $\phi^A$  es  $\phi^A = \{q^i, \eta^a\}$  con

$$\epsilon(q^i) = 0, \quad \epsilon(\eta^a) = 1, \quad \text{gh } q^i = 0, \quad \text{gh } \eta^a = 1, \quad (3.13)$$

donde  $\epsilon$  corresponde a la paridad de Grassmann (apéndice A) y  $\text{gh}$  al número de ghost (sección 2.2).  $\phi^A$ , que en la notación compacta equivale a

$\phi^A(t)$ , corresponde a una historia en el espacio de configuración extendido (sección 2.2).

Se introduce un anticampo  $\phi_A^*$  por cada campo  $\phi^A$  con paridad de Grassmann y número de ghost

$$\epsilon(\phi_A^*) = \epsilon(\phi^A) + 1 \pmod{2}, \quad \text{gh } \phi_A^* = -\text{gh } \phi^A - 1, \quad (3.14)$$

es decir

$$\phi_A^* = \{q_i^*, \eta_a^*\}, \quad (3.15)$$

$$\epsilon(q_i^*) = 1, \quad \epsilon(\eta_a^*) = 0, \quad (3.16)$$

$$\text{gh } q_i^* = -1, \quad \text{gh } \eta_a^* = -2. \quad (3.17)$$

La duplicación de campos por medio de los anticampos permite definir una estructura de corchete llamada anticorchete

$$\begin{aligned} (X, Y) &\equiv \frac{\delta^R X \delta^L Y}{\delta \phi^A} - \frac{\delta^R X \delta^L Y}{\delta \phi_A^*} \\ &= \frac{\delta X \delta^L Y}{\delta q_i^*} - \frac{\delta^R X \delta Y}{\delta \eta_a^*} + \frac{\delta^R X \delta Y}{\delta \eta_a^*} - \frac{\delta X \delta^L Y}{\delta \eta_a^*} \delta \eta^a, \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde  $\delta^{R,L}$  corresponde a derivada derecha e izquierda (sólo distinguibles para variables fermiónicas), respectivamente.

El anticorchete satisface las siguientes propiedades:

- es fermiónico 
$$\epsilon((X, Y)) = \epsilon_X + \epsilon_Y + 1; \quad (3.19)$$
- lleva número de ghost +1 
$$\text{gh } (X, Y) = \text{gh } X + \text{gh } Y + 1; \quad (3.20)$$
- tiene simetría opuesta al corchete de Poisson generalizado 
$$(X, Y) = -(-)^{(\epsilon_X+1)(\epsilon_Y+1)}(Y, X); \quad (3.21)$$
- satisface la identidad de Jacobi

$$\begin{aligned} ((X, Y), Z) &+ (-)^{(\epsilon_X+1)(\epsilon_Y+\epsilon_Z)}((Y, Z), X) \\ &+ (-)^{(\epsilon_Z+1)(\epsilon_X+\epsilon_Y)}((Z, X), Y) = 0; \end{aligned} \quad (3.22)$$

• es una derivación graduada

$$(X, YZ) = (X, Y)Z + (-)^{\epsilon_Y \epsilon_Z} (X, Z)Y, \quad (3.23)$$

$$(XY, Z) = X(Y, Z) + (-)^{\epsilon_X \epsilon_Y} Y(X, Z). \quad (3.24)$$

El anticorchete en el espacio de campos y anticampos juega un papel similar al del corchete de Poisson. Los anticampos pueden pensarse como las variables conjugadas a los campos ya que de (3.18) se deduce

$$(\phi^A, \phi_B^*) = \delta_B^A, \quad (\phi^A, \phi^B) = (\phi_A^*, \phi_B^*) = 0. \quad (3.25)$$

Se definen transformaciones canónicas, cuya forma infinitesimal es

$$\phi^A \rightarrow \phi^A + \varepsilon(\phi^A, F), \quad \phi_A^* \rightarrow \phi_A^* + \varepsilon(\phi^A, F), \quad (3.26)$$

donde  $F$  es una función arbitraria de los campos y anticampos con  $\text{gh } F = -1$ , y  $\epsilon(F) = 1$ . Las transformaciones canónicas (3.26) preservan los anticorchetes (3.25).

### 3.2.2 La ecuación maestra

La transformación BRST se puede definir en forma canónica a partir del anticorchete

$$sX = (X, S), \quad (3.27)$$

donde el generador  $S[\phi^A, \phi_A^*]$  debe satisfacer

$$\epsilon(S) = \text{gh } S = 0. \quad (3.28)$$

La propiedad de nilpotencia de la transformación BRST implica

$$(S, S) = 0. \quad (3.29)$$

La ecuación (3.29) se conoce como "ecuación maestra clásica". La solución de la ecuación maestra  $S$  debe satisfacer las condiciones de contorno

$$S[\phi^A, \phi_A^* = 0] = S_0[q^i]. \quad (3.30)$$

El generador  $S$  no sólo contiene la información de estructura de gauge de la teoría original sino que también es la acción a partir de la cual se procede a la cuantificación en el formalismo de anticampos.

La solución a la ecuación maestra que excluye a la solución trivial  $S = S_0$  se conoce como propia. En el caso de una teoría de gauge irreducible y con un álgebra de Lie se puede mostrar que la solución propia es

$$S = S_0 + q_i^* R_a^i \eta^a + \frac{1}{2} C_{bc}^a \eta_a^* \eta^b \eta^c. \quad (3.31)$$

Al conjunto de campos y anticampos  $\phi^A, \phi_A^*$  se le puede agregar pares de variables triviales, de manera similar a lo que ocurre con los multiplicadores de Lagrange en el caso hamiltoniano. Si se incluyen por cada libertad de gauge las variables  $b_a, \bar{\eta}_a$  con

$$\epsilon(b_a) = 0, \quad \epsilon(\bar{\eta}_a) = 1, \quad (3.32)$$

$$\text{gh } b_a = 0, \quad \text{gh } \bar{\eta}_a = -1, \quad (3.33)$$

y los anticampos correspondientes  $b^{a*}, \bar{\eta}^{a*}$

$$(b_a, b^{b*}) = (\bar{\eta}_a, \bar{\eta}^{b*}) = \delta_a^b, \quad (3.34)$$

$$\epsilon(b^{a*}) = 1, \quad \epsilon(\bar{\eta}^{a*}) = 0, \quad (3.35)$$

$$\text{gh } b^{a*} = -1, \quad \text{gh } \bar{\eta}^{a*} = 0, \quad (3.36)$$

la solución de la ecuación maestra es

$$S = S_0 + q_i^* R_a^i \eta^a + \frac{1}{2} C_{bc}^a \eta_a^* \eta^b \eta^c + \bar{\eta}^{a*} b_a. \quad (3.37)$$

### 3.3 Teoría cuántica de anticampos

La acción clásica de campos y anticampos (3.37) posee invariancias de gauge residuales debido a la presencia de los anticampos. Para poder cuantificar la teoría es necesario una elección de fijado de gauge que permita remover los anticampos.

La acción cuántica  $W[\phi, \phi^*]$  corresponde a la acción clásica más posibles correcciones cuánticas

$$W = S + \hbar M_1 + \hbar^2 M_2 + \dots \quad (3.38)$$

Se define la acción con el gauge fijado

$$W_\psi[\phi] \equiv W \left[ \phi, \phi^* = \frac{\delta^R \psi}{\delta \phi} \right], \quad (3.39)$$

a partir de un funcional de los campos  $\psi[\phi]$  con las propiedades

$$\epsilon(\psi) = 1, \quad \text{gh } \psi = -1. \quad (3.40)$$

$\psi$  se conoce como el fermión de fijado de gauge. La libertad en la elección del fermión de fijado de gauge corresponde a la posibilidad de imponer diferentes condiciones de gauge a la teoría de gauge original.

La teoría se cuantifica por medio de la integral de camino sobre los campos de la exponencial de la acción con el gauge fijado

$$\int [D\phi] \exp \frac{i}{\hbar} W_\psi[\phi]. \quad (3.41)$$

La independencia de (3.41) del fijado de gauge implica que la acción cuántica debe satisfacer

$$\frac{1}{2}(W, W) = i\hbar\Delta W, \quad (3.42)$$

donde el operador  $\Delta$  es

$$\Delta = (-)^{(\epsilon_A+1)} \frac{\delta^R}{\delta\phi^A} \frac{\delta^R}{\delta\phi_A^*}, \quad \epsilon(\Delta) = 1, \quad \Delta^2 = 0. \quad (3.43)$$

La ecuación (3.42) se conoce como la “ecuación maestra cuántica”, y el término de orden mas bajo en  $\hbar$  es la ecuación maestra clásica (3.29).

Cuando el álgebra de gauge es un álgebra de Lie, la acción clásica es lineal en los anticampos (ecuación (3.37)). En ese caso es fácil mostrar que la solución a la ecuación maestra cuántica es

$$W[\phi, \phi^*] = S[\phi, \phi^*] + \hbar M_1[\phi], \quad (3.44)$$

donde la corrección cuántica  $M_1$  debe satisfacer

$$(S, M_1) = i\Delta S. \quad (3.45)$$

Se ve de (3.45) que existe una ambigüedad en la solución a la ecuación maestra que corresponde a sumarle a  $M_1$  un término invariante de gauge.

En la integral de camino se ve explícitamente como la elección del fermión de fijado de gauge  $\psi$  impone una condición de gauge. Supongamos que para el caso de (3.37) se elije

$$\psi = -\bar{\eta}_a \left[ f^a(q) - \frac{\alpha}{2} \delta^{ab} b_b \right], \quad (3.46)$$

donde  $f(q)$  son funcionales de los campos originales  $q$ . La correspondiente acción es

$$W_\psi = S_0 - \bar{\eta}_a \frac{\delta f^a(q)}{\delta q^i} R_a^i \eta^a - \left( f^a - \frac{\alpha}{2} \delta^{ab} b_b \right) b_a + \mathcal{O}(\hbar). \quad (3.47)$$

Los campos auxiliares  $b$  pueden ser integrados. Si  $\alpha = 0$  se obtiene una función delta en la integral de camino que impone el gauge  $f^a = 0$ . Cuando  $\alpha \neq 0$  se tiene un promedio gaussiano de funciones delta, y al integrar en  $b$  se obtiene un término de fijado de gauge en la acción

$$-\frac{1}{2\alpha} \delta_{ab} f^a f^b. \quad (3.48)$$

## Capítulo 4

# Un modelo simple

En este capítulo se aplica el tratamiento BRST lagrangiano de coordenadas colectivas a un modelo sencillo [33], dado por el movimiento de una partícula en 3 dimensiones sujeta a un potencial central con mínimos fuera del origen. El modelo es una generalización no-abeliana del modelo estudiado en [19, 21]. El objetivo es mostrar en un ejemplo simple como se puede utilizar el formalismo BRST lagrangiano. Por medio de técnicas de temperatura finita se calculan correcciones a las energías de todos los estados vibracionales y el hamiltoniano colectivo. En el caso particular de este modelo es posible comparar los resultados con los que se obtienen por separación de variables.

### 4.1 El modelo

Consideremos el movimiento de una partícula sujeta a un potencial tipo “sombbrero mejicano” en tres dimensiones espaciales  $q_s$  ( $s = 1, 2, 3$ ). El hamiltoniano para este problema es

$$H = \frac{p_s^2}{2m} + \frac{\omega_3^2}{8a^2} (q_s^2 - a^2)^2, \quad (4.1)$$

donde  $m$  es la masa de la partícula y  $\omega_3, a$  son parámetros que determinan la forma del potencial. De aquí en más  $m$  y  $\hbar$  se tomarán iguales a 1 si no se indica lo contrario.

El hamiltoniano (4.1) es invariante ante las transformaciones generadas por los operadores de momento angular  $J_a$  ( $a = 1, 2, 3$ )

$$[H, J_a] = 0, \quad (4.2)$$

$$[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc} J_c. \quad (4.3)$$

Este es un problema estándar de una partícula sujeta a una fuerza central, con la única peculiaridad que el potencial posee una familia de mínimos lejos del origen. El problema se puede resolver por separación de variables. En coordenadas esféricas los autoestados son de la forma

$$\psi_{njm} = R_{nj}(r)Y_{jm}(\theta, \phi), \quad (4.4)$$

donde  $Y_{jm}$  son los esféricos armónicos y  $R_{nj}$  las autofunciones del problema radial efectivo.

Usando la teoría de perturbaciones de Schroedinger se obtienen las energías de las dos bandas más bajas (en una expansión en potencias de  $1/a$ ):

$$\begin{aligned} \epsilon_{0j} = & \left( \frac{\omega_3}{2} - \frac{1}{4a^2} + \mathcal{O}(a^{-4}) \right) \\ & + \frac{1}{2a^2} j(j+1) \left( 1 + \frac{3}{a^2} + \mathcal{O}(a^{-4}) \right), \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{1j} = & \left( \frac{3\omega_3}{2} - \frac{7}{4a^2} + \mathcal{O}(a^{-4}) \right) \\ & + \frac{1}{2a^2} j(j+1) \left( 1 + \frac{9}{a^2} + \mathcal{O}(a^{-4}) \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Para  $a$  grande y  $j$  pequeño el espectro de bajas energías consiste de una banda rotacional asociada a cada modo de vibración de la coordenada radial. Deseamos resolver el problema en el caso en el cual la energía de vibración es mucho mayor que la de rotación

$$\hbar\omega_3 \gg \frac{\hbar^2}{2ma^2} \rightarrow ma^2\omega_3 \gg \hbar. \quad (4.7)$$

Para  $m = 1$  y  $\omega_3$  ( $\mathcal{O}(1)$ ) fijo,  $a$  grande es equivalente a  $\hbar$  pequeño. Por lo tanto, la expansión para  $a$  grande es equivalente a la aproximación semiclásica. Sin embargo, si se trata de iniciar la expansión perturbativa a partir de un mínimo de la acción se encuentra un continuo de mínimos tal que la partícula está en reposo a un radio  $a$  y con cualquier valor de las coordenadas angulares. Por el contrario, cuánticamente existe un sólo vacío con  $j = 0$ . (Esta situación debe distinguirse del fenómeno de ruptura espontánea de simetría en el cual hay muchos vacíos cuánticos.) Si se elige uno de los vacíos clásicos y se trata de corregirlos aparecen modos de frecuencia cero en las direcciones angulares que arruinan el cálculo con divergencias infrarrojas.

En la situación general también se tiene un álgebra de generadores de simetría como (4.3), y el espectro puede ser clasificado por las correspondientes representaciones irreducibles. Lo que no es posible en general es separar las coordenadas asociadas a la simetría de los demás grados de libertad.

Este problema puede ser resuelto introduciendo coordenadas colectivas. Las coordenadas colectivas permiten eliminar los modos cero y al mismo tiempo restaurar la simetría que fue rota al nivel clásico.

## 4.2 Soluciones estáticas y coordenadas colectivas

La acción euclídea para el modelo es

$$S[q] = \int d\tau \left[ \frac{1}{2} \dot{q}_s^2 + \frac{\omega_3^2}{8a^2} (q_s^2 - a^2)^2 \right], \quad (4.8)$$

donde  $\dot{q}_s \equiv \partial_\tau q_s$ . La acción (4.8) es invariante ante el grupo  $G = SO(3)$  de rotaciones de las coordenadas  $q_s$ .

Las ecuaciones de movimiento para  $S$  son

$$\ddot{q}_s - \frac{\omega_3^2}{2a^2} q_s (q_s^2 - a^2) = 0. \quad (4.9)$$

Las soluciones estáticas  $\bar{q}_s$  satisfacen la ecuación independiente del tiempo

$$\bar{q}_s^2 = a^2. \quad (4.10)$$

Debido a la invariancia rotacional hay una familia continua de mínimos dada por (4.10).

Supongamos que se escoje como mínimo  $\bar{q} = (0, 0, a)$  y se expande las coordenadas en término de fluctuaciones alrededor de la solución estática  $q_s \rightarrow \bar{q}_s + q_s$ . Las ecuaciones linealizadas para las fluctuaciones son

$$\ddot{q}_{s'} = 0 \quad (s' = 1, 2), \quad (4.11)$$

$$\ddot{q}_3 = \omega_3^2 q_3. \quad (4.12)$$

El mínimo elegido es solo invariante ante el subgrupo  $H = SO(2) \subset G = SO(3)$  de rotaciones alrededor del eje 3. Debido a que el mínimo rompe parcialmente la simetría rotacional no hay fuerza de restauración a lo largo de las direcciones 1 y 2, y esto que da lugar a dos modos de frecuencia cero.

Hagamos una rotación de las coordenadas dependiente del tiempo

$$q_s \rightarrow \mathcal{R}(\alpha(\tau))_{st} q_t = q_s - \alpha^a \epsilon_{ast} q_t + \frac{1}{2} \alpha^a \alpha^b \epsilon_{ast} \epsilon_{btu} q_u + \dots, \quad (4.13)$$

donde  $\alpha^a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) son parámetros dependientes del tiempo que describen el movimiento en  $SO(3)$ .<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Se eligió la parametrización canónica para simplificar la notación. Cualquier otra buena parametrización de la variedad del grupo (como los ángulos de Euler) puede ser elegida.

La acción transformada es

$$S' = \int d\tau \left[ \frac{1}{2} \left( \dot{q}_s - \dot{\alpha}^a \zeta_a^b \epsilon_{bst} q_t \right)^2 + \frac{\omega_3^2}{8a^2} (q_s^2 - a^2)^2 \right], \quad (4.14)$$

donde  $\epsilon_{ast}$  son las constantes de estructura asociadas con la simetría del problema (ver ecuación (4.3)), y la matriz  $\zeta_a^b$  se define en el apéndice B, a partir de la identidad (B.10), que en este caso es

$$\left( \mathcal{R}^{-1} \frac{\partial}{\partial \alpha^a} \mathcal{R} \right)_{st} = -\zeta_a^b \epsilon_{bst}. \quad (4.15)$$

La acción transformada  $S'$  describe el problema desde un sistema de referencia móvil orientado de acuerdo con las variables colectivas  $\alpha^a$ , y moviéndose con una velocidad  $\dot{\alpha}^a \zeta_a^b$  en la dirección  $b$ .

Consideremos ahora los ángulos  $\alpha^a$  como genuinas variables (colectivas) del sistema. Es fácil ver que la acción (4.14) es invariante ante transformaciones de gauge, cuya forma infinitesimal es

$$\delta_\epsilon q_s = -\epsilon^a(\tau) \epsilon_{ast} q_t, \quad \delta_\epsilon \alpha^b = -\epsilon^a(\tau) \Theta_a^b, \quad (4.16)$$

donde  $\Theta$  es la inversa de  $\zeta$  (apéndice B).

La invariancia de gauge es una manifestación del hecho que transformar las coordenadas intrínsecas y correspondientemente mover el sistema de referencia no cambia la situación física.

### 4.3 Formalismo de anticampos

La acción lagrangiana invariante BRST correspondiente a la teoría de gauge (4.14) se obtiene mediante el formalismo de anticampos descrito en el capítulo 3. En la notación de ese capítulo el conjunto los campos de la teoría son las variables originales y las coordenadas colectivas  $q^i = \{q_s, \alpha^a\}$ , mientras que los generadores de las transformaciones de gauge (4.16) son

$$R_{as} = -\epsilon_{ast} q_t, \quad R_a^b = -\Theta_a^b. \quad (4.17)$$

El álgebra de gauge (3.12) para este problema corresponde al álgebra de  $SU(2)$  con contantes de estructura  $C_{ab}^c = \epsilon_{abc}$  (este resultado se obtiene de la identidad (B.14)).

Siguiendo los pasos de la sección 3.2, se le agrega al conjunto de variables intrínsecas y colectivas  $\{q_s, \alpha^a\}$ , por cada uno de los generadores de gauge (4.17), variables bosónicas auxiliares  $b_a$  y pares de ghost fermiónicos  $\eta^a$  y

$\bar{\eta}_a$ . Por conveniencia elegimos los ghosts reales y a las variables auxiliares  $b_a$  imaginarias.

Por cada uno de los campos  $\{q_s, \alpha^a, b_a, \eta^a, \bar{\eta}_a\}$  se introduce un anticampo  $\{q_s^*, \alpha_a^*, b^{a*}, \eta_a^*, \bar{\eta}^{a*}\}$ , con paridad de Grassmann y hermiticidad opuesta al campo correspondiente. Se define el anticorchete según (3.18),

$$(F, G) = \int d\tau \left( \frac{\delta F}{\delta q_s(\tau)} \frac{\delta^L G}{\delta q_s^*(\tau)} - \frac{\delta^R F}{\delta q_s^*(\tau)} \frac{\delta G}{\delta q_s(\tau)} + \frac{\delta F}{\delta \alpha^a(\tau)} \frac{\delta^L G}{\delta \alpha_a^*(\tau)} - \frac{\delta^R F}{\delta \alpha_a^*(\tau)} \frac{\delta G}{\delta \alpha^a(\tau)} + \frac{\delta^R F}{\delta \eta^a(\tau)} \frac{\delta G}{\delta \eta_a^*(\tau)} - \frac{\delta F}{\delta \eta_a^*(\tau)} \frac{\delta^L G}{\delta \eta^a(\tau)} + \frac{\delta^R F}{\delta \bar{\eta}_a(\tau)} \frac{\delta G}{\delta \bar{\eta}^{a*}(\tau)} - \frac{\delta F}{\delta \bar{\eta}^{a*}(\tau)} \frac{\delta^L G}{\delta \bar{\eta}_a(\tau)} + \frac{\delta F}{\delta b_a(\tau)} \frac{\delta^L G}{\delta b^{a*}(\tau)} - \frac{\delta^R F}{\delta b^{a*}(\tau)} \frac{\delta G}{\delta b_a(\tau)} \right). \quad (4.18)$$

Los anticorchetes fundamentales no nulos entre los campos y anticampos son (ver ecuación (3.25))

$$(q_s, q_t^*) = \delta_{st}, \quad (4.19)$$

$$(\alpha^a, \alpha_b^*) = (\eta^a, \eta_b^*) = (\bar{\eta}^{a*}, \bar{\eta}_b) = (b^{a*}, b_b) = \delta_b^a. \quad (4.20)$$

La acción clásica de los campos y anticampos  $S$  debe ser solución de la ecuación maestra (3.29)  $(S, S) = 0$ , con la condición de contorno (3.30). La solución propia correspondiente es

$$S = S' + \int d\tau \left( -\epsilon_{ast} q_s^* q_t \eta^a - \alpha_b^* \Theta_a^b \eta^a + \frac{1}{2} \epsilon_{abc} \eta^a \eta^b \eta_c^* - \bar{\eta}^{a*} b_a \right). \quad (4.21)$$

$S$ , además, genera la transformación BRST (3.27) de los campos

$$s q_s = -\eta^a \epsilon_{ast} q_t, \quad (4.22)$$

$$s \alpha^b = -\eta^a \Theta_a^b, \quad (4.23)$$

$$s \eta^c = -\frac{1}{2} \epsilon_{abc} \eta^a \eta^b, \quad (4.24)$$

$$s \bar{\eta}_a = -b_a, \quad (4.25)$$

$$s b_a = 0. \quad (4.26)$$

Como el álgebra de gauge es un álgebra de Lie la acción cuántica tiene la forma (3.44)  $W = S + \hbar M_1$ , con  $M_1$  como función solamente de los campos que satisface la ecuación (3.45) (euclídea)

$$(S, M_1) = \Delta S. \quad (4.27)$$

El miembro derecho de la ecuación anterior es

$$\Delta S = -\Theta_{a,b}^b \eta^a \delta(0) = \Theta_a^c \zeta_{c,b}^d \Theta_d^b \eta^a \delta(0), \quad (4.28)$$

donde  $, a \equiv \partial_a \equiv \partial/\partial\alpha^a$ . Haciendo uso de la relación (B.13) se obtiene

$$\Delta S = \eta^a \Theta_a^c \Theta_d^b \zeta_{b,c}^d \delta(0) = \eta^a \Theta_a^b \partial_b \log |\zeta| \delta(0), \quad (4.29)$$

con la identidad  $\partial_a |\zeta| = |\zeta| \Theta_b^c \zeta_{c,a}^b$ . El miembro derecho de (4.29) corresponde a la transformación BRST  $s(-\log |\zeta|) = (S, -\int \log |\zeta| d\tau)$ , y, por lo tanto, la solución a la ecuación maestra cuántica es

$$W[\phi, \phi^*] = S[\phi, \phi^*] - \hbar \delta(0) \int \log |\zeta| d\tau, \quad (4.30)$$

con  $S$  dada por (4.21).

La integral de camino está dada por (ver ecuación (3.41)) ( $\hbar = 1$ )

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}[q, \alpha, \eta, \bar{\eta}, b] \exp(-W_\psi[q_s, \alpha^a, \eta^a, \bar{\eta}_a, b_a]) \\ &= \int \mathcal{D}[q, \alpha, \eta, \bar{\eta}, b] \exp\left(-S_\psi + \delta(0) \int \log |\zeta| d\tau\right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

$S_\psi$  corresponde a la acción (4.21) con los anticampos eliminados mediante el fermión de fijado de gauge  $\psi$  (ecuación (3.39)). El segundo término en el exponente se puede reescribir mediante la identidad

$$\int \mathcal{D}[\alpha] \exp\left(\delta(0) \int \log |\zeta| d\tau\right) = \int \mathcal{D}[\alpha] \prod_\tau |\zeta(\tau)| = \int \mathcal{D}[\alpha] |\zeta|, \quad (4.32)$$

y corresponde a la medida de Haar (apéndice B) sobre la variedad de  $SO(3)$ .

Elegimos para  $\psi$

$$\psi = i \int d\tau \left[ \left( \frac{\omega^2}{a} \epsilon_{3sa'} q_s + \partial_\tau (\dot{\alpha}^b \zeta_b^{a'}) + \frac{i\omega^2}{2a^2} b_{a'} \right) \bar{\eta}_{a'} + \dot{\alpha}^a \zeta_a^3 \bar{\eta}_3 \right], \quad (4.33)$$

donde  $a' = 1, 2$ . El parámetro  $\omega$  es arbitrario y debería desaparecer de cualquier resultado físico (invariante de gauge). Será interpretado como la frecuencia asociada al sector espurio. Se obtienen las siguientes expresiones para los anticampos

$$q_s^* = \frac{\delta\psi}{\delta q_s} = \frac{i\omega^2}{a} \epsilon_{3sa'} \bar{\eta}_{a'}, \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned}\alpha_b^* &= \frac{\delta\psi}{\delta\alpha^b} \\ &= i \left( \zeta_b^{a'} \ddot{\eta}_{a'} - \epsilon_{a'de} \dot{\alpha}^c \zeta_c^d \zeta_b^e \bar{\eta}_{a'} - \zeta_b^3 \dot{\eta}_3 + \epsilon_{3cd} \dot{\alpha}^a \zeta_a^c \zeta_b^d \bar{\eta}_3 \right),\end{aligned}\quad (4.35)$$

$$b_{a'}^* = \frac{\delta\psi}{\delta b_{a'}} = -\frac{\omega^2}{2a^2} \bar{\eta}_{a'},\quad (4.36)$$

$$\bar{\eta}_{a'}^* = \frac{\delta\psi}{\delta \bar{\eta}_{a'}} = i \left( \frac{\omega^2}{a} \epsilon_{3sa'} q_s + \partial_\tau \left( \dot{\alpha}^b \zeta_b^{a'} \right) + \frac{i\omega^2}{2a^2} b_{a'} \right),\quad (4.37)$$

$$\bar{\eta}_3^* = \frac{\delta\psi}{\delta \bar{\eta}_3} = i \dot{\alpha}^a \zeta_a^3,\quad (4.38)$$

$$\eta_a^* = \frac{\delta\psi}{\delta \eta^a} = 0,\quad (4.39)$$

$$b_3^* = \frac{\delta\psi}{\delta b_3} = 0.\quad (4.40)$$

Con esta elección de gauge la acción es

$$\begin{aligned}S_\psi &= S' + \int d\tau \left[ \frac{\omega^2}{2a^2} b_{a'}^2 - i b_{a'} \left( \frac{\omega^2}{a} \epsilon_{3sa'} q_s + \partial_\tau \left( \dot{\alpha}^b \zeta_b^{a'} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - i b_3 \dot{\alpha}^a \zeta_a^3 - i \dot{\eta}_{a'} \dot{\eta}^{a'} + i \bar{\eta}_3 \dot{\eta}^3 - \frac{i\omega^2}{a} \left( q_3 \bar{\eta}_{a'} \eta^{a'} - q_{a'} \bar{\eta}_{a'} \eta^3 \right) \right. \\ &\quad \left. + i \epsilon_{abc'} \dot{\alpha}^d \zeta_d^a \eta^b \dot{\eta}_{c'} - i \epsilon_{3ab} \dot{\alpha}^c \zeta_c^a \eta^b \bar{\eta}_3 \right].\end{aligned}\quad (4.41)$$

Los campos  $b$  pueden ser integrados. La integral de camino es entonces

$$Z = \int \mathcal{D}[q, \alpha, \eta, \bar{\eta}] \delta \left( \dot{\alpha}^b \zeta_b^3 \right) \exp(-S_\psi),\quad (4.42)$$

$$\begin{aligned}S_\psi &= S' + \int d\tau \left[ \frac{1}{2} \left( \omega \epsilon_{3sa'} q_s + \frac{a}{\omega} \partial_\tau \left( \dot{\alpha}^b \zeta_b^{a'} \right) \right)^2 - i \dot{\eta}_{a'} \dot{\eta}^{a'} \right. \\ &\quad \left. + i \bar{\eta}_3 \dot{\eta}^3 - \frac{i\omega^2}{a} \left( q_3 \bar{\eta}_{a'} \eta^{a'} - q_{a'} \bar{\eta}_{a'} \eta^3 \right) \right. \\ &\quad \left. + i \epsilon_{abc'} \dot{\alpha}^d \zeta_d^a \eta^b \dot{\eta}_{c'} - i \epsilon_{3ab} \dot{\alpha}^c \zeta_c^a \eta^b \bar{\eta}_3 \right].\end{aligned}\quad (4.43)$$

Por conveniencia introducimos los multiplicadores de Lagrange  $\lambda^{a'}$  en la integral de camino

$$\begin{aligned}Z &= \int \mathcal{D}[q, \alpha, \eta, \bar{\eta}, \lambda] \delta \left( \dot{\alpha}^b \zeta_b^3 \right) \prod_{a'} \delta \left( \lambda^{a'} - \frac{a}{\omega} \dot{\alpha}^b \zeta_b^{a'} \right) \exp(-S_\psi) \\ &= \int \mathcal{D}[q, \eta, \bar{\eta}, \lambda] \mathcal{D}[\alpha, \pi] \exp(-S'_\psi).\end{aligned}\quad (4.44)$$

En la última línea las funciones delta fueron exponentiadas por medio de los campos  $\pi$ . Entonces:

$$\begin{aligned}
S'_\psi &= S_{\text{intr.}} + S_{\text{col.}} + S_{\text{acop.}} \\
S_{\text{intr.}} &= \int d\tau \left[ \frac{1}{2} \left( \dot{q}_s - \frac{\omega}{a} \lambda^{a'} \epsilon_{a'st} q_t \right)^2 + \frac{1}{8a^2} (q_s^2 - a^2)^2 \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} \left( \omega \epsilon_{3sa'} q_s + \dot{\lambda}_{a'} \right)^2 - i \dot{\bar{\eta}}_{a'} \dot{\eta}^{a'} + i \bar{\eta}_3 \dot{\eta}^3 \\
&\quad - \frac{i\omega^2}{a} \left( q_3 \bar{\eta}_{a'} \eta^{a'} - q_{a'} \bar{\eta}_{a'} \eta^3 \right) + \frac{i\omega}{a} \epsilon_{a'3b'} \lambda^{a'} \eta^3 \dot{\eta}^{b'} \\
&\quad \left. - \frac{i\omega}{a} \epsilon_{3a'b'} \lambda^{a'} \eta^{b'} \bar{\eta}_3 \right], \tag{4.45}
\end{aligned}$$

$$S_{\text{col.}} = -i \int d\tau \dot{\alpha}^a \pi_a, \tag{4.46}$$

$$S_{\text{acop.}} = \frac{i\omega}{a} \int d\tau \lambda^{a'} \Theta_{a'}^b \pi_b. \tag{4.47}$$

La acción para las variables *intrínsecas* (coordenadas originales  $q$ , multiplicadores de Lagrange  $\lambda$  y ghosts  $\eta, \bar{\eta}$ ) es  $S_{\text{intr.}}$ . Contiene la acción transformada (4.14), pero con los multiplicadores de Lagrange como velocidades del sistema de referencia móvil. También contiene un término de fijado de gauge, la acción para los ghosts y el acoplamiento entre los ghosts y las variables bosónicas.

$S_{\text{col.}}$  es la acción libre para las coordenadas colectivas, en formulación hamiltoniana. Se puede ver que los  $\pi_a = i\delta S_{\text{coll.}}/\delta \dot{\alpha}^a$  deben interpretarse como los momentos conjugados a los ángulos  $\alpha^a$ . Por lo tanto,  $\mathcal{D}[\alpha, \pi]$  es la medida invariante canónica en el espacio de fases.

El acoplamiento entre las variables colectivas y las intrínsecas está dado por  $S_{\text{acop.}}$ .

## 4.4 Tratamiento perturbativo

### 4.4.1 La descripción a orden cero

Estamos describiendo el movimiento de una partícula desde un sistema de referencia intrínseco que se mueve respecto del sistema de referencia original del laboratorio. Es conveniente considerar que el sistema intrínseco está fijo y que el sistema del laboratorio se mueve respecto de él. En ese caso tenemos los siguientes generadores:  $J_a = \epsilon_{abc} q_b p_c$ , que rotan la partícula respecto del

sistema intrínseco; y  $I_a = \Theta_a^b \mathcal{P}_b$ , que rotan el sistema de laboratorio respecto del sistema intrínseco.

Se puede construir un operador  $I_z$  como  $I_a \check{z}_a$ , donde  $\check{z}_a = (\mathcal{R}^{-1})_{a3}$  es el tercer eje en sistema del laboratorio.  $I_z$  conmuta con todos los  $I_a$  porque tanto  $I_a$  como  $\check{z}_a$  rotan. Los autoestados colectivos serán autofunciones de  $I^2$  e  $I_z$  de la forma

$$\psi(\alpha^a) = \sum_{I_3} c_{I_3} D_{I_3 I_z}^I(\alpha^a), \quad (4.48)$$

donde las  $D$ 's son las matrices de rotaciones finitas.

Como  $I_z$  conmuta con el hamiltoniano  $H$  la energía es independiente del valor de  $I_z$  y se recupera la simetría rotacional rota por la solución clásica, correspondiente a la degeneración original en  $J_z$ .

En un problema con simetría axial  $I_3$  también conmuta con  $H$ . En el caso de nuestro modelo de juguete el autovalor permitido para  $I_3$  es  $I_3 = 0$  (como se muestra más abajo) y, por lo tanto, la funciones de onda resultante son esféricas armónicas, como se esperaba desde el comienzo (ver ecuación (4.4)).

En los próximos pasos se obtiene la función de partición  $Z$  (de la que se pueden obtener los valores de las energías). El método de integral de camino permite obtener  $Z$  como una integral sobre caminos periódicos (incluyendo los ghosts) [39, 40]. Elegimos la misma solución clásica que en la sección 4.2, y expandimos las variables intrínsecas en término de fluctuaciones cuánticas. Los multiplicadores de Lagrange y los ghosts se anulan clásicamente. Esto da una expansión para la acción intrínseca en término de las fluctuaciones

$$S_{\text{intr.}} = S_{\text{intr.}}^{(2)} + S_{\text{intr.}}^{(3)} + S_{\text{intr.}}^{(4)}. \quad (4.49)$$

#### 4.4.2 La acción cuadrática

De la acción cuadrática se obtienen los propagadores libres. La acción cuadrática es

$$\begin{aligned} S_{\text{intr.}}^{(2)} = & \int d\tau \left[ \frac{1}{2} (\dot{q}_3^2 + \omega_3^2 q_3^2) + \frac{1}{2} (\dot{q}_{s'}^2 + \omega^2 q_{s'}^2) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (\dot{\lambda}_{a'}^2 + \omega^2 \lambda_{a'}^2) - i (\dot{\eta}_{a'} \dot{\eta}^{a'} + \omega^2 \bar{\eta}_{a'} \eta^{a'}) + i \bar{\eta}_3 \dot{\eta}^3 \right]. \end{aligned} \quad (4.50)$$

A este orden el sistema es descrito por un oscilador armónico de frecuencia  $\omega_z$ . Además, el sector espurio es descrito, por cada subíndice (1, 2), por dos modos bosónicos y dos fermiónicos, todos con la misma frecuencia de excitación  $\omega$ . El fijado de gauge (4.33) fue elegido precisamente para

darle frecuencia distinta de cero a estos modos. Al estar la acción (4.50) libre de modos cero los propagadores están bien definidos, y los cálculos perturbativos pueden ser llevados a cabo en forma directa. La aparición de la frecuencia espuria  $\omega$  es consecuencia del fijado de gauge, así que esta debe desaparecer de los resultados invariantes de gauge (que corresponden a resultados físicos).

Para evaluar la función de partición a orden cuadrático se usan las integrales gaussianas

$$\int \mathcal{D}[\phi] \exp\left(-\frac{1}{2} \int d\tau (\dot{\phi}^2 + \omega^2 \phi^2)\right) = \det^{-1/2}(\partial_t^2 - \omega^2), \quad (4.51)$$

y

$$\int \mathcal{D}[\bar{\eta}\eta] \exp\left(-\int d\tau (\dot{\bar{\eta}}\dot{\eta} + \omega^2 \bar{\eta}\eta)\right) = \det(\partial_t^2 - \omega^2), \quad (4.52)$$

para variables bosónicas y fermiónicas, respectivamente. Se obtiene

$$\begin{aligned} Z_0 &= \int \mathcal{D}[q_3, q_{s'}, \lambda^{a'}, \bar{\eta}_{a'}, \eta^a] \exp(-S_{\text{intr.}}^{(2)}) \\ &= \det^{-1/2}(\partial_t^2 - \omega_3^2) \det^{-1}(\partial_t^2 - \omega^2) \det^{-1}(\partial_t^2 - \omega^2) \det^2(\partial_t^2 - \omega^2) \\ &= \det^{-1/2}(\partial_t^2 - \omega_3^2) = \left[2 \sinh\left(\frac{\beta\omega_3}{2}\right)\right]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Las contribuciones de los ghosts cancelan las contribuciones de los grados de libertad espurios bosónicos ( $\lambda^{a'}, q_{s'}$ ). La última igualdad se obtiene por regularización del determinante. Aquí  $\beta$  es la inversa de la temperatura [41].

A partir de  $S_{\text{intr.}}^{(2)}$  se calculan los propagadores libres por medio de la expresión

$$\begin{aligned} \langle\langle T_\tau \mathcal{O}_1(\tau_1) \mathcal{O}_2(\tau_2) \rangle\rangle &= \\ &= \int \mathcal{D}[q_3, q_{s'}, \lambda^{a'}, \bar{\eta}_{a'}, \eta^a] \mathcal{O}_1(\tau_1) \mathcal{O}_2(\tau_2) \exp(-S_{\text{intr.}}^{(2)}). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Se obtiene

$$(a) = \langle\langle T q_3(\tau) q_3(\tau') \rangle\rangle = G_{\omega_3}(\tau - \tau'), \quad (4.55)$$

$$(b) = \langle\langle T q_{a'}(\tau) q_{a'}(\tau') \rangle\rangle = G_\omega(\tau - \tau'), \quad (4.56)$$

$$(c) = \langle\langle T \lambda^{a'}(\tau) \lambda^{a'}(\tau') \rangle\rangle = G_\omega(\tau - \tau'), \quad (4.57)$$

$$(d) = \langle\langle T \bar{\eta}_{a'}(\tau) \eta^{a'}(\tau') \rangle\rangle = -iG_\omega(\tau - \tau'), \quad (4.58)$$

donde

$$G_\omega(\tau) = \frac{1}{2\omega(e^{\beta\omega} - 1)} \left( e^{\beta\omega} e^{-\omega|\tau|} + e^{\omega|\tau|} \right). \quad (4.59)$$

Los propagadores están representados gráficamente en la figura 4.1.

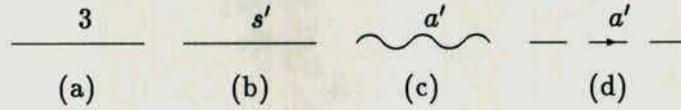


Figura 4.1: PROPAGADORES LIBRES.

#### 4.4.3 Correcciones de orden superior

Los términos cúbicos y cuárticos en (4.49) proveen los vértices de interacción, que se muestran en la figura 4.2. Sus valores son

$$\begin{aligned}
 (a) &= -\frac{\omega_3^2}{2a} q_3^3, \\
 (b) &= -\frac{\omega_3^2}{2a} q_3 q_{s'}^2, \\
 (c) &= -\frac{\omega}{a} \epsilon_{3s'a'} q_3 q_{s'} \lambda^{a'}, \\
 (d) &= -\frac{\omega}{a} \epsilon_{3s'a'} q_3 \dot{q}_{s'} \lambda^{a'}, \\
 (e) &= -\frac{\omega^2}{a} q_3 \lambda^{a'2}, \\
 (f) &= \frac{i\omega^2}{a} q_3 \bar{\eta}_{a'} \eta^{a'}, \\
 (g) &= -\frac{i\omega^2}{a} q_{a'} \bar{\eta}_{a'} \eta^3, \\
 (h) &= -\frac{i\omega}{a} \epsilon_{a'3b'} \lambda^{a'} \eta^3 \bar{\eta}_{b'}, \\
 (i) &= \frac{i\omega}{a} \epsilon_{3a'b'} \lambda^{a'} \eta^{b'} \bar{\eta}_3, \\
 (j) &= -\frac{\omega_3^2}{8a^2} q_3^4, \\
 (k) &= -\frac{\omega_3^2}{8a^2} q_{s'}^2 q_{t'}^2, \\
 (l) &= -\frac{\omega_3^2}{4a^2} q_3^2 q_{s'}^2, \\
 (m) &= -\frac{\omega_3^2}{2a^2} q_3^2 \lambda^{a'2}, \\
 (n) &= -\frac{\omega^2}{2a^2} \lambda_{a'}^2 q_{b'}^2 - (q_{a'} \lambda^{a'})^2.
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

La topología de los diagramas de dos loops que contribuye a la función de partición intrínseca está dada por la figura 4.3. Sus valores son:

$$(a) = \frac{9\beta\omega_3^2}{8a^2} G_{\omega_3}(0)^2 + \frac{3\beta\omega_3^2}{4a^2} G_{\omega_3}(0)G_{\omega}(0) + \frac{\beta\omega_3^2}{2a^2} G_{\omega}(0)^2, \tag{4.61}$$

$$\begin{aligned}
 (b) &= -\frac{\beta}{8a^2} + \frac{3\beta\omega_3^2}{4a^2} G_{\omega_3}(0)^2 + \beta \frac{2\omega^2 - \omega_3^2}{2a^2} G_{\omega_3}(0)G_{\omega}(0) \\
 &+ \beta \frac{4\omega^2 + \omega_3^2}{4a^2} G_{\omega}(0)^2,
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

$$\begin{aligned}
 (c) &= -\frac{3\beta\omega_3^2}{8a^2} G_{\omega_3}(0)^2 - \beta \frac{4\omega^2 + \omega_3^2}{4a^2} G_{\omega_3}(0)G_{\omega}(0) \\
 &- \beta \frac{4\omega^2 + 3\omega_3^2}{4a^2} G_{\omega}(0)^2.
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

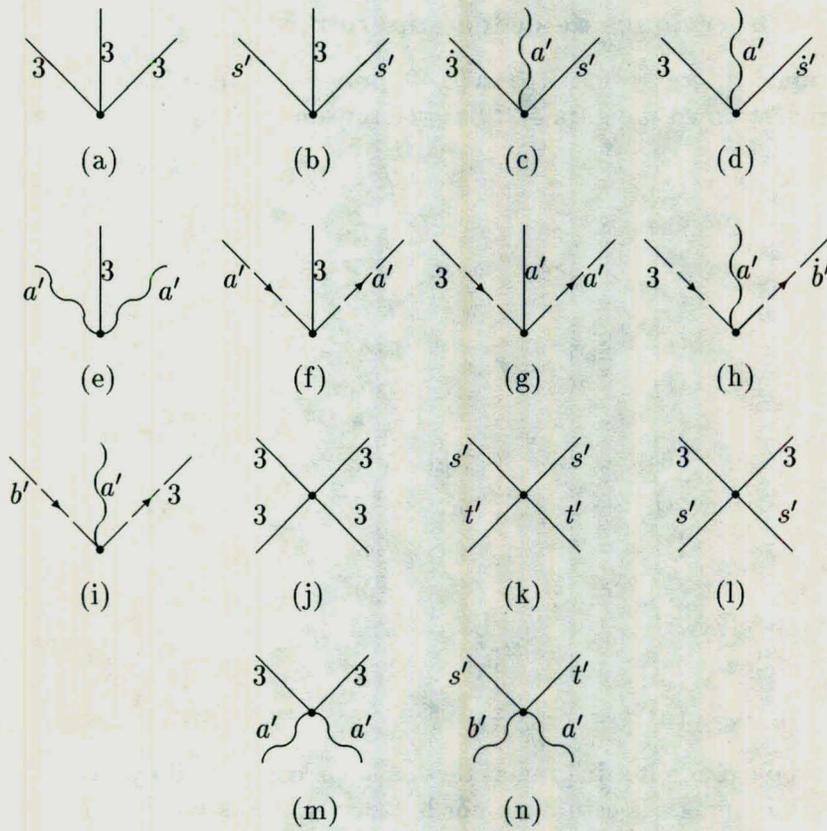


Figura 4.2: VÉRTICES DE TERCER Y CUARTO ORDEN DE  $S_{\text{intr.}}^{(3)}$  Y  $S_{\text{intr.}}^{(4)}$ .

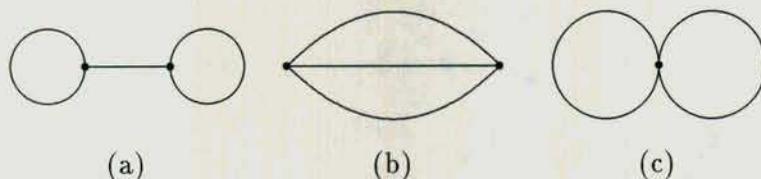


Figura 4.3: DIAGRAMAS DE DOS LOOPS INVOLUCRADOS EN LA CORRECCIÓN A LA FUNCIÓN DE PARTICIÓN.

Sumando todos los diagramas se obtiene

$$\Delta(\beta) = (a) + (b) + (c) = -\frac{\beta}{8a^2} + \frac{3\beta}{8a^2} \left[ \coth\left(\frac{\beta\omega_3}{2}\right) \right]^2, \quad (4.64)$$

donde la frecuencia arbitraria  $\omega$  no aparece.

Para encontrar las energías corregidas se expande el resultado anterior de la siguiente manera:

$$Z_0 \times (1 + \Delta) = \left(1 + \frac{\beta}{4a^2}\right) e^{-\frac{1}{2}\beta\omega_3} + \left(1 + \frac{7\beta}{4a^2}\right) e^{-\frac{3}{2}\beta\omega_3} + \dots \quad (4.65)$$

Si se compara esta expresión con la función de partición exacta

$$\begin{aligned} Z &= e^{-\beta(\frac{1}{2}\omega_3 + \delta\epsilon_0)} + e^{-\beta(\frac{3}{2}\omega_3 + \delta\epsilon_1)} + \dots \\ &= (1 - \beta\delta\epsilon_0 + \dots) e^{-\frac{1}{2}\beta\omega_3} + (1 - \beta\delta\epsilon_1 + \dots) e^{-\frac{3}{2}\beta\omega_3} + \dots \end{aligned} \quad (4.66)$$

se obtienen inmediatamente las correcciones

$$\delta\epsilon_0 = -\frac{1}{4a^2}, \quad (4.67)$$

$$\delta\epsilon_1 = -\frac{7}{4a^2}, \quad (4.68)$$

que coinciden con (4.5) y (4.6) salvo por los términos dependientes de  $j$  que calculamos más abajo. Es de notar que la expresión (4.64) contiene la corrección a este orden de todos los autovalores  $n\omega_3$ . Esta es una ventaja del método de temperatura finita.

Las correcciones que involucran los momentos colectivos  $I_a$  se pueden evaluar en manera similar a partir de los vértices de la figura 4.4, pero el resultado es mejor expresarlo como un hamiltoniano efectivo. La contribución

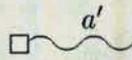


Figura 4.4: VÉRTICE DE ACOPLAMIENTO INTRÍNSECO-COLECTIVO.

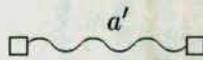


Figura 4.5: CORRECCIÓN COLECTIVA A ORDEN ÁRBOL.

a orden árbol de la figura 4.5 da

$$-I_{a'}^2 \frac{\beta}{2a^2}. \quad (4.69)$$

Similarmente, las correcciones de un loop se evalúan de los diagramas de la figura 4.6

$$(a) = -I_{a'}^2 \frac{2\beta}{a^4} G_{\omega_3}(0) + I_{a'}^2 \frac{\beta}{a^4} G_{\omega}(0), \quad (4.70)$$

$$(b) = -I_{a'}^2 \frac{3\beta}{2a^4} G_{\omega_3}(0) - I_{a'}^2 \frac{\beta}{a^4} G_{\omega}(0), \quad (4.71)$$

$$(c) = I_{a'}^2 \frac{\beta}{2a^4} G_{\omega_3}(0) + I_{a'}^2 \frac{\beta}{2a^4} G_{\omega}(0). \quad (4.72)$$

Hay una contribución adicional de los diagramas desconexos de cuarto orden de la figura 4.7. Esta contribución debería ser cero salvo por el hecho que los generadores  $I_a$  no conmutan. Se obtiene una contribución de orden  $\beta$ , que puede ser evaluada por medio de teoría de perturbaciones para estados

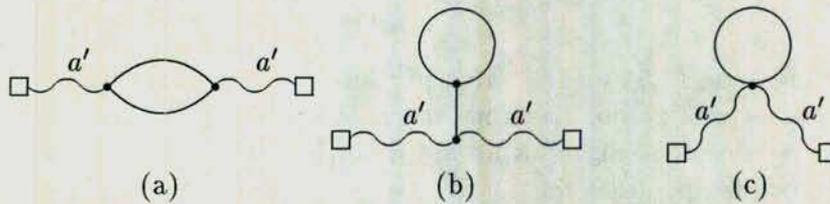


Figura 4.6: CORRECCIÓN COLECTIVA A UN LOOP.

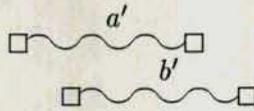


Figura 4.7: DIAGRAMAS DESCONEXOS DE CUARTO ORDEN.

degenerados. El resultado es

$$-I_{a'}^2 \frac{\beta}{2a^4} G_{\omega}(0). \quad (4.73)$$

La suma de (4.69) y (4.70)-(4.73) da:

$$-I_{a'}^2 \frac{\beta}{2a^2} - I_{a'}^2 \frac{3\beta}{a^4} G_{\omega_3}(0). \quad (4.74)$$

La ecuación (4.74) es el hamiltoniano colectivo efectivo (a orden  $\mathcal{O}(1/a^4)$ ). Físicamente se espera que la partícula esté en un estado con  $I_3 = 0$  debido a su simetría respecto de este eje. En el formalismo BRST esto se obtiene de la observación que  $I_3$  es un operador nulo  $I_3 \neq 0$  corresponde a estados nulos (ver sección 5.4. Por lo tanto, se debe tomar el valor medio de (4.74) en  $|j I_z I_3 = 0\rangle$ . Usando el hecho que

$$\langle j I_z I_3 = 0 | I_{a'}^2 | j I_z I_3 = 0 \rangle = j(j+1), \quad (4.75)$$

se obtiene

$$-j(j+1) \frac{\beta}{2a^2} - j(j+1) \frac{3\beta}{a^4} G_{\omega_3}(0). \quad (4.76)$$

Expandiendo como en (4.65) se obtienen las correcciones dependientes de  $j$  a los primero dos niveles

$$\delta\epsilon_{oj} = \frac{1}{2a^2} j(j+1) \left( 1 + \frac{3}{a^2} + \mathcal{O}(a^{-4}) \right) \quad (4.77)$$

$$\delta\epsilon_{1j} = \frac{1}{2a^2} j(j+1) \left( 1 + \frac{9}{a^2} + \mathcal{O}(a^{-4}) \right) \quad (4.78)$$

de acuerdo con (4.5) y (4.6).



## Capítulo 5

# Tratamiento de coordenadas colectivas en un modelo general

En este capítulo se aplica el tratamiento lagrangiano BRST a la cuantización de las coordenadas colectivas en un modelo general [34] que incluye modelos solitónicos bosónicos, como el modelo de Skyrme o modelos sigma no lineales, así como también modelos mecánicos como el del capítulo 4.

### 5.1 El modelo

Consideremos una partícula que se mueve en una variedad de Riemann  $\mathcal{C}$  con métrica  $g_{st}$ . La acción euclídea es

$$S = \int d\tau \left( \frac{1}{2} g_{st} \dot{q}^s \dot{q}^t + V(q) \right), \quad (5.1)$$

Las coordenadas  $q^s$  parametrizan la variedad y  $V(q)$  es un potencial arbitrario. El punto  $\dot{q}^s$  indica derivada respecto del tiempo euclideo  $\tau$ . La suma está implícita sobre índices repetidos.

La variedad  $\mathcal{C}$  corresponde al espacio de configuración. Un punto  $q \in \mathcal{C}$  describe una configuración del sistema. Por ejemplo, en un modelo  $\sigma$  no lineal en  $2 + 1$  dimensiones con espacio interno  $\mathcal{T}$ , descrito por la acción euclídea

$$S = \int d\tau d^2 x g_{ij}(\varphi) (\dot{\varphi}^i \dot{\varphi}^j + \nabla \varphi^i \cdot \nabla \varphi^j), \quad (5.2)$$

donde  $\varphi^i$  y  $g_{ij}(\varphi)$  son coordenadas y la métrica en  $\mathcal{T}$ , respectivamente, el espacio de configuración  $\mathcal{C}$  es la variedad (infinito dimensional) de mapas de energía finita  $\varphi(\vec{x}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{T}$ . Las coordenadas  $q^s$  son los campos escalares  $\varphi^i(\vec{x})$ . La métrica en  $\mathcal{C}$  y el potencial son

$$g_{st}(q) \equiv g_{ij}(\varphi(\vec{x}))\delta^2(\vec{x} - \vec{y}), \quad (5.3)$$

$$V(q) \equiv \int d^2x g_{ij}(\varphi) \nabla \varphi^i \cdot \nabla \varphi^j. \quad (5.4)$$

El índice  $s$  corresponde tanto al índice discreto  $i$  como a la variable espacial  $\vec{x}$ . Sumas en  $s$  indican sumas en  $i$  e integrales en  $\vec{x}$ . Con estas convenciones el formalismo que se desarrolla a continuación puede ser aplicado tanto a modelos de solitones como a simples modelos mecánicos.

Supongamos que existe un grupo finito, no trivial,  $G$  de simetrías de la acción, constituido por las isometrías que también dejan invariante el potencial

$$q^s \rightarrow f^s(\alpha, q), \quad (5.5)$$

$$g_{st}(q) = \partial_s f^u \partial_t f^v g_{uv}(f(\alpha, q)), \quad (5.6)$$

$$V(q) = V(f(\alpha, q)), \quad (5.7)$$

donde las  $\alpha^a$  parametrizan el grupo  $G$ .  $\partial_s$  y  $\partial_a$  indican  $\frac{\partial}{\partial q^s}$  y  $\frac{\partial}{\partial \alpha^a}$ , respectivamente. La parametrización es tal que  $\alpha^a = 0$  corresponde a la identidad  $f^s(0, q) = q^s$ .

Las variaciones infinitesimales, que generan el álgebra  $\mathfrak{g}$  de  $G$ , están definidas por

$$\delta_a q^s = \partial_a f^s(\alpha, q)|_{\alpha=0}. \quad (5.8)$$

Conmutando dos de estas variaciones se obtiene (ecuación (B.4))

$$\partial_a f^t \partial_b \partial_t f^s - \partial_b \partial_t f^s \partial_a f^t = -C_{ab}{}^c \partial_c f^s, \quad (5.9)$$

donde  $C_{ab}{}^c$  son las constantes de estructura del grupo  $G$ .

En la sección siguiente se realiza una expansión semiclásica alrededor de un mínimo del potencial  $V$ . El caso interesante es aquel en el cual varios mínimos clásicos están relacionados por transformaciones de  $G$ , mientras que cuánticamente solamente hay un vacío porque  $G$  no está roto (este no es el caso de ruptura espontánea de simetría en el cual existen muchos mínimos cuánticos). Si se elige un mínimo clásico aparecen divergencias infrarrojas que arruinan el cálculo (las excitaciones tangentes a la superficie de mínimos tienen fuerza de restauración nula). La cura a este problema es la introducción de coordenadas colectivas que eliminan los modos cero y al mismo tiempo restauran la simetría rota a nivel clásico.

## 5.2 Soluciones estáticas y coordenadas colectivas

Las ecuaciones de movimiento que se obtienen de la acción (5.1) son

$$q_{st}\ddot{q}^t + \frac{1}{2}\dot{q}^t \dot{q}^u (\partial_u g_{st} + \partial_t g_{su} - \partial_s g_{tu}) - \partial_s V = 0. \quad (5.10)$$

Las soluciones estáticas satisfacen la ecuación independiente del tiempo

$$\partial_s V|_{q=\bar{q}} = 0. \quad (5.11)$$

Elegimos una solución estática particular  $\bar{q}^s$  y expandimos los campos alrededor de ella  $q^s \rightarrow \bar{q}^s + q^s$ . La ecuación linealizada para las fluctuaciones es

$$(\bar{V}_{st} - \omega^2 \bar{g}_{st}) q^t = 0, \quad (5.12)$$

donde

$$\bar{g}_{st,u\dots v} = \partial_u \dots \partial_v g_{st}|_{q=\bar{q}}, \quad \bar{V}_{u\dots v} = \partial_u \dots \partial_v V|_{q=\bar{q}}. \quad (5.13)$$

El conjunto de transformaciones infinitesimales  $\{\delta_a\}$  se divide en dos: las  $\delta_{a'}$ , que modifican la solución estática, y las  $\delta_a$ , que la dejan invariante. Los elementos de  $G$  que dejan al mínimo invariante forman un subgrupo compacto  $H$  de  $G$  con álgebra de Lie  $\mathfrak{h}$  [42]. La parametrización  $\alpha^a$  puede ser elegida tal que los generadores de  $\mathfrak{g}-\mathfrak{h}$  y  $\mathfrak{h}$ ,  $\{\delta_{a'}\}$  y  $\{\delta_a\}$ , respectivamente, sean ortogonales. Además, supondremos para simplificar que  $G/H$  es un espacio simétrico, lo que es válido para los modelos de Skyrme y  $O(3)$ . Estas condiciones se resumen en las siguientes relaciones:

$$[\mathfrak{g} - \mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{g} - \mathfrak{h}, \quad (5.14)$$

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}, \quad (5.15)$$

$$[\mathfrak{g} - \mathfrak{h}, \mathfrak{g} - \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}, \quad (5.16)$$

Por lo tanto, las únicas constantes de estructura no nulas son  $C_{a'\bar{b}}^{c'}$ ,  $C_{\bar{a}\bar{b}}^{\bar{c}}$  y  $C_{a'b'}^{\bar{c}}$ .

Los generadores de  $\mathfrak{g} - \mathfrak{h}$  dan lugar a modos cero

$$\bar{V}_{st}\psi_{a'}^t = 0, \quad \psi_{a'}^s \propto \delta_{a'} q^s. \quad (5.17)$$

Si se eligen los generadores  $\delta_{a'}$  tal que el tensor de inercia

$$I_{a'b'} = \bar{g}_{st}\delta_{a'}\bar{q}^s\delta_{b'}\bar{q}^t, \quad (5.18)$$

sea diagonal, entonces se pueden definir los modos cero normalizados

$$\psi_{a'}^s = I_{a'}^{-1/2} \delta_{a'} \bar{q}^s, \quad (5.19)$$

donde los momentos de inercia  $\mathcal{I}_{a'}$  corresponden a los elementos diagonales de  $\mathcal{I}_{a'b'}$ , y en la ecuación (5.19) no hay suma sobre  $a'$ .

El conjunto de modos normales  $\{\psi_n^s\} = \{\psi_n^s; \psi_{a'}^s\}$ ,

$$\bar{V}_{st}\psi_{a'}^t = 0, \quad (\bar{V}_{st} - \omega_n^2 \bar{g}_{st})\psi_n^t = 0 \quad (\omega_n \neq 0), \quad (5.20)$$

satisface las relaciones de ortogonalidad

$$\bar{g}_{st}\psi_n^s\psi_m^t = \delta_{nm}, \quad \bar{g}_{st}\psi_{a'}^s\psi_{b'}^t = \delta_{a'b'}, \quad \bar{g}_{st}\psi_n^s\psi_{a'}^t = 0, \quad (5.21)$$

y completitud

$$\bar{g}_{st}\delta^{\bar{n}\bar{m}}\psi_n^t\psi_m^u + \bar{g}_{st}\delta^{a'b'}\psi_{a'}^t\psi_{b'}^u = \delta_s^u. \quad (5.22)$$

Hemos asumido que el grupo  $G$  no está roto a nivel cuántico, así que el vacío debe ser invariante ante  $G$ . Como la solución estática no es invariante se restaura la simetría por medio del procedimiento de coordenadas colectivas.

Hacemos una transformación de los campos  $q^s$  dependiente del tiempo [8, 21]

$$q^s \rightarrow f^s(\alpha(t), q). \quad (5.23)$$

Hay que tener cuidado cuando este tipo de transformaciones se realizan en la integral de camino ya que pueden aparecer términos de orden  $\hbar^2$  [43]. Con la elección de gauge que se hace más abajo están ausentes, pero en otros gauges deben ser incluidos [44]. En el contexto de coordenadas colectivas este problema fue discutido en [37, 45], y su resolución para el tratamiento con anticampos [35] se describe en el capítulo 6.

La acción transformada es

$$S_0 \rightarrow S'_0 = \int d\tau \left[ \frac{1}{2} g_{st} \left( \dot{q}^s + \dot{\alpha}^a \zeta_a^b \delta_b q^s \right) \left( \dot{q}^t + \dot{\alpha}^c \zeta_c^d \delta_d q^t \right) + V(q) \right], \quad (5.24)$$

donde la matriz  $\zeta_a^b$  se define en el apéndice B (ecuaciones (B.9), (B.10)).

Consideremos ahora a los parámetros  $\alpha^a$  como genuinas variables (colectivas) del problema. Es fácil ver que la acción  $S'_0$  es invariante ante transformaciones de gauge [8, 21], cuya forma infinitesimal es

$$\begin{pmatrix} q^s \\ \alpha^b \end{pmatrix} \rightarrow \varepsilon^a(\tau) \begin{pmatrix} R_a^s(q) \\ R_a^b(\alpha) \end{pmatrix}, \quad (5.25)$$

donde  $R_a^s(q) = \delta_a q^s$  está dada en (5.8) y

$$R_a^b(\alpha) = \delta_a \alpha^b = -\Theta_a^b. \quad (5.26)$$

El sistema de arriba puede ser interpretado como una descripción del problema desde un sistema de referencia móvil orientado de acuerdo a las coordenadas colectivas, y moviéndose con velocidades  $\dot{\alpha}^a \zeta_a^b$  en las direcciones  $b$ . La invariancia de gauge es una manifestación del hecho que transformar las coordenadas intrínsecas y correspondientemente mover el sistema de referencia no cambia la situación física.

### 5.3 Formalismo de anticampos

En esta sección se aplica el formalismo de anticampos descrito en el capítulo 3 al problema presentado en las secciones anteriores. La notación utilizada en este capítulo (definida en la sección 5.1) difiere de la del capítulo 2 en que la dependencia temporal se escribe explícitamente.

#### 5.3.1 Solución de la ecuación maestra clásica

Comenzamos por la acción  $S'_0[q, \alpha]$  (5.24) que es invariante ante las transformaciones de gauge (5.25). El álgebra de gauge, que se obtiene de las ecuaciones (5.9) y (B.14), corresponde al álgebra de Lie del grupo  $G$ , con constantes de estructura  $C_{ab}^c$ .

El conjunto de variables  $\{q^s, \alpha^a\}$  es aumentado por la introducción, por cada generador independiente de gauge, de variables bosónicas (antihermíticas)  $b_a$ , y pares de ghost fermiónicos (hermíticos)  $\eta^a$  y  $\bar{\eta}_a$ .

Por cada uno de los campos  $\phi^A = \{q^s, \alpha^a, b_a, \eta^a, \bar{\eta}_a\}$  se introduce un anticampo  $\phi_A^* = \{q_s^*, \alpha_a^*, b^{a*}, \eta_a^*, \bar{\eta}^{a*}\}$ , con paridad de Grassmann y hermiticidad opuestas al campo correspondiente. A partir de los campos y anticampos se define el anticorchete según la ecuación (3.18). Los anticorchetes canónicos no nulos son

$$(q^s, q_t^*) = \delta_{st}, \quad (5.27)$$

$$(\alpha^a, \alpha_b^*) = (\eta^a, \eta_b^*) = (\bar{\eta}_b, \bar{\eta}^{a*}) = (b_b, b^{a*}) = \delta_b^a. \quad (5.28)$$

El paso siguiente es encontrar la acción de los campos y anticampos que satisface la ecuación maestra (3.29)  $(S, S) = 0$  con la condición de contorno (3.30)  $S[\phi, \phi^* = 0] = S'_0[q, \alpha]$ . La solución correspondiente a la ecuación maestra es

$$S = S'_0 + \int d\tau \left( q_s^* R_a^s \eta^a - \alpha_b^* \Theta_a^b \eta^a - \frac{1}{2} C_{ab}^c \eta_c^* \eta^a \eta^b + \bar{\eta}^{a*} b_a \right). \quad (5.29)$$

$S$  es la acción a partir de la cual se procede a cuantificar la teoría. Además genera la transformación BRST (3.27) de los campos (ecuación (3.27))

$$sq^s = \eta^a \delta_a q^s, \quad (5.30)$$

$$s\alpha^b = -\eta^a \Theta_a^b, \quad (5.31)$$

$$s\eta^c = \frac{1}{2} C_{ab}^c \eta^a \eta^b, \quad (5.32)$$

$$s\bar{\eta}_a = -b_a, \quad (5.33)$$

$$sb_a = 0. \quad (5.34)$$

### 5.3.2 Solución de la ecuación maestra cuántica

La acción cuántica de los campos y anticampos  $W[\phi, \phi^*]$  tiene la forma (3.44)  $W[\phi, \phi^*] = S[\phi, \phi^*] + \hbar M_1[\phi]$  debido a que el álgebra de gauge es un álgebra de Lie.  $M_1$  satisface la ecuación (3.45) (euclídea)

$$(S, M_1) = \Delta S, \quad (5.35)$$

donde el operador  $\Delta$  está definido en (3.43). El miembro derecho de la ecuación anterior se puede calcular a partir de la solución (5.29)

$$\Delta S = \delta(0) \int d\tau \eta^a \left( \partial_s R_a^s - \partial_b \Theta_a^b - C_{ab}^b \right). \quad (5.36)$$

De las ecuaciones (C.9), (B.9) y (B.13) se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta S &= \delta(0) \int d\tau \eta^a \left( -\frac{1}{2} g^{st} g_{st,u} R_a^u + \Theta_a^c \Theta_d^b \partial_c \zeta_b^d \right) \\ &= \delta(0) \int d\tau \eta^a \left( -R_a^s \partial_s \log \sqrt{g} + \Theta_a^b \partial_b |\zeta| \right), \end{aligned} \quad (5.37)$$

con  $g = \det g_{st}$  y  $|\zeta| = \det \zeta_a^b$ , y donde se usó la identidad  $\det M^{-1} \partial_\mu \det M = M^{ij} \partial_\mu M_{ij}$ . El miembro derecho de (5.37) corresponde a la transformación BRST

$$s(-\log \sqrt{g} - \log |\zeta|) = -R_a^s \partial_s \log \sqrt{g} + \Theta_a^b \partial_b |\zeta|. \quad (5.38)$$

Por lo tanto, la solución a la ecuación maestra cuántica es

$$W[\phi, \phi^*] = S[\phi, \phi^*] - \hbar \delta(0) \int (\log \sqrt{g} + \log |\zeta|) d\tau, \quad (5.39)$$

con  $S$  dada por (5.29).

### 5.3.3 Fijado de gauge e integral de camino

Para cuantificar la teoría es necesario eliminar los anticampos por medio del fijado de gauge. Se define la acción con el gauge fijado (de aquí en más  $\hbar = 1$ )

$$W_\psi \equiv W \left[ \phi, \phi^* = \frac{\delta\psi}{\delta\phi} \right], \quad (5.40)$$

donde  $\psi$  es el fermión de fijado de gauge. La integral de camino está dada por

$$Z = \int \mathcal{D}[q, \alpha, \eta, \bar{\eta}, b] \exp \left[ -S_\psi + \delta(0) \int d\tau (\log \sqrt{g} + \log |\zeta|) \right]. \quad (5.41)$$

$S_\psi$  es la acción (5.29) con los anticampos eliminados mediante el fermión de fijado de gauge. El término proporcional a  $\delta(0)$  puede reescribirse

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}[q, \alpha] \exp \left[ \delta(0) \int d\tau (\log \sqrt{g} + \log |\zeta|) \right] \\ &= \int \mathcal{D}[q, \alpha] \prod_\tau \sqrt{g(\tau)} |\zeta(\tau)| = \int \mathcal{D}[q] \sqrt{g} \mathcal{D}[\alpha] |\zeta|, \end{aligned} \quad (5.42)$$

y corresponde a la medida de integración sobre el espacio de configuración  $\mathcal{C}$  y la medida de Haar sobre la variedad del grupo  $G$ .

Realizamos la siguiente elección para el fermión de fijado de gauge

$$\psi = -i \int d\tau \left[ \left( \omega_{a'}^2 \chi^{a'} - \partial_\tau (\dot{\alpha}^b \zeta_b^{a'}) + \frac{i\omega_{b'}^2}{2\mathcal{I}_{b'}} b_{b'} \delta^{b'a'} \right) \bar{\eta}_{a'} + \dot{\alpha}^b \zeta_b^{\bar{a}} \bar{\eta}_{\bar{a}} \right], \quad (5.43)$$

donde las funciones  $\chi^{a'}$  dependen de los campos  $q$ , y los parámetros de inercia  $\mathcal{I}_{a'}$  fueron definidos en (5.18). Los parámetros  $\omega_{a'}$  son arbitrarios y deberían desaparecer de cualquier resultado físico (invariante de gauge). Serán interpretados como las frecuencias asociadas al sector espurio (ver ecuaciones (5.79)-(5.81)). La acción con el gauge fijado es

$$\begin{aligned} S_\psi &= S'_0 + \int d\tau \left[ \frac{\omega_{a'}^2}{2\mathcal{I}_{a'}} b_{a'}^2 - i b_{a'} \left[ \omega_{a'}^2 \chi^{a'} - \partial_\tau (\dot{\alpha}^b \zeta_b^{a'}) \right] \right. \\ &\quad + i \dot{\eta}_{a'} \eta^{a'} - i b_{\bar{a}} (\dot{\alpha}^b \zeta_b^{\bar{a}}) + i \bar{\eta}_{\bar{a}} \dot{\eta}^{\bar{a}} - i \omega_{a'}^2 \bar{\eta}_{a'} (\delta_b \chi^{a'}) \eta^b \\ &\quad \left. - i C_{ab}{}^{c'} (\dot{\alpha}^d \zeta_d^a) \eta^b \bar{\eta}_{c'} - i C_{ab}{}^{\bar{c}} (\dot{\alpha}^d \zeta_d^a) \eta^b \bar{\eta}_{\bar{c}} \right]. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Los campos  $b$  pueden ser integrados. Las integrales sobre  $b_{\bar{a}}$  dan funciones delta, mientras que aquellas sobre  $b_{a'}$  son gaussianas y pueden ser interpretadas como promedios sobre funciones delta de fijado de gauge (sección 3.3)

$$Z = \int \mathcal{D}[q] \sqrt{g} \mathcal{D}[\alpha] |\zeta| \mathcal{D}[\eta, \bar{\eta}] \prod_{\bar{a}} \delta(\dot{\alpha}^b \zeta_{\bar{b}}^{\bar{a}}) \exp(-S_{\psi}), \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned} S_{\psi} = S'_0 + \int d\tau & \left[ \frac{\mathcal{I}_{a'}}{2\omega_{a'}^2} \left[ \omega_{a'}^2 \chi^{a'} - \partial_{\tau} (\dot{\alpha}^b \zeta_b^{a'}) \right]^2 \right. \\ & + i\dot{\eta}_{a'} \dot{\eta}^{a'} + i\bar{\eta}_{\bar{a}} \dot{\eta}^{\bar{a}} - i\omega_{a'}^2 \bar{\eta}_{a'} (\delta_b \chi^{a'}) \eta^b \\ & \left. - iC_{ab}{}^{c'} (\dot{\alpha}^d \zeta_d^a) \eta^b \dot{\eta}_{c'} - iC_{ab}{}^{\bar{c}} (\dot{\alpha}^d \zeta_d^a) \eta^b \bar{\eta}_{\bar{c}} \right]. \quad (5.46) \end{aligned}$$

Para eliminar las derivadas de segundo orden  $\ddot{\alpha}$  introducimos multiplicadores de Lagrange  $\lambda^{a'}$  en la integral de camino para  $S_{\psi}$

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}[q] \sqrt{g} \mathcal{D}[\alpha] |\zeta| \mathcal{D}[\eta, \bar{\eta}] \prod_{\bar{a}} \delta(\dot{\alpha}^b \zeta_{\bar{b}}^{\bar{a}}) \exp(-S_{\psi}) \\ &= \int \mathcal{D}[q] \sqrt{g} \mathcal{D}[\alpha] |\zeta| \mathcal{D}[\lambda, \eta, \bar{\eta}] \prod_{a'} \delta\left(\frac{\omega_{a'}}{\sqrt{\mathcal{I}_{a'}}} \lambda^{a'} - \dot{\alpha}^b \zeta_b^{a'}\right) \\ &\quad \times \prod_{\bar{a}} \delta(\dot{\alpha}^b \zeta_{\bar{b}}^{\bar{a}}) \exp(-S_{\psi}). \quad (5.47) \end{aligned}$$

Las funciones delta pueden ser exponenciadas por medio de campos  $\pi$ . Se obtiene finalmente

$$Z = \int \mathcal{D}[q] \sqrt{g} \mathcal{D}[\alpha, \pi] \mathcal{D}[\lambda, \eta, \bar{\eta}] \exp(-S'_{\psi}), \quad (5.48)$$

$$S'_{\psi} = S_{\text{intr.}} + S_{\text{col.}} + S_{\text{acop.}}, \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned} S_{\text{intr.}} = \int d\tau & \left[ \frac{1}{2} g_{st} \left( \dot{q}^s + \frac{\omega_{a'}}{\sqrt{\mathcal{I}_{a'}}} \lambda^{a'} \delta_{a'} q^s \right) \right. \\ & \times \left( \dot{q}^t + \frac{\omega_{b'}}{\sqrt{\mathcal{I}_{b'}}} \lambda^{b'} \delta_{b'} q^t \right) + V(q) \\ & + \frac{\mathcal{I}_{a'}}{2\omega_{a'}^2} \left( \omega_{a'}^2 \chi^{a'} - \frac{\omega_{a'}}{\sqrt{\mathcal{I}_{a'}}} \dot{\lambda}^{a'} \right)^2 \\ & + i\dot{\eta}_{a'} \dot{\eta}^{a'} + i\bar{\eta}_{\bar{a}} \dot{\eta}^{\bar{a}} - i\omega_{a'}^2 \bar{\eta}_{a'} (\delta_b \chi^{a'}) \eta^b \\ & \left. - i\frac{\omega_{a'}}{\sqrt{\mathcal{I}_{a'}}} C_{a'b}{}^{c'} \lambda^{a'} \eta^b \dot{\eta}_{c'} - i\frac{\omega_{a'}}{\sqrt{\mathcal{I}_{a'}}} C_{a'b}{}^{\bar{c}} \lambda^{a'} \eta^b \bar{\eta}_{\bar{c}} \right] \quad (5.50) \end{aligned}$$

$$S_{\text{col.}} = -i \int d\tau \dot{\alpha}^a \pi_a, \quad (5.51)$$

$$S_{\text{acop.}} = \int d\tau \frac{i\omega_{a'}}{\sqrt{I_{a'}}} \lambda^{a'} \Theta_{a'}^b \pi_b. \quad (5.52)$$

La acción para las variables intrínsecas (campos originales  $q$ , multiplicadores de Lagrange  $\lambda$  y ghosts  $\eta, \bar{\eta}$ ) es  $S_{\text{intr.}}$ . Contiene la acción transformada (5.24), pero con los multiplicadores de Lagrange como velocidades del sistema móvil. También contiene un término de fijado de gauge, la acción para los ghosts, y el acoplamiento entre los ghosts y las variables bosónicas.

$S_{\text{col.}}$  es la acción libre para las coordenadas colectivas en forma hamiltoniana. De ella se ve que  $\pi_a = i\delta S_{\text{col.}}/\delta\dot{\alpha}^a$  debe interpretarse como el momento canónico conjugado a las coordenadas colectivas  $\alpha^a$ . Por lo tanto,  $\mathcal{D}[\alpha, \pi]$  es la medida invariante canónica en el espacio de fases. La forma mezclada lagrangiana-hamiltoniana es frecuente en problemas de coordenadas colectivas [36].

El acoplamiento entre grados de libertad intrínsecos y colectivos está dado por  $S_{\text{acop.}}$ .

## 5.4 Cuantización BRST hamiltoniana

En la sección anterior la integral de camino BRST con el gauge fijado fue construida por medio del formalismo de anticampos. Un resultado similar se puede obtener integrando los momentos en una integral de camino BRST hamiltoniana. En esta sección se describe brevemente ese procedimiento para mostrar su equivalencia con el tratamiento de anticampos. La cuantización BRST hamiltoniana fue descrita en el capítulo 2. Su aplicación el tratamiento de variables colectivas se puede encontrar en [21].

El hamiltoniano clásico correspondiente a la acción lagrangiana invariante de gauge (5.24) es

$$H = \frac{1}{2} g^{st} p_s p_t + V(q), \quad (5.53)$$

más un conjunto de vínculos abelianos de primera clase

$$F_a = \zeta_a^b j_b - \pi_a, \quad (5.54)$$

con corchetes de Poisson

$$\{p_s, q^t\} = -\delta_s^t, \quad (5.55)$$

$$\{\pi_a, \alpha^b\} = -\delta_a^b, \quad (5.56)$$

y donde  $j_a = p_s \delta_a q^s$  son los operadores que generan las transformaciones de los campos intrínsecos. El hamiltoniano cuántico posee una ambigüedad de orden que se resuelve como de costumbre tomando como energía cinética al laplaciano sobre  $\mathcal{C}$ . Cuando se expresa el Hamiltoniano en el orden de Weyl se obtiene un potencial extra a orden  $\hbar^2$  [46]

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V = \frac{1}{2} [p_s g^{st} p_t]_{\text{W}} + \hbar^2 V_{\text{qu}} + V, \quad (5.57)$$

con

$$V_{\text{qu}} = \frac{1}{8} (g^{st} \Gamma_{su}^v \Gamma_{tv}^u + R), \quad (5.58)$$

donde  $\Gamma_{st}^u$  son los símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{st}^u \equiv \frac{1}{2} g^{uv} (g_{sv,t} + g_{tv,s} - g_{st,v}), \quad (5.59)$$

y  $R$  es el escalar de curvatura del espacio de configuración  $\mathcal{C}$

$$R \equiv g^{st} (\Gamma_{su,t}^u - \Gamma_{st,u}^u + \Gamma_{su}^v \Gamma_{tv}^u - \Gamma_{st}^u \Gamma_{uv}^v). \quad (5.60)$$

Un conjunto de vínculos no abelianos se obtiene multiplicando los vínculos (5.54) por  $\Theta$  [21]

$$G_a = \Theta_a^b F_b = j_a - I_a, \quad \{G_a, G_b\} = C_{ab}^c G_c. \quad (5.61)$$

Los operadores  $I_a = \Theta_a^b \pi_b$  satisfacen  $\{I_a, I_b\} = -C_{ab}^c I_c$ , y deben considerarse como las versiones colectivas de los operadores intrínsecos  $j_a$ , ya que generan las transformaciones de las variables colectivas (ecuación (B.16)).

Siguiendo el procedimiento descrito en la sección 2.2 el espacio de fases se extiende introduciendo por cada vínculo de primera clase un multiplicador de Lagrange  $\lambda^a$  y dos ghosts fermiónicos  $\eta^a, \bar{\eta}_a$ , junto con sus correspondientes momentos conjugados  $b_a, \mathcal{P}_a, \bar{\mathcal{P}}^a$ . Como fue explicado en la sección 2.3, al cuantificar, los estados físicos son definidos como aquellos aniquilados por la carga BRST  $\Omega$  (2.36),

$$\Omega = \eta^a G_a + i\bar{\mathcal{P}}^a b_a + \frac{1}{2} C_{ab}^c \eta^a \eta^b \mathcal{P}_c,$$

y los operadores físicos como aquellos que conmutan con  $\Omega$ .

Cualquier término de la forma  $[K, \Omega]$  puede agregarse al hamiltoniano sin alterar los elementos de matriz del hamiltoniano original dentro del

subespacio aniquilado por  $\Omega$ . Luego de la redefinición  $\lambda^{a'} \rightarrow i\omega_{a'}\mathcal{I}_{a'}^{-1/2}\lambda^{a'}$ ,  $b_{a'} \rightarrow -i\mathcal{I}_{a'}^{1/2}\omega_{a'}^{-1}b_{a'}$ , elegimos [21]

$$K = \frac{\omega_{a'}}{\sqrt{\mathcal{I}_{a'}}}\lambda^{a'}\mathcal{P}_{a'} - \bar{\eta}_{a'}\left(\omega_{a'}^2\chi^{a'} + \frac{i\omega_{a'}}{2\sqrt{\mathcal{I}_{a'}}}\delta^{a'b'}b_{b'}\right). \quad (5.62)$$

El hamiltoniano BRST que se obtiene a partir de esta elección de gauge es

$$\begin{aligned} H_{\text{BRST}} = & H - \frac{i\omega_{a'}}{\sqrt{\mathcal{I}_{a'}}}\lambda^{a'}G_{a'} + \frac{1}{2}b_{a'}^2 + i\omega_{a'}\sqrt{\mathcal{I}_{a'}}b_{a'}\chi^{a'} \\ & - i\bar{\mathcal{P}}^{a'}\mathcal{P}_{a'} - i\omega_{a'}^2\bar{\eta}_{a'}\left(\delta_b\chi^{a'}\right)\eta^b \\ & - i\frac{\omega_{a'}}{\sqrt{\mathcal{I}_{a'}}}C_{a'b}{}^c\lambda^{a'}\eta^b\mathcal{P}_c. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Si se integran los momentos  $p^s$ ,  $b_a$ ,  $\mathcal{P}_a$  y  $\bar{\mathcal{P}}^a$  en la integral de camino en espacio de fases se obtiene la integral de camino lagrangiana de (5.48)-(5.49), con la identificación  $\mathcal{P}_{\bar{a}} = \bar{\eta}_{\bar{a}}$ .

Las funciones  $\chi$  se eligen tal que  $[j_{a'}, \chi^{b'}] \neq 0$  a orden cero, lo que permite que los propagadores de ghost estén bien definidos. En ese caso el hamiltoniano BRST no conmuta con los operadores  $j_a$ . Esto es deseable para los  $j_{a'}$ , ya que dan lugar a los modos cero, como se vió en la sección 5.2. Por otro lado, la simetría ante las transformaciones  $j_{\bar{a}}$  no es rota por la solución clásica, así que es conveniente elegir un esquema de fijado de gauge que conserve dicha simetría. Primero se deben definir operadores de transformación similares a los  $G_a$  (que transforman las variables originales y las colectivas) para los multiplicadores de Lagrange y los ghosts [21]:

$$\begin{aligned} N_a \equiv & \frac{\omega_{b'}\sqrt{\mathcal{I}_{c'}}}{\omega_{c'}\sqrt{\mathcal{I}_{b'}}}C_{ab'c'}\lambda^{b'}b_{c'} + \frac{\omega_{b'}}{\sqrt{\mathcal{I}_{b'}}}C_{ab'}{}^{\bar{c}}\lambda^{b'}b_{\bar{c}} \\ & + \frac{\sqrt{\mathcal{I}_{c'}}}{\omega_{c'}}C_{a\bar{b}}{}^c\lambda^{\bar{b}}b_{c'} + C_{a\bar{b}}{}^{\bar{c}}\lambda^{\bar{b}}b_{\bar{c}}, \end{aligned} \quad (5.64)$$

$$\tau_a \equiv C_{ab}{}^c\eta^b\mathcal{P}_c, \quad (5.65)$$

$$\bar{\tau}_a \equiv C_{ab}{}^c\bar{\mathcal{P}}^b\bar{\eta}_c. \quad (5.66)$$

Estos operadores tienen las mismas reglas de conmutación que los  $j_a$ .

Las transformaciones de todas las variables están definidas por los operadores

$$L_a \equiv G_a + N_a + \tau_a + \bar{\tau}_a, \quad (5.67)$$

$$[L_a, L_b] = iC_{ab}{}^cL_c, \quad (5.68)$$

que son operadores nulos [21]

$$L_a = \left[ \Omega, iC_{ab'}^c \frac{\omega_{b'}}{\sqrt{\mathcal{I}_{b'}}} \lambda^{b'} \bar{\eta}_c + iC_{ab}^c \lambda^b \bar{\eta}_c + i\mathcal{P}_a \right], \quad (5.69)$$

conmutan con  $\Omega$ , y mapean estados físicos en estados nulos (de norma cero) [17]. También conmutan con el hamiltoniano original.

Los operadores  $L_{a'}$  no conmutan con el fermión de fijado de gauge debido a las funciones  $\chi^{a'}$ . Sin embargo, estas funciones pueden ser elegidas para transformar ante los  $L_{\bar{a}}$  como

$$i[L_{\bar{a}}, \chi^{b'}] = i[j_{\bar{a}}, \chi^{b'}] = C_{\bar{a}c'}^{b'} \chi^{c'}. \quad (5.70)$$

Esta es la elección que se hace en las sección 5.5 (ecuación (5.73)).

Si los parámetros arbitrarios  $\omega_{a'}$  se eligen iguales dentro de cada representación irreducible de  $H$  en  $\mathfrak{g} - \mathfrak{h}$  los operadores  $L_{\bar{a}}$  conmutan con el hamiltoniano BRST. Por lo tanto, los autoestados del hamiltoniano pueden clasificarse por las representaciones irreducibles del grupo  $H$ . Sin embargo, en una representación irreducible cualquier estado puede obtenerse a partir de cualquier otro por aplicación reiterada de los  $L_{\bar{a}}$ , que son operadores nulos. Esto significa que la única representación que no está necesariamente compuesta por estados nulos es la trivial, en la que hay solamente un estado que satisface  $L_{\bar{a}}|\rangle = 0$ . Los estados físicos están en esta representación.

La acción de los operadores colectivos  $I_{\bar{a}}$  en estados físicos está determinada por la estructura intrínseca, es decir,

$$L_{\bar{a}}|\text{ph}\rangle = 0 \Rightarrow I_{\bar{a}}|\text{ph}\rangle = (j_{\bar{a}} + N_{\bar{a}} + \tau_{\bar{a}} + \bar{\tau}_{\bar{a}})|\text{ph}\rangle. \quad (5.71)$$

Los operadores colectivos  $I_{\bar{a}}$  pueden identificarse con los operadores intrínsecos  $j_{\bar{a}} + N_{\bar{a}} + \tau_{\bar{a}} + \bar{\tau}_{\bar{a}}$  al tomar elementos de matriz entre estados físicos. Este hecho es usado en la sección siguiente al calcular la función de partición.

## 5.5 Tratamiento perturbativo

En esta sección se evalúa perturbativamente la función de partición (5.48), es decir, la traza sobre estados físicos de  $e^{-\beta H}$ . Es sabido [39, 40] que esto corresponde a realizar la integración funcional sobre campos con condiciones periódicas de contorno en el intervalo  $[0, \beta]$ , incluyendo los ghosts, a pesar de ser fermiones.

La minimización de la acción (5.49) con la suposición que los multiplicadores de Lagrange y los ghosts se anulan clásicamente da que los únicos

valores de expectación no nulos para los campos son los de la ecuación (5.11). Expandiendo todos los campos como fluctuaciones alrededor de sus valores clásicos se procede a relizar un cálculo perturbativo. El lagrangiano cuadrático provee los propagadores libres, y los términos cúbicos o de orden superior dan los vértices que se usan en la expansión en diagramas de Feynman.

Para simplificar el cálculo expandimos las fluctuaciones de  $q^s$  en término de los modos normales

$$q^s = \bar{q}^s + \psi_{\bar{n}}^s \xi^{\bar{n}} + \psi_{a'}^s \xi^{a'}, \quad (5.72)$$

donde  $\xi^n$  son las coordenadas normales. Elegimos las funciones de fijado de gauge  $\chi^{a'}$  como

$$\chi^{a'} = \mathcal{I}_{a'}^{-1/2} \delta^{a'b'} g_{st} \psi_{b'}^s (q^t - \bar{q}^t) = \mathcal{I}_{a'}^{-1/2} \xi^{a'}. \quad (5.73)$$

Dicha elección cancela a nivel cuadrático el acoplamiento entre  $\lambda$  y  $\xi$ , y provee de frecuencias (espurias) a los modos cero y los ghosts. Este gauge se conoce en problemas de solitones como gauge rígido, y es similar al gauge de 't Hooft en teorías de Yang-Mills-Higgs [47].

La acción cuadrática es

$$\begin{aligned} S_{\text{intr.}}^{(2)} = & \int d\tau \left[ \frac{1}{2} \delta_{\bar{n}\bar{m}} \left( \dot{\xi}^{\bar{n}} \dot{\xi}^{\bar{m}} + \omega_{\bar{n}}^2 \xi^{\bar{n}} \xi^{\bar{m}} \right) \right. \\ & + \frac{1}{2} \delta_{a'b'} \left( \dot{\xi}^{a'} \dot{\xi}^{b'} + \omega_{a'}^2 \xi^{a'} \xi^{b'} + \dot{\lambda}^{a'} \dot{\lambda}^{b'} + \omega_{a'}^2 \lambda^{a'} \lambda^{b'} \right) \\ & \left. - i \left( \dot{\bar{\eta}}_{a'} \dot{\eta}^{a'} + \omega_{a'}^2 \bar{\eta}_{a'} \eta^{a'} \right) + i \bar{\eta}_{\bar{a}} \dot{\eta}^{\bar{a}} \right]. \quad (5.74) \end{aligned}$$

Para evaluar la función de partición a orden más bajo se usan las integrales gaussianas en el tiempo periódico  $\tau$

$$\int \mathcal{D}[\phi] \exp \left[ -\frac{1}{2} \int d\tau (\dot{\phi}^2 + \omega^2 \phi^2) \right] = \det^{-1/2}(\partial_\tau^2 - \omega^2), \quad (5.75)$$

para campos bosónicos, y

$$\int \mathcal{D}[\bar{\eta}, \eta] \exp \left[ -\int d\tau (\dot{\bar{\eta}} \dot{\eta} + \omega^2 \bar{\eta} \eta) \right] = \det(\partial_\tau^2 - \omega^2), \quad (5.76)$$

para campos fermiónicos.

Se obtiene [41]:

$$\begin{aligned}
Z^{(1)} &= \int \mathcal{D}[\xi, \lambda, \bar{\eta}, \eta] \exp(-S_{\text{intr.}}^{(2)}) \\
&= \prod_{\bar{n}} \det^{-1/2}(\partial_{\tau}^2 - \omega_{\bar{n}}^2) \times \\
&\quad \prod_{a'} \det^{-1/2}(\partial_{\tau}^2 - \omega_{a'}^2) \det^{-1/2}(\partial_{\tau}^2 - \omega_{a'}^2) \det(\partial_{\tau}^2 - \omega_{a'}^2) \\
&= \prod_{\bar{n}} \left[ 2 \sinh\left(\frac{\beta\omega_{\bar{n}}}{2}\right) \right]^{-1}, \tag{5.77}
\end{aligned}$$

donde  $\beta$  es la temperatura inversa. Como de costumbre, el determinante de ghost cancela la contribución de los grados de libertad bosónicos espurios  $(\lambda^{a'}, \xi^{a'})$ . Expandiendo el resultado anterior se encuentra la contribución  $\sum_{\bar{n}} \frac{\omega_{\bar{n}}}{2}$  a la energía del vacío.

Los propagadores de temperatura finita se calculan de manera similar

$$\langle\langle \hat{T} \xi^{\bar{n}}(\tau) \xi^{\bar{m}}(\tau') \rangle\rangle = \delta^{\bar{n}\bar{m}} G_{\omega_{\bar{n}}}(\tau - \tau'), \tag{5.78}$$

$$\langle\langle \hat{T} \xi^{a'}(\tau) \xi^{b'}(\tau') \rangle\rangle = \delta^{a'b'} G_{\omega_{a'}}(\tau - \tau'), \tag{5.79}$$

$$\langle\langle \hat{T} \lambda^{a'}(\tau) \lambda^{b'}(\tau') \rangle\rangle = \delta^{a'b'} G_{\omega_{a'}}(\tau - \tau'), \tag{5.80}$$

$$\langle\langle \hat{T} \bar{\eta}_{a'}(\tau) \eta^{b'}(\tau') \rangle\rangle = -i \delta_{a'}^{b'} G_{\omega_{a'}}(\tau - \tau'), \tag{5.81}$$

donde

$$G_{\omega}(\tau) = \frac{1}{2\omega(e^{\beta\omega} - 1)} \left( e^{\beta\omega} e^{-\omega|\tau|} + e^{\omega|\tau|} \right). \tag{5.82}$$

El orden temporal en el propagador de dos velocidades se define

$$\begin{aligned}
\langle\langle \hat{T} \dot{\xi}^n(\tau) \dot{\xi}^m(\tau') \rangle\rangle &= \delta^{nm} \partial_{\tau} \partial_{\tau'} G_{\omega_n}(\tau - \tau') \\
&= \delta^{nm} \delta(\tau - \tau') - \delta^{nm} \omega_n^2 G_{\omega_n}(\tau - \tau'). \tag{5.83}
\end{aligned}$$

La  $\delta(\tau - \tau')$  cancela vértices extras en el lagrangiano (respecto del hamiltoniano de interacción), como también las contribuciones proporcionales a  $\delta(0)$  que aparecen de la medida  $\frac{1}{2} \delta(0) \int d\tau \log g(\tau)$  (Eq.(5.42)) [48].

Los términos de orden superior al cuadrático proveen los vértices para construir diagramas de Feynman. Los vértices cúbicos y cuárticos están dados en la Figura 5.1. Las líneas derechas corresponden a los campos  $q$ , las onduladas, a  $\lambda$ , y las de puntos a ghosts. Los valores para los vértices de la Figura 5.1 son:

$$(a) = -\frac{1}{6} A_{nml} \xi^n \xi^m \xi^l, \tag{5.84}$$

$$(b) = -\frac{1}{2} B_{nm;l} \xi^n \dot{\xi}^m \xi^l, \quad (5.85)$$

$$(c) = -\omega_{a'} (B_{a'm;n} + D_{a';mn}) \lambda^{a'} \xi^n \dot{\xi}^m, \quad (5.86)$$

$$(d) = -\frac{1}{2} \omega_{a'} \omega_{b'} (B_{a'b';n} + D_{a';b'n} + D_{b';a'n}) \lambda^{a'} \lambda^{b'} \xi^n, \quad (5.87)$$

$$(e) = i\omega_{a'}^2 \sqrt{\frac{I_{b'}}{I_{a'}}} D_{b';a'n} \bar{\eta}_{a'} \xi^n \eta^{b'} + i\omega_{a'}^2 I_{a'}^{-\frac{1}{2}} D_{\bar{b};a'n} \bar{\eta}_{a'} \xi^n \eta^{\bar{b}}, \quad (5.88)$$

$$(f) = -i\omega_{c'} I_{c'}^{-\frac{1}{2}} C_{c'\bar{b}}^{a'} \dot{\eta}_{a'} \lambda^{c'} \eta^{\bar{b}}, \quad (5.89)$$

$$(g) = i\omega_{c'} I_{c'}^{-\frac{1}{2}} C_{c'b'}^{\bar{a}} \bar{\eta}_{\bar{a}} \lambda^{c'} \eta^{b'}, \quad (5.90)$$

$$(h) = -\frac{1}{24} E_{nm;lp} \xi^n \xi^m \xi^l \xi^p, \quad (5.91)$$

$$(i) = -\frac{1}{4} F_{nm;lp} \dot{\xi}^n \dot{\xi}^m \xi^l \xi^p, \quad (5.92)$$

$$(j) = -\omega_{a'} \left( \frac{1}{2} F_{la';nm} + B_{pl;n} D_{a';pm} + H_{a'l;nm} \right) \lambda^{a'} \xi^n \xi^m \xi^l, \quad (5.93)$$

$$(k) = -\omega_{a'} \omega_{b'} \left[ \left( \frac{1}{4} F_{a'b';nm} + B_{lb';n} + \frac{1}{2} D_{a';ln} \right) D_{b';lm} + H_{a';b';nm} \right] \lambda^{a'} \lambda^{b'} \xi^n \xi^m, \quad (5.94)$$

$$(l) = i\omega_{a'}^2 H_{b;a';nm} \bar{\eta}_{a'} \eta^b \xi^n \xi^m. \quad (5.95)$$

También hay un término de acoplamiento entre los multiplicadores de Lagrange  $\lambda^{a'}$  y los operadores colectivos  $I_{a'}$  (ver ecuación (5.49)). Cuando se integra sobre los campos  $q$ ,  $\lambda$  y los ghosts, los  $I_{a'}$  se comportan como fuentes (no conmutativas) para  $\lambda^{a'}$ . El vértice correspondiente se muestra en la Figura 5.2, y es igual a

$$-i \frac{\omega_{a'}}{\sqrt{I_{a'}}} \lambda^{a'} I_{a'}. \quad (5.96)$$

### 5.5.1 Correcciones a dos loops

Las correcciones a dos loops de la función de partición (excluyendo los términos dependientes de  $I_{a'}$ , que se calculan más abajo) están dadas por los diagramas de la Figura 5.3. Sus valores son

$$(a) = \frac{1}{8} [(\omega_{\bar{m}}^2 B_{\bar{m}\bar{m};\bar{n}} - A_{\bar{m}\bar{m}\bar{n}}) G_{\omega_{\bar{m}}}(0) + \omega_{\bar{n}}^2 D_{a';\bar{n}a'} G_{\omega_{a'}}(0)]^2 \times g(\omega_{\bar{n}}) \quad (5.97)$$

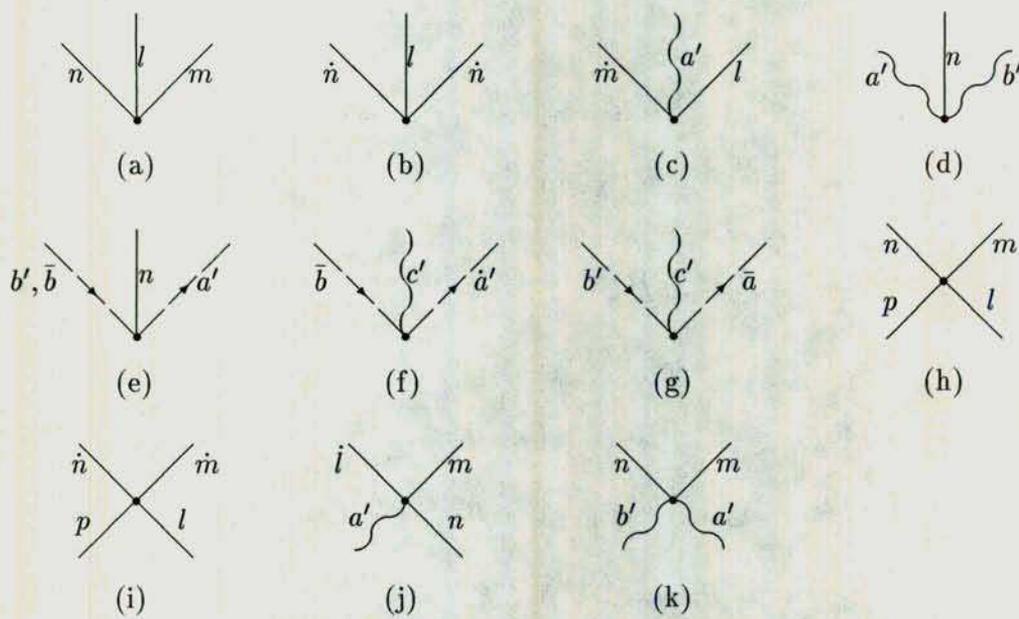


Figura 5.1: Vértices de tercer y cuarto orden de  $L_{BRST}^{(3)}$  y  $L_{BRST}^{(4)}$ .

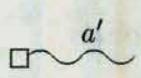


Figura 5.2: Vértice de acoplamiento intrínseco-colectivo.

$$\begin{aligned}
(b) &= \frac{\beta}{2} \omega_{a'}^2 (B_{a'm;n} + D_{a';mn})^2 G_{\omega_{a'}}(0) G_{\omega_n}(0) \\
&\quad - \frac{\beta}{2} \omega_m^2 B_{mp;n}^2 G_{\omega_m}(0) G_{\omega_n}(0) - \frac{\omega_{c'}^2}{I_{c'}} C_{c'a'} C_{c'b'} g(\omega_{c'}, \dot{\omega}_{a'}) \\
&\quad + \frac{1}{4} \omega_{a'}^2 \omega_{b'}^2 \left[ (B_{a'b';n} + D_{a';b'n} + D_{b';a'n})^2 - 2D_{a';b'n} D_{b';a'n} \right] \\
&\quad \times g(\omega_{a'}, \omega_{b'}, \omega_n) \\
&\quad - \frac{1}{2} \omega_{a'}^2 \omega_m^2 (B_{a'm;n} + D_{a';mn})^2 g(\omega_{a'}, \omega_m, \omega_n) \\
&\quad + \frac{1}{4} \left( \omega_m^2 \omega_p^2 B_{mp;n}^2 + \frac{1}{3} A_{nmp}^2 \right) g(\omega_n, \omega_m, \omega_p) \\
&\quad - \frac{1}{2} \omega_{a'}^2 (B_{a'm;n} + D_{a';mn}) (B_{a'n;m} + D_{a';nm}) \\
&\quad \times g(\omega_{a'}, \dot{\omega}_m, \dot{\omega}_n) \\
&\quad + \frac{1}{2} (\omega_n^2 B_{mn;p} B_{pn;m} + B_{mp;n} A_{mpn}) g(\omega_n, \dot{\omega}_m, \dot{\omega}_p) \quad (5.98) \\
(c) &= \frac{\beta}{4} \omega_{\bar{n}}^2 F_{\bar{n}\bar{n};ll} G_{\omega_n}(0) G_{\omega_l}(0) \\
&\quad - \beta \omega_{a'}^2 \left( B_{la';n} + \frac{1}{2} D_{a';ln} \right) D_{a';ln} G_{\omega_{a'}}(0) G_{\omega_n}(0) \\
&\quad - \frac{\beta}{8} E_{nnll} G_{\omega_n}(0) G_{\omega_l}(0) \quad (5.99)
\end{aligned}$$

donde las funciones  $g(\omega_{\bar{n}})$ ,  $g(\omega_{\bar{n}}, \omega_{\bar{l}}, \omega_{\bar{m}})$ ,  $g(\omega_{\bar{l}}, \dot{\omega}_{\bar{n}}, \dot{\omega}_{\bar{m}})$  y  $g(\omega_n, \dot{\omega}_m)$  están definidas en el apéndice ???. Las contribuciones proporcionales a  $\delta(0)$  que vienen de la exponenciación de  $\prod_{\tau} \sqrt{g}$  (ver ecuación (5.42)) y del propagador  $\langle\langle \hat{T} \dot{\xi}^n \dot{\xi}^n \rangle\rangle$  se cancelan exactamente.

Sumando todos los diagramas, y haciendo uso de las relaciones del apéndice ??? para simplificar el resultado, se obtiene

$$\begin{aligned}
Z^{(2)} &= \frac{1}{4} \left( \omega_{\bar{m}}^2 \omega_{\bar{l}}^2 B_{\bar{m}\bar{l};\bar{n}}^2 + \frac{1}{3} A_{\bar{n}\bar{m}\bar{l}}^2 \right) g(\omega_{\bar{n}}, \omega_{\bar{l}}, \omega_{\bar{m}}) \\
&\quad + \frac{1}{2} (B_{\bar{m}\bar{n};\bar{l}} A_{\bar{m}\bar{n}\bar{l}} + \omega_{\bar{l}} B_{\bar{m}\bar{l};\bar{n}} B_{\bar{n}\bar{p};\bar{m}}) g(\omega_{\bar{l}}, \dot{\omega}_{\bar{n}}, \dot{\omega}_{\bar{m}}) \\
&\quad + \frac{1}{8} \left[ (\omega_{\bar{m}}^2 B_{\bar{m}\bar{m};\bar{n}} - A_{\bar{m}\bar{m}\bar{n}}) G_{\omega_{\bar{m}}}(0) \right]^2 g(\omega_{\bar{n}}) \\
&\quad + \left( -\frac{1}{8} E_{\bar{n}\bar{n}\bar{m}\bar{m}} + \frac{1}{4} \omega_{\bar{n}}^2 F_{\bar{n}\bar{n};\bar{m}\bar{m}} - \frac{1}{2} \omega_{\bar{n}}^2 B_{\bar{n}\bar{l};\bar{m}}^2 \right) G_{\omega_{\bar{n}}}(0) G_{\omega_{\bar{m}}}(0)
\end{aligned}$$

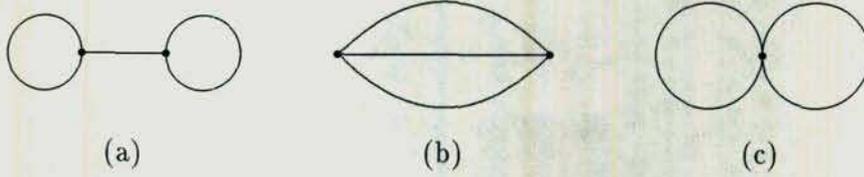


Figura 5.3: Diagramas de dos loops que intervienen en la corrección de la función de partición.



Figura 5.4: Energía colectiva a orden más bajo.

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\beta}{8} (2B_{a';\bar{m}\bar{n}} + D_{a';\bar{m}\bar{n}}) [D_{a';\bar{n}\bar{m}} + 4\beta\omega_{\bar{m}}^2 D_{a';\bar{m}\bar{n}} G_{\omega_{\bar{n}}}(0)G_{\omega_{\bar{m}}}(0)] \\
 & + \frac{\beta}{8} D_{b';a'c'} D_{a';b'c'} + \frac{\beta}{8} D_{a';b'\bar{m}} D_{b';a'\bar{m}} - \frac{\beta}{8} B_{a'b';\bar{m}} D_{a';\bar{m}b'} \\
 & - \frac{\beta}{8\mathcal{I}_{c'}} C_{c'\bar{b}}^{a'} C_{c'a'}^{\bar{b}} - \beta V_{\text{qu}}(\bar{q}), \tag{5.100}
 \end{aligned}$$

donde se ve que todas las frecuencias espurias han desaparecido, como debía suceder. Se puede verificar en casos simples que los resultados conocidos son reobtenidos, como por ejemplo para el kink  $\lambda\phi^4$  en 1 + 1 dimensiones [37].

### 5.5.2 El hamiltoniano colectivo

Las correcciones que involucran los momentos colectivos  $I_a$  pueden ser evaluadas en una manera similar a las de la subsección anterior. Sin embargo, como se hace en teoría de perturbaciones a niveles degenerados, el resultado se expresa mejor como un hamiltoniano efectivo actuando sobre las coordenadas colectivas. A orden árbol los diagramas involucrados son los de la Figura 5.4, que son de orden  $\mathcal{O}(\mathcal{I}^{-1})$

$$H_{\text{col.}} = \frac{1}{2\mathcal{I}_{a'}} I_{a'}^2 + \mathcal{O}(\mathcal{I}^{-2}). \tag{5.101}$$

Los diagramas de un loop son los de la Figura 5.5. Dan

$$(a) = \frac{\{I_{a'}, I_{b'}\}}{\sqrt{\mathcal{I}_{a'}\mathcal{I}_{b'}}} \left\{ \frac{1}{4} (B_{a'm;n} + D_{a';mn}) (B_{b'm;n} + D_{b';mn}) \right.$$

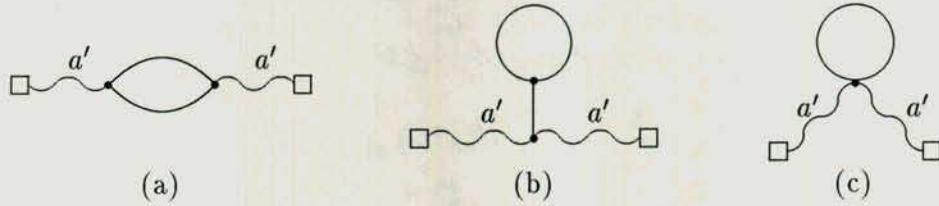


Figura 5.5: Primera corrección a la energía colectiva.

$$\begin{aligned}
 & \times [-\beta G_{\omega_n}(0) + \omega_m^2 g(\omega_n, \omega_m)] \\
 & + \frac{1}{4} (B_{a'm;n} + D_{a';mn}) (B_{b'n;m} + D_{b';nm}) g(\dot{\omega}_n, \dot{\omega}_m) \\
 & - \frac{1}{4} (B_{a'c';n} + D_{a';c'n} + D_{c';a'n}) (B_{b'c';n} + D_{b';c'n} + D_{c';b'n}) \\
 & \times \omega_{c'}^2 g(\omega_n, \omega_{c'}) \} \\
 & + \frac{\beta I_{a'} I_{b'}}{2 \mathcal{I}_{a'} \mathcal{I}_{b'}} C_{b'\bar{c}'} C_{a'\bar{d}'} g(\dot{\omega}_{d'}), \tag{5.102}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} & = \frac{\{I_{a'}, I_{b'}\}}{8 \sqrt{\mathcal{I}_{a'} \mathcal{I}_{b'}}} (B_{a'b';\bar{n}} + 2D_{a';b'\bar{n}}) [(\omega_{\bar{n}}^2 B_{\bar{m}\bar{n};\bar{n}} - A_{\bar{m}\bar{n}\bar{n}}) G_{\omega_m}(0) \\
 & + \omega_{\bar{n}}^2 D_{c';\bar{n}c'} G_{\omega_{c'}}(0)] g(\omega_{\bar{n}}^2), \tag{5.103}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} & = \beta \frac{\{I_{a'}, I_{b'}\}}{\sqrt{\mathcal{I}_{a'} \mathcal{I}_{b'}}} \left[ \frac{1}{8} F_{a'b';nn} + \frac{1}{2} B_{la';n} D_{b';ln} + \frac{1}{4} D_{a';ln} D_{b';ln} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{4} H_{a';b';nn} \right] G_{\omega_n}(0). \tag{5.104}
 \end{aligned}$$

Existe una contribución adicional del vértice (5.96) (Figura 5.2) a cuarto orden. Dicha contribución corresponde a diagramas desconexos y debería anularse salvo por el hecho que los generadores  $I_{a'}$  no conmutan. Usando teoría de perturbaciones a niveles degenerados se obtiene

$$\begin{aligned}
 & -\beta \frac{I_{a'} I_{a'} I_{b'} I_{b'}}{2 \mathcal{I}_{a'} \mathcal{I}_{b'}} G_{\omega_{a'}}(0) + \frac{I_{a'} I_{b'} I_{a'} I_{b'}}{8 \mathcal{I}_{a'} \mathcal{I}_{b'}} g(\dot{\omega}_{a'}, \dot{\omega}_{b'}) \\
 & - \frac{I_{a'} I_{b'} I_{b'} I_{a'}}{8 \mathcal{I}_{a'} \mathcal{I}_{b'}} [g(\dot{\omega}_{a'}, \dot{\omega}_{b'}) - 4\beta G_{\omega_a}(0)], \tag{5.105}
 \end{aligned}$$

que claramente se anularía si los  $I_a$  conmutaran. Como fue discutido en la sección 5.4, los  $I_a$  pueden identificarse con operadores intrínsecos, así que la

contribución proporcional a ellos debe incluirse en la corrección intrínseca a orden  $\mathcal{O}(T^{-2})$  (diagramas de tres loops). Tomando esto en cuenta, la contribución de (5.105) al hamiltoniano colectivo es

$$\beta \frac{I_{a'} I_{b'}}{2\mathcal{I}_{a'} \mathcal{I}_{b'}} C_{c'b'} \bar{d} C_{c'd}^{a'} G_{\omega_{c'}}(0). \quad (5.106)$$

La corrección de un loop al hamiltoniano colectivo efectivo (5.101) puede obtenerse como  $-1/\beta$  veces la suma de todos los diagramas más (5.106). Usando las identidades del apéndice se obtiene:

$$\begin{aligned} H_{\text{col.}}^{1\text{-loop}} = & -\frac{\{I_{a'}, I_{b'}\}}{\sqrt{\mathcal{I}_{a'} \mathcal{I}_{b'}}} G_{\omega_n}(0) \left[ \frac{1}{8} F_{a'b'; \bar{n}\bar{n}} + \frac{1}{4} H_{a'; b'; \bar{n}\bar{n}} \right. \\ & + \frac{1}{8\omega_{\bar{n}}^2} (B_{a'b'; \bar{n}} + 2D_{a'; b'; \bar{n}}) (\omega_{\bar{m}}^2 B_{\bar{m}\bar{m}; \bar{n}} - A_{\bar{m}\bar{m}\bar{n}}) \\ & - \frac{1}{4} B_{a'm; \bar{n}} B_{b'm; \bar{n}} - \frac{1}{4} D_{c'; a'; \bar{n}} D_{c'; b'; \bar{n}} \\ & \left. - \frac{1}{2} (B_{a'c'; \bar{n}} D_{c'; b'; \bar{n}} + D_{a'; c'; \bar{n}} D_{c'; b'; \bar{n}}) \right] \\ & - \frac{\{I_{a'}, I_{b'}\}}{\beta \sqrt{\mathcal{I}_{a'} \mathcal{I}_{b'}}} \left[ \frac{1}{4} \omega_{\bar{m}}^2 (B_{a'; \bar{m}; \bar{n}} + D_{a'; \bar{m}\bar{n}}) (B_{b'; \bar{m}; \bar{n}} + D_{b'; \bar{m}\bar{n}}) \right. \\ & \times g(\omega_{\bar{n}}, \omega_{\bar{m}}) \\ & \left. + \frac{1}{4} (B_{a'; \bar{m}; \bar{n}} + D_{a'; \bar{m}\bar{n}}) (B_{b'; \bar{n}; \bar{m}} + D_{b'; \bar{n}\bar{m}}) g(\dot{\omega}_{\bar{n}}, \dot{\omega}_{\bar{m}}) \right] \quad (5.107) \end{aligned}$$

Nuevamente se ve que es independiente de los parámetros arbitrarios  $\omega_{a'}$ , lo que da una útil prueba de nuestro cálculo. Tiene una dependencia en  $\beta$  porque corresponde al hamiltoniano colectivo asociado a todos los estados vibracionales. Por ejemplo, las energías colectivas asociadas al estado fundamental se obtienen del límite  $\beta \rightarrow \infty$ . Si se quieren las del nivel  $\omega_{\bar{n}}$  debe buscarse el término proporcional a  $e^{-\beta\omega_n}$ .

El resultado anterior da las correcciones a los parámetros de inercia  $\mathcal{I}_{a'}$ . Para obtener la corrección a orden  $\mathcal{O}(T^{-2})$  de los niveles de energía deben calcularse los diagramas de tres loops.

## Capítulo 6

# Tratamiento de coordenadas colectivas en gauges canónicos

En el capítulo 5 se estudió el tratamiento de coordenadas colectivas mediante el formalismo de anticampos. Las coordenadas colectivas fueron introducidas realizando una transformación, en general no lineal, de las coordenadas del sistema original. Es sabido [37] que dichas transformaciones pueden dar lugar a términos de orden  $\hbar^2$  en la acción. Con la elección de un gauge no canónico como el del capítulo 5 dichos términos adicionales no aparecen, pero si deben incluirse cuando se eligen gauges canónicos [44]. En este capítulo se describe el tratamiento de coordenadas colectivas con una elección de gauge canónico, y se demuestra que es posible obtener los mismos resultados que en el capítulo 5 si se incluyen los términos adicionales de orden  $\hbar^2$  en la acción.

Consideremos la acción (5.1)

$$S_0 = \int d\tau \left( \frac{1}{2} g_{st} \dot{q}^s \dot{q}^t + V(q) \right),$$

pero incluyamos las coordenadas colectivas  $\alpha^a$  dentro de las variables del sistema antes de realizar la transformación (5.23)

$$q^s \rightarrow f^s(\alpha(t), q).$$

En este caso las variables originales y las coordenadas colectivas están desacopladas, y existe una invariancia de gauge trivial dada por las transformaciones

$$\delta_\epsilon q^s = 0, \quad \delta_\epsilon \alpha^a = -\Theta_b^a \epsilon^b. \quad (6.1)$$

La correspondiente solución propia de la ecuación maestra es

$$S = S'_0 + \int d\tau \left( -\alpha_b^* \Theta_a^b \eta^a - \frac{1}{2} C_{ab}{}^c \eta_c^* \eta^a \eta^b + \bar{\eta}^{a*} b_a \right) - \hbar \delta(0) \int d\tau (\log \sqrt{g} + \log |\zeta|). \quad (6.2)$$

El último término determina la medida de integración para los campos en la integral de camino

$$\mathcal{D}[q, \alpha, \bar{\eta}, \eta, b] \sqrt{g} |\zeta|. \quad (6.3)$$

La transformación (5.23) puede dar lugar a la aparición de términos de orden  $\hbar^2$ . Para estudiar esto en el marco de la integral de camino es necesario discretizar el intervalo temporal en segmentos de longitud  $\epsilon$  tal que  $t_i = t_0 + \epsilon i$ , y conservar los términos de  $\mathcal{O}(\epsilon)$  en la acción [37], usando el hecho que debido a la naturaleza estocástica de la integral de camino las diferencias  $\Delta q$  (definida en (6.7)) son de  $\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon})$  [43]:

$$S_0 = \sum_i \frac{1}{2\epsilon} g_{st} \Delta q^s \Delta q^t + \frac{1}{48\epsilon} (g_{st,uv} - 2g^{pq} [stp][uvq]) \Delta q^s \Delta q^t \Delta q^u \Delta q^v + \epsilon V, \quad (6.4)$$

y la solución propia

$$S = S_0 + \sum_i \epsilon \left( -\alpha_{bi}^* \Theta_a^b(\alpha_i) \eta_i^a - \frac{1}{2} C_{ab}{}^c \eta_{ci}^* \eta_i^a \eta_i^b + \bar{\eta}_i^{a*} b_{ai} \right), \quad (6.5)$$

con la medida de los campos dada por

$$\prod_i dq_i d\alpha_i d\bar{\eta}_i d\eta_i db_i \sqrt{g(q_i)} |\zeta(\alpha_i)|. \quad (6.6)$$

Las variables en punto medio y la diferencia se definen

$$\phi_i \equiv \frac{1}{2} (\phi_{i+1} + \phi_i), \quad \Delta \phi \equiv \phi_{i+1} - \phi_i, \quad (6.7)$$

donde  $\phi$  representa a todos los campos y

$$\phi_i \equiv \phi(t_i), \quad [stu] \equiv \frac{1}{2} (g_{su,t} + g_{tu,s} - g_{st,u}). \quad (6.8)$$

Las funciones de los campos de la acción  $S_0$  están evaluadas en el punto medio ya que esta elección coincide con el orden de Weyl para el hamiltoniano [37].

Los términos proporcionales a los anticampos en (6.5) están evaluados en el tiempo  $t_i$  pues corresponden a las transformaciones de gauge de los campos

$$\delta_\epsilon q_i^s = 0, \quad \delta_\epsilon \alpha_i^a = -\Theta_b^a(\alpha_i) \epsilon_i^b. \quad (6.9)$$

Realizamos ahora la transformación de las variables

$$q_i^s \rightarrow f^s(\alpha_i, q_i), \quad \alpha_i \rightarrow \alpha_i. \quad (6.10)$$

Se obtiene la acción en término de las nuevas variables

$$\begin{aligned} S_0 = & \sum_i \frac{1}{2\epsilon} g_{st} f_{,\mu}^s f_{,\nu}^t \Delta q^\mu \Delta q^\nu + \frac{1}{48\epsilon} [2g_{st} f_{,\mu}^s f_{,\nu\sigma\tau}^t + 3g_{st,u} f_{,\mu}^s f_{,\nu}^t f_{,\sigma\tau}^u \\ & + (g_{st,uv} - 2g^{pq}[stp][uvq]) f_{,\mu}^s f_{,\nu}^t f_{,\sigma}^u f_{,\tau}^v] \Delta q^\mu \Delta q^\nu \Delta q^\sigma \Delta q^\tau \\ & + \epsilon V(q_i), \end{aligned} \quad (6.11)$$

donde la métrica  $g_{st}$  y sus derivadas están evaluadas en  $f(\alpha_i, q_i)$ , y  $q^\mu$  denota  $q^s$  y  $\alpha^a$ . Esta acción es invariante ante las transformaciones

$$\delta_\epsilon q_i^s = \delta_\alpha q_i^t \epsilon_i^a, \quad \delta_\epsilon \alpha_i^a = -\Theta_b^a(\alpha_i) \epsilon_i^b, \quad (6.12)$$

siendo la correspondiente acción de los anticampos

$$S_{ac} = \sum_i \epsilon \left( [q_{si}^* \delta_\alpha q_i^s - \alpha_{bi}^* \Theta_a^b(\alpha_i)] \eta_i^a - \frac{1}{2} C_{ab}^c \eta_{ci}^* \eta_i^a \eta_i^b + \bar{\eta}_i^{a*} b_{ai} \right). \quad (6.13)$$

## 6.1 Gauge de Coulomb

Al cuantificar alrededor de una de las soluciones clásicas  $\bar{q}$ , la dinámica de baja energía corresponde a un movimiento libre en la variedad de mínimos, que en nuestro caso es el espacio simétrico  $G/H$ , acoplado a las oscilaciones de frecuencia finita en las direcciones normales. Teniendo esto en cuenta es razonable considerar una elección del fijado de gauge que preserve solamente las variables físicas del problema, es decir, las fluctuaciones de frecuencia finita y las coordenadas sobre  $G/H$ . En esta sección se estudia este gauge que designamos, por similitud con el electromagnetismo, "gauge de Coulomb".

Es conveniente utilizar la expansión en modos normales de la sección 5.5

$$q^s = \bar{q}^s + \psi_n^s \xi^n. \quad (6.14)$$

Elegimos el fermión de fijado de gauge

$$\psi = \sum_i i\epsilon \left( \bar{\eta}_{a'i} \xi_i^{a'} + \bar{\eta}_{\bar{a}i} \alpha_i^{\bar{a}} \right), \quad (6.15)$$

del que se obtienen los anticampos en función de los campos

$$q_{si}^* = i\bar{\eta}_{a'i}\bar{g}_{st}\psi_{a'}^t, \quad (6.16)$$

$$\alpha_{\bar{a}i}^* = i\bar{\eta}_{\bar{a}i}, \quad (6.17)$$

$$\alpha_{a'i}^* = 0, \quad (6.18)$$

$$\bar{\eta}_i^{\bar{a}*} = i\alpha_i^{\bar{a}}, \quad (6.19)$$

$$\bar{\eta}_i^{a'*} = i\xi_i^{a'}. \quad (6.20)$$

En este gauge la acción de los anticampos es<sup>1</sup>

$$S_{ac\psi} = \sum_i i\epsilon \left( [\bar{\eta}_{a'i}\bar{g}_{st}\delta_b q_i^s \psi_{a'}^t - \bar{\eta}_{\bar{a}i}\Theta_b^a(\alpha_i)] \eta_i^b + b_{a'i}\xi_i^{a'} + b_{\bar{a}i}\alpha_i^{\bar{a}} \right). \quad (6.21)$$

Al integrar los campos auxiliares  $b$  los últimos dos términos de la acción anterior dan funciones delta en la integral de camino que imponen las condiciones de gauge

$$\xi_i^{a'} = 0, \quad \alpha_i^{\bar{a}} = 0. \quad (6.22)$$

Con esta elección de gauge la medida de los campos es

$$\prod_i d\xi_i^{\bar{n}} d\alpha_i^{a'} d\bar{\eta}_i d\eta_i \sqrt{g(\bar{q} + \psi_{\bar{n}}\xi_i^{\bar{n}})} \det \zeta_{a'}^{b'}(\alpha_i') \det \psi_n^s. \quad (6.23)$$

Al igual que en el capítulo anterior se puede calcular perturbativamente la función de partición. Para ello expandimos la acción en potencias de las fluctuaciones  $\xi^{\bar{n}}$ . Para simplificar el cálculo pasamos a una notación continua mediante

$$\xi_i \rightarrow \xi \quad (6.24)$$

$$\alpha_i \rightarrow \alpha, \quad (6.25)$$

$$\Delta\xi \rightarrow \epsilon\dot{\xi}, \quad (6.26)$$

$$\Delta\alpha \rightarrow \epsilon\dot{\alpha}, \quad (6.27)$$

$$\eta_i \rightarrow \eta, \quad (6.28)$$

$$\bar{\eta}_i \rightarrow \bar{\eta}, \quad (6.29)$$

reteniendo los términos proporcionales a  $\epsilon$  y  $\epsilon^2$  en la acción:

$$\begin{aligned} S_0 = & \int_{\tau} \frac{1}{2} g_{st} f_{,\mu}^s f_{,\nu}^t \dot{Q}^\mu \dot{Q}^\nu + V(\bar{q} + \psi_{\bar{n}}\xi^{\bar{n}}) \\ & + \frac{\epsilon^2}{48} [2g_{st} f_{,\mu}^s f_{,\nu\sigma\tau}^t + 3g_{st,u} f_{,\mu}^s f_{,\nu}^t f_{,\sigma\tau}^u \\ & + (g_{st,uv} - 2g^{pq}[stp][uvq]) f_{,\mu}^s f_{,\nu}^t f_{,\sigma}^u f_{,\tau}^v] \dot{Q}^\mu \dot{Q}^\nu \dot{Q}^\sigma \dot{Q}^\tau, \quad (6.30) \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Usamos la parametrización para los elementos de  $G$  descripta en el apéndice B.

con la métrica  $g_{st}$  y sus derivadas evaluadas en  $f(\alpha^{a'}, \bar{q} + \psi_{\bar{n}} \xi^{\bar{n}})$ , y donde  $Q^\mu$  denota  $\xi^{\bar{n}}$  y  $\alpha^{a'}$ . El límite  $\epsilon \rightarrow 0$  debe tomarse después de calcular los diagramas. Esto se debe a que los factores  $\epsilon$  que vienen de los vértices de la acción pueden cancelarse con  $\delta(0) \equiv \frac{1}{\epsilon}$  provenientes de los propagadores (ver ecuaciones (6.33)-(6.38)).

Consideremos primero las contribuciones de los términos de la acción independientes de  $\epsilon$ . La acción cuadrática es

$$S_\psi^{(2)} = \int_\tau \frac{1}{2} \left( \dot{\xi}^{\bar{n}2} + \omega_{\bar{n}}^2 \xi^{\bar{n}2} \right) + \frac{1}{2} \tilde{g}_{a'b'} \dot{\alpha}^{a'} \dot{\alpha}^{b'} + i\sqrt{\mathcal{I}_a'} \bar{\eta}_{a'} \eta^{a'} - i\bar{\eta}_{\bar{a}} \eta^{\bar{a}} + i\bar{\eta}_{\bar{a}} \zeta_{b'}^{\bar{a}} \Theta_{c'}^{b'} \eta^{c'}. \quad (6.31)$$

El segundo término es la acción de las coordenadas colectivas, y corresponde al movimiento libre en el espacio cociente  $G/H$ , con métrica

$$\tilde{g}_{a'b'} = \mathcal{I}_{c'} \zeta_{a'}^{c'} \zeta_{b'}^{c'}. \quad (6.32)$$

Los propagadores libres que se obtienen de la acción cuadrática son

$$\langle\langle \hat{T} \xi^{\bar{n}}(\tau) \xi^{\bar{m}}(\tau') \rangle\rangle = \delta^{\bar{n}\bar{m}} G_{\omega_{\bar{n}}}(\tau - \tau'), \quad (6.33)$$

$$\langle\langle \hat{T} \dot{\xi}^{\bar{n}}(\tau) \dot{\xi}^{\bar{m}}(\tau') \rangle\rangle = \delta^{\bar{n}\bar{m}} \delta(\tau - \tau') - \delta^{\bar{n}\bar{m}} \omega_{\bar{n}}^2 G_{\omega_{\bar{n}}}(\tau - \tau'), \quad (6.34)$$

$$\langle\langle \hat{T} \dot{\alpha}^{a'}(\tau) \dot{\alpha}^{b'}(\tau') \rangle\rangle = \tilde{g}^{a'b'} \delta(\tau - \tau'), \quad (6.35)$$

$$\langle\langle \hat{T} \bar{\eta}_{a'}(\tau) \eta^{b'}(\tau') \rangle\rangle = \frac{i\delta_{a'}^{b'}}{\sqrt{\mathcal{I}_a'}} \delta(\tau - \tau'), \quad (6.36)$$

$$\langle\langle \hat{T} \bar{\eta}_{\bar{a}}(\tau) \eta^{\bar{b}}(\tau') \rangle\rangle = -i\delta_{\bar{a}}^{\bar{b}} \delta(\tau - \tau'), \quad (6.37)$$

$$\langle\langle \hat{T} \bar{\eta}_{a'}(\tau) \eta^{\bar{b}}(\tau') \rangle\rangle = \frac{i\delta_{a'}^{b'}}{\sqrt{\mathcal{I}_a'}} \Theta_{a'}^{c'} \zeta_{c'}^{\bar{b}} \delta(\tau - \tau'). \quad (6.38)$$

De los términos de orden superior en la acción se obtienen los vértices cúbicos y cuárticos de la Figura 6.1. Las líneas llenas corresponden a los campos  $\xi$ , las onduladas a las coordenadas colectivas, y las de puntos a los ghosts. Los valores de los vértices de la Figura 6.1 son:

$$(a) = -\frac{1}{6} A_{\bar{n}\bar{m}\bar{l}} \xi^{\bar{n}} \xi^{\bar{m}} \xi^{\bar{l}}, \quad (6.39)$$

$$(b) = -\frac{1}{2} B_{\bar{n}\bar{m};\bar{l}} \dot{\xi}^{\bar{n}} \dot{\xi}^{\bar{m}} \xi^{\bar{l}}, \quad (6.40)$$

$$(c) = -\left[ \sqrt{\mathcal{I}_{b'}} \zeta_{a'}^{b'} (B_{b';\bar{n};\bar{m}} + D_{b';\bar{n}\bar{m}}) + \zeta_{a'}^{\bar{b}} D_{\bar{b};\bar{n}\bar{m}} \right] \dot{\alpha}^{a'} \xi^{\bar{m}} \xi^{\bar{n}}, \quad (6.41)$$

$$(d) = -\frac{1}{2} \sqrt{\mathcal{I}_{c'} \mathcal{I}_{d'}} \zeta_{a'}^{c'} \zeta_{b'}^{d'} (B_{c'd';\bar{n}} + D_{c';d'\bar{n}} + D_{d';c'\bar{n}}) \dot{\alpha}^{a'} \dot{\alpha}^{b'} \xi^{\bar{n}}, \quad (6.42)$$

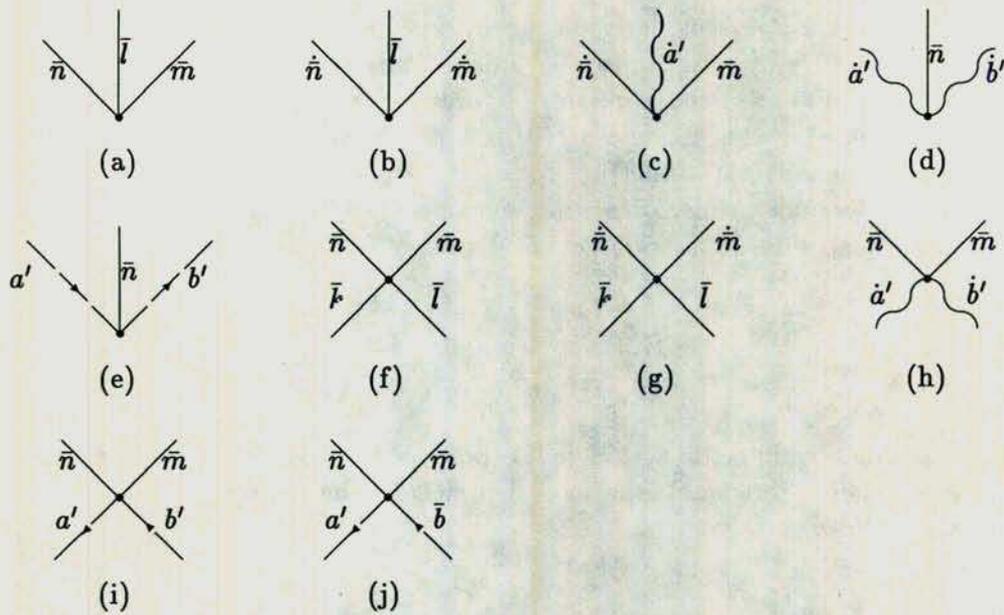


Figura 6.1: Vértices de tercer y cuarto orden.

$$(e) = -i\sqrt{\mathcal{I}_{b'}} D_{b';a'\bar{n}} \bar{\eta}_{a'} \xi^{\bar{n}} \eta^{b'}, \quad (6.43)$$

$$(f) = -\frac{1}{24} E_{\bar{n}\bar{m}\bar{l}\bar{k}} \xi^{\bar{n}} \xi^{\bar{m}} \xi^{\bar{l}} \xi^{\bar{k}}, \quad (6.44)$$

$$(g) = -\frac{1}{4} F_{\bar{n}\bar{m};\bar{l}\bar{k}} \xi^{\bar{n}} \xi^{\bar{m}} \xi^{\bar{l}} \xi^{\bar{k}}, \quad (6.45)$$

$$(h) = -\sqrt{\mathcal{I}_{c'}} \zeta_{a'}^c \left[ \sqrt{\mathcal{I}_{d'}} \zeta_{b'}^d \left( \frac{1}{4} F_{c'd';\bar{n}\bar{m}} + B_{\bar{l}c';\bar{n}} D_{d';\bar{l}\bar{m}} + \frac{1}{2} D_{d';\bar{l}\bar{m}} D_{c';\bar{l}\bar{n}} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} H_{d';c';\bar{n}\bar{m}} \right) + \frac{1}{2} \zeta_{b'}^{\bar{d}} H_{\bar{d};c';\bar{n}\bar{m}} \right] \alpha^{a'} \alpha^{b'} \xi^{\bar{n}} \xi^{\bar{m}}, \quad (6.46)$$

$$(i) = -i\sqrt{\mathcal{I}_{b'}} H_{b';a';\bar{n}\bar{m}} \bar{\eta}_{a'} \eta^{b'} \xi^{\bar{n}} \xi^{\bar{m}}, \quad (6.47)$$

$$(j) = -i H_{\bar{b};a';\bar{n}\bar{m}} \bar{\eta}_{a'} \eta^{\bar{b}} \xi^{\bar{n}} \xi^{\bar{m}}. \quad (6.48)$$

## 6.2 Correcciones a dos loops

Las correcciones a dos loops están dadas por diagramas cuya topología es la de los de la Figura 5.3. Sus valores son:

$$(a) = \frac{1}{8} (\omega_{\bar{m}}^2 B_{\bar{m}\bar{m};\bar{n}} - A_{\bar{m}\bar{m}\bar{n}}) G_{\omega_m}(0) g(\omega_{\bar{n}}) \quad (6.49)$$

$$(b) = \frac{1}{4} \left( \omega_{\bar{n}}^2 \omega_{\bar{m}}^2 B_{\bar{n}\bar{m};\bar{l}}^2 + \frac{1}{3} A_{\bar{n}\bar{m}\bar{l}}^2 \right) g(\omega_{\bar{n}}, \omega_{\bar{m}}, \omega_{\bar{l}}) \\ + \frac{1}{2} B_{\bar{n}\bar{m};\bar{l}} (\omega_{\bar{n}}^2 B_{\bar{n}\bar{l};\bar{m}} + A_{\bar{n}\bar{m}\bar{l}}) g(\omega_{\bar{n}}, \dot{\omega}_{\bar{m}}, \dot{\omega}_{\bar{l}}) \\ - \frac{\beta}{2} \omega_{\bar{n}}^2 (B_{a'\bar{n};\bar{m}} + D_{a';\bar{n}\bar{m}})^2 G_{\omega_n}(0) G_{\omega_m}(0) \\ - \beta \omega_{\bar{n}}^2 \bar{g}^{a'b'} \zeta_{a'}^c \zeta_{b'}^d \sqrt{I_{c'}} (B_{c'\bar{n};\bar{m}} + D_{c';\bar{n}\bar{m}}) D_{\bar{d};\bar{n}\bar{m}} G_{\omega_n}(0) G_{\omega_m}(0) \\ - \frac{\beta}{2} \omega_{\bar{n}}^2 \bar{g}^{a'b'} \zeta_{a'}^{\bar{c}} \zeta_{b'}^{\bar{d}} D_{\bar{c};\bar{n}\bar{m}} D_{\bar{d};\bar{n}\bar{m}} G_{\omega_n}(0) G_{\omega_m}(0) \quad (6.50)$$

$$(c) = -\frac{\beta}{8} (E_{\bar{n}\bar{n}\bar{m}\bar{m}} - 2\omega_{\bar{n}}^2 F_{\bar{n}\bar{n};\bar{m}\bar{m}}) G_{\omega_n}(0) G_{\omega_m}(0) \quad (6.51)$$

La suma de los diagramas (a), (b) y (c) no coincide con el resultado (5.100) del capítulo anterior. Faltan términos que vienen de la acción de  $\mathcal{O}(\epsilon)$  y  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ , y sobran los dos últimos términos de los diagramas (b), que dependen de las coordenadas colectivas. Los primeros son considerados en lo que sigue, mientras que los segundos serán tomados en cuenta en la sección siguiente cuando se calcule el hamiltoniano colectivo.

Para calcular la contribución de la acción de  $\mathcal{O}(\epsilon)$  y  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$  es conveniente notar que la elección del fijado de gauge (6.15) es equivalente a hacer un cambio de coordenadas en la acción original (6.4). Esta observación se puede comprobar comparando las integrales de camino.

La medida de integración en la integral de camino para la acción (6.4) en término de las variables originales  $q^s$  es

$$\prod_i dq_i \sqrt{g(q_i)}. \quad (6.52)$$

Si se realiza el cambio de variables

$$q_i^s = f^s \left( \alpha_i^{a'}, \bar{q}^t + \psi_{\bar{n}}^t \zeta_i^{\bar{n}} \right), \quad (6.53)$$

la medida de integración se convierte en

$$\prod_i d\zeta_i^{\bar{n}} d\alpha_i^{a'} \sqrt{\det g_{\mu\nu}(Q_i)}, \quad (6.54)$$

con la nueva métrica definida por

$$g_{\mu\nu}(Q) = g_{st}(f) f_{\mu}^s f_{\nu}^t, \quad (6.55)$$

donde  $Q^{\mu}$  representa a  $\xi^{\bar{n}}$  y  $\alpha^{a'}$ . La acción en función de las nuevas variables es (en la notación continua)

$$\begin{aligned} S_0 &= \int_{\tau} \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{Q}^{\mu} \dot{Q}^{\nu} + V(\bar{q} + \psi_{\bar{n}} \xi^{\bar{n}}) \\ &\quad + \frac{\epsilon^2}{48} [2g_{st} f_{,\mu}^s f_{,\nu\sigma\tau}^t + 3g_{st,u} f_{,\mu}^s f_{,\nu}^t f_{,\sigma\tau}^u \\ &\quad + (g_{st,uv} - 2g^{pq}[stp][uvq]) f_{,\mu}^s f_{,\nu}^t f_{,\sigma}^u f_{,\tau}^v] \dot{Q}^{\mu} \dot{Q}^{\nu} \dot{Q}^{\sigma} \dot{Q}^{\tau} \\ &= \int_{\tau} \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{Q}^{\mu} \dot{Q}^{\nu} + V(\bar{q} + \psi_{\bar{n}} \xi^{\bar{n}}) \\ &\quad + \frac{\epsilon^2}{48} (g_{\mu\nu,\sigma\tau} - 2g^{\lambda\kappa}[\mu\nu\lambda][\sigma\tau\kappa]) \dot{Q}^{\mu} \dot{Q}^{\nu} \dot{Q}^{\sigma} \dot{Q}^{\tau}. \end{aligned} \quad (6.56)$$

La métrica (6.55) vale

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} g_{\bar{n}\bar{m}} & g_{\bar{n}a'} \\ g_{a'\bar{n}} & g_{a'b'} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g_{st} \psi_{\bar{n}}^s \psi_{\bar{m}}^t & g_{st} \psi_{\bar{n}}^s \zeta_{a'}^b \delta_b q^t \\ g_{st} \psi_{\bar{n}}^s \zeta_a^b \delta_b q^t & g_{st} \zeta_a^c \zeta_b^d u_c^t \delta_d q^t \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.57)$$

con  $g_{st}$  y  $u_a^s$  evaluados en  $\bar{q}^s + \psi_{\bar{n}}^s \xi^{\bar{n}}$ , y  $\zeta_a^b$  en  $\alpha^{a'}$ . La métrica puede reescribirse como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \delta_{\bar{n}\bar{m}} & 0 \\ M_{a'\bar{n}} & N_{a'b'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{st} \psi_{\bar{n}}^s \psi_{\bar{m}}^t & g_{st} \psi_{\bar{n}}^s \psi_{d'}^t \\ g_{st} \psi_{\bar{n}}^s \psi_{c'}^t & g_{st} \psi_{c'}^s \psi_{d'}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{\bar{m}\bar{l}} & (M^t)_{d'\bar{l}} \\ 0 & (N^t)_{d'e'} \end{pmatrix}, \quad (6.58)$$

con

$$M_{a'\bar{n}} = \zeta_a^b \delta_b q^s \bar{g}_{st} \psi_{\bar{n}}^t, \quad N_{a'b'} = \zeta_a^c \delta_c q^s \bar{g}_{st} \psi_{b'}^t. \quad (6.59)$$

A partir de (6.58) se obtiene que

$$\prod_i d\xi_i^{\bar{n}} d\alpha_i^{a'} \sqrt{g(\bar{q} + \psi_{\bar{n}} \xi^{\bar{n}})} \det \psi_{\bar{n}}^s \det N_{a'b'}(Q_i). \quad (6.60)$$

La acción (6.30) en el gauge (6.15) coincide con (6.56). Para demostrar que la elección del fijado de gauge (6.15) equivale al cambio de variables (6.53) falta comparar las medidas de integración.

La medida de las fluctuaciones, coordenadas colectivas y ghosts en el gauge (6.15) está dada por (6.23). Mediante la redefinición  $\eta^a \rightarrow \zeta_b^a \eta^b$  la acción de los ghosts (6.21) se reescribe

$$S_{\text{gh}} = \sum_i i\epsilon \left[ \bar{\eta}_{a'i} \bar{g}_{st} u_b^s (\bar{q}^s + \psi_{\bar{n}}^s \xi_i^{\bar{n}}) \psi_{a'}^t \eta_i^b - \bar{\eta}_{ai} \eta_i^a \right]. \quad (6.61)$$

Al integrar los ghosts se obtiene (6.60).

Para pasar a la notación continua es necesario evaluar las funciones de  $q$  y  $\alpha$  en el punto medio. Esto da una contribución adicional de  $\mathcal{O}(\epsilon)$  a la acción (6.56) proveniente del jacobiano de (6.54) [37]

$$\int_{\tau} -\frac{\epsilon}{16} (g^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\sigma\tau} + g^{\mu\nu}{}_{,\sigma} g_{\mu\nu,\tau}) \dot{Q}^{\sigma} \dot{Q}^{\tau}. \quad (6.62)$$

Los términos proporcionales a  $\epsilon^2$  en la ecuación (6.56) y a  $\epsilon$  en la (6.62) dan la contribución extra a  $\mathcal{O}(\hbar^2)$ . Para la contribución a dos loops a la función de partición las funciones en (6.56) y (6.62) están evaluadas en el mínimo, es decir, con las fluctuaciones  $\xi^{\bar{n}} = 0$ . El término proporcional a  $\epsilon^2$  en (6.56) proporciona un vértice cuártico, con el cual se puede formar un diagrama en el cual  $\epsilon^2$  se anula con las partes singulares de los propagadores. Esta contribución vale

$$\begin{aligned} & -\frac{\beta}{48} \left( \bar{g}_{\mu\nu,\sigma\tau} - 2\bar{g}^{\lambda\kappa} [\mu\nu\lambda][\sigma\tau\kappa] \right) \\ & \quad \times (\bar{g}^{\mu\nu} \bar{g}^{\sigma\tau} + \bar{g}^{\mu\sigma} \bar{g}^{\nu\tau} + \bar{g}^{\mu\tau} \bar{g}^{\nu\sigma}) \\ & = -\frac{\beta}{8} (\bar{g}^{\mu\nu} \bar{\Gamma}_{\mu\sigma,\nu}^{\sigma} + \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\Gamma}_{\mu\sigma}^{\tau} \bar{\Gamma}_{\nu\tau}^{\sigma} + \bar{R}), \end{aligned} \quad (6.63)$$

donde  $\Gamma_{\mu\sigma}^{\tau}$  son los símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{\mu\sigma}^{\tau} \equiv \frac{1}{2} g^{\sigma\tau} (g_{\mu\tau,\nu} + g_{\nu\tau,\mu} - g_{\mu\nu,\tau}), \quad (6.64)$$

y  $R$  es el escalar de curvatura del espacio de configuración  $\mathcal{C}$ . De (6.62) se obtiene un vértice cuadrático y un diagrama en el cual  $\epsilon$  se anula

$$\frac{\beta}{16} (\bar{g}^{\mu\nu} \bar{g}_{\mu\nu,\sigma\tau} + \bar{g}^{\mu\nu}{}_{,\sigma} \bar{g}_{\mu\nu,\tau}) \bar{g}^{\sigma\tau} = \frac{\beta}{8} \bar{g}^{\mu\nu} \bar{\Gamma}_{\mu\sigma,\nu}^{\sigma}. \quad (6.65)$$

Por lo tanto la contribución a dos loops es

$$-\frac{\beta}{8} (\bar{g}^{\mu\nu} \bar{\Gamma}_{\mu\sigma}^{\tau} \bar{\Gamma}_{\nu\tau}^{\sigma} + \bar{R}). \quad (6.66)$$

En el resultado (6.66) se pueden separar los términos que dependen de las coordenadas colectivas, y usando las expresiones para los símbolos de Christoffel del apéndice C se obtiene

$$\begin{aligned}
-\frac{\beta}{8} (\bar{g}^{\mu\nu} \bar{\Gamma}_{\mu\sigma}^{\tau} \bar{\Gamma}_{\nu\tau}^{\sigma} + \bar{R}) &= -\beta V_{\text{col}}(\alpha') - \beta V_{\text{qu}}(\bar{q}) \\
-\frac{\beta}{8} (2B_{a'\bar{m}\bar{n}} + D_{a';\bar{m}\bar{n}}) D_{a';\bar{n}\bar{m}} + \frac{\beta}{8} D_{b';a'c'} D_{a';b'c'} \\
+\frac{\beta}{8} D_{a';b'\bar{m}} D_{b';a'\bar{m}} - \frac{\beta}{8} B_{a'b';\bar{m}} D_{a';\bar{m}b'} - \frac{\beta}{8\mathcal{I}_{c'}} C_{c'\bar{b}}^{a'} C_{c'a'}^{\bar{b}}. & \quad (6.67)
\end{aligned}$$

$V_{\text{col}}$  es la contribución de los términos de  $\mathcal{O}(\epsilon)$  y  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$  al hamiltoniano colectivo

$$\begin{aligned}
V_{\text{col}}(\alpha') &= V_{G/H}(\alpha') + \\
&\quad -\frac{1}{4} \bar{g}^{a'b'} \zeta_{a'}^{c'} \zeta_{b'}^{\bar{d}} \sqrt{\mathcal{I}_{c'}} (B_{c'\bar{n};\bar{m}} + D_{c';\bar{n}\bar{m}}) D_{\bar{d};\bar{n}\bar{m}} \\
&\quad -\frac{1}{8} \bar{g}^{a'b'} \zeta_{a'}^{\bar{c}} \zeta_{b'}^{\bar{d}} D_{\bar{c};\bar{n}\bar{m}} D_{\bar{d};\bar{n}\bar{m}}, & \quad (6.68)
\end{aligned}$$

donde  $V_{G/H}$  es el potencial cuántico (5.58) para el movimiento en el espacio cociente  $G/H$

$$V_{G/H} = \frac{1}{8} \left( \bar{g}^{a'b'} \bar{\Gamma}_{a'c'}^{d'} \bar{\Gamma}_{b'd'}^{c'} + R_{G/H} \right), \quad (6.69)$$

siendo  $R_{G/H}$  el escalar de curvatura del espacio cociente [49]

$$R_{G/H} = -\frac{1}{\mathcal{I}_{c'}} C_{a'c'}^{\bar{b}} C_{\bar{b}c'}^{a'}. \quad (6.70)$$

El resto de los términos de (6.67) son los diagramas que faltaban en (6.49)-(6.51) para obtener la función de partición intrínseca a dos loops (5.100).

### 6.3 El hamiltoniano colectivo

El lagrangiano a más bajo orden para las coordenadas colectivas se obtiene de la acción cuadrática (6.31)

$$L_{\text{col}}^{(0)} = \frac{1}{2} \bar{g}_{a'b'} \dot{\alpha}^{a'} \dot{\alpha}^{b'}, \quad (6.71)$$

El correspondiente hamiltoniano es

$$H_{\text{coll}}^{(0)} = \frac{1}{2} \left[ \pi_{a'} \bar{g}^{a'b'} \pi_{b'} \right]_{\text{W}} = \frac{1}{2\mathcal{I}_{c'}} \left[ \pi_{a'} \Theta_{c'}^{a'} \Theta_{c'}^{b'} \pi_{b'} \right]_{\text{W}}, \quad (6.72)$$

donde  $[\dots]_W$  indica orden de Weyl. A este hamiltoniano deben agregársele las contribuciones del mismo orden que vienen de los diagramas calculados en la sección 6.2 que dependen de las coordenadas colectivas

$$\begin{aligned} & \dot{\alpha}^{a'} \zeta_{a'}^{\bar{b}} D_{\bar{b}; \bar{n}\bar{m}} \langle \langle \xi^{\bar{n}} \xi^{\bar{m}} \rangle \rangle + V_{G/H} \\ & + \left( \frac{1}{4} \tilde{g}^{a'b'} \zeta_{a'}^{c'} \zeta_{b'}^{\bar{d}} \sqrt{\mathcal{I}_{c'}} (B_{c'; \bar{n}; \bar{m}} + D_{c'; \bar{n}\bar{m}}) D_{\bar{d}; \bar{n}\bar{m}} \right. \\ & \left. + \frac{1}{8} \tilde{g}^{a'b'} \zeta_{a'}^{\bar{e}} \zeta_{b'}^{\bar{d}} D_{\bar{e}; \bar{n}\bar{m}} D_{\bar{d}; \bar{n}\bar{m}} \right) [1 + 4\omega_{\bar{n}}^2 G_{\omega_{\bar{n}}}(0) G_{\omega_{\bar{m}}}(0)], \end{aligned} \quad (6.73)$$

El factor entre corchetes puede reescribirse

$$\begin{aligned} 1 + 4\omega_{\bar{n}}^2 G_{\omega_{\bar{n}}}(0) G_{\omega_{\bar{m}}}(0) &= 1 + 4\delta^{\bar{n}\bar{l}} \delta_{\bar{m}\bar{k}} \langle \langle [P_{\bar{n}} \xi^{\bar{m}} P_{\bar{l}} \xi^{\bar{k}}]_W \rangle \rangle \\ &= 4\delta^{\bar{n}\bar{l}} \delta_{\bar{m}\bar{k}} \langle \langle P_{\bar{n}} \xi^{\bar{m}} P_{\bar{l}} \xi^{\bar{k}} \rangle \rangle, \end{aligned} \quad (6.74)$$

donde los  $P_{\bar{n}}$  son los momentos conjugados a las fluctuaciones  $\xi^{\bar{n}}$ . Como las contribuciones dadas por la parte singular del propagador (6.35) ya fueron incluidas en los diagramas (6.49)-(6.51) se puede hacer el reemplazo  $\dot{\alpha}^{a'} \rightarrow -i\tilde{g}^{a'b'} \pi_{b'}$ . Además, se tienen que  $\langle \langle \xi^{\bar{n}} \xi^{\bar{m}} \rangle \rangle = -i \langle \langle P_{\bar{n}} \xi^{\bar{m}} \rangle \rangle$ , y haciendo uso de las relaciones del apéndice (C.20)-(C.21), la contribución (6.73) puede reescribirse

$$\begin{aligned} H'_{\text{col}} &= - \left[ \tilde{g}^{a'b'} \pi_{a'} \zeta_{b'}^{\bar{e}} \right]_W \langle \langle j_{\bar{e}}^{(2r)} \rangle \rangle + V_{G/H} \\ &+ \tilde{g}^{a'b'} \zeta_{a'}^{c'} \zeta_{b'}^{\bar{d}} \langle \langle j_{c'}^{(2r)} j_{\bar{d}}^{(2r)} \rangle \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \tilde{g}^{a'b'} \zeta_{a'}^{\bar{e}} \zeta_{b'}^{\bar{d}} \langle \langle j_{\bar{e}}^{(2r)} j_{\bar{d}}^{(2r)} \rangle \rangle, \end{aligned} \quad (6.75)$$

donde  $j_a^{(2r)} = P_{\bar{n}} (\delta_a)_{\bar{n}\bar{m}} \xi^{\bar{m}}$  es la parte física de los términos cuadráticos en las fluctuaciones de los generadores intrínsecos  $j_a = p_s \delta_a q^s$  (ver sección 5.4 y apéndice C).

Como  $G/H$  es un espacio simétrico es posible definir un operador tipo paridad  $\sigma$  (automorfismo involutivo) tal que [49]

$$\sigma : G \rightarrow G, \quad \sigma^2 = 1, \quad (6.76)$$

$$\begin{cases} \sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{x} & \text{si } \mathbf{x} \in \mathfrak{h} \\ \sigma(\mathbf{x}) = -\mathbf{x} & \text{si } \mathbf{x} \in \mathfrak{g} - \mathfrak{h} \end{cases} \quad (6.77)$$

Si suponemos que  $\sigma$  actúa en el espacio de configuración y conmuta con el hamiltoniano (y con el operador número de ghost) el valor de expectación  $\langle \langle j_{c'}^{(2r)} j_{\bar{d}}^{(2r)} \rangle \rangle = 0$  ya que  $j_{c'}$  y  $j_{\bar{d}}$  tienen paridades opuestas.

El hamiltoniano colectivo es entonces

$$\begin{aligned} H_{\text{col}} &= H_{\text{col}}^{(0)} + H'_{\text{col}} \\ &= \frac{1}{2\mathcal{I}_{c'}} \left[ \pi_a \Theta_{c'}^a \Theta_{c'}^b \pi_b \right]_{\text{W}} + V_{G/H}, \end{aligned} \quad (6.78)$$

donde se hizo uso de la identificación

$$\pi_{a'} \pi_{\bar{b}} = \pi_{a'} \langle \langle j_{\bar{b}}^{(2r)} \rangle \rangle, \quad \pi_{\bar{a}} \pi_{\bar{b}} = \langle \langle j_{\bar{a}}^{(2r)} j_{\bar{b}}^{(2r)} \rangle \rangle, \quad (6.79)$$

que corresponde a la identidad (5.71) en el gauge de Coulomb. El hamiltoniano colectivo puede reescribirse en función de los generadores colectivos

$$H_{\text{col}} = \frac{1}{2\mathcal{I}_{a'}} I_{a'}^2, \quad (6.80)$$

con los generadores hermíticos definidos por

$$I_{a'} = \frac{1}{2} \left( \pi_b \Theta_{a'}^b + \Theta_{a'}^b \pi_b \right). \quad (6.81)$$

El hamiltoniano (6.80) coincide con el hamiltoniano colectivo a orden  $\mathcal{O}(\mathcal{I}^{-1})$  obtenido en el capítulo 5.

## Capítulo 7

# Conclusiones

En esta Tesis se ha presentado el tratamiento BRST lagrangiano de coordenadas colectivas, basado en el formalismo de Anticampos para la cuantificación de teorías de gauge.

En primer lugar, en el capítulo 4, se ha descrito la aplicación del tratamiento al estudio de un modelo mecánico simple dado por el movimiento de una partícula en 3 dimensiones en presencia de un potencial central cuyos mínimos están fuera del origen de coordenadas. Este sencillo modelo, sin embargo, presenta las características básicas de los problemas en los que aparecen las coordenadas colectivas: las soluciones clásicas son invariantes solamente ante un subgrupo (rotaciones alrededor de un eje) del grupo de simetría de la acción (las rotaciones en 3 dimensiones), y por lo tanto si se procede a cuantificar expandiendo las coordenadas como fluctuaciones alrededor de la solución clásica aparecen modos de frecuencia cero. Para tratar los modos cero se introdujeron coordenadas colectivas como parámetros de las rotaciones de las coordenadas. El sistema sobrecompleto de coordenadas originales y coordenadas colectivas es un sistema de gauge, y se procedió a cuantificarlo por medio del formalismo de Anticampos. Con una adecuada elección del fijado de gauge, que le proporciona frecuencias espurias a los modos cero, fue posible realizar cálculos perturbativos. En particular se calcularon correcciones de dos loops a los estados vibracionales y de un loop a la energía colectiva, mostrándose que los resultados que se obtienen mediante este procedimiento son independientes de los parámetros de fijado de gauge (frecuencias espurias de los modos cero), y que además coinciden con los resultados que, en este modelo, se pueden calcular por medio del método de separación de variables.

En el capítulo 5 se presentó el tratamiento de coordenadas colectivas para

la cuantificación de un modelo general correspondiente al movimiento de una partícula en una variedad de Riemann, posiblemente infinito dimensional, y que corresponde al espacio de configuración del sistema, y sujeta a la acción de un potencial. Este modelo incluye los modelos solitónicos bosónicos, como el modelo de Skyrme y  $O(3)$ , además de modelos mecánicos simples como el considerado en el capítulo 4.

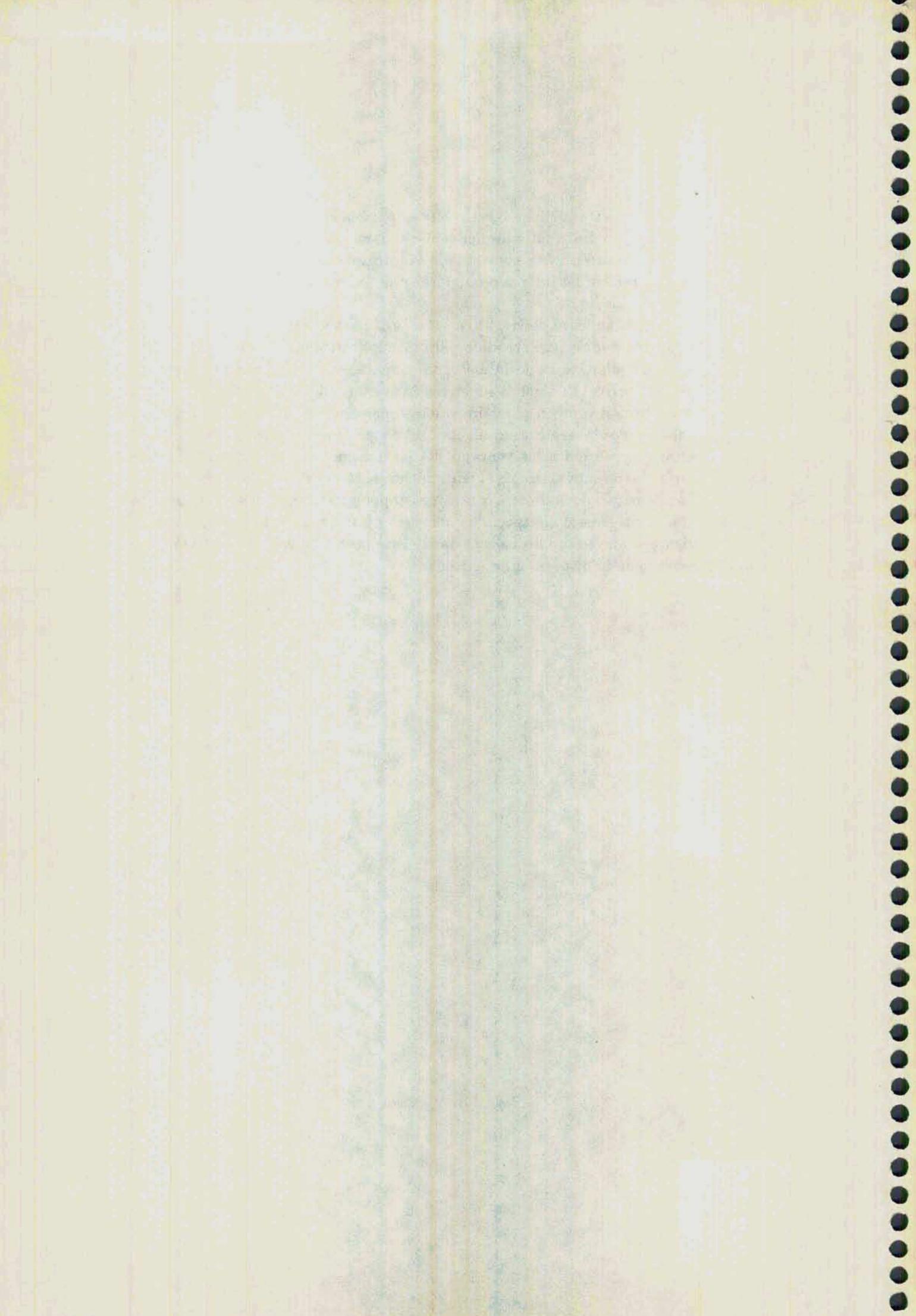
La acción del modelo general considerado es invariante ante un grupo finito de isometrías, pero sus soluciones clásicas, solamente ante un subgrupo compacto. Por lo tanto, existe un conjunto infinito de soluciones clásicas dadas por la órbita de una de las soluciones ante el grupo de isometrías. El conjunto de estas soluciones es un espacio cociente, que por simplicidad supusimos un espacio simétrico.

La cuantificación alrededor de una solución clásica sufre del problema de los modos cero, dados por las fluctuaciones tangentes al espacio de soluciones. Para controlar los modos cero y restaurar la simetría rota a nivel clásico se introdujeron coordenadas colectivas como parámetros dependientes del tiempo de las transformaciones de simetría, obteniéndose una teoría de gauge con álgebra no-abeliana. Se procedió a cuantificar la teoría por medio del formalismo de Anticampos. Fue posible controlar los modos cero con una elección adecuada del gauge, generalización de la del capítulo 4, que les dio frecuencias espurias no nulas, determinadas por los parámetros del fijado de gauge, y al mismo tiempo desacopló a orden más bajo las fluctuaciones de los multiplicadores de Lagrange. Por medio de técnicas de teoría de campos a temperatura finita (en el formalismo de tiempo imaginario) se calcularon correcciones cuánticas a dos loops para las energías intrínsecas y de un loop al hamiltonino colectivo efectivo, mostrándose que los resultados físicos son independientes de los parámetros introducidos al elegir el fijado de gauge.

Finalmente, en el capítulo 6 se discutió el problema de los fijados de gauge canónicos, considerando una elección de gauge similar al gauge de Coulomb en electromagnetismo. En este caso el fijado de gauge elimina las fluctuaciones de energía cero y las coordenadas colectivas sobre el grupo que sobran respecto de las coordenadas del espacio de mínimos, y no se introducen multiplicadores de Lagrange. Sin embargo, aunque parece la elección más sencilla pues solamente se conservan grados de libertad físicos, y es en la que se basa el método original de coordenadas colectivas [5, 6], no se obtienen resultados correctos a dos loops. Esto se debe a que la elección de gauge equivale a un cambio no-lineal de las variables de integración en la integral de camino, por lo que aparece una ambigüedad de orden en la acción cuántica, y es necesario introducir términos de orden  $\hbar^2$  para obtener resul-

tados correctos [37]. Se mostró que es posible elegir un gauge no canónico y reproducir los resultados del capítulo 5, en el cual el fijado de gauge fue derivativo, si se define con cuidado la integral de camino por medio de una discretización del intervalo temporal y de la prescripción de evaluación en el punto medio.

El tratamiento descrito en esta Tesis basado en el formalismo de Anticampos podría ser extendido para incluir teorías con campos fermiónicos. En particular, sería de interés poder aplicarlo al estudio de solitones supersimétricos. El álgebra supersimétrica es un álgebra abierta, y como estos solitones rompen parcialmente la supersimetría, al incluir coordenadas colectivas se obtendría un álgebra de gauge abierta. En ese caso podrían aprovecharse todas las ventajas del formalismo de Anticampos. También sería interesante extender el tratamiento para el estudio de la dinámica de baja energía de solitones con cargas topológicas mayores a uno, para los cuales en general el espacio de soluciones no corresponde a un espacio cociente, como se supuso en esta Tesis. Este problema está relacionado con el estudio de la dispersión de solitones.



## Apéndice A

# Formalismo canónico con variables bosónicas y fermiónicas

Consideremos un sistema que depende de variables reales conmutativas  $q^i$  y anticonmutativas  $\theta^\alpha$  pertenecientes a un álgebra de Grassmann, y que corresponden al límite  $\hbar \rightarrow 0$  de operadores bosónicos y fermiónicos, respectivamente:

$$\theta^\alpha \theta^\beta + \theta^\beta \theta^\alpha = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\theta^\alpha q^i - q^i \theta^\alpha = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$q^i q^j - q^j q^i = 0. \quad (\text{A.3})$$

Se define la paridad de Grassmann  $\epsilon$  de las variables

$$\epsilon(q^i) = 0, \quad \epsilon(\theta^\alpha) = 1, \quad (\text{A.4})$$

y tal que la paridad de Grassmann de un producto de variables sea la suma de las paridades de los factores módulo 2.

Las ecuaciones clásicas de movimiento surgen de extremizar la acción

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q^i, \dot{q}^i, \theta^\alpha, \dot{\theta}^\alpha) dt, \quad (\text{A.5})$$

con  $q^i$  y  $\theta^\alpha$  fijas en los extremos y siendo el lagrangiano  $L$  real y bosónico. Los momentos canónicos se definen

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad (\text{A.6})$$

$$\pi_\alpha = \frac{\partial^L L}{\partial \dot{\theta}^\alpha}, \quad (\text{A.7})$$

donde  $\frac{\partial^L}{\partial \theta^\alpha}$  corresponde a la derivada desde la izquierda definida mediante la variación de una función

$$\delta f(\theta^\alpha) = \delta \theta^\alpha \frac{\partial^L f}{\partial \theta^\alpha} = \frac{\partial^R f}{\partial \theta^\alpha} \delta \theta^\alpha. \quad (\text{A.8})$$

Los momentos  $p_i$  son reales y los  $\pi_\alpha$  imaginarios.

El hamiltoniano canónico

$$H = \dot{q}^i p_i + \dot{\theta}^\alpha \pi_\alpha - L, \quad (\text{A.9})$$

es real y bosónico. Las ecuaciones de Hamilton surgen de la acción hamiltoniana

$$S = \int (\dot{q}^i p_i + \dot{\theta}^\alpha \pi_\alpha - H). \quad (\text{A.10})$$

Se define el corchete de Poisson generalizado entre dos funciones de las variables canónicas como

$$\{F, G\} = \left( \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q^i} \right) + (-)^{\epsilon_F} \left( \frac{\partial^L F}{\partial \theta^\alpha} \frac{\partial^L G}{\partial \pi_\alpha} + \frac{\partial^L F}{\partial \pi_\alpha} \frac{\partial^L G}{\partial \theta^\alpha} \right), \quad (\text{A.11})$$

donde  $\epsilon_F = \epsilon(F)$ . En particular, las ecuaciones de movimiento son

$$\dot{F} = \{F, H\}. \quad (\text{A.12})$$

El corchete de Poisson generalizado tiene las siguientes propiedades:

$$\{F, G\} = -(-)^{\epsilon_F \epsilon_G} \{G, F\}, \quad (\text{A.13})$$

$$\{F, G_1 G_2\} = \{F, G_1\} G_2 + (-)^{\epsilon_F \epsilon_{G_1}} \{F, G_2\}, \quad (\text{A.14})$$

$$\{F, G\}^* = -\{G^*, F^*\}, \quad (\text{A.15})$$

$$\epsilon(\{F, G\}) = \epsilon_F + \epsilon_G, \quad (\text{A.16})$$

y satisface la identidad de Jacobi

$$\begin{aligned} \{\{F_1, F_2\}, F_3\} &+ (-)^{\epsilon_{F_1}(\epsilon_{F_2} + \epsilon_{F_3})} \{\{F_2, F_3\}, F_1\} \\ &+ (-)^{\epsilon_{F_3}(\epsilon_{F_1} + \epsilon_{F_2})} \{\{F_3, F_1\}, F_2\} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Los corchetes de Poisson no nulos entre las variables canónicas son

$$\{p_i, q^j\} = -\delta_i^j, \quad (\text{A.18})$$

$$\{\theta^\alpha, \pi_\beta\} = -\delta_\beta^\alpha. \quad (\text{A.19})$$

En la teoría cuántica las variables canónicas se convierten en operadores en un espacio de Hilbert, y se define el conmutador graduado (conmutador o anticonmutador)

$$[A, B] = AB - (-)^{\epsilon_A \epsilon_B} BA, \quad (\text{A.20})$$

a partir del corchete de Poisson

$$[A, B] = i\hbar\{A, B\}. \quad (\text{A.21})$$

El conmutador graduado tiene las siguientes propiedades:

$$[F, G] = -(-)^{\epsilon_F \epsilon_G} [G, F], \quad (\text{A.22})$$

$$[F, G_1 G_2] = [F, G_1] G_2 + (-)^{\epsilon_F \epsilon_{G_1}} [F, G_2], \quad (\text{A.23})$$

$$[F, G]^\dagger = -(-)^{\epsilon_F \epsilon_G} [G^\dagger, F^\dagger], \quad (\text{A.24})$$

$$\epsilon([F, G]) = \epsilon_F + \epsilon_G, \quad (\text{A.25})$$

y satisface la identidad de Jacobi

$$\begin{aligned} [[F_1, F_2], F_3] &+ (-)^{\epsilon_{F_1}(\epsilon_{F_2} + \epsilon_{F_3})} [[F_2, F_3], F_1] \\ &+ (-)^{\epsilon_{F_3}(\epsilon_{F_1} + \epsilon_{F_2})} [[F_2, F_3], F_1] = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Las relaciones de conmutación entre los operadores canónicos son

$$[p_i, q^j] = -i\hbar\delta_i^j, \quad (\text{A.27})$$

$$[\theta^\alpha, \pi_\beta] = -i\hbar\delta_\beta^\alpha. \quad (\text{A.28})$$

El producto interno en el espacio de Hilbert es tal que las variables clásicas reales (imaginarias) se convierten en operadores hermíticos (antihermíticos).



## Apéndice B

# Algunas propiedades de los grupos de Lie

Un grupo de Lie consiste de una variedad diferenciable  $\mathcal{T}$ , y un mapa  $\phi : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ , con las propiedades:

1. Clausura:  $\gamma^\alpha = \phi^\alpha(\beta, \alpha)$ ,  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{T}$ ,
2. Asociatividad:  $\phi^\alpha(\gamma, \phi(\beta, \alpha)) = \phi^\alpha(\phi(\gamma, \beta), \alpha)$ ,
3. Identidad:  $\phi^\alpha(0, \alpha) = \alpha^\alpha = \phi^\alpha(\alpha, 0)$ ,
4. Inversa:  $\phi^\alpha(\alpha, \alpha^{-1}) = 0 = \phi^\alpha(\alpha^{-1}, \alpha)$ .

Un grupo de transformaciones de Lie consiste de un grupo de Lie que actúa sobre un espacio geométrico  $\mathcal{G}$  a través de las transformaciones de coordenadas conectadas con la identidad  $f : \mathcal{T} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ . La función  $\mathbf{x}'^i = f^i(\alpha, \mathbf{x})$  tiene las propiedades:

1. Clausura:  $\alpha \in \mathcal{T}, \mathbf{x} \in \mathcal{G} \Rightarrow \mathbf{x}'^i = f^i(\alpha, \mathbf{x}) \in \mathcal{G}$ ,
2. Asociatividad:  $f^i[\beta, f(\alpha, \mathbf{x})] = f^i[\phi(\beta, \alpha), \mathbf{x}]$ ,
3. Identidad:  $f^i(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^i$ ,
4. Inversa:  $f^i[\alpha^{-1}, f(\alpha, \mathbf{x})] = f^i[\alpha, f(\alpha^{-1}, \mathbf{x})] = f^i[\phi(\alpha^{-1}, \alpha), \mathbf{x}] = \mathbf{x}^i$ .

Las transformaciones infinitesimales  $\mathbf{x}'^i = f^i(\delta\alpha, \mathbf{x})$  son generadas por

$$X_a(\mathbf{x}') = -R_a^i(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial x'^i}, \quad (\text{B.1})$$

con

$$R_a^i(x') = \left. \frac{\partial f^i(\beta, x')}{\partial \beta^a} \right|_{\beta=0}. \quad (\text{B.2})$$

Las relaciones de conmutación de los generadores determinan el álgebra de Lie através de las constantes de estructura

$$[X_a(x'), X_b(x')] = C_{ab}^c X_c(x'), \quad (\text{B.3})$$

lo que implica

$$R_a^i(x') \frac{\partial R_b^j(x')}{\partial x'^i} - R_b^i(x') \frac{\partial R_a^j(x')}{\partial x'^i} = -C_{ab}^c R_c^j(x'). \quad (\text{B.4})$$

Supongamos dos transformaciones sucesivas

$$x^i = f^i(\alpha, x'), \quad x'^i = f^i(\beta, x''). \quad (\text{B.5})$$

De la propiedad de asociatividad se tiene que

$$x^i = f^i[\alpha, f(\beta, x'')] = f^i[\phi(\alpha, \beta), x'']. \quad (\text{B.6})$$

Derivando respecto de  $\beta^a$  ambos miembros de la ecuación anterior, evaluando en  $\beta^a = 0$ , y usando que  $x' = x''$  cuando  $\beta^a = 0$ , se obtiene

$$\frac{\partial f^i(\alpha, x')}{\partial x'^j} R_a^j(x') = \left. \frac{\partial f^i(\alpha, x')}{\partial \alpha^b} \frac{\partial \phi^b(\alpha, \beta)}{\partial \beta^a} \right|_{\beta=0}. \quad (\text{B.7})$$

Se definen

$$\Theta_a^b(\alpha) = \left. \frac{\partial \phi^b(\alpha, \beta)}{\partial \beta^a} \right|_{\beta=0}, \quad (\text{B.8})$$

y su inversa  $\zeta_a^b(\alpha)$ ,

$$\zeta_a^b \Theta_b^c = \Theta_a^b \zeta_b^c = \delta_a^c. \quad (\text{B.9})$$

La relación (B.7) se puede reescribir como

$$\frac{\partial f^i(\alpha, x')}{\partial \alpha^a} = \frac{\partial f^i(\alpha, x')}{\partial x'^j} \zeta_a^b(\alpha) R_b^j(x'). \quad (\text{B.10})$$

Las condiciones de integrabilidad para las ecuaciones (B.10) son

$$\frac{\partial^2 f^i(\alpha, x')}{\partial \alpha^a \partial \alpha^b} - \frac{\partial^2 f^i(\alpha, x')}{\partial \alpha^b \partial \alpha^a} = 0. \quad (\text{B.11})$$

Derivando (B.10) respecto de  $\alpha^b$  se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f^i}{\partial \alpha^a \partial \alpha^b} &= \frac{\partial f^i}{\partial x'^j \partial \alpha^b} \zeta_a^c R_c^j + \frac{\partial f^i}{\partial x'^j} \frac{\partial \zeta_a^c}{\partial \alpha^b} R_c^j \\ &= \frac{\partial}{\partial x'^j} \left( \frac{\partial f^i}{\partial x'^k} \zeta_b^d R_d^k \right) \zeta_a^c R_c^j + \frac{\partial f^i}{\partial x'^j} \frac{\partial \zeta_a^c}{\partial \alpha^b} R_c^j \\ &= \frac{\partial^2 f^i}{\partial x'^j \partial x'^k} \zeta_a^c \zeta_b^d R_c^j R_d^k + \frac{\partial f^i}{\partial x'^k} \zeta_a^c \zeta_b^d R_c^j \frac{\partial R_d^k}{\partial x'^j} + \frac{\partial f^i}{\partial x'^j} \frac{\partial \zeta_a^c}{\partial \alpha^b} R_c^j, \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

y, por lo tanto, la condición (B.11) junto con (B.4) dan la relación de las matrices  $\zeta$  con las constantes de estructura

$$\zeta_{a,b}^c - \zeta_{b,a}^c = C_{de}^c \zeta_a^d \zeta_b^e, \quad (\text{B.13})$$

donde  $, a \equiv \partial_a \equiv \partial / \partial \alpha^a$ . De  $\zeta \Theta = 1$  se obtiene

$$\Theta_a^d \Theta_{b,d}^c - \Theta_b^d \Theta_{a,d}^c = C_{ab}^d \Theta_d^c. \quad (\text{B.14})$$

A partir de las matrices  $\Theta$  se pueden definir los generadores de traslaciones derechas  $F(\alpha) \rightarrow F(\phi(\alpha, \beta))$  en el grupo de Lie

$$Y_a(\alpha) = -\Theta_a^b \partial_b, \quad (\text{B.15})$$

con reglas de conmutación que surgen de (B.14)

$$[Y_a(\alpha), Y_b(\alpha)] = -C_{ab}^c Y_c(\alpha). \quad (\text{B.16})$$

Para un grupo compacto la medida de integración en el grupo invariante ante traslaciones derechas e izquierdas (medida de Haar) está dada por

$$d\mu(\alpha) = |\zeta(\alpha)| dV(\alpha), \quad (\text{B.17})$$

donde  $|\zeta(\alpha)| = \det \zeta_a^b$ , y  $dV(\alpha)$  es la medida plana euclídea  $dV(\alpha) = d\alpha^1 \wedge d\alpha^2 \wedge \dots \wedge d\alpha^n$ .

A veces es conveniente usar la parametrización para un grupo  $G$  dada por la descomposición por el espacio cociente  $G/H$  [49]. Dada una sección  $\sigma : G/H \rightarrow G$ , se puede descomponer  $g \in G$  como:

$$g = \sigma h, \quad (\text{B.18})$$

con

$$\sigma = \exp(\alpha^a X_a) \in G, \quad h = \exp(\alpha^{\bar{a}} X_{\bar{a}}) \in H, \quad (\text{B.19})$$

siendo  $X_a$  los generadores del subálgebra  $\mathfrak{h}$  y  $X_{a'}$  los del complemento  $\mathfrak{g} - \mathfrak{h}$ . En esta parametrización las matrices  $\zeta$  y  $\Theta$  son

$$\zeta = \begin{pmatrix} \zeta'_{a'} & \zeta_{a'}^{\bar{b}} \\ 0 & \zeta_{\bar{a}}^{\bar{b}} \end{pmatrix}, \quad \Theta = \begin{pmatrix} \Theta'_{a'} & -\Theta'_{a'} \zeta_{c'}^{\bar{d}} \bar{\Theta}_{\bar{d}}^{\bar{b}} \\ 0 & \bar{\Theta}_{\bar{a}}^{\bar{b}} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.20})$$

Las matrices  $\zeta'$ ,  $\zeta_{a'}^{\bar{b}}$ , y  $\Theta'$  dependen de todos los parámetros  $\alpha$ , mientras que  $\bar{\zeta}$  y  $\bar{\Theta}$  solamente de los  $\alpha^{\bar{a}}$ , que parametrizan  $H$ .  $\Theta'$  es la inversa de  $\zeta'$  y  $\bar{\Theta}$  la de  $\bar{\zeta}$ .

## Apéndice C

# Relaciones útiles para el cálculo de diagramas

En este apéndice se definen los coeficientes que aparecen en los cálculos perturbativos de los capítulos 5 y 6, y se establecen relaciones entre ellos consecuencia de la invariancia de la acción (5.1) que se necesitan para probar la independencia de gauge de los resultados físicos.

Cuando se expande la acción (5.1) en potencias de los modos normales es útil introducir los coeficientes definidos a continuación:

$$A_{nml} = \bar{V}_{stu} \psi_n^s \psi_m^t \psi_l^u, \quad (\text{C.1})$$

$$B_{nm;l} = \bar{g}_{st,u} \psi_n^s \psi_m^t \psi_l^u, \quad (\text{C.2})$$

$$D_{a';nm} = \mathcal{I}_{a'}^{-\frac{1}{2}} \bar{g}_{st} \partial_{a'v} f^s(0, \bar{q}) \psi_n^t \psi_m^v, \quad (\text{C.3})$$

$$D_{\bar{a};nm} = \bar{g}_{st} \partial_{\bar{a}v} f^s(0, \bar{q}) \psi_n^t \psi_m^v, \quad (\text{C.4})$$

$$E_{nmlk} = \bar{V}_{stuv} \psi_n^s \psi_m^t \psi_l^u \psi_k^v, \quad (\text{C.5})$$

$$F_{nm;lk} = \bar{g}_{st,uv} \psi_n^s \psi_m^t \psi_l^u \psi_k^v, \quad (\text{C.6})$$

$$H_{a';m;nl} = \mathcal{I}_{a'}^{-\frac{1}{2}} g_{st} \partial_{auv} f^s(0, \bar{q}) \psi_m^t \psi_n^u \psi_l^v. \quad (\text{C.7})$$

Estos coeficientes están relacionados entre si por el hecho que la acción (5.24) es invariante de gauge. Para encontrar todas las relaciones que permiten simplificar el cálculo hay que diferenciar ambos miembros de las ecuaciones (5.6)-(5.7) con respecto a  $\alpha^a$ , y evaluar en  $\alpha^a = 0$ :

$$0 = \partial_s V(f(0, q)) \partial_a f^s, \quad (\text{C.8})$$

$$0 = \partial_a \partial_s f^u(0, q) g_{ut} + \partial_a \partial_t f^v(0, q) g_{sv} + \partial_a f^w(0, q) g_{st,w}, \quad (\text{C.9})$$

donde se usó que  $\partial_s f^t(0, q) = \delta_s^t$ .

Expandiendo estas relaciones alrededor de la solución clásica se obtienen las relaciones deseadas

$$E_{mnl a'} = -A_{kmn} D_{a';kl} - A_{kml} D_{a';kn} - A_{knl} D_{a';km} - \tilde{\omega}_m^2 H_{a';m;nl} - \tilde{\omega}_n^2 H_{a';n;ml} - \tilde{\omega}_l^2 H_{a';l;mn}, \quad (C.10)$$

$$A_{a'nm} = -\tilde{\omega}_n^2 D_{a';nm} - \tilde{\omega}_m^2 D_{a';mn}, \quad (C.11)$$

$$B_{nm;a'} = -D_{a';mn} - D_{a';nm}, \quad (C.12)$$

$$F_{nl;ma'} = -B_{kl;m} D_{a';kn} - B_{nk;m} D_{a';kl} - B_{nl;k} D_{a';km} - H_{a';l;nm} - H_{a';n;ml}, \quad (C.13)$$

$$D_{\bar{a};\bar{n}\bar{m}} = -D_{\bar{a};\bar{m}\bar{n}} \quad (C.14)$$

$$D_{\bar{a};\bar{n}b'} = D_{\bar{a};b'\bar{n}} = 0 \quad (C.15)$$

$$D_{\bar{a};c'b'} = -\sqrt{\frac{\mathcal{I}_{c'}}{\mathcal{I}_{b'}}} C_{\bar{a}b'}^{c'}, \quad (C.16)$$

$$C_{\bar{a}c'}^{b'} = -\frac{\mathcal{I}_{c'}}{\mathcal{I}_{b'}} C_{\bar{a}b'}^{c'}, \quad (C.17)$$

donde, para abreviar, se define  $\tilde{\omega}_{\bar{n}} = \omega_{\bar{n}}$ ,  $\tilde{\omega}_{a'} = 0$ . Se obtienen relaciones adicionales a partir de las relaciones de conmutación (5.9):

$$D_{a';nb'} - D_{b';na'} = 0, \quad (C.18)$$

$$D_{a';mn} D_{b';nl} - D_{b';mn} D_{a';nl} = \sqrt{\frac{1}{\mathcal{I}_{a'} \mathcal{I}_{b'}}} C_{b'a'}^{\bar{c}} D_{\bar{c};ml} + H_{b';m;la'} - H_{a';m;lb'}. \quad (C.19)$$

Las fluctuaciones  $\xi^n$  alrededor del mínimo  $\bar{q}$  están en una representación de  $G$ . La representación de los generadores  $\delta_a$  está dada por las matrices

$$(\delta_{a'})_{nm} = \sqrt{\mathcal{I}_{a'}} (D_{a';[nm]} + B_{a';[n;m]}) \quad (C.20)$$

$$(\delta_{\bar{a}})_{nm} = D_{\bar{a};[nm]}, \quad (C.21)$$

donde  $[\dots]$  indica antisimetrización. A partir de las relaciones de más arriba se puede demostrar que (C.20) y (C.21) efectivamente son una representación de  $G$

$$(\delta_a)_{nm} (\delta_b)_{ml} - (\delta_b)_{nm} (\delta_a)_{ml} = C_{ba}^c (\delta_c)_{nl}. \quad (C.22)$$

También es conveniente definir algunas funciones que se obtienen al integrar los propagadores térmicos:

$$g(\omega_n) = \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^\beta d\tau_2 G_{\omega_n}(\tau_1 - \tau_2) = \frac{\beta}{\omega_n^2}, \quad (C.23)$$

$$\begin{aligned}
g(\omega_n, \omega_m) &= \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^\beta d\tau_2 G_{\omega_n}(\tau_1 - \tau_2) G_{\omega_m}(\tau_1 - \tau_2) \\
&= \frac{\beta}{2\omega_n \omega_m (\omega_n^2 - \omega_m^2)} \left[ \omega_n \coth\left(\frac{\beta\omega_m}{2}\right) \right. \\
&\quad \left. - \omega_m \coth\left(\frac{\beta\omega_n}{2}\right) \right], \tag{C.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(\dot{\omega}_n, \dot{\omega}_m) &= \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^\beta d\tau_2 \partial_{\tau_1} G_{\omega_n}(\tau_1 - \tau_2) \partial_{\tau_1} G_{\omega_m}(\tau_1 - \tau_2) \\
&= \frac{\beta}{2(\omega_n^2 - \omega_m^2)} \left[ \omega_n \coth\left(\frac{\beta\omega_n}{2}\right) \right. \\
&\quad \left. - \omega_m \coth\left(\frac{\beta\omega_m}{2}\right) \right], \tag{C.25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(\omega_n, \omega_m, \omega_l) &= \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^\beta d\tau_2 G_{\omega_n}(\tau_1 - \tau_2) G_{\omega_m}(\tau_1 - \tau_2) G_{\omega_l}(\tau_1 - \tau_2) \\
&= \beta \left[ \omega_n (\omega_n^2 - \omega_m^2 - \omega_l^2) \coth\left(\frac{\beta\omega_m}{2}\right) \coth\left(\frac{\beta\omega_l}{2}\right) \right. \\
&\quad + \omega_m (\omega_m^2 - \omega_n^2 - \omega_l^2) \coth\left(\frac{\beta\omega_n}{2}\right) \coth\left(\frac{\beta\omega_l}{2}\right) \\
&\quad + \omega_l (\omega_l^2 - \omega_m^2 - \omega_n^2) \coth\left(\frac{\beta\omega_m}{2}\right) \coth\left(\frac{\beta\omega_n}{2}\right) \\
&\quad \left. + 2\omega_n \omega_m \omega_l \right] / \\
&\quad [4\omega_n \omega_m \omega_l (\omega_n + \omega_m + \omega_l) (\omega_n + \omega_m - \omega_l) \\
&\quad \times (\omega_n - \omega_m + \omega_l) (\omega_n - \omega_m - \omega_l)], \tag{C.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(\omega_n, \dot{\omega}_m, \dot{\omega}_l) &= \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^\beta d\tau_2 G_{\omega_n}(\tau_1 - \tau_2) \partial_{\tau_1} G_{\omega_m}(\tau_1 - \tau_2) \partial_{\tau_1} G_{\omega_l}(\tau_1 - \tau_2) \\
&= \beta \left[ \omega_n (\omega_n^2 - \omega_m^2 - \omega_l^2) \right. \\
&\quad + \omega_m (\omega_m^2 - \omega_n^2 + \omega_l^2) \coth\left(\frac{\beta\omega_m}{2}\right) \coth\left(\frac{\beta\omega_n}{2}\right) \\
&\quad + \omega_l (\omega_l^2 - \omega_n^2 + \omega_m^2) \coth\left(\frac{\beta\omega_l}{2}\right) \coth\left(\frac{\beta\omega_n}{2}\right) \\
&\quad \left. + 2\omega_n \omega_m \omega_l \coth\left(\frac{\beta\omega_m}{2}\right) \coth\left(\frac{\beta\omega_l}{2}\right) \right] /
\end{aligned}$$

$$4\omega_n(\omega_n + \omega_m + \omega_l)(\omega_n + \omega_m - \omega_l) \\ \times (\omega_n - \omega_m + \omega_l)(\omega_n - \omega_m - \omega_l), \quad (\text{C.27})$$

$$g(\dot{\omega}_n) = -\beta G_{\omega_n}(0), \quad (\text{C.28})$$

$$g(\dot{\omega}_n, \omega_m) = -\frac{\beta}{4\omega_m(\omega_n^2 - \omega_m^2)} \\ \times \left[ \omega_m - \omega_n \coth\left(\frac{\beta\omega_n}{2}\right) \coth\left(\frac{\beta\omega_m}{2}\right) \right]. \quad (\text{C.29})$$

A partir de la métrica (6.55) se pueden calcular los símbolos de Christoffel, cuyas expresiones a más bajo orden (evaluados en la solución clásica) son:

$$\bar{\Gamma}_{\bar{n}\bar{m}}^{\bar{l}} = \frac{1}{2}(B_{\bar{n}\bar{l};\bar{m}} + B_{\bar{m}\bar{l};\bar{n}} - B_{\bar{n}\bar{m};\bar{l}}), \quad (\text{C.30})$$

$$\bar{\Gamma}_{\bar{n}\bar{m}}^{\alpha'} = \frac{1}{2}\sqrt{I_{c'}}\bar{g}^{\alpha'b'}\zeta_{\alpha'}^c(B_{\bar{n}c';\bar{m}} + D_{c';\bar{n}\bar{m}}) + (\bar{n} \leftrightarrow \bar{m}), \quad (\text{C.31})$$

$$\bar{\Gamma}_{\bar{n}\alpha'}^{\bar{n}} = -\frac{1}{2}\left[\sqrt{I_{c'}}\bar{g}^{\alpha'b'}\zeta_{\alpha'}^c(B_{\bar{n}c';\bar{m}} + D_{c';\bar{n}\bar{m}}) + \zeta_{\alpha'}^{\bar{c}}D_{\bar{c};\bar{n}\bar{m}}\right] \\ -(\bar{n} \leftrightarrow \bar{m}), \quad (\text{C.32})$$

$$\bar{\Gamma}_{\alpha'b'}^{\bar{n}} = -\frac{1}{2}\sqrt{I_{c'}I_{d'}}\zeta_{\alpha'}^c\zeta_{b'}^{d'}(B_{c'd';\bar{n}} + 2D_{c';d'\bar{n}}), \quad (\text{C.33})$$

$$\bar{\Gamma}_{\bar{n}\alpha'}^{\alpha'} = \frac{1}{2}\sqrt{I_{c'}I_{d'}}\bar{g}^{\alpha'b'}\zeta_{\alpha'}^c\zeta_{b'}^{d'}(B_{c'd';\bar{n}} + 2D_{c';d'\bar{n}}), \quad (\text{C.34})$$

$$\bar{\Gamma}_{\alpha'b'}^{\alpha'} = \frac{1}{2}\bar{g}^{c'd'}(\bar{g}_{\alpha'd';b'} + \bar{g}_{b'd';\alpha'} - \bar{g}_{\alpha'b';d'}), \quad (\text{C.35})$$

$$\bar{g}^{\mu\nu}\bar{\Gamma}_{\mu\sigma,\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}\left(F_{\bar{n}\bar{m};\bar{n}\bar{m}} - B_{\bar{n}\bar{m};\bar{l}}^2\right) - D_{\alpha';b'\bar{n}}^2 + H_{\alpha';\alpha';\bar{n}\bar{n}} \\ + \bar{g}^{\alpha'b'}\zeta_{\alpha'}^{\bar{c}}\zeta_{b'}^{\bar{d}'}\sqrt{I_{d'}}H_{\bar{c};d';\bar{n}\bar{n}} \\ + \bar{g}^{\alpha'b'}\left(\ominus_{c'}^d\zeta_{\alpha'}^c{}_{,\alpha'b'} - \ominus_{c'}^d\zeta_{\alpha'}^c{}_{,\alpha'}\ominus_{e'}^f\zeta_{f',b'}\right). \quad (\text{C.36})$$

## Bibliografía

- [1] T.H.R. Skyrme, *A nonlinear field theory*, Proc. R. Soc. London **260**, 127 (1961).
- [2] T.H.R. Skyrme, *A Unified Field Theory of Mesons and Baryons*, Nucl. Phys. **31**, 556 (1962).
- [3] I. Zahed and G.E. Brown, *The Skyrme Model*, Phys. Rep. **142**, 1 (1986).
- [4] J. Goldstone and R. Jackiw, *Quantization of non linear waves*, Phys. Rev. D **11**, 1486 (1975).
- [5] J.L. Gervais and B. Sakita, *Extended particles in quantum field theory*, Phys. Rev. D **11**, 2943 (1975).
- [6] J.L. Gervais, A. Jevicki and B. Sakita, *Perturbation expansion around extended particles states in quantum field theory. 1.*, Phys. Rev. D **12**, 1038 (1975).
- [7] N.H. Christ and T.D. Lee, *Quantum expansion of soliton solutions*, Phys. Rev. D **12**, 1606 (1975).
- [8] A. Hosoya and K. Kikkawa, *Quantum theory of collective motion and an application to theory of extended hadrons*, Nucl. Phys. **B101**, 271 (1975).
- [9] C. Becchi, A. Rouet and R. Stora, *The Abelian Higgs Kibble Model, Unitarity of the S-Operator*, Phys. Lett. **52B**, 344 (1974).
- [10] I.V. Tyutin, *Gauge invariance in field theory and statistical mechanics*, Lebedev preprint FIAN, 39 (1975).
- [11] C. Becchi, A. Rouet and R. Stora, *Renormalization of Gauge Theories*, Ann. of Phys. **98**, 287 (1976).

- [12] E.S. Fradkin and G.A. Vilkovisky, *Quantization of Relativistic Systems with Constraints*, Phys. Lett. **55B**, 224 (1975).
- [13] I.A. Batalin and G.A. Vilkovisky, *Relativistic S-Matrix of Dynamical Systems with Boson and Fermion Constraints*, Phys. Lett. **69B**, 309 (1977).
- [14] E.S. Fradkin and T.E. Fradkina, *Quantization of Relativistic Systems with Boson and Fermion First- and Second-Class Constraints*, Phys. Lett. **72B**, 343 (1978).
- [15] I.A. Batalin and E.S. Fradkin, *A Generalized Canonical Formalism and Quantization of Reducible Gauge Theories*, Phys. Lett. **122B**, 157 (1983).
- [16] M. Henneaux, *Hamiltonian form of the path integral for theories with a gauge freedom*, Phys. Rep. **126**, 1 (1985).
- [17] M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992).
- [18] J. Kurchan, D.R. Bes and S. Cruz Barrios, *Becchi-Rouet-Stora-Tyutin Treatment of Collective Coordinates*, Phys. Rev. D **38**, 3309 (1988).
- [19] D.R. Bes, S. Cruz Barrios and J. Kurchan, *An Algebraic Method for the Treatment of Broken Symmetries in Many Body Problems: a Simple Example*, Ann. of Phys. **194**, 227 (1989).
- [20] J. Kurchan, D.R. Bes and S. Cruz Barrios, *A Systematic Treatment of Triaxial Systems at High Spin*, Nucl. Phys. **A509**, 306 (1990).
- [21] D.R. Bes and J. Kurchan, *The Treatment of Collective Coordinates in Many-Body Systems*, Lecture Notes in Physics, Vol. 34 (World Scientific, Singapore, 1990).
- [22] J.P. Garrahan and D.R. Bes, *A systematic treatment of triaxial systems at high spins. II*, Nucl. Phys. **A573**, 448 (1994).
- [23] J.P. Garrahan and D.R. Bes, *BRST treatment of the Bohr collective hamiltonian at high spins*, Phys. Lett. B **331**, 251 (1994).
- [24] F. Aldabe, D.R. Bes and N.N. Scoccola, *Soliton quantization in the BRST scheme*, Phys. Lett. **293B**, 81 (1992).

- [25] J.P. Garrahan, M. Kruczenski, C.L. Schat, D.R. Bes and N.N. Scoccola, *Becchi-Rouet-Stora-Tyutin quantization of a soliton model in 2+1 dimensions*, Phys. Rev. D **51**, 2950 (1995).
- [26] J. Alfaro and P.H. Damgaard, *Field Transformations, Collective Coordinates and BRST Invariance*, Ann. of Phys. **202**, 398 (1990).
- [27] I.A. Batalin and G.A. Vilkovisky, *Gauge Algebra and Quantization*, Phys. Lett. **102B**, 27 (1981).
- [28] I.A. Batalin and G.A. Vilkovisky, *Feynman Rules for Reducible Gauge Theories*, Phys. Lett. **120B**, 66 (1983).
- [29] I.A. Batalin and G.A. Vilkovisky, *Quantization of Gauge Theories with Linearly Dependent Generators*, Phys. Rev. D **28**, 2567 (1983) [E: **30**, 508 (1984)].
- [30] I.A. Batalin and G.A. Vilkovisky, *Closure of the Gauge Algebra, Generalized Lie Algebra Equations and Feynman Rules*, Nucl.Phys. **B234**, 106 (1984).
- [31] I.A. Batalin and G.A. Vilkovisky, *Existence Theorem for Gauge Algebra*, J. Math. Phys. **26**, 172 (1985).
- [32] J. Gomis, J. Paris and S. Samuel, *Antibracket, Antifields and Gauge-Theory Quantization*, Phys. Rep. **259**, 213 (1995).
- [33] J.P. Garrahan, M. Kruczenski, and D.R. Bes, *Lagrangian BRST treatment of collective coordinates. A simple example*, in Topics in Theoretical Physics (World Scientific, in press).
- [34] J.P. Garrahan, M. Kruczenski, and D.R. Bes, *Lagrangian Becchi-Rouet-Stora-Tyutin treatment of collective coordinates*, Phys. Rev. D **53**, 7176 (1996).
- [35] J.P. Garrahan and M. Kruczenski, *Quantization of collective coordinates in canonical gauges*, (to be published).
- [36] H.J.W. Müller-Kirsten and J. Zhang, *On the consistency of BRST gauge fixing of constrained systems*, Phys. Lett. **B339**, 65 (1994).
- [37] J.L. Gervais, A. Jevicki, *Point canonical transformations in the path integral*, Nucl. Phys. B **110**, 93 (1976).

- [38] R.S. Ward, *Slowly-moving lumps in the CP1 model in (2+1) dimensions*, Phys. Lett. **B158**, 424 (1985).
- [39] C. Bernard, *Feynman rules for gauge theories at finite temperature*, Phys. Rev. D **9**, 3312 (1974).
- [40] H. Hata and T. Kugo, *Operator formalism of statistical mechanics of gauge theory in covariant gauges*, Phys. Rev. D **21**, 3333 (1980);
- [41] J.I. Kapusta, *Finite-temperature field theory* (Cambridge University Press, New York, 1993).
- [42] D.H. Friedan, *Nonlinear Models in Two + Epsilon Dimensions*, Ann. of Phys. **163**, 318 (1985).
- [43] S.F. Edwards and Y.V. Gulyaev, *Path Integrals in Polar Coordinates*, Proc. R. Soc. London, Ser. A **279**, 229 (1964).
- [44] N.H. Christ and T.D. Lee, *Operator ordering and Feynman rules in gauge theories*, Phys. Rev. D **22**, 939 (1980).
- [45] J. Alfaro and P.H. Damgaard, *BRST Symmetry of Field Redefinitions*, Ann. of Phys. **220**, 118 (1992).
- [46] M.S. Marinov, *Path integrals in quantum theory: an outlook of basic concepts*, Phys. Rep. **61**, 1 (1980).
- [47] C. Itzykson and J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory* (Mc Graw-Hill, New York, 1980).
- [48] I. Gerstein, R. Jackiw, B. Lee, S. Weinberg, *Chiral loops*, Phys. Rev. D **3**, 2486 (1971).
- [49] R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications* (John Wiley, New York, 1974).