Sistemas axiomáticos para la convexidad

Bressan, Juan Carlos

1976

Tesis Doctoral

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

SISTEMAS AXIOMATICOS PARA LA CONVEXIDAD

por

Juan Carlos Bressan

Tesis presentada para optar al título de
Doctor en Ciencias Matemáticas

Director: Dr. Fausto Alfredo Toranzos

Año 1976

El autor de este trabajo de tesis desea expresar su más sincero y respetuoso agradecimiento a los Dres. Luis A. Santaló y Fausto A. Toranzos.

J.C.B.

INDICE

CAPITULO I

INTRODUCCION

Generalmente, la teoría de la convexidad se desarrolla en espacios vectoriales reales. Como la definición de conjunto convexo utiliza la noción de segmento, es evidente que en la teoría de la convexidad se utilizarán las propiedades del orden de los números reales. Una de las formas de generalizar esta teoría consiste en desarrollarla en espacios vectoriales sobre cuerpos ordenados.

Otros resultados sobre conjuntos convexos se obtienen agregando a la estructura vectorial antes mencionada, una topología compatible, una norma, o un producto escalar; así podemos estudiar la convexidad en espacios vectoriales topológicos, en espacios normados, o en espacios euclídeos, respectivamente.

1.- Números de Carathéodory, Helly y Radon.

Si trabajamos en espacios vectoriales sobre cuerpos ordenados, podemos demostrar los teoremas de Carathéodory, Helly y Radon que habitualmente se enuncian en espacios vectoriales reales. La demostración del teorema de Helly dada por Radon [1] utiliza únicamente el teorema de este último y algunas propiedades conjuntistas de la cápsula convexa. En esta demostración podemos encontrar el origen de los sistemas axiomáticos para la convexidad. En efecto, en virtud de la misma, si tomamos como axiomas algunas propiedades conjuntistas de la cápsula convexa o de los conjuntos convexos y el teorema de Radon, podemos deducir el de Helly. Esto último aparece hecho en un trabajo de Levi [2] publicado en 1951 ; allí considera una familia $\mathcal{C}$ de subconjuntos de un conjunto X y supone que

(C-1) $\mathcal{C}$ es interseccional, o sea, la intersección de conjuntos de la familia $\mathcal{C}$ es un conjunto de la familia $\mathcal{C}$.

Para cada A incluido en un conjunto de la familia $\mathcal{C}$, define $|A| = \cap \{C \in \mathcal{C} \ / \ A \subset C\}$; en este sistema axiomático, $|A|$ juega el papel de cápsula convexa de A . También supone

(C-2) Sea A subconjunto finito de X ; si existe B subconjunto finito de X tal que $A \subset |B|$ y card A > card B , entonces existe una partición $\{A_1, A_2\}$ de A tal que $|A_1| \cap |A_2| \neq \phi$.

Para espacios vectoriales sobre cuerpos ordenados, el axioma (C-2) es equivalente al teorema de Radon; en efecto, si A es finito y card B = n + 1 , la condición $A \subset |B|$ es equivalente a dim af(A) $\leqslant$ n (donde af(A) denota la cápsula afín de A). En ese caso (C-2) podría enunciarse:

Sea V espacio vectorial sobre un cuerpo ordenado, sea A subconjunto finito de V , si dim af(A) $\leqslant$ n y card A $\geqslant$ n + 2 , entonces existe una partición $\{A_1, A_2\}$ de A tal que $\mathrm{conv}(A_1) \cap \mathrm{conv}(A_2) \neq \phi$ (donde conv denota la cápsula convexa). Esta es una de las formas en que puede enunciarse el teorema de Radon.

Utilizando (C-1) y (C-2), Levi prueba el

<u>Teorema H</u>. Sea $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_k\} \subset \mathcal{C}$ tal que existe $A \subset X$ con card A = m < k y $F_1 \cup \ldots \cup F_k \subset |A|$. Si las intersecciones de cada m conjuntos de $\mathcal{F}$ son no vacías, entonces $\cap \mathcal{F} \neq \phi$.

Para espacios vectoriales sobre cuerpos ordenados, resulta evidente que el teorema de Helly implica el teorema H . Recíprocamente, si $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_k\}$ es una familia de convexos incluidos en una variedad afín n-dimensional donde n + 1 < k , y si las intersecciones de cada n + 1 conjuntos de $\mathcal{F}$ son no vacías, entonces podemos tomar un elemento de cada una de las intersecciones antes mencionadas formando, de esta manera, un conjunto A finito y tal que dim af(A) $\leqslant$ dim $F_1 \cup \ldots \cup F_k \leqslant n$. Luego existe $B \subset X$, tal que card B = n + 1 y conv(A)$\subset$ conv(B) . Así la familia $\mathcal{F}_B = \{F_1 \cap$ conv(B), ... , $F_k \cap$ conv(B)$\}$ es una familia de convexos incluidos en conv(B), tal que las intersecciones de cada n + 1 conjuntos de $\mathcal{F}_B$ son no vacías. Luego, por el teorema H , resulta $\cap \mathcal{F} \supset \cap \mathcal{F}_B \neq \phi$. Lo anterior nos permite afirmar, para espacios vectoriales sobre cuerpos ordenados, que el teorema H es equivalente al teorema de Helly, el cual podría enunciarse:

Sea V espacio vectorial sobre un cuerpo ordenado, sea $\mathcal{F}$ = $\{F_1, \ldots, F_k\}$ familia finita de convexos de V tal que dim af($F_1 \cup \ldots \cup F_k$) $\leqslant n < k - 1$. Si las intersecciones de cada n + 1 conjuntos de $\mathcal{F}$ son no vacías, entonces $\cap \mathcal{F} \neq \phi$.

En la memoria de Levi aparecen otros dos axiomas que si bien no los utiliza en la demostración del teorema H , le permiten deducir algunas propiedades de los "segmentos" (en donde segmento a,b es el conjunto $|\{a,b\}|$ que podríamos denotar $|ab|$). Estos axiomas son:

(C-3) Si A es un subconjunto no vacío y finito de X y $p \in |A|$, entonces $|A| = \cup \{|(A - \{a\}) \cup \{p\}| \ / \ a \in A\}$.
(C-4) $b \in |a_1 a_2| \subsetneq |a_1 a_2 a_3| \Rightarrow |ba_3| = |b\ a_1 a_3| \cap |b\ a_2 a_3|$ (en donde $|a_1 \ldots a_n|$ denota el conjunto $|\{a_1, \ldots, a_n\}|$) .

Destaquemos que (C-3) nos permite probar, en este trabajo, un teorema (ver (3.4) del capítulo V) que relaciona los números de Carathéodory y de Radon utilizando hipótesis distintas a las de Kay y Womble [3] . Si trabajamos en el contexto axiomático de Levi, este teorema nos permite deducir la siguiente proposición en la cual se usan únicamente los axiomas (C-1), (C-2) y (C-3):

Sea A subconjunto finito de X ; si existe B subconjunto finito de X tal que $A \subset |B|$, entonces $|A| = \cup \{|F| \ / \ F \subset A$ y card $F \leq$ card $B\}$.

Esta última proposición no aparece enunciada en la memoria de Levi. Para espacios vectoriales sobre cuerpos ordenados la proposición antedicha podría enunciarse:

Sea V espacio vectorial sobre un cuerpo ordenado, sea A subconjunto finito de V , si dim af(A) $\leq$ n entonces conv(A) = $= \cup \{$ conv(F) / $F \subset A$ y card $F \leq n + 1\}$.

Si tenemos en cuenta que para cualquier V espacio vectorial sobre un cuerpo ordenado, vale la propiedad de dominio finito (o sea, si B es subconjunto de V entonces conv(B) = $\cup \{$ conv(F) / $F \subset B$ y F finito$\}$) , podemos obtener la siguiente proposición:

Sea V espacio vectorial sobre un cuerpo ordenado, sea A subconjunto de V , si dim af(A) $\leq$ n entonces conv(A) = $\cup \{$conv(F) / $F \subset A$ y card $F \leq n + 1 \}$. Esta última proposición es el teorema de Carathéodory.

Lo fundamental del trabajo de Levi consiste en deducir que el teorema de Radon implica el de Helly, en un contexto axiomático que no utiliza la estructura vectorial. Danzer, Grünbaum y Klee [4] plantean el problema de buscar un sistema axiomático, que tenga como axiomas algunas propiedades conjuntistas de los convexos, en el cual se puedan interrelacionar los teoremas de Carathéodory, Helly y Radon. En el trabajo de Kay y Womble [3] , publicado en 1971, se resuelve parcialmente el problema antes planteado. En el mismo, toman la interseccionalidad como propiedad básica de la familia de los convexos. Así $(X, \mathscr{C})$ es un espacio de convexidad si $\mathscr{C}$ es una familia de subconjuntos del conjunto X que cumple las dos condiciones siguientes:

(a) $\phi \in \mathscr{C}$ y $X \in \mathscr{C}$

(b) $\mathcal{F} \subset \mathcal{C} \Rightarrow \cap \mathcal{F} \in \mathcal{C}$

Para cada $S \subset X$, definen $\mathcal{C}(S) = \cap \{C \in \mathcal{C} \ / \ S \subset C\}$; evidentemente, $\mathcal{C}(S)$ juega el papel de cápsula convexa de S .

Después de enunciar ciertas propiedades particulares (por ejemplo: propiedad T_1 , de dominio finito, etc), definen los números de Carathéodory, Helly y Radon para espacios de convexidad de la siguiente forma:

c, h y r son, respectivamente, los números de Carathéodory, Helly y Radon de $(X, \mathcal{C})$ si son los mínimos números naturales que verifican, respectivamente, las tres condiciones siguientes:
1) si $S \subset X$, entonces $\mathcal{C}(S) = \cup\{\mathcal{C}(F) \ / \ \text{card } F \leq c \text{ y } F \subset S\}$;
2) si $\mathcal{F}$ es una subfamilia finita de $\mathcal{C}$ tal que las intersecciones de hasta h conjuntos de $\mathcal{F}$ son no vacías, entonces $\cap \mathcal{F} \neq \phi$.
3) si $S \subset X$ y card $S \geq r$, entonces S tiene una partición de Radon, o sea existe una partición $\{S_1, S_2\}$ de S tal que $\mathcal{C}(S_1) \cap \mathcal{C}(S_2) \neq \phi$.

Cuando alguno de los números c, h y r , definidos precedentemente, no existe, diremos que el mismo es igual a ∞ . Esto último amplía las definiciones de los números de Carathéodory, Helly y Radon de tal forma que para cualquier espacio de convexidad $(X, \mathcal{C})$ quedan determinados los números c, h y r los cuales podrán ser finitos o infinitos. Así el teorema H de Levi permite afirmar que si $(X, \mathcal{C})$ es un espacio de convexidad que tiene número de Radon $r < \infty$, entonces tiene número de Helly $h \leq r - 1$. En virtud del teorema de Levi, en cualquier espacio de convexidad la finitud de r implica la finitud de h . Kay y Womble encuentran ejemplos que permiten ver que, trabajando en espacios de convexidad y sin pedir otras hipótesis, la finitud de r no implica la de c ; la finitud de c no implica la de h ni la de r ; y la finitud de h no implica la de c ni la de r . Sin embargo, suponiendo la finitud de c y de h, prueban que $r \leq c\,h + 1$ (ver Theorem 3, de Kay y Womble [3]). Como corolario de tal resultado, deducen que si c es finito entonces la finitud de h es equivalente a la de r; en ese caso, $h + 1 \leq r \leq c\,h + 1$.

Para obtener otros resultados sobre números de Carathéodory, Helly y Radon, introducen propiedades de separación. El más importante de estos resultados es el teorema 8 en donde, mediante hipótesis bastante fuertes, deducen que $r < \infty$ implica $c \leq r - 1$; destaquemos que, en el presente trabajo, probamos esta relación entre c y r utilizando el tercer axioma de Levi, según lo aclaramos al enunciar dicho axioma. La última parte del trabajo de Kay y Womble está dedicada a una fundamentación axiomática de la convexidad en el espacio euclídeo; la familia $\mathcal{C}$ de los convexos queda caracterizada utilizando la métrica euclídea y algunas propiedades intrínsecas de dicha familia.

Resulta evidente que el trabajo de Levi [2] se ve continuado en el de Kay y Womble [3] , el cual trata fundamentalmente de relacionar los números de Carathéodory, Helly y Radon. Esto constituye una línea de investigación dentro de la convexidad axiomática. Un trabajo de distinta naturaleza que los anteriores es el de Eckhoff [5] donde se estudia el número de Radon de un espacio de convexidad producto, conociendo los números de Radon de los espacios factores. Reay [6] hace un trabajo análogo al de Eckhoff pero para el número de Carathéodory.

En el capítulo V del presente trabajo se estudian los números de Carathéodory, Helly y Radon en espacios de convexidad y las relaciones entre dichos números. Después de caracterizar los espacios de convexidad mediante una familia de conjuntos y mediante un operador de cápsula, se estudian los resultados de Levi [2] , de Kay y Womble [3] , y otros resultados del autor de este trabajo de tesis; entre estos últimos podemos citar las proposiciones (3.4), (5.2), (6.1) y (7.2).

2.- Teoremas de separación.

Otra línea de investigación de la convexidad axiomática es la que estudia los teoremas de separación. Uno de los teoremas más fáciles de probar en un contexto axiomático de convexidad es el de Kakutani:

Sea V espacio vectorial sobre un cuerpo ordenado, si A,B son subconjuntos convexos de V disjuntos, entonces existen C,D convexos complementarios tales que $A \subset C$ y $B \subset D$.

La demostración de dicho teorema, utiliza algunas propiedades conjuntistas de la cápsula convexa, el principio maximal de la teoría de conjuntos y una propiedad de geometría combinatoria de los triángulos. Teniendo en cuenta lo anterior, Ellis [7] considera un conjunto X y dos operadores K_1 y K_2 de P(X) en P(X), donde P(X) denota la familia de todos los subconjuntos de X ; dados $a,b \in X$, $K_i(a,b)$ denota $K_i(\{a,b\})$. Los operadores K_i (i = 1,2) deben cumplir los siguientes axiomas:

(P 1) $A \subset X \Rightarrow A \subset K_i(A)$

(P 2) $K_i^2 = K_i$.

(P 3) $A \subset X \Rightarrow K_i(A) = \cup \{K_i(F) \ / \ F \text{ finito y } F \subset A\}$.

(P 4) $\phi \neq F \subset X$, F finito y $p \in X \Rightarrow K_i(F \cup \{p\}) \subset \cup\{K_i(a,p) \ / \ a \in K_i(F)\}$.

(P 5) $a \in K_2(b,p)$ y $c \in K_1(d,p) \Rightarrow K_1(a,d) \cap K_2(b,c) \neq \phi$.

Puede probarse fácilmente que si V es un espacio vectorial sobre un cuerpo ordenado y conv es la cápsula convexa usual, tomando X = V y $K_1 = K_2 =$ conv obtenemos un modelo del sistema axiomático precedente; en el presente trabajo, esto es una consecuencia de las proposiciones (2.8), (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) y (6.1) del capítulo II. Siguiendo los pasos de la demostración del teorema de Kakutani, Ellis prueba, en este sistema axiomático, el siguiente teorema:

Si A,B son subconjuntos de X disjuntos y $A = K_1(A)$, $B = K_2(B)$, entonces existen C,D subconjuntos complementarios tales que $A \subset C = K_1(C)$ y $B \subset D = K_2(D)$.

Evidentemente, una de las consecuencias del teorema de Ellis es el teorema de Kakutani. Esto es lo que realmente nos interesa ya que tomando $K = K_1 = K_2$ y modificando muy poco los axiomas de Ellis, obtenemos, en el capítulo II del presente trabajo, un sistema axiomático que permite deducir muchos resultados geométricos de la teoría de la convexidad. Es así como logramos deshacernos de la estructura vectorial y hacer muchas demostraciones, que habitualmente utilizan álgebra lineal, en una forma geométricamente más pura. La técnica que seguimos consiste en tomar teoremas de la convexidad en espacios vectoriales y tratar de ver si sus demostraciones, con algunas modificaciones, pueden hacerse en nuestro sistema axiomático. Un trabajo análogo se hace con las definiciones, por ejemplo, decimos que A es convexo si $A = K(A)$.

El sistema axiomático considerado en el capítulo II consta de cinco axiomas independientes. La convexidad vectorial nos da un modelo de dicho sistema; un modelo métrico no vectorial aparece en (3.4). Los resultados obtenidos en el capítulo II se deducen de los cuatro primeros axiomas. Por otra parte, en el capítulo IV utilizando los cinco axiomas, probamos el teorema de separación de Kakutani y desarrollamos la teoría de semiespacios, semiespacios con vértice, semiespacios que se apoyan sobre un conjunto, base de convexos y puntos extremales. Los semiespacios con vértice nos permiten caracterizar, en nuestro sistema, los conjuntos iguales a la cápsula convexa del conjunto de sus puntos extremales (ver (6.2) del capítulo IV); nuestra demostración está basada en la dada por Hammer [8] en espacios vectoriales. Parte de esta investigación aparece en los trabajos del autor de esta tesis [9] y [10] .

En el parágrafo 7 del capítulo V nuevamente usamos los cuatro primeros axiomas del sistema axiomático considerado en el capítulo II. Así obtenemos la proposición (7.2) que para X espacio vectorial real se encuentra probada en [11] , teorema 1.24. Finalmente, este sistema axiomático nos permite desarrollar la teoría de conjuntos estrellados en el capítulo VI .

3.- Convexos, cápsula convexa y bandas.

Al desarrollar la teoría de la convexidad en forma axiomática, se pueden tomar diversos conceptos como primitivos. Por ejemplo, Levi [2] y Kay y Womble [3] consideran como concepto primitivo la familia de los convexos y utilizando la interseccionalidad de dicha familia definen la cápsula convexa; la banda o segmento a,b puede definirse como la cápsula convexa de {a,b} .

En el capítulo II del presente trabajo tomamos como concepto primitivo el operador de cápsula convexa K y a partir de él definimos las bandas y los convexos. El operador K puede expresarse mediante las bandas (ver (7.24)) ; el procedimiento utilizado para tal demostración es análogo al dado por Toranzos (ver [12] , (1.2)) para la convexidad en espacios métricos.

En el capítulo III, tomamos como concepto primitivo el de banda y a partir de él, teniendo en cuenta la proposición (7.24) del capítulo II, construimos el operador de cápsula convexa. Este nuevo sistema axiomático resulta equivalente al dado en el capítulo II (ver (5.1) del capítulo III). Nuestros axiomas de bandas son teoremas de la teoría axiomática de Voiculescu [13], pero hay axiomas de Voiculescu que no son teoremas de nuestro sistema axiomático de bandas (ver parágrafo 6 del capítulo III).

El sistema axiomático dado por Voiculescu tiene como concepto primitivo el de segmento, que también podríamos llamar banda. Denota con $E(a,b)$ al segmento determinado por a,b y toma los siguientes axiomas:

A. 1. $E(a,b) = E(b,a)$.

A. 2. $E(a,a) = \{a\}$.

A. 3. $a \in E(a,b)$.

A. 4. $x \in E(a,b) \Rightarrow E(a,b) = E(a,x) \cup E(x,b)$.

A. 5. $x \in E(a,b) \Rightarrow E(a,x) \cap E(x,b) = \{x\}$.

A. 6. Si $\{x,y\} \subset E(x_1, x_2) \cap E(x_3,x_4)$ donde $x \neq y$, entonces existen dos índices k,l $(k \neq l)$ tales que $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subset \subset E(x_k, x_l)$.

Mediante los axiomas precedentes deduce propiedades de los segmentos análogas a las que tienen en los espacios vectoriales sobre cuerpos ordenados, y define semirrecta y recta. Tomando la definición usual de convexo deduce la interseccionalidad. La definición de cápsula convexa de un conjunto M resulta rutinaria : $E(M) = \cap \{C \ / \ M \subset C$ y C convexo $\}$. Voiculescu también introduce una topología. Destaquemos que para obtener otros resultados agrega en la segunda parte de su trabajo los axiomas:

A. 7. $E(a,b) - \{a,b\} \neq \phi \quad (a \neq b)$.

A. 8. Si $y \in E(M) - E(M - \{x\})$ $(x \in M)$, entonces existe $z \in \in E(M - \{x\})$ tal que $y \in E(x,z)$.

Este último axioma es la proposición (9.4) del capítulo II expresada en una forma distinta. Casi toda la segunda parte del trabajo de Voiculescu se dedica al estudio de la convexidad en un triángulo. Lo interesante del sistema axiomático de Voiculescu es que logra un desarrollo geométrico de la convexidad. Los axiomas que toma son lo suficientemente fuertes como para obtener propiedades adecuadas para los segmentos, semirrectas y rectas.

Finalmente, las relaciones entre los espacios de convexidad y los operadores de cápsula convexa aparecen en (1.1), (1.2), (1.3) y (1.4) del capítulo V .

4.- Conjuntos estrellados.

Mediante las bandas podemos definir, por analogía con el caso vectorial, las nociones de núcleo y de conjunto estrellado. Algunos resultados obtenidos por Toranzos [14] y por Drešević [15], para estrellados en espacios vectoriales, pueden extenderse al sistema axiomático del capítulo II . Así, en el capítulo VI podemos demostrar que el núcleo de un conjunto A es la intersección de la familia de las componentes convexas de A (ver (1.7)) . También podemos demostrar un teorema análogo al de Kakutani pero reemplazando los convexos por estrellados (ver (2.3)) .

CAPITULO II

SISTEMA AXIOMATICO PARA OPERADORES DE CAPSULA CONVEXA.

Parte del contenido de este capítulo y de los dos siguientes se encuentra en los trabajos del autor [9] y [10] ya mencionados en la Introducción. Con anterioridad a la publicación de dichos trabajos, el autor comunicó algunos de los resultados en las Reuniones Anuales de la U.M.A. realizadas en 1970 [16] y 1971 [17] y [18].

En el presente capítulo estudiaremos un sistema axiomático independiente y no categórico para operadores de cápsula convexa basado en un trabajo de Ellis [7]. Los cinco axiomas considerados son ciertas propiedades de la cápsula convexa en espacios vectoriales sobre cuerpos ordenados, que pueden expresarse prescindiendo de la estructura vectorial. Utilizando únicamente los cuatro primeros axiomas obtendremos numerosos resultados, que obviamente serán válidos para la convexidad en espacios vectoriales, sin usar los recursos del álgebra lineal y en una forma geométricamente más pura. El quinto axioma no será utilizado en las deducciones de este capítulo, aunque va a tener fundamental importancia en el capítulo IV para deducir el teorema de separación de Kakutani.

1.- Notación y axiomas.

Sean X un conjunto tal que card $X \geq 2$, P(X) la familia de todos los subconjuntos de X, K una función de P(X) en P(X) . Para hacer más simple la notación, si $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset X$, $K(\{a_1, \ldots, a_n\})$ se escribirá $K(a_1, \ldots, a_n)$. Como ya indicamos, algunas de las propiedades de la cápsula convexa en espacios vectoriales sobre cuerpos ordenados se toman como axiomas que debe cumplir K :

(Ax 1) $A \subset X \Rightarrow K(K(A)) \subset K(A)$.

(Ax 2) $A \subset X \Rightarrow K(A) = \cup \{K(F) \ / \ F$ finito y $F \subset A \}$.

(Ax 3) $a \in X \Rightarrow K(a) = \{a\}$.

(Ax 4) $\phi \neq F \subset X$, F finito y $p \in X \Rightarrow$

$\Rightarrow K(F \cup \{p\}) \subset \cup \{K(a,p) \ / \ a \in K(F)\}$.

(Ax 5) $a \in K(b,p)$ y $c \in K(d,p) \Rightarrow K(a,d) \cap K(b,c) \neq \phi$.

La función K se llamará <u>operador de cápsula convexa</u> en X . Dado $\{a,b\} \subset X$, diremos que K(a,b) es la <u>banda</u> determinada por a,b ; evidentemente, K(a,b) juega el papel del segmento determinado por a,b . Por analogía con la convexidad en espacios vectoriales, dado $A \subset X$, K(A) se llamará <u>cápsula convexa</u> de A ; diremos que A es <u>convexo</u> si A = K(A) .

Ahora vamos a hacer un comentario sobre cada uno de los axiomas precedentes:

(1.1) El <u>axioma 1</u> indica una idempotencia débil de K . En efecto, si en el mismo reemplazamos la inclusión que aparece en el consecuente por la igualdad, obtenemos que $K^2 = K$, o sea, K resultaría idempotente. Más adelante veremos que de los tres primeros axiomas se deduce la idempotencia de K ; sin embargo, un operador puede ser idempotente sin cumplir los axiomas 2 y 3 ; como ejemplo de esto último podemos mencionar la cápsula cónica cerrada en el plano.

Entre los ejemplos de operadores idempotentes podemos citar las cápsulas convexa, afín y lineal en espacios vectoriales, y la clausura e interior en espacios topológicos.

También podemos dar ejemplos de operadores no idempotentes . Si definimos para todo A subconjunto del plano, $C(A) = \cup\{[a,b] \ / \ / \ a,b \in A \}$, en donde $[a,b]$ denota el segmento cerrado de extremos a,b, entonces $C(A) \subset C(C(A))$; sin embargo, tomando como A un subconjunto del plano formado por tres puntos no alineados, obtenemos que $C(C(A)) \not\subset C(A)$; en consecuencia, C no tiene la propiedad de idempotencia débil y, por supuesto, no es idempotente. Notemos que en este capítulo trabajaremos con un operador C definido a partir de K de la siguiente manera $C(A) = \cup\{K(a,b) / a,b \in A\}$ (ver parágrafo 7).

En cualquier espacio topológico el operador frontera cumple el axioma 1 ; en efecto, $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{CA}$, o sea, la frontera de A es igual a la clausura de A intersección la clausura del complementario de A ; en consecuencia $Fr(Fr(A)) = \overline{Fr(A)} \cap \overline{CFr(A)} = Fr(A) \cap \overline{CFr(A)} \subset Fr(A)$. Sin embargo, inmediatamente encontramos espacios topológicos en donde el operador frontera no es idempotente. Por ejemplo, si consideramos el conjunto R de los números reales y denotamos con Q el conjunto de los números racionales, obtenemos $Fr(FrQ) = Fr(R) = \phi$, luego $Fr(Q) \not\subset Fr(Fr(Q))$. Así el operador frontera en R , verifica la idempotencia débil pero no la idempotencia; esto se debe a que este operador si bien cumple (Ax 1) y (Ax 3), no cumple (Ax 2) .

(1.2) Según la definición dada por Hammer [19] , el axioma 2 afirma que K tiene la propiedad de dominio finito. Evidentemente, esta propiedad es una forma débil del teorema de Carathéodory; la misma se presenta en operadores definidos en estructuras algebraicas ya que las operaciones de dichas estructuras se efectúan con un número finito de elementos.

Como ejemplos de operadores con la propiedad de dominio finito, citemos las cápsulas convexa, afín y lineal en espacios vectoriales.

Si trabajamos en el plano con la topología usual, vemos que los operadores de clausura, interior y cápsula convexa cerrada no tienen la propiedad de dominio finito. En efecto, denotemos como es habitual, la clausura, interior, cápsula convexa y cápsula convexa cerrada de A con $\overline{A}$, $\overset{\circ}{A}$, conv A y cconv A , respectivamente. Tomando como conjunto A un círculo abierto del plano, tenemos que $\overline{A}$ es el círculo cerrado, $\overset{\circ}{A} = A$ y cconv $A = \overline{A}$; sin embargo, $\cup\{\overline{F}$ / F finito y $F \subset A\} = \cup\{F$ / F finito y $F \subset A\} =$ $= A$, $\cup\{\overset{\circ}{F}$ / F finito y $F \subset A\} = \phi$ y $\cup\{$cconv F / F finito y $F \subset A\} = \cup\{$conv F / F finito y $F \subset A\}=$ conv A = A . Observemos que acabamos de utilizar que si F es finito entonces cconv F = = conv F , lo cual resulta inmediato; en efecto, si F es finito, es compacto; así conv F resulta compacto y, en consecuencia, cerrado.

En (6.2) veremos que una consecuencia inmediata de la propiedad de dominio finito es la isotonía, o sea, si K tiene la propiedad de dominio finito, entonces $A \subset B \Rightarrow K(A) \subset K(B)$. Resulta evidente que la isotonía es más débil que la propiedad de dominio finito; tomemos, como ejemplos, los operadores clausura e interior en el plano con la topología usual; por definición de clausura e interior, en cualquier espacio topológico, cumplen la primera propiedad, pero según vimos no cumplen la segunda. Trabajando nuevamente en el plano, vemos que el operador frontera no es isotónico. Los operadores isotónicos también podrían llamarse monótonos, aunque preferimos la primera denominación que es la usada por Hammer (ver [19] , [20] y [21]).

(1.3) Decimos que un espacio topológico X es T_1 si para todo $x \in X$, $\overline{\{x\}} = \{x\}$; análogamente, diremos que K tiene la propiedad T_1 (o K es T_1) si para todo $x \in X$, $K(x) = \{x\}$. De acuerdo a lo anterior, el axioma 3 afirma que K tiene la propiedad T_1 . Interpretando K como la cápsula convexa, dicho axioma asegura que los conjuntos unitarios son convexos.

En espacios vectoriales, las cápsulas convexa y afín tienen la propiedad T_1 , mientras que la cápsula lineal no goza de esta propiedad.

En el presente sistema axiomático, el axioma 3 ya interviene al deducir las primeras proposiciones; por ejemplo, utilizamos (Ax 2) y (Ax 3) para probar que $A \subset X \Rightarrow A \subset K(A)$. Llamando a esta última propiedad (Ax 3*), se ve que muchos resultados de la teoría de la convexidad pueden obtenerse en el sistema axiomático que resulta de reemplazar (Ax 3) por (Ax 3*) dejando los restantes axiomas sin modificaciones. En este nuevo sistema, utilizando (Ax 1) y (Ax 3*) obtenemos que $K^2 = K$. Así, si llamamos (Ax 1*) a la propiedad $K^2 = K$, obtenemos que el sistema axiomático dado por los axiomas 1, 2, 3*, 4 y 5 es equivalente al dado por los axiomas 1*, 2, 3*, 4 y 5 . Se ve fácilmente que este último sistema axiomático (o su equivalente dado por los axiomas 1, 2, 3*, 4 y 5), es más débil que el dado por (Ax 1) a (Ax 5), ya que en el nuevo sistema axiomático no se deduce la propiedad T_1 como puede probarse si tomamos como modelo de este nuevo sistema un conjunto X tal que card $X \geq 2$ y para todo $A \subset X$, $K(A) = X$.

Según puede verse en el trabajo de Ellis [7] , en el sistema axiomático más débil se deduce igualmente el teorema de separación de Kakutani. El motivo básico por el cual pedimos el axioma 3 es que éste nos permite desarrollar en forma más adecuada la teoría de semiespacios. De cualquier manera, las proposiciones del presente capítulo podrían demostrarse mediante los cuatro primeros axiomas del sistema débil y agregando $K(\phi) = \phi$, esta última propiedad resultaría necesaria para deducir que A es convexo sii $\{a,b\} \subset A \Rightarrow K(a,b) \subset A$.

(1.4) Según hemos visto, las cápsulas convexa y afín, en espacios vectoriales, verifican los axiomas 1, 2 y 3 . Sin embargo, el <u>axioma 4</u> vale para la cápsula convexa pero no para la afín. Por ejemplo, si en el plano tomamos tres puntos no alineados b, c, p y $F = \{b,c\}$, denotando con af la cápsula afín, obtenemos que $af(F \cup \{p\})$ es el plano, pero $\cup \{af(a,p) \ / \ a \in af(F)\} = S_1 \cup S_2 \cup \{p\}$, donde S_1 y S_2 son los semiplanos abiertos determinados por la recta que pasa por p y es paralela a la recta b,c. Resulta inmediato ver que la cápsula lineal verifica el axioma 4, aunque ya vimos que no verifica (Ax 3) .

Observemos que si sacamos de la hipótesis de (Ax 4) que $F \neq \phi$, entonces el nuevo axioma ya no es válido para la cápsula convexa en espacios vectoriales ya que $\text{conv}(\phi \cup \{p\}) = \{p\}$ pero $\cup \{\text{conv}(a,p) \ / \ a \in \text{conv}(\phi)\} = \phi$. En el enunciado de este axioma dado por Ellis [7] , no se pide que $F \neq \phi$ aunque, evidentemente, se sobreentiende.

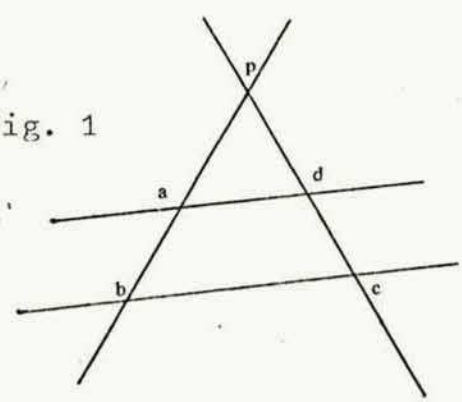
Según probamos en el presente capítulo, de los cuatro primeros axiomas se deduce un enunciado más fuerte que el axioma 4 , en donde en la hipótesis se elimina la condición F finito y en la tesis se reemplaza la inclusión por la igualdad. Utilizando, únicamente, el axioma 4 y la propiedad de dominio finito, se deduce que $\phi \neq A \subset X$, A convexo y $p \in X \Rightarrow K(A \cup \{p\}) = \cup \{K(a,p) \ / \ a \in A\}$ (ver [7], 4.3). Este último resultado va a ser utilizado en la demostración del teorema de separación de Kakutani.

Al probar, en (7.1), que $K(A) = A$ sii $\{a,b\} \subset A \Rightarrow K(a,b) \subset A$, utilizamos (Ax 4). Observemos que este resultado también es válido para la cápsula afín (ver [22], 1.C.3), aunque la misma no verifica el axioma 4 . Así si tomamos como axiomas (Ax 1), (Ax 2), (Ax 3) y el presente resultado, obtenemos un sistema axiomático cuyos teoremas son válidos para las cápsulas convexa y afín.

Para interpretar el axioma 4 , en una forma geométricamente más clara, introduciremos el operador <u>cono de vértice</u> p <u>y base</u> A : $\text{Cono}_p(A) = \cup \{K(a,p) \ / \ a \in A\}$ (ver [3] , pág. 472). En virtud de la definición precedente, la tesis de (Ax 4) puede escribirse $K(F \cup \{p\}) \subset \text{Cono}_p(K(F))$. Los axiomas 1 a 3 permiten deducir que si $F \neq \phi$ entonces $K(F \cup \{p\}) = K(\text{Cono}_p(F))$; en consecuencia podemos escribir la tesis de (Ax 4) de la siguiente forma : $K(\text{Cono}_p(F)) \subset \text{Cono}_p(K(F))$. Como de los cuatro primeros axiomas se deduce que en la tesis de (Ax 4) podemos reemplazar la inclusión por la igualdad, obtenemos que $K(\text{Cono}_p(F)) = \text{Cono}_p(K(F))$, o sea, el axioma 4 expresa la conmutatividad entre los operadores K y $Cono_p$. Esta última igualdad, que relaciona ambos operadores, también vale si $F = \phi$ pues $K(\phi) = \phi$ y $Cono_p(\phi) = \phi$. Así, suponiendo (Ax 1), (Ax 2) y (Ax 3), obtenemos que (Ax 4) es equivalente a $F \subset X$, F finito y $p \in X \Rightarrow$ $\Rightarrow K(Cono_p(F)) = Cono_p(K(F))$.

(1.5) El axioma 5 , que no utilizaremos en las demostraciones de este capítulo, permitirá deducir, conjuntamente con los anteriores, el teorema de separación de Kakutani. Análogamente a lo que ocurre con (Ax 4), este axioma es válido para la cápsula convexa en espacios vectoriales pero no lo es para la afín. Para ver esto último, tomemos en el plano tres puntos no alineados b, d, p ; sea a un punto del segmento abierto (b,p). Si c es el punto de intersección de la paralela a a d que pasa por b con la recta d p , tenemos que $a \in af(b,p)$ y $c \in af(d,p)$ pero $af(a,d) \cap af(b,c) = \phi$, pues af(a,d) y af(b,c) son rectas paralelas (ver fig. 1).

Fig. 1



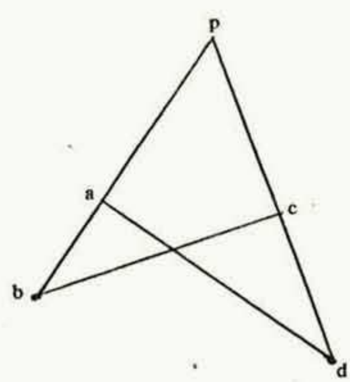


Fig. 2

La figura 2 ilustra el axioma 5 para el caso en que X sea el plano y K la cápsula convexa usual.

La cápsula lineal satisface (Ax 5) en forma inmediata ya que el vector 0 pertenece a todo subespacio; sin embargo, esto resulta inútil pues al no haber subespacios disjuntos, carece de sentido formular un teorema de separación para subespacios.

En el capítulo IV veremos que si suponemos los axiomas 1 a

4 , entonces (Ax 5) es equivalente al teorema de separación de Kakutani. A la misma equivalencia se llega suponiendo los axiomas 1*, 2, 3* y 4 (ver [7] , 6.1) .

2.- La convexidad en espacios vectoriales.

Si bien hemos dicho que la cápsula convexa en espacios vectoriales sobre cuerpos ordenados satisface los axiomas 1 a 5 , hasta ahora no hemos probado tal afirmación. El objetivo de este parágrafo consiste en dar las nociones básicas de convexidad vectorial que permitan probar que si X es un espacio vectorial sobre un cuerpo ordenado E , y K = conv es la cápsula convexa usual, entonces K satisface (Ax 1) a (Ax 5), o sea, el conjunto X con el operador K es un modelo del sistema axiomático que estamos estudiando. La existencia de modelos nos permite afirmar la consistencia de dicho sistema. Por otra parte, tomando espacios vectoriales de diferentes dimensiones sobre el mismo cuerpo ordenado E , obtenemos modelos no isomorfos; así el sistema axiomático resulta no categórico.

Supongamos que X sea un espacio vectorial (de dimensión $\geqslant 1$) sobre un cuerpo ordenado E ; evidentemente, card X $\geqslant 2$. Dados $a,b \in X$, definimos el segmento cerrado de extremos a,b por $[a,b] = \{\lambda_1 a + \lambda_2 b \ / \ \lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0 \text{ y } \lambda_1 + \lambda_2 = 1\} = \{\lambda a + (1 - \lambda) b \ / \ / \ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \}$. Una combinación convexa de $a_1, \dots, a_n \in X$ es una combinación lineal $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$ cuyos coeficientes verifican $\lambda_i \geqslant 0$ ($i = 1, \dots, n$) y $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. En forma inmediata obtenemos:

(2.1) Una combinación convexa de combinaciones convexas de a_1 , $\dots, a_n$ es otra combinación convexa de $a_1, \dots, a_n$.

Si $A \subset X$, diremos que A es convexo si $a,b \in A \Rightarrow [a,b] \subset A$. Por la definición precedente resulta inmediata la siguiente proposición:

(2.2) i.- ϕ y X son convexos. ii.- $a \in X \Rightarrow \{a\}$ es convexo. iii.- La intersección de cualquier familia de subconjuntos convexos de X es un subconjunto convexo de X .

(2.3) $a,b \in X \Rightarrow [a,b]$ es convexo .

Demostración. Sean $a,b \in X$, si $c,d \in [a,b]$ veremos que $[c,d] \subset$ $\subset [a,b]$. Por definición de segmento cerrado, c y d son combinaciones convexas de a,b . Tomemos $x \in [c,d]$, así x es combinación convexa de c,d ; luego por (2.1), x es combinación convexa de a,b , y , en consecuencia, $x \in [a,b]$.

(2.4) Si $A \subset X$, los siguientes enunciados son equivalentes: i.- A es convexo. ii.- $a_1,\ldots, a_n \in A$, $\lambda_i \geqslant 0$ $(i = 1,\ldots, n)$ y $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1 \Rightarrow \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n \in A$.

Demostración. i $\Rightarrow$ ii. Dicha prueba se hace por inducción sobre el número n de elementos de A considerados. Para n = 1 ó 2 resulta trivial. Si suponemos que vale ii para $n = j \geqslant 2$, veremos que también vale ii para $n = j + 1$. Sea $a = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_j a_j + \lambda_{j+1} a_{j+1}$ una combinación convexa de $a_1,\ldots, a_j, a_{j+1} \in A$ y supongamos que $\lambda_i > 0$ $(i = 1,\ldots, j + 1)$. Si $\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_j$, entonces $a = \lambda(\frac{\lambda_1}{\lambda} a_1 + \ldots + \frac{\lambda_j}{\lambda} a_j) + \lambda_{j+1} a_{j+1}$. Sea $b = \frac{\lambda_1}{\lambda} a_1 + \ldots + \frac{\lambda_j}{\lambda} a_j$, por hipótesis inductiva $b \in A$. Así, como A es convexo, resulta $a \in [b,a_{j+1}] \subset A$. ii $\Rightarrow$ i . Es trivial.

Si $A \subset X$, definimos la <u>cápsula convexa</u> de A mediante $\mathrm{conv}(A) = \cap\{B \subset X \ / \ A \subset B \text{ y } B \text{ convexo}\}$. Si $\{a_1,\ldots, a_n\} \subset X$, $\mathrm{conv}(\{a_1,\ldots, a_n\})$ se escribirá $\mathrm{conv}(a_1,\ldots, a_n)$. La definición precedente conjuntamente con (2.2)iii, permite deducir la siguiente proposición:

(2.5) Sea $A \subset X$, entonces: i.- $A \subset \mathrm{conv}(A)$. ii.- conv(A) es convexo. iii.- $A \subset B$ y B convexo $\Rightarrow \mathrm{conv}(A) \subset B$. iv.- $A \subset B \subset X \Rightarrow \mathrm{conv}(A) \subset \mathrm{conv}(B)$. v.- A es convexo $\Leftrightarrow A = \mathrm{conv}(A)$.

(2.6) Sea $A \subset X$, la cápsula convexa de A es igual al conjunto de todas las combinaciones convexas de elementos de A , o sea, $\mathrm{conv}(A) = \{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \ / \ n \text{ natural}, \ a_i \in A \ , \ \lambda_i \geqslant 0 \text{ y } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \}$.

<u>Demostración</u>. Sea B el conjunto de todas las combinaciones convexas de elementos de A . Resulta evidente que $A \subset B$. Por (2.1) toda combinación convexa de elementos de B , pertenece a B ; en consecuencia B es convexo. Así, por (2.5)iii, $\mathrm{conv}(A) \subset B$. Si $x \in B$, entonces x es una combinación convexa de elementos a_1 , ..., $a_n \in A$ (n natural); pero por (2.5)i, $a_1 , \ldots , a_n \in \mathrm{conv}(A)$. Luego, por (2.4) y (2.5)ii, obtenemos que $x \in \mathrm{conv}(A)$. En consecuencia $B \subset \mathrm{conv}(A)$.

Como corolario de (2.6) obtenemos la siguiente proposición:

(2.7) Si $F = \{a_1 , \ldots , a_n\}$ es un subconjunto finito de X , entonces $\mathrm{conv}(F) = \{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \ / \ \lambda_i \geqslant 0 \text{ y } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \}$.

Ahora veremos que conv cumple los axiomas 1 a 5 .

(2.8) $A \subset X \Rightarrow \mathrm{conv}(\mathrm{conv}(A)) \subset \mathrm{conv}(A)$.

<u>Demostración</u>. Podemos hacerla, por ejemplo, utilizando (2.5) ii y v . En efecto, tomemos $B = \mathrm{conv}(A)$; por ii, B es convexo; así por v obtenemos que $B = \mathrm{conv}(B)$ y en consecuencia $\mathrm{conv}(A) = \mathrm{conv}(\mathrm{conv}(A))$. También podemos hacer la demostración aplicando (2.1) y (2.6).

(2.9) $A \subset X \Rightarrow \mathrm{conv}(A) = \bigcup \{\mathrm{conv}(F) \ / \ F \text{ finito y } F \subset A \}$.

<u>Demostración</u>. Por (2.5)iv, $\bigcup \{\mathrm{conv}(F) \ / \ F \text{ finito y } F \subset A \} \subset \mathrm{conv}(A)$. Para probar la otra inclusión, tomemos $x \in \mathrm{conv}(A)$;

por (2.6). para algún n natural, existen $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ donde $\lambda_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Sea $F = \{a_1, \ldots, a_n\}$; así F es finito y $F \subset A$; además por (2.7), $x \in \mathrm{conv}(F)$.

(2.10) $a \in X \Rightarrow \mathrm{conv}(a) = \{a\}$.

Demostración. Resulta de (2.2)ii y de (2.5)v.

(2.11) $\phi \neq F \subset X$, F finito y $p \in X \Rightarrow \mathrm{conv}(F \cup \{p\}) \subset \subset \cup\{\mathrm{conv}(a,p) \ / \ a \in \mathrm{conv}(F)\}$.

Demostración. Por (2.3) y (2.5)v , $\mathrm{conv}(a,p) = [a,p]$; sea $A = \cup \{[a,p] \ / \ a \in \mathrm{conv}(F)\}$; suponiendo las hipótesis, tendremos que probar que $\mathrm{conv}(F \cup \{p\}) \subset A$. Por (2.5)i y por ser $F \neq \phi$, resulta que $F \cup \{p\} \subset A$. Ahora veremos que A es convexo, con lo que completaremos la demostración en virtud de (2.5)iii.

Sean $a_1, b_1 \in A$, luego existen $a,b \in \mathrm{conv}(F)$, $\alpha, \beta \in E$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta \leq 1$, tales que $a_1 = \alpha a + (1-\alpha) p$, $b_1 = \beta b + (1-\beta) p$. Veamos que $[a_1, b_1] \subset A$; sea $x_1 \in [a_1, b_1]$, así existe $\gamma \in E$, $0 \leq \gamma \leq 1$, tal que $x_1 = \gamma a_1 + (1-\gamma) b_1$. En consecuencia, $x_1 = \gamma \alpha a + (1-\gamma)\beta b + [1 - \gamma\alpha - (1-\gamma)\beta] p$. Sea $\eta = \gamma\alpha + (1-\gamma)\beta$; sin quitar generalidad, podemos suponer que $\alpha \leq \beta$; así obtenemos que $\alpha \leq \eta \leq \beta$, de donde $0 \leq \eta \leq 1$. Si $\eta = 0$, entonces $a_1 = p$; luego, por (2.3), $[a_1, b_1] \subset [b,p] \subset \subset A$. Ahora supongamos $\eta \neq 0$; sea $x = \frac{\gamma\alpha}{\eta} a + \frac{(1-\gamma)\beta}{\eta} b$; evidentemente, $x \in [a,b] \subset \mathrm{conv}(F)$ y $x_1 = \eta x + (1-\eta) p$; luego $x_1 \in A$. Así $[a_1, b_1] \subset A$ y A resulta convexo.

(2.12) $a \in \mathrm{conv}(b,p)$ y $c \in \mathrm{conv}(d,p) \Rightarrow \mathrm{conv}(a,d) \cap \mathrm{conv}(b,c) \neq \neq \phi$.

Demostración. Por (2.3) y (2.5)v, tendremos que probar que $a \in [b,p]$ y $c \in [d,p] \Rightarrow [a,d] \cap [b,c] \neq \phi$. Supongamos $a \in [b,p]$

y $c \in [d,p]$; luego existen $\alpha, \beta \in E$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, tales que $a = \alpha\, b + (1-\alpha)\, p$ y $c = \beta\, d + (1-\beta)\, p$. Para ver que existe $x \in [a,d] \cap [b,c]$, tendremos que determinar $\gamma, \delta \in E$, $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$, $0 \leqslant \delta \leqslant 1$, tales que $\gamma\, a + (1-\gamma)\, d = \delta b + (1-\delta)\, c$. Reemplazando a y c por sus valores, obtenemos $\alpha\, \gamma\, b + (1-\gamma)\, d + (1-\alpha)\, \gamma\, p = \delta\, b + \beta\,(1-\delta)\, d + (1-\beta)(1-\delta)p$. Supondremos que $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, ya que si $\alpha = 0$ ó 1 , o si $\beta = 0$ ó 1 , trivialmente $[a,d] \cap [b,d] \neq \phi$. De esta forma, por igualación de coeficientes determinamos $\gamma = \dfrac{1-\beta}{1-\alpha\beta}$ y $\delta = \dfrac{(1-\beta)\alpha}{1-\alpha\beta}$. Así, tomando

$$x = \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta}\, a + \frac{(1-\alpha)\beta}{1-\alpha\beta}\, d = \frac{(1-\beta)\alpha}{1-\alpha\beta}\, b + \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}\, c \quad ,$$

tenemos que $x \in [a,d] \cap [b,c]$.

De esta forma, hemos probado que si X es un espacio vectorial de dimensión $\geqslant 1$ sobre un cuerpo ordenado E , y conv es la cápsula convexa usual en X , entonces conv cumple los axiomas 1 a 5 . Las demostraciones hechas en este parágrafo no difieren de las que se hacen para probar las mismas proposiciones cuando E es el conjunto R de los números reales. Teniendo en cuenta esto último, ha resultado de suma utilidad la lectura de 1. C. [22] para la redacción del presente parágrafo.

3.- Otros modelos.

En virtud de lo que acabamos de estudiar en 2, el sistema axiomático dado por (Ax 1) a (Ax 5) tiene modelos, incluso no isomorfos. Ahora, consideraremos otros modelos de ese sistema axiomático.

(3.1) Sean V un espacio vectorial (de dimensión $\geqslant 1$) sobre un cuerpo ordenado E , X un subconjunto convexo de V tal que card $X \geqslant 2$; para todo $A \subset X$, definimos $K(A) = \mathrm{conv}(A)$ donde conv(A) es la cápsula convexa usual de A en V ya definida en el parágrafo 2 . La convexidad de X permite asegurar, por (2.5)iii, que si $A \subset X$ entonces $K(A) \subset X$; así K es una función de P(X) en P(X) . Evidentemente, en virtud de las proposiciones (2.8) a (2.12), K cumple (Ax 1) a (Ax 5). Observemos que la función K se obtiene de conv restringiendo su dominio y codominio a P(X) .

(3.2) El procedimiento utilizado en (3.1), permite obtener a partir de un modelo otros modelos del sistema axiomático que estamos considerando. En efecto, sean X un conjunto tal que card $X \geq 2$ y K un operador de cápsula convexa en X , o sea, una función de P(X) en P(X) que cumpla (Ax 1) a (Ax 5). Si tomamos $X_1 \subset X$ con card $X_1 \geq 2$ y $K(X_1) = X_1$, es decir X_1 convexo, procediendo como en (3.1) podemos definir para todo $A \subset X_1$, $K_1(A) = K(A)$. La isotonía de K asegura que $A \subset X_1$ implica que $K_1(A) \subset X_1$. Así K_1 es una función de $P(X_1)$ en $P(X_1)$ que cumple (Ax 1) a (Ax 5) y, en consecuencia, es un operador de cápsula convexa en X_1.

(3.3) Sea X un conjunto tal que card $X \geq 2$; para todo $A \subset X$ definimos $K(A) = A$. Resulta inmediato que la función K , con dominio y codominio P(X), es un operador de cápsula convexa en X . En efecto, la verificación de los axiomas resulta trivial por propiedades elementales de la teoría de conjuntos; por ejemplo, para ver que se cumple (Ax 5), hay que comprobar que $a \in \{b,p\}$ y $c \in \{d,p\} \Rightarrow \{a,d\} \cap \{b,c\} \neq \phi$. Llamaremos a este modelo <u>discreto</u> pues en él todo subconjunto de X es convexo. Este modelo nos permite afirmar que en el sistema axiomático dado por (Ax 1) a (Ax 5) no se puede probar que si $a \neq b$ entonces $K(a,b) - \{a,b\} \neq \phi$. Esta propiedad, válida para la convexidad vectorial, aparece en el trabajo de Voiculescu [13] como axioma 7 .

(3.4) Sean X el plano euclidiano, $|x\ y|$ la longitud del segmento $x\ y$ (para $x,y \in X$), s un punto de X. Dados $a,b \in X$, definimos $d_s(a,b) = |a\ b|$ si a,b,s están alineados y $d_s(a,b) = |a\ s| + |s\ b|$ si a,b,s no están alineados. En forma inmediata podemos probar que (X,d_s) es un espacio métrico. En efecto, $d_s(a,b) \geqslant 0$ pues para $x,y \in X$ $|x\ y| \geqslant 0$. Veamos ahora que $d_s(a,b) = 0$ sii $a = b$. Supongamos $d_s(a,b) = 0$; si $d_s(a,b) = |a\ b|$, resulta $|a\ b| = 0$ y, en consecuencia, $a = b$; si $d_s(a,b) = |a\ s| + |s\ b|$, resulta $|a\ s| = 0 = |s\ b|$ y, en consecuencia, $a = s = b$, o sea, $a = b$. Evidentemente $a = b$ implica $d_s(a,b) = 0$. Procediendo en forma análoga se demuestra que $d_s(a,b) = d_s(b,a)$. Para probar que $d_s(a,c) \leqslant d_s(a,b) + d_s(b,c)$, suponemos primero que a, c, s están alineados en cuyo caso $d_s(a,c) = |a\ c| \leqslant |a\ b| + |b\ c| \leqslant d_s(a,b) + d_s(b,c)$; aquí hemos aplicado la propiedad triangular de la distancia euclidiana y que para $x,y \in X$, $|x\ y| \leqslant d_s(x,y)$. Si a, c, s no están alineados entonces $d_s(a,c) = |a\ s| + |s\ c|$; si $b = s$, evidentemente, vale $d_s(a,c) \leqslant d_s(a,b) + d_s(b,c)$; si suponemos $b \neq s$, tendremos que analizar los siguientes casos: 1º) a, b, s alineados y, en consecuencia, b, c, s no alineados; así $d_s(a,c) = |a\ s| + |s\ c| \leqslant |a\ b| + |b\ s| + |s\ c| = d_s(a,b) + d_s(b,c)$. 2º) b, c, s alineados y, en consecuencia, a, b, s no alineados; así $d_s(a,c) = |a\ s| + |s\ c| \leqslant |a\ s| + |s\ b| + |b\ c| = d_s(a,b) + d_s(b,c)$. 3º) a, b, s y b, c, s no alineados; así $d_s(a,c) = |a\ s| + |s\ c| \leqslant |a\ s| + |s\ b| + |b\ s| + |s\ c| = d_s(a,b) + d_s(b,c)$. De esta forma hemos probado que (X,d_s) es un espacio métrico.

Dados $a,b \in X$, definimos $B(a,b) = \{x \in X \;/\; d_s(a,b) = d_s(a,x) + d_s(x,b)\}$. Observemos que si a, b, s están alineados $B(a,b)$ es el segmento $a\ b$; por otra parte, si a, b, s no están alineados, $B(a,b)$ es la unión de los segmentos $a\ s$ y $s\ b$. Sea $A \subset X$, definimos $C(A) = \cup\,\{B(a,b) \;/\; a,b \in A\}$ y $C^n(A)$ inductivamente por: i.- $C^0(A) = A$; ii.- $C^{j+1}(A) = C(C^j(A))$. Finalmente definimos $K(A) = \cup\{C^n(A) / n \geq 0\}$.

Al estudiar el sistema axiomático para operadores de bandas en el capítulo III, veremos que para probar que K cumple (Ax 1) a (Ax 5) alcanza con demostrar que B cumple los axiomas de bandas (P 1) a (P 4) de dicho capítulo. Resulta evidente que $a,b \in B(a,b)$ y que $B(a,a) = \{a\}$; en consecuencia, B cumple (P 1) y (P 2).

Para ver que el operador B cumple (P 3), tomemos $a_1 \in B(a,p)$ $b_1 \in B(b,p)$ y $x_1 \in B(a_1,b_1)$; en virtud de la definición de B , tenemos que $B(a_1,b_1) \subset B(a,p) \cup B(b,p)$ y, en consecuencia, $x_1 \in B(a,p)$ o $x_1 \in B(b,p)$; así tomando, respectivamente, $x = a$. o $x = b$ obtenemos que $x_1 \in B(x,p)$. De esta forma llegamos al consecuente de (P 3) según el cual existe $x \in B(a,b)$ tal que $x_1 \in B(x,p)$.

También puede verse fácilmente que el operador B cumple (P 4). En efecto, sean $a \in B(b,p)$ y $c \in B(d,p)$. Si b, p, s ; d, p, s y b, d, s son ternas no alineadas entonces $s \in B(a,d) \cap B(b,c)$. Si solamente una de las tres ternas anteriores está alineada y s está entre los otros dos puntos de esa terna, entonces nuevamente $s \in B(a,d) \cap B(b,c)$. Los casos restantes se reducen a demostrar que en la recta vale que $a \in [b,p]$ y $c \in [d,p] \Rightarrow [a,d] \cap [b,c] \neq \phi$ lo cual es consecuencia de (2.12). De esta forma llegamos en todos los casos a que $B(a,d) \cap B(b,c) \neq \phi$.

De esta forma hemos probado que B cumple (P 1) a (P 4) y, en consecuencia, K cumplirá (Ax 1) a (Ax 5). Observemos que las bandas B(a,b) que hemos definido en el espacio métrico (X,d_s), son llamadas, en [12] , bandas cerradas; además, en virtud de [12] (1.2), K es el operador de cápsula convexa en la métrica d_s . Los resultados dados en [12] sobre convexidad en espacios métricos, se encuentran con mayor detalle en [23] . Gran parte de los resultados sobre convexidad métrica pueden hallarse en

[24] .

Por las definiciones dadas en [23] capítulo IV (o en [12], 2), (X,d_s) no goza de la propiedad de los dos triples (o sea, no es "2-3"); en consecuencia, (X,d_s) no es un espacio de Blumenthal. Resulta inmediato que el operador K definido en (X,d_s) no es el operador de cápsula convexa usual de ningún espacio vectorial.

4.- Relación con el sistema axiomático de Ellis.

El sistema axiomático para operadores de cápsula convexa, es una particularización del dado por Ellis en [7] y cuyos axiomas ya han sido enunciados en el parágrafo 2 , capítulo I del presente trabajo. En lugar de tomar dos operadores K_1 y K_2 como hace Ellis, hemos considerado un solo operador K. Por otra parte pedimos que card $X \geqslant 2$ y que K tenga la propiedad T_1 , es decir, $K(a) = \{a\}$ para todo $a \in X$. Esta propiedad no se deduce en el sistema axiomático de Ellis, pues si consideramos un conjunto X con card $X \geqslant 2$ y definimos para todo $A \subset X$ $K_1(A) = K_2(A) = X$, obtenemos un modelo de dicho sistema axiomático en donde los operadores K_1 y K_2 no cumplen la propiedad T_1 . La condición card $X \geqslant 2$ y la propiedad T_1 del operador K , permiten deducir en nuestro sistema para operadores de cápsula convexa que $K(\phi) = \phi$ y algunos resultados sobre semiespacios (como ya señalamos en (1.3)). Si en el sistema axiomático de Ellis consideramos un único operador K en lugar de dos operadores K_1 y K_2 (o sea, suponemos $K_1 = K_2$ y definimos $K = K_1 = K_2$), entonces los axiomas 1 y 2 de dicho sistema resultan de (6.1)i y ii respectivamente, mientras que los axiomas 3, 4 y 5 son respectivamente (Ax 2), (Ax 4) y (Ax 5).

5.- Independencia de los axiomas.

En este parágrafo veremos que cualquiera de los axiomas del sistema axiomático para operadores de cápsula convexa considerado, es independiente de los restantes, o sea, no se deduce de ellos. Con tal fin, para cada uno de los axiomas (Ax 1) a (Ax 5), encontraremos un conjunto X tal que card $X \geq 2$ y una función $K : P(X) \to P(X)$ que no verifique dicho axioma pero cumpla todos los restantes. En cada caso tendremos que definir $K(A)$ para todo $A \subset X$.

(5.1) Independencia de (Ax 1). Tomemos como conjunto X el plano y definamos $K(A) = C(A) = \cup\{[a,b] \ / \ a,b \in A\}$, en donde $[a,b]$ denota el segmento cerrado de extremos a,b . En virtud de lo visto en (1.1), el operador K así definido no cumple (Ax 1). Sin embargo, fácilmente podemos ver que K cumple los restantes axiomas. En efecto, para ver que K cumple (Ax 2), tenemos en cuenta que $K(a,b) = [a,b]$; luego, por definición de K, resulta $K(A) = \cup \{K(a,b) / a,b \in A\} \subset \cup \{K(F) \ / \ F$ finito y $F \subset A\}$; como por otra parte $F \subset A$ implica $K(F) \subset K(A)$, obtenemos $K(A) = \cup\{K(F) \ / \ F$ finito y $F \subset A\}$. Obviamente, K cumple (Ax 3) . Para probar que K cumple (Ax 4), consideremos $\phi \neq F \subset X$, F finito y $p \in X$, así $K(F \cup \{p\}) = \cup\{K(a,b) \ /a,b \in F \cup \{p\}\} \subset \cup\{K(a,p) \ / \ a \in K(F)\}$. El operador K cumple (Ax 5) pues en virtud de la demostración de (2.12) podemos afirmar que en el plano vale que si $a \in [b,p]$ y $c \in [d,p]$ entonces $[a,d] \cap [b,c] \neq \phi$. Así queda probada la independencia de (Ax 1).

La construcción anterior puede generalizarse permitiéndonos obtener otros ejemplos para probar la independencia de (Ax 1). En efecto, si X es un espacio vectorial sobre un cuerpo ordenado E , con $\dim X = d \geq 1$ y definimos $C(A) = \cup\{[a,b] \ / \ a,b \in A\}$ y $C^n(A)$ inductivamente por $C^0(A) = A$ y $C^{j+1}(A) = C(C^j(A))$, se ve fácilmente que estos operadores cumplen (Ax 2) a (Ax 5) y que $\mathrm{conv}(A) = \cup \{C^n(A) \ / \ n \geq 0\}$. Por ejemplo, por inducción sobre n podemos ver que C^n cumple (Ax 4); evidentemente C^0 cumple (Ax 4). Supongamos que vale (Ax 4) para $n = j \geq 0$ y consideremos $\phi \neq F \subset X$, F finito y $p \in X$; si $x \in C^{j+1}(F \cup \{p\})$, entonces existen $a,b \in C^j(F \cup \{p\})$ tales que $x \in [a,b]$. Pero por hipótesis inductiva $a,b \in \cup \{C^j(c,p) \ / \ c \in C^j(F)\} = \cup\{[c,p] / c \in C^j(F)\}$ y, en consecuencia, existen $a_1, b_1 \in C^j(F)$ tales que $a \in [a_1, p]$, $b \in [b_1, p]$.

Así, por la demostración de (2.11), existe $x_1 \in [a_1, b_1]$ tal que $x \in [x_1, p]$; pero como $[a_1, b_1] \subset C^{j+1}(F)$, resulta que $x_1 \in C^{j+1}(F)$, de donde $x \in \cup \{[c,p] \ / \ c \in C^{j+1}(F)\} = \cup\{C^{j+1}(c,p) \ / \ c \in C^{j+1}(F)\}$, lo cual asegura que C^{j+1} también cumple (Ax 4).

Si bien para todo entero no negativo n , el operador C^n cumple (Ax 2) a (Ax 5), no ocurre lo mismo con respecto a (Ax 1), En efecto, resulta evidente que para $n = 0$, C^n cumple (Ax 1). Si $1 < 2^n < d + 1$, entonces $C^n \neq$ conv y en consecuencia $C^n(C^n(A)) \not\subset C^n(A)$ para algún $A \subset X$, o sea, C^n no cumple (Ax 1); en caso contrario, si $d + 1 \leqslant 2^n$, entonces C^n = conv, de donde C^n verifica (Ax 1). Lo que acabamos de afirmar se deduce mediante el teorema de Carathéodory (ver [11] , Theorem 1.24). Los operadores C^n considerados, son un caso particular de los operadores con^n_m definidos por Bonnice y Klee [25], mediante los cuales también podríamos probar la independencia de (Ax 1).

(5.2) Independencia de (Ax 2). Por (1.2), los operadores clausura y cápsula convexa cerrada definidos en el plano con la topología usual no cumplen (Ax 2); sin embargo, puede verse que dichos operadores cumplen los cuatro axiomas restantes, lo cual asegura la independencia de (Ax 2). Para dar estos ejemplos en una forma más general, tomemos $X = R^d = \{(x_1, \ldots, x_d) \ / \ x_1, \ldots, x_d \in R\}$; si $x = (x_1, \ldots, x_d) \in R^d$, definimos la norma euclídea de x mediante $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2}$. Tomando, para todo $A \subset X$, $K(A) = \bar{A}$ (donde $\bar{A}$ denota la clausura de A en la topología dada por la norma), obtenemos que K cumple todos los axiomas 1 a 5 salvo (Ax 2). En efecto, K cumple (Ax 1) pues $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ para cualquier $A \subset X$; para ver que K cumple (Ax 3), (Ax 4) y (Ax 5) se tiene en cuenta que $F \subset X$ y F finito implica que $\bar{F} = F$; sea $A = \{x \in R^d / \|x\| < 1\}$, entonces $\bar{A} = \{x \in R^d / \|x\| \leq 1\}$ mientras que $\cup \{\bar{F} / F$ finito y $F \subset A\} = \cup\{F / F$ finito y $F \subset A\} = A$ y, en consecuencia, no se cumple (Ax 2).

Si consideramos nuevamente $X = R^d$ con la norma euclídea, pero definimos para todo $A \subset X$, $K(A) = \mathrm{cconv}(A)$ (donde cconv(A) denota la cápsula convexa cerrada de A en dicho espacio, o sea, $\mathrm{cconv}(A) = \overline{\mathrm{conv}(A)}$), obtenemos nuevamente que K cumple todos los axiomas salvo el 2 . En efecto, K cumple (Ax 1) ya que para todo $A \subset X$, $K(K(A)) = K(A)$ por ser cconv(A) un convexo cerrado; para ver que K cumple los axiomas 3, 4 y 5 se tiene en cuenta que si $F \subset X$ y F finito entonces F es compacto y, en consecuencia conv(F) es compacto (ver [26], (3.2.18)), luego conv(F) es cerrado y $\mathrm{cconv}(F) = \overline{\mathrm{conv}(F)} = \mathrm{conv}(F)$; tomando, nuevamente, $A = \{x \in R^d / \|x\| < 1\}$ resulta que A es convexo, luego $\mathrm{cconv}(A) = \overline{\mathrm{conv}(A)} = \bar{A} = \{x \in R^d / \|x\| \leq 1\}$, pero $\cup\{\mathrm{cconv}(F) / F$ finito y $F \subset A\} = \cup\{\mathrm{conv}(F) / F$ finito y $F \subset A\} = A$ y, en consecuencia, el operador no cumple (Ax 2).

Observemos que por ser todas las normas de R^d uniformemente equivalentes (ver [26], (3.1.9)), habríamos llegado a las mismas conclusiones si hubiéramos considerado cualquier otra norma de R^d.

(5.3) Independencia de (Ax 3). En (1.3) indicamos que la cápsula lineal en espacios vectoriales no cumple el axioma 3 ; este operador nos va a permitir probar la independencia de (Ax 3) pues cumple los cuatro axiomas restantes. En efecto, sea X un espacio vectorial (de dimensión ≥ 1) sobre un cuerpo E ; dado $A \subset X$, diremos que L(A) es la cápsula lineal de A si L(A) es el menor subespacio de X que incluye a A . Resulta inmediato que si $A \neq \phi$ entonces L(A) es el conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de A , o sea, $L(A) = \{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n / \lambda_i \in E , a_i \in A , n \in N\}$; la definición de cápsula lineal nos asegura que $L(\phi) = \{0\}$. El operador L cumple (Ax 1) pues por definición resulta idempotente. Teniendo en cuenta la expresión de L mediante combinaciones lineales obtenemos que L cumple (Ax 2) y (Ax 4); por ejemplo, para ver que L cumple este último axioma tomemos $F = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset X$ y $p \in X$; si $x \in L(F \cup \{p\})$ entonces existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda \in E$ tales que $x = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n + \lambda p$, de donde tomando $a = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n$ resulta que $x \in L(a,p)$ con $a \in L(F)$. Como $0 \in L(A)$ para todo $A \subset X$, L cumple (Ax 5). Para ver que L no cumple (Ax 3) tomamos $x \in X$, así $L(x) = \{\lambda x \ / \ \lambda \in E\}$; luego si $x \neq 0$, $L(x) \neq \{x\}$.

Otro operador que permite probar la independencia de (Ax 3) es la cápsula cónica. En efecto, sea X un espacio vectorial (de dimensión $\geqslant 1$) sobre un cuerpo ordenado E ; dado $C \subset X$, diremos que C es un <u>cono convexo</u> si cumple las dos condiciones siguientes: i) $0 \in C$, ii) $x,y \in C$, $\alpha, \beta \in E$, $\alpha, \beta \geqslant 0 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in C$. Así un subconjunto C del espacio vectorial X es un cono convexo si es no vacío y es cerrado con respecto a las combinaciones lineales a coeficientes no negativos. Dado $A \subset X$, diremos que cono(A) es la <u>cápsula cónica</u> de A , si es el menor cono convexo de X que incluye a A . Evidentemente, $\text{cono}(A) = \cap \{C \subset X \ / \ C \text{ cono convexo y } A \subset C\}$. En forma inmediata se ve que si $A \neq \phi$ entonces cono(A) es el conjunto de todas las combinaciones lineales a coeficientes no negativos de elementos de A ; por otra parte $\text{cono}(\phi) = \{0\}$. Para ver que el operador cápsula cónica cumple todos los axiomas salvo (Ax 3), se procede en forma análoga a lo hecho con el operador cápsula lineal.

La independencia de (Ax 3) también puede probarse tomando un conjunto X tal que card $X \geqslant 2$ y definiendo $K(A) = X$ para todo $A \subset X$. Obviamente, K cumple todos los axiomas salvo (Ax 3). Este ejemplo ya fue utilizado en (1.3) como modelo de un sistema axiomático más débil.

(5.4) <u>Independencia de (Ax 4)</u>. Sea X un conjunto tal que card $X \geq 4$; para todo $A \subset X$ definimos: $K(A) = A$ si card $A \leq 2$ y $K(A) = X$ si card $A > 2$. Este operador no cumple (Ax 4); en efecto, sea $F \subset X$ tal que card $F = 2$ y $p \in X - F$; así, por definición de K , resulta que $K(F) = F$, $\cup \{K(a,p) \ / \ a \in K(F)\} = \cup \{\{a,p\} \ / \ a \in F\} = F \cup \{p\}$ pero $K(F \cup \{p\}) = X$; en consecuencia, $K(F \cup \{p\}) \not\subset \cup \{K(a,p) \ / \ a \in K(F)\}$. Sin embargo, en forma inmediata puede verse que K cumple los restantes axiomas. Por ejemplo, para ver que K cumple (Ax 1) consideramos $A \subset X$; si card $A \leq 2$ entonces $K(A) = A$ y $K(K(A)) = K(A)$; si card $A > 2$ entonces $K(A) = X$ y $K(K(A)) = K(X) = X = K(A)$.

El ejemplo anterior puede generalizarse de la siguiente forma; sea $n \geq 2$ y X un conjunto tal que card $X \geq n + 2$; para todo $A \subset X$ definimos $K(A) = A$ si card $A \leq n$ y $K(A) = X$ si card $A > n$. Para ver que K no cumple (Ax 4) tomamos $F \subset X$ tal que card $F = n$ y $p \in X - F$. Para probar que se cumplen los restantes axiomas se procede en forma análoga al ejemplo anterior.

Observemos que para todo $n \geq 2$, los operadores K definidos precedentemente, si bien no cumplen (Ax 4), satisfacen los cuatro axiomas de los operadores de bandas dados en el parágrafo 1 del capítulo III, pues si $a,b \in X$ entonces $K(a,b) = \{a,b\}$. Si K_1 es el operador de cápsula convexa definido a partir de los $K(a,b)$ mediante $K_1(A) = \cup \{C^m(A) \ / \ m \geq 0\}$ (ver parágrafo 8), resulta que para todo $A \subset X$, $K_1(A) = A$, de donde si card $A > n$ entonces $K(A) \neq K_1(A)$. Así, mediante las bandas dadas por K que no es un operador de cápsula convexa, hemos definido K_1 que es un operador de cápsula convexa. Si K hubiera satisfecho también (Ax 4) entonces $K = K_1$ (ver (7.24)).

Ahora veremos otro ejemplo que también permite probar la independencia de (Ax 4). Sean g, h, i tres puntos no alineados del plano y sea $X = \mathrm{conv}(g,h,i) - (g,h)$ donde $\mathrm{conv}(g,h,i)$ denota la cápsula convexa usual de $\{g,h,i\}$ y (g,h) denota el segmento abierto de extremos g,h ; así X es el triángulo g,h,i al cual le hemos restado el conjunto de los puntos interiores al lado $g\ h$; por tal motivo X no es un conjunto convexo del plano. Definimos, para todo $A \subset X$, $K(A) = X \cap \mathrm{conv}(A)$; fácilmente podemos ver que K cumple todos los axiomas salvo (Ax 4). En efecto, $K(K(A)) = X \cap \mathrm{conv}(X \cap \mathrm{conv}(A)) \subset X \cap \mathrm{conv}(\mathrm{conv}(A)) \subset$ $\subset X \cap \mathrm{conv}(A) = K(A)$; así K cumple (Ax 1). Por otra parte, $K(A) = X \cap \mathrm{conv}(A) = X \cap \cup \{\mathrm{conv}(F) \ / \ F$ finito y $F \subset A\} =$ $\cup\{X \cap \mathrm{conv}(F) \ / \ F$ finito y $F \subset A\} = \cup\{K(F) \ / \ F$ finito y $F \subset A\}$; en consecuencia, K cumple (Ax 2). Es evidente que K cumple (Ax 3). Para ver que K cumple (Ax 5), tomamos $b, d, p \in X$, $a \in K(b,p)$ y $c \in K(d,p)$; por definición de K, obtenemos que $a \in \mathrm{conv}(b,p)$ y $c \in \mathrm{conv}(d,p)$. Sea $A = \mathrm{conv}(a,d) \cap \mathrm{conv}(b,c)$; por (2.12), $A \neq \phi$. Si $\{a,b,c,d,p\} \cap A \neq \phi$ entonces $X \cap A \neq \phi$ y $K(a,d) \cap K(b,c) \neq \phi$. Si $\{a,b,c,d,p\} \cap A = \phi$ entonces A es un conjunto unitario tal que $A \subset [\mathrm{conv}(b,d,p)]^0$ y, en consecuencia, $A \subset X$; así $K(a,d) \cap K(b,c) = A \neq \phi$.

Para ver que K no cumple (Ax 4) tomemos $F = \{g,h\}$ y $p \in X - F$, entonces $K(F \cup \{p\}) = K(g,h,p) = \mathrm{conv}(g,h,p) - (g,h)$; pero $\cup \{K(a,p) \ / \ a \in K(F)\} = \cup\{K(a,p) \ / \ a \in F\} = K(g,p) \cup K(h,p) =$ $= \mathrm{conv}(g,p) \cup \mathrm{conv}(h,p)$; en consecuencia, $K(F \cup \{p\}) \not\subset \cup \{K(a,p) \ / \ a \in K(F)\}$.

Destaquemos que el operador K que acabamos de considerar también permite probar la independencia del tercer axioma del sistema axiomático para operadores de bandas.

(5.5) Independencia de (Ax 5). El último ejemplo dado en (5.4) para probar la independencia de (Ax 4), nos permite observar que si V es un espacio vectorial (de dimensión $\geqslant 2$) sobre un cuerpo ordenado E y $X \subset V$, entonces el operador $K : P(X) \to P(X)$ definido, para todo $A \subset X$, por $K(A) = X \cap \mathrm{conv}(A)$ cumple (Ax 1), (Ax 2) y (Ax 3). Si además X es convexo, entonces K también cumple (Ax 4) y (Ax 5). En caso contrario, si X no es convexo, entonces podremos elegir el conjunto X de tal forma que

K no cumpla (Ax 4) ni (Ax 5), o cumpla únicamente uno de estos dos últimos axiomas.

Así, en forma muy sencilla podemos probar la independencia de (Ax 5). Sean g, h, i tres puntos no alineados del plano y sea $X = \mathrm{conv}(g,i) \cup \mathrm{conv}(h,i)$. Si definimos, para todo $A \subset X$, $K(A) = X \cap \mathrm{conv}(A)$, por la observación anterior, resulta que K cumple (Ax 1), (Ax 2) y (Ax 3). Dado F subconjunto finito y no vacío de X , puede ocurrir que: i) $F \subset \mathrm{conv}(g,i)$; ii) $F \subset \mathrm{conv}(h,i)$, iii) $F \not\subset \mathrm{conv}(g,i)$ y $F \not\subset \mathrm{conv}(h,i)$. Analizando estos tres casos, que son mutuamente excluyentes, llegamos a que cualquiera sea $p \in X$ se verifica que $K(F \cup \{p\}) \subset \cup \{K(a,p) \ / \ a \in K(F)\}$; de esta forma se puede ver que K cumple (Ax 4).

Para comprobar que K no verifica (Ax 5), podemos tomar $b \in [g,i)$; $d \in [h,i)$, $p = i$, $a \in (b,p)$ y $c \in (d,p)$. Así $a \in K(b,p)$ y $c \in K(d,p)$ pero, sin embargo, $K(a,d) \cap K(b,c) = \phi$.

6.- Consecuencias de los tres primeros axiomas.

Ahora vamos a deducir algunas proposiciones utilizando únicamente (Ax 1), (Ax 2) y (Ax 3). Estas proposiciones no solamente serán válidas para el operador cápsula convexa en espacios vectoriales, sino que también valdrán para la cápsula afín ya que esta última también satisface los tres primeros axiomas.
En la primera de estas proposiciones veremos que K cumple los dos primeros axiomas de Ellis [7]:

(6.1) Sea $A \subset X$, entonces: i.- $A \subset K(A)$. ii.- $K(K(A)) = K(A)$.

Demostración. i.- Si $a \in A$, por (Ax 2), $K(a) \subset K(A)$; pero, por (Ax 3), $K(a) = \{a\}$; así $a \in K(A)$. ii.- Por i, $K(A) \subset K(K(A))$; en consecuencia, teniendo en cuenta (Ax 1), resulta $K(K(A)) =$ $= K(A)$.

Siguiendo la nomenclatura utilizada por Gastl y Hammer [20], la proposición (6.1) expresa que K es <u>agrandante</u> e <u>idempotente</u>. En la próxima proposición veremos que K es <u>isotónico</u>, o sea, que preserva inclusiones.

(6.2) i.- $A \subset B \subset X \Rightarrow K(A) \subset K(B)$.ii.- Si $\{A_j \;/\; j \in J\}$ es una familia de subconjuntos de X , entonces: a) $K(\cap \{A_j \;/\; j \in J\}) \subset \cap \{K(A_j) \;/\; j \in J\}$; b)$\cup \{K(A_j) \;/\; j \in J\} \subset K(\cup \{A_j \;/\; j \in J\})$.

<u>Demostración</u>. i.- Supongamos $A \subset B$, si $x \in K(A)$, por (Ax 2), existe F finito y $F \subset A$ tal que $x \in K(F)$. Evidentemente, $F \subset B$ y, en consecuencia, por (Ax 2), $x \in K(B)$. ii.- a) Aplicando la definición de intersección tenemos que, para todo $l \in J$, $\cap \{A_j \;/\; j \in J\} \subset A_l$; así, por i, $K(\cap \{A_j \;/\; j \in J\}) \subset K(A_l)$ para todo $l \in J$ y, en consecuencia, $K(\cap \{A_j \;/\; j \in J\}) \subset \cap \{K(A_j) \;/ j \in J\}$. b) Se prueba en forma análoga a la parte a).

(6.3) <u>Observación</u>: En la demostración anterior, utilizando únicamente i, probamos ii a) y b). De esta forma, dado cualquier conjunto X y cualquier función $K : P(X) \to P(X)$, obtenemos que i $\Rightarrow$ ii a), y además i $\Rightarrow$ ii b); por otra parte, ii a) $\Rightarrow$ i , ya que suponiendo ii a) y tomando $A \subset B$ obtenemos $K(A) = K(A \cap B) \subset K(A) \cap K(B)$ y, en consecuencia, $K(A) \subset K(B)$; análogamente ii b) $\Rightarrow$ i . Así ii a) y b) son otras dos formas de expresar la isotonía de K . Destaquemos que, según lo indicamos en (1.2), la isotonía no implica (Ax 2). Sin embargo, resulta evidente que la isotonía de K es equivalente a la proposición $A \subset X \Rightarrow K(A) = \cup \{K(F) \;/\; F \subset A\}$.

(6.4) Sea $\{A_j \;/\; j \in J\}$ una familia (no vacía) de subconjuntos de X tal que para todo $j_1, j_2 \in J$, existe $j_3 \in J$ tal que $A_{j_1} \cup A_{j_2} \subset A_{j_3}$. Entonces $K(\cup \{A_j \;/\; j \in J\}) = \cup \{K(A_j) \;/\; j \in J\}$.

<u>Demostración</u>. Sea $A = \cup \{A_j \;/\; j \in J\}$; en virtud de (6.2) ii b), resta probar únicamente que $K(A) \subset \cup \{K(A_j) \;/\; j \in J\}$. Tomemos

$x \in K(A)$, por (Ax 2), existe F finito y $F \subset A$ tal que $x \in K(F)$. La finitud de F nos permite afirmar que existen $j_1, \ldots, j_n \in J$ tales que $F \subset A_{j_1} \cup \ldots \cup A_{j_n}$; pero por hipótesis existe $j_{n+1} \in J$ tal que $A_{j_1} \cup \ldots \cup A_{j_n} \subseteq A_{j_{n+1}}$ y , en consecuencia, por (Ax 2), $x \in K(A_{j_{n+1}})$. De esta forma $x \in \cup \{K(A_j) \ / \ j \in J\}$.

(6.5) Observación: La proposición (6.4) se encuentra en Hammer [27] , 2.3. Evidentemente, para probar (6.4) utilizamos únicamente (Ax 2) pues (6.2) ii b) es una consecuencia de dicho axioma. De esta forma, dado cualquier conjunto X y cualquier función $K : P(X) \to P(X)$, obtenemos que (Ax 2) $\Rightarrow$ (6.4); además también se cumple que (6.4) $\Rightarrow$ (Ax 2). En efecto, sea $A \subset X$; evidentemente, $A = \cup \{F \ / \ F$ finito y $F \subset A\}$; pero si F_1, F_2 son subconjuntos finitos de A , entonces $F_1 \cup F_2$ es un subconjunto finito de A . De esta forma, por (6.4), $K(A) = \cup \{K(F) \ / \ F$ finito y $F \subset A\}$.

Resulta evidente que también es equivalente a (Ax 2) y, en consecuencia, a (6.4) la siguiente proposición:

(6.6) Si $\{A_j / j \in J\}$ es una familia (no vacía) de subconjuntos de X cerrada para uniones finitas, entonces $K(\cup \{A_j \ / \ j \in J\}) = \cup \{K(A_j) \ / \ j \in J\}$.

Como corolario de esta última proposición obtenemos:

(6.7) Si $\{A_j \ / \ j \in J\}$ es una cadena (no vacía) de subconjuntos de X, entonces $K(\cup \{A_j \ / \ j \in J\}) = \cup \{K(A_j) \ / \ j \in J\}$.

(6.8) Observación: Por ser (6.7) corolario de (6.6), podemos afirmar que dado cualquier conjunto X y cualquier función $K : P(X) \to P(X)$, (Ax 2) $\Rightarrow$ (6.7). Ahora veremos que también vale que (6.7) $\Rightarrow$ (Ax 2).

Supongamos (6.7); luego K es isotónico y, en consecuencia, $A \subset X \Rightarrow K(A) \supset \cup \{K(F) \ / \ F$ finito y $F \subset A\}$; para obtener (Ax 2) resta probar que $A \subset X \Rightarrow K(A) \subset \cup \{K(F) \;/\; F \text{ finito } F \subset A\}$ (I)

Si A es finito, la implicación (I) resulta inmediata. Para el caso en que card $A = \aleph_\alpha$, probaremos (I) por inducción transfinita sobre α; para tal prueba utilizaremos el siguiente lema: Si A es un conjunto tal que card $A = \aleph_\alpha$ y ω_α es el primer ordinal tal que card $[0, \omega_\alpha) = \aleph_\alpha$ entonces para todo $\beta < \omega_\alpha$ se verifica que $A = \cup\{A_\gamma \;/\; \beta \leqslant \gamma < \omega_\alpha\}$, donde $A_\gamma = f([0,\gamma))$ y f es una biyección de $[0,\omega_\alpha)$ sobre A. En virtud de la definición de los A_γ, podemos afirmar que $\{A_\gamma / \beta \leqslant \gamma < \omega_\alpha\}$ es una cadena creciente (no vacía) de conjuntos de card $< \aleph_\alpha$.

Ahora probaremos que vale (I) para A tal que card $A = \aleph_0$. En virtud del lema, $A = \cup\{A_\gamma / 0 \leqslant \gamma < \omega_0\}$ donde $\{A_\gamma / 0 \leqslant \gamma < \omega_0\}$ es una cadena (no vacía) de subconjuntos de X finitos; así, por (6.7), $K(A) = \cup\{K(A_\gamma) \;/\; 0 \leqslant \gamma < \omega_0\}$, pero como cada A_γ es un subconjunto finito de A, resulta que $K(A) \subset \cup\{K(F) \;/\; F \text{ finito y } F \subset A\}$. Supongamos que si $\delta < \alpha$, entonces vale (I) para todo A tal que card $A = \aleph_\delta$; probaremos que también vale (I) para todo A tal que card $A = \aleph_\alpha$. Sea $A \subset X$ tal que card $A = \aleph_\alpha$; en virtud del lema, $A = \cup\{A_\gamma / \omega_0 \leqslant \gamma < \omega_\alpha\}$ donde $\{A_\gamma \;/\; \omega_0 \leqslant \gamma < \omega_\alpha\}$ es una cadena (no vacía) de subconjuntos de X tales que para todo γ ($\omega_0 \leqslant \gamma < \omega_\alpha$) existe $\delta < \alpha$ tal que card $A_\gamma = \aleph_\delta$. Así por (6.7) y por hipótesis inductiva, $K(A) = \cup\{K(A_\gamma) \;/\; \omega_0 \leqslant \gamma < \omega_\alpha\} \subset \cup\{\cup\{K(F) \;/\; F \text{ finito y } F \subset A_\gamma\} \;/\; \omega_0 \leqslant \gamma < \omega_\alpha\} \subset \cup\{K(F) \;/\; F \text{ finito y } F \subset A\}$.

(6.9) i.- $K(X) = X$. ii.- $K(\phi) = \phi$.

<u>Demostración</u>. i.- Como K es una función de P(X) en P(X), resulta que $K(X) \subset X$; además, por (6.1)i, $X \subset K(X)$. ii.- Como card $X \geqslant 2$, podemos tomar $a,b \in X$ y $a \neq b$; luego, por (6.2)i y (Ax 3), obtenemos $K(\phi) \subset K(a) \cap K(b) = \{a\} \cap \{b\} = \phi$.

(6.10) <u>Observación</u>: Por (6.9)ii, también se deducen las proposiciones (6.4), (6.6) y (6.7) para el caso en que $\{A_j \,/\, j \in J\} = \phi$; para tales deducciones no solamente utilizamos (Ax 2) sino también (Ax 3) y que card $X \geqslant 2$.

Recordemos que, por la definición dada al comienzo del parágrafo 1 , un subconjunto A de X es convexo si $A = K(A)$.

(6.11) Si $\{A_j \,/\, j \in J\}$ es una familia de subconjuntos convexos de X , entonces $\cap \{A_j \,/\, j \in J\}$ es un subconjunto convexo de X .

<u>Demostración</u>. Sean $\{A_j \,/\, j \in J\}$ una familia de subconjuntos convexos de X y $A = \cap\{A_j \,/\, j \in J\}$; por (6.1)i, $A \subset K(A)$; por (6.2)ii a), $K(A) \subset \cap \{K(A_j) \,/\, j \in J\} = A$; así A es convexo.

(6.12) Sea $\{A_j \,/\, j \in J\}$ una familia de subconjuntos convexos de X que cumple alguna de las siguientes condiciones:

a) para todo j_1 , $j_2 \in J$, existe $j_3 \in J$ tal que $A_{j_1} \cup A_{j_2} \subset A_{j_3}$;

b) $\{A_j \,/\, j \in J\}$ es cerrada para uniones finitas;

c) $\{A_j \,/\, j \in J\}$ es una cadena.

Entonces $\cup \{A_j \,/\, j \in J\}$ es un subconjunto convexo de X .

<u>Demostración</u>. a) Sea $\{A_j \,/\, j \in J\}$ una familia de subconjuntos convexos de X tal que para todo j_1 , $j_2 \in J$, existe $j_3 \in J$ tal que $A_{j_1} \cup A_{j_2} \subset A_{j_3}$; sea $A = \cup\{A_j \,/\, j \in J\}$. Por (6.4) y (6.10), $K(A) = \cup\{K(A_j) \,/\, j \in J\} = A$; así A es convexo. b) Se utiliza (6.6) y (6.10). c) Se utiliza (6.7) y (6.10).

(6.13) Si $A \subset X$, entonces K(A) es la intersección de la familia de los subconjuntos convexos de X que incluyen a A .

<u>Demostración</u>. Sean $A \subset X$ y $K_1(A) = \cap\{B \,/\, B \text{ convexo y } A \subset B \subset X\}$. Por (6.1), $A \subset K(A) = K(K(A))$; así K(A) es un subconjunto convexo de X que incluye a A y, en consecuencia, $K_1(A) \subset K(A)$. Pero, por (6.2)i, si B es convexo y $A \subset B \subset X$, entonces $K(A) \subset K(B) = B$; así $K(A) \subset K_1(A)$.

Como corolario de (6.1)ii y de (6.13) obtenemos:

(6.14) Si $A \subset X$, entonces $K(A)$ es elemento minimal de la familia de los subconjuntos convexos de X que incluyen a A ; es más, $K(A)$ es el menor subconjunto convexo de X que incluye a A.

(6.15) Observación: Como en la demostración de (6.13) se utilizan únicamente (Ax 1), (Ax 2) y (Ax 3), podemos afirmar que dado cualquier conjunto X y cualesquiera sean K y K' funciones de $P(X)$ en $P(X)$ que cumplan (Ax 1), (Ax 2) y (Ax 3), entonces $K = K'$ sii $\{A \subset X \ / \ A = K(A)\} = \{B \subset X \ / \ B = K'(B)\}$, o sea, $K = K'$ sii K y K' definen los mismos subconjuntos convexos de X .

7.- Algunas consecuencias de los cuatro primeros axiomas: Caracterización de los convexos y de la cápsula convexa mediante bandas. Los operadores C^n .

Los cuatro primeros axiomas permiten caracterizar, mediante bandas, a los convexos (ver (7.1)) y a la cápsula convexa (ver (7.24)). Para esto último introducimos los operadores C y C^n , de los que estudiamos algunas propiedades, analizando qué axiomas de K utilizamos en sus demostraciones.

(7.1) Si $A \subset X$, los siguientes enunciados son equivalentes: i.- $K(A) = A$. ii.- $\{a,b\} \subset A \Rightarrow K(a,b) \subset A$.

Demostración. i $\Rightarrow$ ii. Supongamos i ; si $\{a,b\} \subset A$, por (6.2)i, $K(a,b) \subset K(A) = A$.
ii $\Rightarrow$ i . Supongamos ii. Por (6.1)i , $A \subset K(A)$; para probar que $K(A) \subset A$, por (Ax 2) alcanza con demostrar que F finito y $F \subset A \Rightarrow K(F) \subset A$ (I) . Esta demostración se hace por inducción sobre $j = \text{card } F$. Por (6.9)ii, la proposición (I) resulta trivial para $j = 0$. Como suponemos ii, también vale (I) para $j = 1$. Ahora supongamos (I) para $j = n \geq 1$ y sea $F = \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\} \subset A$ tal que card $F = n+1$; vamos a ver que $K(F) \subset A$. Tomemos $x \in K(F)$;

por (Ax 4), existe $a \in K(a_1, \ldots, a_n)$ tal que $x \in K(a, a_{n+1})$;pero por hipótesis inductiva $a \in A$. Así, por ii, $K(a,a_{n+1}) \subset A$ y, en consecuencia, $x \in A$.

(7.2) Observación: En nuestro sistema axiomático, para deducir (7.1) es necesario utilizar (Ax 4). Esto puede verse mediante el primer ejemplo dado en (5.4); en efecto, sea X un conjunto tal que card $X \geqslant 4$ y para todo $A \subset X$ definimos $K(A) = A$ si card $A \leqslant 2$ y $K(A) = X$ si card $A > 2$; como ya hemos visto en (5.4) K cumple todos los axiomas salvo (Ax 4); tomando $A \subset X$ tal que card $A > 2$ y $A \neq X$ vemos que $K(A) = X \neq A$ pero, sin embargo, si $\{a,b\} \subset A$ entonces $K(a,b) \subset A$; así K no verifica (7.1).

Si bien para deducir (7.1) tenemos que utilizar (Ax 4), sin embargo, en el sistema axiomático dado por (Ax 1), (Ax 2), (Ax 3) y (Ax 5), tenemos que (7.1) no es equivalente a (Ax 4). Esto puede verse tomando el último ejemplo de (5.4) el cual verifica (Ax 1), (Ax 2), (Ax 3), (Ax 5) y (7.1) pero no verifica (Ax 4). Recordemos que en dicho ejemplo tomábamos g, h, i tres puntos no alineados del plano y $X = \mathrm{conv}(g,h,i) - (g,h)$, y definíamos $K(A) = X \cap \mathrm{conv}(A)$. De esta forma el sistema axiomático dado por (Ax 1), (Ax 2), (Ax 3), (7.1) y (Ax 5) es más débil que el dado por (Ax 1) a (Ax 5), o sea, todo teorema del primer sistema es teorema del segundo, pero hay teoremas del segundo (como (Ax 4)) que no son teoremas del primer sistema. Como señalamos en (1.4), si tomamos como axiomas (Ax 1), (Ax 2), (Ax 3) y (7.1) obtenemos un sistema axiomático cuyos teoremas también son válidos para la cápsula afín en espacios vectoriales.

(7.3) Observación: La proposición (7.1) nos asegura que un subconjunto A de X es convexo sii cualesquiera sean $a,b \in A$, la banda determinada por a,b está incluida en A . La analogía entre este resultado y la definición usual de convexo en espacios vectoriales sobre cuerpos ordenados, dada en el parágrafo 2 del presente capítulo, permite hacer nuevas demostraciones de algunas de las proposiciones del parágrafo 6 por analogía con las demostraciones de dichas proposiciones para la convexidad vectorial (ver [9]). De esta forma, podemos obtener, por ejemplo, la siguiente demostración de la proposición (6.11):

Sean $\{A_j \,/\, j \in J\}$ una familia de subconjuntos convexos de X y $A = \cap\{A_j \,/\, j \in J\}$. Si $a,b \in A$, entonces para todo $j \in J$, $a,b \in A_j$; así por (7.1), para todo $j \in J$, $K(a,b) \subset A_j$; luego $K(a,b) \subset A$ y, en consecuencia, por (7.1), A es convexo.

En forma inmediata, también podemos probar (6.12) y de allí obtener (6.4), (6.6) y (6.7).

(7.4) <u>Observación</u>: Por (6.15) y (7.1), podemos afirmar que dado cualquier conjunto X tal que card $X \geq 2$ y cualesquiera sean K y K' funciones de $P(X)$ en $P(X)$ que cumplan (Ax 1) a (Ax 4), entonces $K = K'$ sii para todo $a,b \in X$, $K(a,b) = K'(a,b)$. También podemos afirmar que dado cualquier conjunto X y cualesquiera sean K y K' funciones de $P(X)$ en $P(X)$ que cumplan (Ax 1), (Ax 2), (Ax 3) y (7.1), entonces $K = K'$ sii para todo $a,b \in X$, $K(a,b) = K'(a,b)$. De esta forma, el operador de cápsula convexa K queda determinado por la familia de todas las bandas $K(a,b)$ con $a,b \in X$.

Mediante las bandas, definimos para todo $A \subset X$, $C(A) = \cup\{K(a,b) \,/\, a,b \in A\}$. Si $\{a_1,\ldots,a_n\} \subset X$, $C(\{a_1,\ldots,a_n\})$ se escribirá $C(a_1,\ldots,a_n)$. Mediante la definición de C y sin utilizar propiedades de K (salvo el hecho de que K es una función de $P(X)$ en $P(X)$), podemos probar que C es isotónico y tiene la propiedad de dominio finito:

(7.5) i.- $A \subset B \subset X \Rightarrow C(A) \subset C(B)$.

ii.- $A \subset X \Rightarrow C(A) = \cup\{C(F) \,/\, F \text{ finito y } F \subset A\}$.

<u>Demostración</u>. i.- Supongamos $A \subset B \subset X$ y sea $x \in C(A)$; entonces

existen $a,b \in A$ tales que $x \in K(a,b)$; pero $a,b \in B$ y, en consecuencia, $x \in C(B)$. ii.- Sea $A \subset X$; por i, $\cup\{C(F) \ / \ F$ finito y $F \subset A\} \subset C(A)$. Para probar la otra inclusión, tomemos $x \in C(A)$; así existen $a,b \in A$ tales que $x \in K(a,b)$; pero como $K(a,b) \subset C(a,b)$, resulta que $x \in C(a,b)$; luego, tomando $F = \{a,b\}$, obtenemos que existe F finito y $F \subset A$ tal que $x \in C(F)$.

También, mediante la definición de C y sin utilizar propiedades de K , podemos probar:

(7.6) i.- $C(\phi) = \phi$. ii.- $a \in X \Rightarrow C(a) = K(a)$.

La definición de C y la isotonía de K , probada en (6.2)i , nos permite probar la siguiente proposición:

(7.7) $a,b \in X \Rightarrow C(a,b) = K(a,b)$.

Demostración. Sean $a,b \in X$, por definición de C , obtenemos $C(a,b) = \cup\{K(x,y) \ / \ x,y \in \{a,b\}\} = K(a,b) \cup K(a) \cup K(b)$; pero por ser K isotónico, $K(a) \subset K(a,b)$ y $K(b) \subset K(a,b)$; así $C(a,b) = K(a,b)$.

(7.8) $a \in X \Rightarrow C(a) = \{a\}$.

Demostración. Por (7.6)ii y (Ax 3) obtenemos $C(a) = K(a) = \{a\}$.

En virtud de las proposiciones (7.5)ii y (7.8), el operador C verifica (Ax 2) y (Ax 3). Esto permite obtener, en forma inmediata, la siguiente proposición:

(7.9) i.- $A \subset X \Rightarrow A \subset C(A)$.
ii.- $A \subset X \Rightarrow C(A) \subset C(C(A))$. iii.- $C(X) = X$.

Demostración. i.- Es análoga a la demostración de (6.1)i . ii.- Es consecuencia de i. iii.- Ver la demostración de (6.9)i.

También, se puede probar que C verifica (Ax 4), para lo cual se utiliza únicamente la definición de C y proposiciones que se deducen de ella y de que K cumple (Ax 3).

(7.10) $\phi \neq F \subset X$, F finito y $p \in X \Rightarrow C(F \cup \{p\}) \subset \cup \{C(a,p) \ / \ a \in C(F)\}$.

Demostración. Sean $\phi \neq F \subset X$ y $p \in X$; si $x \in C(F \cup \{p\})$, entonces existen x_1 , $x_2 \in F \cup \{p\}$ tales que $x \in K(x_1,x_2)$ y, en consecuencia, $x \in C(x_1,x_2)$ (pues, por definición de C , $K(x_1,x_2) \subset C(x_1,x_2)$). Ahora bien, si x_1 , $x_2 \in F$ entonces $x \in C(F)$; pero, por (7.9)i , $x \in C(x,p)$; así $x \in \cup \{C(a,p) \ / \ a \in C(F)\}$. Por otra parte, si $x_1 \in F$ y $x_2 = p$, tenemos que $x \in C(x_1,p)$ donde, por (7.9)i , $x_1 \in C(F)$. Si $x_1 = x_2 = p$, entonces $x \in C(p) \subset C(a,p)$ para cualquier $a \in C(F)$ (donde $C(F) \neq \phi$ ya que $\phi \neq F \subset C(F)$ por (7.9)i); así $x \in \cup \{C(a,p) \ / \ a \in C(F)\}$.

Como en la demostración de (7.10) no se utiliza la hipótesis según la cual F es finito, obtenemos mediante la misma demostración la siguiente proposición:

(7.11) $\phi \neq A \subset X$ y $p \in X \Rightarrow C(A \cup \{p\}) \subset \cup\{C(a,p) \ / \ a \in C(A)\}$.

(7.12) Observación: En virtud de (7.7), resulta evidente que si K es isotónico y cumple (Ax 5), entonces C también cumple (Ax 5), o sea, $a \in C(b,p)$ y $c \in C(d,p) \Rightarrow C(a,d) \cap C(b,c) \neq \phi$.

De esta forma, si K cumple (Ax 2), (Ax 3) y (Ax 5), entonces C cumple (Ax 2), (Ax 3), (Ax 4) y (Ax 5). Sin embargo, de que K cumpla (Ax 1) a (Ax 5) no se deduce que C cumpla (Ax 1); esto puede verse tomando como X el plano y como K el operador de cápsula convexa usual (ver (1.1)).

Como en la demostración de (7.5)ii no se utilizan axiomas de K y en las demostraciones de (7.8) y (7.10) se utiliza únicamente que K cumple (Ax 3), resulta que si K cumple (Ax 3) entonces C cumple (Ax 2), (Ax 3) y (Ax 4).

La isotonía de K nos permite probar la siguiente proposición:

(7.13) $A \subset X \Rightarrow C(A) \subset K(A)$.

Demostración. Sea $A \subset X$ y $x \in C(A)$, entonces existen $a,b \in A$ tales que $x \in K(a,b)$; pero por la isotonía de K, $K(a,b) \subset K(A)$ Así $x \in K(A)$.

(7.14) Observación: Si tomamos como X el plano y como K el operador de cápsula convexa usual, resulta que si A está formado por tres puntos no alineados a, b, c , entonces $C(A) \neq K(A)$, pues $C(A) = [a,b] \cup [b,c] \cup [a,c]$ mientras que $K(A) = \mathrm{conv}(A)$. Así C(A), en este caso, no es convexo.

Como consecuencia de (7.1) y de (7.9)i obtenemos la siguiente proposición:

(7.15) Si $A \subset X$, los siguientes enunciados son equivalentes: i.- A es convexo. ii.- $C(A) \subset A$. iii.- $C(A) = A$.

Demostración. i $\Leftrightarrow$ ii. Resulta inmediata por (7.1). ii $\Leftrightarrow$ iii. Es consecuencia de (7.9)i .

Hasta ahora hemos visto que C tiene muchas propiedades análogas a las de K , aunque puede no ser idempotente según se aclaró en (7.12). Ahora bien, para poder expresar K mediante C, definimos inductivamente los operadores C^n de la siguiente forma: para todo $A \subset X$, i.- $C^0(A) = A$, ii.- $C^{j+1}(A) = C(C^j(A))$- En la proposición (7.24), vamos a ver que $K(A) = \cup\{C^n(A) \ / \ n \geq 0\}$. La demostración de dicha proposición puede hacerse utilizando pocas propiedades de los operadores C^n ; sin embargo, resulta interesante ver como los C^n gozan de propiedades análogas a las de C . Estas propiedades se demuestran por inducción sobre n .

(7.16) Para todo número entero $n \geq 0$, se cumple:
i.- $A \subset B \subset X \Rightarrow C^n(A) \subset C^n(B)$.
ii.- $A \subset X \Rightarrow C^n(A) = \cup\{C^n(F) \;/\; F$ finito y $F \subset A\}$.
iii.- $C^n(\phi) = \phi$.

Demostración. En la misma no se utilizan los axiomas de K . i.- Esta proposición resulta trivial para $n = 0$. Supongamos i para $n = j \geq 0$ y sean $A \subset B \subset X$; vamos a ver que $C^{j+1}(A) \subset C^{j+1}(B)$. Por hipótesis inductiva $C^j(A) \subset C^j(B)$; así, por (7.5)i , $C(C^j(A)) \subset C(C^j(B))$, o sea, $C^{j+1}(A) \subset C^{j+1}(B)$. ii.- Resulta trivial para $n = 0$. Supongamos ii para $n = j \geq 0$ y sea $A \subset X$; en virtud de i, $\cup\{C^{j+1}(F) \;/\; F$ finito y $F \subset A\} \subset C^{j+1}(A)$. Para probar la otra inclusión, tomemos $x \in C^{j+1}(A)$; así existen $x_1 , x_2 \in C^j(A)$ tales que $x \in K(x_1, x_2)$; pero por hipótesis inductiva existen F_1 , F_2 finitos y $F_1 , F_2 \subset A$ tales que $x_1 \in C^j(F_1)$ y $x_2 \in C^j(F_2)$; en consecuencia, por i, $x_1 , x_2 \in C^j(F_1 \cup F_2)$. De esta forma, $x \in C^{j+1}(F_1 \cup F_2)$ donde $F_1 \cup F_2$ es finito y $F_1 \cup F_2 \subset A$. iii.- Evidentemente, $C^0(\phi) = \phi$. Supongamos iii para $n = j \geq 0$; así $C^{j+1}(\phi) = C(C^j(\phi)) = C(\phi)$; en consecuencia, por (7.6)i, $C^{j+1}(\phi) = \phi$.

(7.17) Para todo número entero $n \geq 0$, se cumple: i.- $a \in X \Rightarrow C^n(a) = \{a\}$. ii.- $A \subset X \Rightarrow A \subset C^n(A)$. iii.- $A \subset X \Rightarrow C^n(A) \subset C^n(C^n(A))$. iv.- $C^n(X) = X$.

Demostración. El único axioma de K que utilizamos es (Ax 3). i.- Trivialmente $C^0(a) = \{a\}$ cualquiera sea $a \in X$. Supongamos i para $n = j \geq 0$ y sea $a \in X$, entonces $C^{j+1}(a) = C(C^j(a)) = C(a)$; luego por (7.8), $C^{j+1}(a) = \{a\}$. ii.- Evidentemente, ii vale para $n = 0$. Supongamos ii para $n = j \geq 0$ y sea $A \subset X$, entonces $A \subset C^j(A)$; pero, en virtud de (7.9)i , $C^j(A) \subset C^{j+1}(A)$; así $A \subset C^{j+1}(A)$. iii.- Es consecuencia de ii. iv.- Evidentemente, iv vale para $n = 0$. Supongamos iv para $n = j \geq 0$; luego $C^{j+1}(X) = C(C^j(X)) = C(X)$; así, por (7.9)iii, $C^{j+1}(X) = X$.

Ahora, vamos a probar algunas proposiciones, mediante las cuales demostraremos que para todo entero $n \geq 0$, C^n cumple (Ax 4).

(7.18) Si $a_1 \in K(a,p)$, $b_1 \in K(b,p)$ y $x_1 \in K(a_1,b_1)$, entonces existe $x \in K(a,b)$ tal que $x_1 \in K(x,p)$.

Demostración. En la misma utilizamos que K cumple (Ax 1), (Ax 2) y (Ax 4). En efecto, por (Ax 4), dados a, b, $p \in X$ obtenemos que $K(a,b,p) \subset \cup \{K(x,p) \ / \ x \in K(a,b)\}$; así, si $a_1 \in K(a,p)$, $b_1 \in K(b,p)$ y $x_1 \in K(a_1,b_1)$, entonces, por (6.2)i y (Ax 1), $x_1 \in K(a,b,p)$, de donde existe $x \in K(a,b)$ tal que $x_1 \in K(x,p)$.

La figura 3 ilustra la proposición (7.18) para el caso en que X sea el plano y K la cápsula convexa usual.

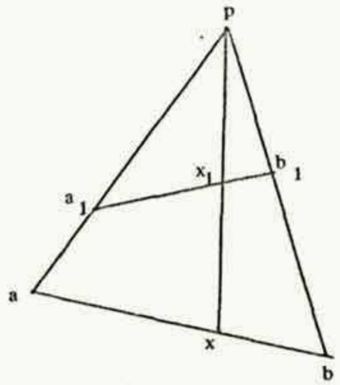


Fig. 3

(7.19) $c,d \in K(a,b) \Rightarrow K(c,d) \subset K(a,b)$.

Demostración. Es consecuencia inmediata de (6.2)i y (Ax 1); así en esta demostración utilizamos únicamente que K cumple (Ax 1) y (Ax 2). También podemos hacer la demostración mediante (7.18) y (Ax 3); en efecto por (7.18), si $c,d \in K(a,b)$ y $x_1 \in K(c,d)$, entonces existe $x \in K(a,a) = K(a)$ tal que $x_1 \in K(x,b)$; pero, por (Ax 3), $x = a$; así $x_1 \in K(a,b)$.

(7.20) Para todo número entero $n \geq 1$, se cumple $a,b \in X \Rightarrow$
$\Rightarrow C^n(a,b) = K(a,b)$.

Demostración. En ella utilizamos que K cumple (Ax 1), (Ax 2) y

(Ax 3). En efecto, por (7.7), queda probada la implicación para $n = 1$. Supongamos que vale la implicación para $n = j \geq 1$ y sean $a,b \in X$; así $C^{j+1}(a,b) = C(K(a,b))$; pero, por (7.9)i. $K(a,b) \subset C(K(a,b))$; además, por (7.19), $C(K(a,b)) \subset K(a,b)$; luego, $C(K(a,b)) = K(a,b)$ y, en consecuencia, $C^{j+1}(a,b) =$ $= K(a,b)$.

(7.21) Para todo número entero $n \geq 0$, se cumple $\phi \neq A \subset X$ y $p \in X \Rightarrow C^n(A \cup \{p\}) \subset \cup \{C^n(a,p) \ / \ a \in C^n(A)\}$.

Demostración. En la misma vamos a utilizar que K cumple los cuatro primeros axiomas. Evidentemente, la implicación vale para $n = 0$; además, por (7.11), también vale para $n = 1$. Supongamos que la implicación vale para $n = j \geq 1$ y consideremos $\phi \neq A \subset X$, $p \in X$ y $x_1 \in C^{j+1}(A \cup \{p\})$; por definición de C^{j+1}, existen a_1 , $b_1 \in C^j(A \cup \{p\})$ tales que $x_1 \in K(a_1, b_1)$; pero, por hipótesis inductiva, existen $a,b \in C^j(A)$ tales que $a_1 \in K(a,p)$ y $b_1 \in K(b,p)$; luego, por (7.18), existe $x \in K(a,b)$ tal que $x_1 \in K(x,p)$. Pero, como $x \in K(a,b)$, resulta que $x \in C^{j+1}(A)$; además, por (7.20), $K(x,p) = C^{j+1}(x,p)$; de esta forma, queda probado que existe $x \in C^{j+1}(A)$ tal que $x_1 \in C^{j+1}(x,p)$.

Como caso particular de (7.21) obtenemos que para todo número entero $n \geq 0$, C^n cumple (Ax 4).

(7.22) Observación: Como, para todo $A \subset X$, $C^0(A) = A$, resulta evidente que C^0 cumple (Ax 5). En virtud de (7.12), si K cumple (Ax 2) y (Ax 5), entonces C^1 cumple (Ax 5). Además, por (7.20), si K cumple (Ax 1), (Ax 2), (Ax 3) y (Ax 5), entonces para todo número entero $n \geq 1$, C^n cumple (Ax 5).

De esta forma, si K cumple (Ax 1) a (Ax 5), entonces, para todo número entero $n \geq 0$, C^n cumple (Ax 2) a (Ax 5). Evidentemente, C^0 cumple (Ax 1); sin embargo, de que K cumpla (Ax 1) a (Ax 5) no se deduce que, para todo número entero $n \geq 1$, C^n cumpla (Ax 1). Según aclaramos en (5.1), si X es un espacio vectorial sobre un cuerpo ordenado y dim X = d ≥ 1 , entonces si $1 < 2^n < d + 1$, resulta que C^n no cumple (Ax 1); por otra parte, si $d + 1 \leq 2^n$ entonces C^n cumple (Ax 1).

Las relaciones entre las propiedades de K y las de los C^n quedan señaladas en la siguiente proposición:

Sean X un conjunto y K una función de P(X) en P(X), entonces los operadores C^n definidos anteriormente cumplen las siguientes propiedades:

i.- Para todo entero $n \geq 0$, C^n cumple (Ax 2).

ii.- K cumple (Ax 3) $\Leftrightarrow$ para todo entero $n \geq 0$, C^n cumple (Ax 3).

iii.- Si K cumple (Ax 1), (Ax 2) y (Ax 3), entonces

a) K cumple (Ax 4) $\Rightarrow$ para todo entero $n \geq 0$, C^n cumple (Ax 4).

b) K cumple (7.18) $\Leftrightarrow$ para todo entero $n \geq 0$, C^n cumple (Ax 4).

c) K cumple (Ax 5) $\Leftrightarrow$ para todo entero $n \geq 0$, C^n cumple (Ax 5).

Demostración. i.- Resulta de (7.16)ii

ii.- ($\Rightarrow$) Es consecuencia de (7.17)i.

($\Leftarrow$) Tomando n = 1 , C cumple (Ax 3); pero, por (7.16)ii, para todo $a \in X$, C(a) = K(a); luego K cumple (Ax 3). iii.- Supongamos que K cumple (Ax 1), (Ax 2) y (Ax 3).

a) Se deduce de (7.21).

b) ($\Rightarrow$) Se deduce de (7.21).

($\Leftarrow$) Utilizamos que C^2 cumple (Ax 4). Sean $a_1 \in K(a,p)$, $b_1 \in K(b,p)$ y $x_1 \in K(a_1, b_1)$; luego, $x_1 \in C^2(a,b,p) \subset \cup \{C^2(x,p) \ / \ x \in C^2(a,b)\}$; así existe $x \in C^2(a,b)$ tal que $x_1 \in C^2(x,p)$. Pero, por (7.20), $C^2(a,b) = K(a,b)$ y $C^2(x,p) = K(x,p)$. En consecuencia, K cumple (7.18).

c) Se deduce de (7.20).

Del análisis de la demostración se deduce que en iii alcanza con pedir que K cumpla (Ax 1) y (Ax 3), y sea isotónico. Para ver que, en iii.- a), no vale la recíproca podemos tomar el primer ejemplo de (5.4).

(7.23) Para todo número entero $n \geq 0$, se cumple:

i.- $A \subset X \Rightarrow C^n(A) \subset K(A)$.

ii.- $A \subset X \Rightarrow C^n(A) \subset C^{n+1}(A)$.

Demostración. i.- Utilizamos que K es isotónico y cumple (Ax 1) y (Ax 3). En efecto, por (6.1)i, obtenemos que i vale para $n =$ $= 0$. Supongamos la validez de i para $n = j \geq 0$ y sea $A \subset X$; así $C^j(A) \subset K(A)$. Para ver que $C^{j+1}(A) \subset K(A)$, tomamos $x \in$ $C^{j+1}(A)$; luego existen $a,b \in C^j(A)$ tales que $x \in K(a,b)$; pero por hipótesis inductiva $a,b \in K(A)$; así, por la isotonía de K y por (Ax 1), $K(a,b) \subset K(K(A)) \subset K(A)$. Luego, $x \in K(A)$.
ii.- Es consecuencia de (7.9)i. Así utilizamos únicamente que K cumple (Ax 3).

Ahora, dado $A \subset X$ vamos a expresar K(A) utilizando las bandas K(a,b).

(7.24) $A \subset X \Rightarrow K(A) = \cup\{C^n(A) \ / \ n \geq 0\}$.

Demostración. Sea $A \subset X$ y sea $D(A) = \cup\{C^n(A) \ / \ n \geq 0\}$. Por (7.23), $A \subset D(A) \subset K(A)$. Si tomamos $a,b \in D(A)$ entonces existen $i, j \geq 0$ tales que $a \in C^i(A)$ y $b \in C^j(A)$. En consecuencia, $a,b \in C^m(A)$ donde $m = \text{máx}\ \{i,j\}$, y $K(a,b) \subset C^{m+1}(A) \subset D(A)$. Luego, por (7.1), $K(D(A)) = D(A)$. Así la istotonía de K nos permite deducir que $K(A) \subset K(D(A)) = D(A)$. En consecuencia, $K(A) = D(A)$. De la observación de las demostraciones de (7.23) y (7.1), se deduce que en la presente demostración hemos utilizado que K cumple los cuatro primeros axiomas.

Como corolario de (7.23)ii y de (7.24) obtenemos:

(7.25) Para todo número entero $j \geq 0$, se cumple : $A \subset X \Rightarrow$ $\Rightarrow K(A) = \cup\{C^n(A) \ / \ n \geq j\}$.

(7.26) Observación: Las proposiciones (7.24) y (7.25) también son válidas si X es un conjunto y K es una función de P(X) en P(X) que cumple (Ax 1), (6.2)i, (6.1)i, y (7.1). En efecto, esto se deduce, en forma inmediata, analizando las demostraciones de (7.24) y (7.23), puesto que de (6.1)i se deduce (7.9)i.

Si X es un espacio vectorial sobre un cuerpo ordenado, sabemos que los operadores cápsula lineal y cápsula afín cumplen (Ax 1), (6.2)i, (6.1)i, y (7.1). De esta forma, dichos operadores también cumplen (7.24) y (7.25).

(7.27) <u>Equivalencia entre (7.1) y (7.24)</u>. Según vimos en (7.26) si K cumple (Ax 1), (6.2)i y (6.1)i, entonces (7.1) implica (7.24). Ahora veremos que también vale que (7.24) implica (7.1). En efecto, supongamos que K cumple (Ax 1), (6.2)i, (6.1)i y (7.24) para ver que entonces K cumple (7.1), tomamos $A \subset X$. Si $K(A) = A$, entonces, por (6.2)i, $\{a,b\} \subset A$ implica $K(a,b) \subset A$. Por otra parte, si suponemos que $\{a,b\} \subset A$ implica $K(a,b) \subset A$, obtenemos que $C(A) \subset A$; así, por (6.1)i, $C(A) = A$; luego, por inducción, resulta que, para todo $n \geqslant 0$, $C^n(A) = A$ y así, por (7.24), $K(A) = A$. Observemos que al probar que (7.24) implica (7.1), no utilizamos (Ax 1).

La equivalencia entre (7.1) y (7.24) ya probada, queda enunciada en la siguiente proposición:

Sean X un conjunto y K una función de P(X) en P(X) que verifica:

1) $A \subset X \Rightarrow K(K(A)) \subset K(A)$.

2) $A \subset B \subset X \Rightarrow K(A) \subset K(B)$.

3) $A \subset X \Rightarrow A \subset K(A)$.

Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

i.- Para todo $A \subset X$, $K(A) = A$ si y sólo si $\{a,b\} \subset A$ implica $K(a,b) \subset A$.

ii.- $A \subset X \Rightarrow K(A) = \cup\{C^n(A) \ / \ n \geqslant 0\}$.

8.- Obtención de un operador de cápsula convexa utilizando un operador más pobre.

Al estudiar los operadores C y C^n, en el parágrafo anterior, observamos que dichos operadores podían gozar de propiedades mejores que las del operador K a partir del cual se habían generado; por ejemplo, según vimos en (7.16)ii, utilizando únicamente que K es una función de $P(X)$ y $P(X)$, podemos probar que los operadores C^n gozan de la propiedad de dominio finito. Las relaciones entre las propiedades de K y las de los C^n quedaron señaladas en (7.22).

Ahora tomemos un conjunto X y una función K de $P(X)$ en $P(X)$ que satisfaga (Ax 1), (6.2)i, (Ax 3) y (7.18). Utilizando la función K definimos los operadores C y C^n ; y a partir de ellos, definimos, para todo $A \subset X$, $K_1(A) = \cup\{C^n(A) \,/\, n \geq 0\}$. Veremos que el operador K_1 así definido satisface (Ax 1), (Ax 2), (Ax 3) y (Ax 4); además, para todo $A \subset X$, $K_1(A) \subset K(A)$; y cualesquiera sean $a,b \in X$, $K_1(a,b) = K(a,b)$. Así obtenemos el operador K_1 que satisface los cuatro primerso axiomas, a partir del operador K que es más pobre ya que satisface (Ax 1) y (Ax 3) y las proposiciones (6.2)i y (7.18) que se deducen de (Ax 1), (Ax 2) y (Ax 4).

(8.1) $A \subset X \Rightarrow K_1(K_1(A)) \subset K_1(A)$.

Demostración. Sean $A \subset X$ y $B = K_1(A)$. Comenzaremos probando que $C(B) \subset B$; si $x \in C(B)$, existen $a,b \in B$ tales que $x \in K(a,b)$ luego existen $i,j \geq 0$ tales que $a \in C^i(A)$ y $b \in C^j(A)$; así, por (7.23)ii, $a,b \in C^m(A)$ donde $m = \max\{i,j\}$. En consecuencia, $x \in C^{m+1}(A)$ y, así, $x \in B$. Ahora bien, para ver que, para todo $n \geq 0$, $C^n(B) \subset B$, procedemos por inducción sobre n . Evidentemente, $C^0(B) \subset B$; supongamos que $C^j(B) \subset B$; por (7.5)i, $C^{j+1}(B) \subset C(B)$; así $C^{j+1}(B) \subset B$. De esta forma, $K_1(B) \subset B$; o sea, $K_1(K_1(A)) \subset K_1(A)$.

(8.2) $A \subset X \Rightarrow K_1(A) = \cup \{K_1(F) \ / \ F$ finito y $F \subset A\}$.

Demostración. Por (7.16)i, resulta evidente que K_1 es isotónico, o sea, si $A \subset B \subset X$, entonces $K_1(A) \subset K_1(B)$. Por tal motivo, si $A \subset X$ entonces $\cup\{K_1(F) \ / \ F$ finito y $F \subset A\} \subset K_1(A)$. Para probar la otra inclusión, tomemos $x \in K_1(A)$; luego existe $n \geq 0$, tal que $x \in C^n(A)$; pero, por (7.16)ii, existe F finito y $F \subset A$, tal que $x \in C^n(F)$; de donde, por definición de K_1 , $x \in K_1(F)$. De esta forma, $x \in \cup \{K_1(F) \ / \ F$ finito y $F \subset A\}$.

(8.3) $a \in X \Rightarrow K_1(a) = \{a\}$.

Demostración. Es consecuencia de (7.17)i.

(8.4) $\phi \neq A \subset X$ y $p \in X \Rightarrow K_1(A \cup \{p\}) \subset \cup \{K_1(a,p) \ / \ a \in K_1(A)\}$.

Demostración. Sean $\phi \neq A \subset X$ y $p \in X$. Si $x \in K_1(A \cup \{p\})$, existe $n \geq 0$, tal que $x \in C^n(A \cup \{p\})$; pero, por (7.21) y (7.22) existe $a \in C^n(A)$, tal que $x \in C^n(a,p)$; en consecuencia, por definición de K_1 , $x \in K_1(a,p)$ donde $a \in K_1(A)$. Así $x \in \cup \{K_1(a,p) / a \in K_1(A)\}$.

(8.5) $A \subset X \Rightarrow K_1(A) \subset K(A)$.

Demostración. Es consecuencia de (7.23)i.

(8.6) $a,b \in X \Rightarrow K_1(a,b) = K(a,b)$.

Demostración. Sean $a,b \in X$, por definición de C , $K(a,b) \subset C(a,b)$; en consecuencia, $K(a,b) \subset K_1(a,b)$. Pero, por (8.5), $K_1(a,b) \subset K(a,b)$.

(8.7) Observación: En virtud de (8.5), si K además satisface (Ax 5), entonces K_1 también satisface dicho axioma.

(8.8) $K(A) = A \Rightarrow K_1(A) = A$.

Demostración. Sea $A \subset X$ y supongamos que $K(A) = A$; así, por (8.5), $K_1(A) \subset A$. Pero como K_1 cumple (Ax 2) y (Ax 3), por (6.1)i obtenemos $A \subset K_1(A)$; así $K_1(A) = A$.

(8.9) Los siguientes enunciados son equivalentes:

i.- Para todo $A \subset X$, $K_1(A) = A \Rightarrow K(A) = A$.

ii.- $K = K_1$.

iii.- K cumple (Ax 1) a (Ax 4) .

Demostración. i ⇒ ii. Supongamos i; por (8.8), $K(A) = A$ sii $K_1(A) = A$. Pero como la demostración de (6.13) también vale para operadores que cumplan (Ax 1), (6.2)i y (Ax 3), obtenemos que para cualquier $B \subset X$, $K(B) = \cap\{A \;/\; K(A) = A \text{ y } B \subset A \subset X\} = \cap\{A \;/\; K_1(A) = A \text{ y } B \subset A \subset X\} = K_1(B)$. ii ⇒ i . Es trivial.
ii ⇒ iii. Es consecuencia de que K_1 cumple (Ax 1) a (Ax 4).
iii ⇒ ii. Es consecuencia de (7.24).

(8.10) Ejemplos: i.- Sea $X = R^d$ con la norma euclídea, o sea, si $x = (x_1, \ldots, x_d) \in R^d$, entonces $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2}$; y definamos para todo $A \subset X$, $K(A) = \mathrm{cconv}(A)$ (donde $\mathrm{cconv}(A)$ denota la cápsula convexa cerrada de A en dicho espacio, o sea, $\mathrm{cconv}(A) = \overline{\mathrm{conv}(A)}$) . Según vimos en (5.2), K cumple (Ax 1), (Ax 3), (Ax 4) y (Ax 5), pero no cumple (Ax 2). Sin embargo, K cumple (6.2)i, pues los operadores conv y clausura cumplen (6.2)i. Además, K cumple (7.18) ya que en la demostración de dicha proposición utilizamos únicamente (Ax 1), (6.2)i y (Ax 4).

A partir de K definimos el operador C ; pero como para todo $a,b \in X$, $\mathrm{cconv}(a,b) = \mathrm{conv}(a,b)$, resulta que si $A \subset X$, entonces $C(A) = \cup\{\mathrm{conv}(a,b) \;/\; a,b \in A\}$. Así, por (2.8) a (2.11) y (7.24), $\cup\{C^n(A) \;/\; n \geq 0\} = \mathrm{conv}(A)$, de esta forma, K_1 es el operador cápsula convexa.

ii.- Sea $X = R^d$ con la norma euclídea y definamos para todo $A \subset X$, $K(A) = \bar{A}$. Según vimos en (5.2), K cumple (Ax 1), (Ax 3), (Ax 4) y (Ax 5), pero no cumple (Ax 2). Sin embargo, K cumple

(6.2)i y (7.18). A partir de K definimos C ; pero como para todo $a,b \in X$, $\overline{\{a,b\}} = \{a,b\}$, resulta que si $A \subset X$, entonces $C(A) = A$ y, en consecuencia, $K_1(A) = A$, o sea, K_1 es el operador identidad.

iii.- Sea $n \geq 2$ y X un conjunto tal que card $X \geq n + 2$; para todo $A \subset X$ definimos $K(A) = A$ si card $A \leq n$ y $K(A) = X$ si card $A > n$. Según vimos en (5.4), K cumple (Ax 1), (Ax 2), (Ax 3) y (Ax 5), pero no cumple (Ax 4). Evidentemente, K cumple (6.2)i y (7.18). Resulta inmediato que, para todo $A \subset X$, $K_1(A) = A$, o sea, K_1 es el operador indentidad.

iv.- Sea $X = R^d$ con la norma euclídea; para todo $A \subset X$, definimos $K(A) = \text{conv}(A)$ si A es acotado (o sea, si existe $r \in R$ tal que $A \subset \{x \in R^d / \|x\| \leq r\}$) y $K(A) = \text{af}(A)$ si A no es acotado (donde af(A) denota la cápsula afín de A). Para ver que K cumple (Ax 1), tomamos $A \subset X$; si A es acotado entonces conv(A) es acotado y, en consecuencia, $K(K(A)) = \text{conv}(\text{conv}(A)) \subset \text{conv}(A) = K(A)$; si A no es acotado entonces $K(K(A)) = \text{af}(\text{af}(A)) \subset \text{af}(A) = K(A)$. Para probar que K cumple (6.2)i tenemos en cuenta que conv y af cumplen dicha propiedad y además que para todo $A \subset X$, $\text{conv}(A) \subset \text{af}(A)$. Como para todo F , subconjunto finito de X , $K(F) = \text{conv}(F)$, resulta que K cumple (Ax 3), (Ax 4), (Ax 5) y (7.18). Fácilmente podemos ver que K no cumple (Ax 2), para esto, dados $a,b \in X$ $a \neq b$, tomamos $A = \{x \in X / x = \lambda a + (1-\lambda)b, \lambda \geq 0\}$; así $K(A) = \text{af}(A) = \{x \in X / x = \lambda a + (1-\lambda)b, \lambda \in R\}$ y $\cup\{K(F) / F \text{ finito y } F \subset A\} = \text{conv}(A) = A$. Resulta inmediato que para todo $A \subset X$, $K_1(A) = \text{conv}(A)$, o sea, K_1 es el operador cápsula convexa.

9.- Algunas propiedades geométricas que se deducen de los cuatro primeros axiomas: Cápsula convexa de uniones.

Los axiomas 1 a 4 permiten caracterizar la cápsula convexa de la unión de dos o más conjuntos. Para esto, dados $A,B \subset X$, definimos $S(A,B) = \cup\{K(a,b) \ / \ a \in A \text{ y } b \in B\}$. En forma inmediata se deducen las siguientes propiedades de S :

(9.1) Sean $A,B \subset X$, entonces

i.- $S(A,A) = C(A)$.

ii.- $S(A,B) = S(B,A) \subset K(A \cup B)$.

iii.- $A_1 \subset A$ y $B_1 \subset B \Rightarrow S(A_1,B_1) \subset S(A,B)$.

iv.- $A \neq \phi \neq B \Rightarrow A \cup B \subset S(A,B)$.

v.- $S(A,\phi) = \phi$.

vi.- $A \neq \phi \Rightarrow S(A,X) = X$.

Demostración. i,iii y v.- Resultan de las definiciones de S y de C , sin utilizar propiedades de K. ii.- Puesto que $K(a,b) = K(b,a)$, la definición de S nos asegura que $S(A,B) = S(B,A)$. Para ver que $S(A,B) \subset K(A \cup B)$ tomemos $x \in S(A,B)$, luego existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $x \in K(a,b)$; pero, por (6.2)i, $K(a,b) \subset K(A \cup B)$. Así $x \in K(A \cup B)$. iv.- Supongamos que A y B son no vacíos; así podemos tomar $a \in A$ y $b \in B$. Tomemos $x \in A \cup B$; si $x \in A$ entonces $K(x,b) \subset S(A,B)$; pero por (6.1)i, $x \in K(x,b)$, así $x \in S(A,B)$; en forma análoga se procede si $x \in B$. vi.- Sea $A \neq \phi$; evidentemente $S(A,X) \subset X$; pero por iv, $X \subset S(A,X)$.

Para poder caracterizar la cápsula convexa de dos conjuntos, probaremos la siguiente proposición:

(9.2) $\{a,b,c,d\} \subset X \Rightarrow K(a,b,c,d) = S(K(a,b), K(c,d))$.

Demostración. Sean a,b,c,d elementos de X , no necesariamente distintos dos a dos. Si $x \in S(K(a,b), K(c,d))$, entonces existen $y \in K(a,b)$ $z \in K(c,d)$ tales que $x \in K(y,z)$; pero por (6.2) ii b), $K(a,b) \cup K(c,d) \subset K(a,b,c,d)$; así $\{y,z\} \subset K(a,b,c,d)$; luego por (6.2)i y (Ax 1), $K(y,z) \subset K(K(a,b,c,d)) \subset K(a,b,c,d)$; así $x \in K(a,b,c,d)$. Otra forma de probar que $S(K(a,b), K(c,d)) \subset K(a,b,c,d)$, es la siguiente: $S(K(a,b), K(c,d)) \subset S(K(a,b) \cup K(c,d), K(a,b) \cup K(c,d)) \subset C(K(a,b) \cup K(c,d)) \subset C(C(a,b,c,d) \subset$

$\subset$ K(a,b,c,d); estas inclusiones resultan inmediatas en virtud de (9.1)iii, (9.1)i, (7.5)i y (7.23)i, respectivamente. Para probar que K(a,b,c,d) $\subset$ S(K(a,b), K(c,d)) consideremos x $\in$ K(a,b,c,d); por (Ax 4), existe p $\in$ K(a,b,c) tal que x $\in$ K(p,d). Análogamente existe q $\in$ K(a,b) tal que p $\in$ K(q,c). Pero, por (6.1)i, {p,d} $\subset$ K(q,c,d); así K(p,d) $\subset$ K(q,c,d); luego x $\in$ K(q,c,d). Aplicando nuevamente (Ax 4), existe r $\in$ K(c,d) tal que x $\in$ K(q,r); en consecuencia, x $\in$ S(K(a,b), K(c,d)).

La figura 4 ilustra la demostración si a,b,c,d son los vértices de un tetraedro en R^3 y K la cápsula convexa usual.

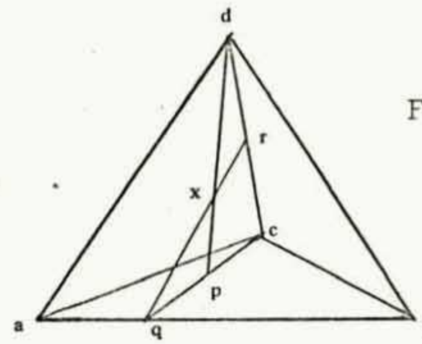


Fig. 4

(9.3) Si A, B son subconjuntos no vacíos de X , entonces K(A $\cup$ B) = S(K(A), K(B)) .

Demostración. Sea M = S(K(A), K(B)); si s,t $\in$ M , existen a_1, a_2 $\in$ K(A), b_1,b_2 $\in$ K(B) tales que s $\in$ K(a_1,b_1) y t $\in$ K(a_2,b_2). Así, por (6.2)i, {s,t} $\subset$ K(a_1,a_2,b_1,b_2); luego K(s,t) $\subset$ K(a_1,a_2,b_1,b_2). De esta forma por (9.2) obtenemos que K(s,t) $\subset$ S(K(a_1,a_2), K(b_1,b_2)) y en consecuencia, por (9.1)iii, K(s,t) $\subset$ M ; así M es convexo. Por otra parte, como A y B son no vacíos, por (6.1)i K(A) y K(B) son no vacíos; de esta forma, por (6.1), (6.2) y (9.1) obtenemos la siguiente cadena de igualdades e inclusiones A $\cup$ B $\subset$ K(A) $\cup$ K(B) $\subset$ S(K(A), K(B)) $\subset$ K(K(A) $\cup$ K(B)) $\subset$ K(K(A $\cup$ B)) = K(A $\cup$ B); en consecuencia, A $\cup$ B $\subset$ M $\subset$ $\subset$ K(A $\cup$ B) y como M es convexo, obtenemos por (6.14) que K(A $\cup$ B) = M .

Como corolario de (9.3), obtenemos la siguiente generalización de (Ax 4):

(9.4) $\phi \neq A \subset X$ y $p \in X \Rightarrow K(A \cup \{p\}) = \cup\{K(a,p) \;/\; a \in K(A)\}$.

Demostración. Es consecuencia de (Ax 3), (9.3) y de la definición de S .

Dados $A_1, \ldots, A_n \subset X$, definimos $S(A_1, \ldots, A_n) = \cup\{K(a_1, \ldots, a_n) \;/\; a_i \in A_i$ para $1 \leq i \leq n\}$. Observemos que, por (Ax 3), $S(A_1) = A_1$. Además $S(A_1, \ldots, A_j, A_{j+1}) = S(S(A_1, \ldots, A_j), A_{j+1})$; en efecto, si $x \in S(A_1, \ldots, A_j, A_{j+1})$, existen $a_1 \in A_1, \ldots, a_j \in A_j$, $a_{j+1} \in A_{j+1}$ tales que $x \in K(a_1, \ldots, a_j, a_{j+1})$; pero por (Ax 4) , existe $a \in K(a_1, \ldots, a_j)$ tal que $x \in K(a, a_{j+1})$; como $a \in K(a_1, \ldots, a_j)$, $a \in S(A_1, \ldots, A_j)$; así $x \in S(S(A_1, \ldots, A_j), A_{j+1})$; la otra inclusión se prueba en forma análoga.

Por la definición de $S(A_1, \ldots, A_n)$ resulta inmediata la siguiente generalización de la proposición (9.1).

(9.5) Sean $A_1, \ldots, A_n \subset X$, entonces i.- $A_1 = \ldots = A_n = A \Rightarrow$ $\Rightarrow S(A_1, \ldots, A_n) = \cup\{K(a_1, \ldots, a_n) \;/\; a_i \in A$ para $1 \leq i \leq n\}$ ii.- $(i_1, \ldots, i_n)$ permutación de $(1, \ldots, n) \Rightarrow S(A_1, \ldots, A_n) = S(A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}) \subset K(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$. iii.- $A_1 \subset B_1, \ldots, A_n \subset B_n \Rightarrow S(A_1, \ldots, A_n) \subset S(B_1, \ldots, B_n)$. iv.- $A_1 \neq \phi$, ..., $A_n \neq \phi \Rightarrow$ $\Rightarrow A_1 \cup \ldots \cup A_n \subset S(A_1, \ldots, A_n)$. v.- existe i tal que $A_i = \phi \Rightarrow$ $\Rightarrow S(A_1, \ldots, A_n) = \phi$. vi.- existe i tal que $A_i = X$ y para todo $j \neq i$ $A_j \neq \phi \Rightarrow S(A_1, \ldots, A_n) = X$.

La siguiente proposición es una generalización de (9.3).

(9.6) Si $A_1, \ldots, A_n$ son subconjuntos no vacíos de X , entonces $K(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = S(K(A_1), \ldots, K(A_n))$.

Demostración. Se hace por inducción sobre n . Para n = 1 la proposición resulta trivial. Supongamos que vale (9.6) para $n = j \geq 1$.

Tomemos $A_1, \ldots, A_j, A_{j+1}$ subconjuntos no vacíos de X ; luego por hipótesis inductiva $K(A_1 \cup \ldots \cup A_j) = S(K(A_1), \ldots, K(A_j))$; así $K(A_1 \cup \ldots \cup A_j \cup A_{j+1}) = K((A_1 \cup \ldots \cup A_j) \cup A_{j+1}) =$ $= S(K(A_1 \cup \ldots \cup A_j), K(A_{j+1})) = S(S(K(A_1), \ldots, K(A_j)), K(A_{j+1})) =$ $= S(K(A_1), \ldots, K(A_j), K(A_{j+1}))$.

La proposición (9.6) también puede enunciarse de la siguiente forma: Si $A_1, \ldots, A_n$ son subconjuntos no vacíos de X , entonces $K(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \cup \{K(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in K(A_i)$ para $1 \leq i \leq n\}$. Como generalización de dicha proposición obtenemos:

(9.7) Sea $\mathcal{A}$ familia de subconjuntos de X y $A = \cup \mathcal{A}$. Definimos una familia $\mathcal{F}$ por $F \in \mathcal{F}$ sii existe $\{A_1, \ldots, A_n\}$ subfamilia finita de $\mathcal{A}$ tal que $F \subset K(A_1) \cup \ldots \cup K(A_n)$ y card $(K(A_j) \cap F) \leq 1$ para $1 \leq j \leq n$. Entonces $K(A) = \cup\{K(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$.

<u>Demostración</u>. Aplicando (6.2) y (Ax 1) obtenemos que $\cup\{K(F) \mid F \in \mathcal{F}\} \subset K(A)$. Para probar la otra inclusión tomemos $x \in K(A)$; por (Ax 2) existe G finito y $G \subset A$ tal que $x \in K(G)$; así existe $\{A_1, \ldots, A_n\}$ subfamilia finita de $\mathcal{A}$ tal que $x \in K(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$. Dicha subfamilia puede tomarse minimal, o sea, de tal forma que si $j \in \{1, \ldots, n\}$, $x \notin K(\cup \{A_i \mid 1 \leq i \leq n, i \neq j\})$. Por (9.6) existen $a_1 \in K(A_1), \ldots, a_n \in K(A_n)$ tales que $x \in K(a_1, \ldots, a_n)$. Sea $F_0 = \{a_1, \ldots, a_n\}$; por la minimalidad de $\{A_1, \ldots, A_n\}$, para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, $K(A_j) \cap F_0 =$ $= \{a_j\}$. Así $F_0 \in \mathcal{F}$ y , en consecuencia, $x \in \cup \{K(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$.

Como corolarios inmediatos de (9.7), obtenemos las dos proposiciones siguientes:

(9.8) Sean $\{A_i \mid i \in I\}$ una familia de subconjuntos de X , A =

$= \cup\{A_i \ / \ i \in I\}$ y $\widetilde{A} = \cup\{K(A_i) \ / \ i \in I\}$. Si $\{K(A_i) \ / \ i \in I\}$ es una familia de subconjuntos disjuntos dos a dos, entonces $K(A) = \cup\{K(F) \ / \ F$ finito, $F \subset \widetilde{A}$ y $\mathrm{card}(K(A_i) \cap F) \leq 1$ para $i \in I\}$.

(9.9) Sea $\{A_i \ / \ i \in I\}$ una familia de subconjuntos no vacíos de X , entonces $K(\cup \{A_i \ / \ i \in I\}) = \cup\{K(\{a_i \ / \ i \in I\}) \ / \ a_i \in K(A_i)$ para $i \in I\}$.

CAPITULO III

SISTEMA AXIOMATICO PARA OPERADORES DE BANDAS

En el parágrafo 1 del capítulo II, dado el conjunto X con card $X \geq 2$, consideramos una función K de P(X) en P(X) que cumplía (Ax 1) a (Ax 5) y que llamamos operador de cápsula convexa. Sin utilizar (Ax 5), dicha función permitió definir las bandas determinadas por pares de puntos de X y éstas caracterizar la cápsula convexa de cualquier $A \subset X$ según se vio en (7.24). Es más, en el parágrafo 8 del capítulo II, mediante un operador K que satisfacía (Ax 1), (6.2) i, (Ax 3) y (7.18), definimos, utilizando sus bandas, un operador K_1 que cumplía (Ax 1) a (Ax 4). Ahora, partiremos de un operador B que cumplirá cuatro axiomas y a partir de él construiremos un operador K que cumplirá (Ax 1) a (Ax 5), o sea, partiendo de las bandas llegaremos a un operador de cápsula convexa. Notemos que para deducir que K cumple (Ax 1) a (Ax 4) no vamos a utilizar el axioma 4 de bandas. Este último axioma resulta equivalente a (Ax 5) el que se usará en el próximo capítulo para deducir el teorema de separación.

1.- Axiomas de bandas.

Sean X un conjunto tal que card $X \geq 2$ y B una función de $X \times X$ en P(X) que satisface los siguientes axiomas:

(P 1) $\{a,b\} \subset B(a,b)$

(P 2) $B(a,a) \subset \{a\}$

(P 3) Si $a_1 \in B(a,p)$, $b_1 \in B(b,p)$ y $x_1 \in B(a_1,b_1)$, entonces existe $x \in B(a,b)$ tal que $x_1 \in B(x,p)$.

(P 4) $a \in B(b,p)$ y $c \in B(d,p) \Rightarrow B(a,d) \cap B(b,c) \neq \phi$.

La función B se llamará <u>operador de banda</u> en X. Dado $\{a,b\} \subset X$, diremos que B(a,b) es la <u>banda</u> determinada por a,b.

Observemos que los axiomas que cumple B son ciertas propiedades de las bandas K(a,b) del sistema axiomático para operadores de cápsula convexa del capítulo II. En efecto, (P 1) y (P 2) son consecuencias de (6.1)i y (Ax 3) respectivamente; mientras que (P 3) es (7.18) y (P 4) es (Ax 5). De esta forma cualquier modelo del sistema axiomático para operadores de cápsula convexa nos da un modelo del sistema axiomático para operadores de bandas; así este último sistema es consistente y no categórico.

2.- <u>Independencia de los axiomas</u>.

En este parágrafo veremos que cualquiera de los axiomas (P 1) a (P 4) es independiente de los restantes. Para esto, procederemos en forma análoga a la del parágrafo 5 del capítulo II. Así, para cada uno de los axiomas (P 1) a (P 4), encontraremos un conjunto X tal que card $X \geq 2$ y una función $B : X \times X \to P(X)$ que no verifique dicho axioma pero cumpla todos los restantes.

(2.1) <u>Independencia de (P 1)</u>. Tomemos cualquier conjunto X tal que card $X \geq 2$ y definamos para todo $(a,b) \in X \times X$, $B(a,b) = \phi$. Resulta evidente que B no verifica (P 1) pero cumple los otros tres axiomas. También podemos probar la independencia de (P 1) tomando cualquier conjunto X tal que card $X \geq 2$ y definiendo para todo $(a,b) \in X \times X$, $B(a,b) = \{a\}$. Si tomamos $b \neq a$ resulta que $\{a,b\} \not\subset B(a,b)$; evidentemente B cumple (P 2). Para ver que cumple (P 3) tomemos $a_1 \in B(a,p)$, $b_1 \in B(b,p)$ y $x_1 \in B(a_1,b_1)$, así obtenemos que $a_1 = a$, $b_1 = b$ y $x_1 = a_1$, de donde $x_1 = a$; luego tomando $x = a$ resulta que $x \in B(a,b)$ y $x_1 \in B(x,p)$. Análogamente se procede para ver que B cumple (P 4). Otro ejemplo para probar la independencia de (P 1) se obtiene tomando como X el plano y para todo $(a,b) \in X \times X$, $B(a,b)$ el segmento abierto de extremos a,b.

(2.2) Independencia de (P 2). Consideremos cualquier conjunto X tal que card $X \geq 2$ y definamos para todo $(a,b) \in X \times X$, $B(a,b) = X$. Evidentemente B no cumple (P 2) pero cumple los otros tres axiomas. Las cápsulas lineal y cónica ya utilizadas en (5.3) del capítulo II para probar la independencia de (Ax 3) también permiten probar la independencia de (P 2). En efecto, sea X un espacio vectorial (de dimensión ≥ 1) sobre un cuerpo E ; y definamos para todo $(a,b) \in X \times X$ $B(a,b) = L(a,b) = \{\alpha a + \beta b \ / \ \alpha, \beta \in E\}$; así $\{a,b\} \subset B(a,b)$; si tomamos $a \neq 0$ resulta que $B(a,a) \not\subset \{a\}$; evidentemente se cumple (P 4) pues $0 \in L(a,b)$ cualesquiera sean $a,b \in X$; procediendo en forma rutinaria también se ve que B cumple (P 3). En el caso de la cápsula cónica se procede en forma análoga al de la cápsula lineal; así tomamos como X un espacio vectorial (de dimensión ≥ 1) sobre un cuerpo ordenado E y definimos $B(a,b) = \text{cono}\,(a,b) = \{\alpha a + \beta b \ / \ \alpha, \beta \in E \text{ y } \alpha, \beta \geq 0\}$.

(2.3) Independencia de (P 3). El último ejemplo dado en (5.4) del capítulo II para probar la independencia de (Ax 4), también permite probar la independencia de (P 3). En efecto, sea $X = \text{conv}\,(g,h,i) - (g,h)$, donde g,h,i son tres puntos no alineados del plano, conv la cápsula convexa usual y (g,h) el segmento abierto de extremos g,h; definimos para todo $(a,b) \in X \times X$, $B(a,b) = X \cap \text{conv}\,(a,b)$. Resulta inmediato que B cumple (P 1) y (P 2); además, según vimos en (5.4) del capítulo II, B también cumple (P 4). Para ver que B no cumple (P 3) tomamos $a = g$, $b = h$ y $p = i$; de esta forma si $a_1 \in B(a,p) - \{a,p\}$, $b_1 \in B(b,p) - \{b,p\}$ y $x_1 \in B(a_1, b_1) - \{a_1, b_1\}$ entonces, como $B(a,b) = \{a,b\}$, resulta que no existe $x \in B(a,b)$ tal que $x_1 \in B(x,p)$.

(2.4) Independencia de (P 4). Como (P 1), (P 2) y (P 3) se deducen de (Ax 1) a (Ax 4), el ejemplo dado en (5.5) del capítulo II para probar la independencia de (Ax 5) también prueba la independencia de (P 4).

3.- Algunas propiedades de las bandas.

Mediante (P 1), (P 2) y (P 3) podemos deducir las siguientes propiedades de B.

(3.1) $B(a,a) = \{a\}$.

Demostración: Es consecuencia de (P 1) y (P 2).

(3.2) $c,d \in B(a,b) \Rightarrow B(c,d) \subset B(a,b)$.

Demostración: Sean $c,d \in B(a,b)$ y $x_1 \in B(c,d)$; por (P 3) existe $x \in B(a,a)$ tal que $x_1 \in B(x,b)$. Pero, por (P 2), $x = a$; así $x_1 \in B(a,b)$.

(3.3) $B(a,b) = B(b,a)$.

Demostración: Por (P 1), $\{a,b\} \subset B(b,a)$; así, por (3.2), $B(a,b) \subset B(b,a)$. La otra inclusión se prueba en forma análoga.

Consideremos las proposiciones:

(P 1') $a \in B(a,b)$

(P 1") $B(a,b) = B(b,a)$

de esta forma obtenemos:

(3.4) Sean X un conjunto tal que card $X \geq 2$ y $B : X \times X \to P(X)$ una función que satisface (P 2) y (P 3) entonces

B cumple (P 1) $\iff$ B cumple (P 1') y (P 1") .

4.- Definición del operador de cápsula convexa a partir de B.

En forma análoga a lo hecho en el parágrafo 7 del capítulo II, dado $A \subset X$ definimos $C(A) = \cup \{B(a,b) \ / \ a,b \in A\}$ y $C^n(A)$ inductivamente por i.- $C^0(A) = A$; ii.- $C^{j+1}(A) = C(C^j(A))$. Finalmente definimos $K(A) = \cup \{C^n(A) \ / \ n \geqslant 0\}$. Siguiendo la misma notación del capítulo anterior, $C(\{a_1,\ldots,a_n\})$ se escribirá $C(a_1,\ldots,a_n)$; en forma análoga procederemos con los C^n y K. Mediante los axiomas (P 1), (P 2) y (P 3), vamos a deducir que K cumple (Ax 1) a (Ax 4). Para esto probaremos primero:

(4.1) Si A,B son subconjuntos de X y $n \geqslant 0$, entonces:
i.- $A \subset C^n(A) \subset C^{n+1}(A) \subset K(A)$
ii.- $C^n(A) = C^{n+1}(A) \Leftrightarrow C^n(A) = K(A)$
iii.- $A \subset B \Rightarrow C^n(A) \subset C^n(B)$

Demostración. i.- Sea $a \in A$, por (P 1) $a \in B(a,a)$; así $a \in C(A)$; luego $A \subset C(A)$. Por inducción sobre n vemos que $A \subset C^n(A)$. Como $C^{n+1}(A) = C(C^n(A))$ resulta que $C^n(A) \subset C^{n+1}(A)$. Obviamente $C^{n+1}(A) \subset K(A)$. ii.- Si $C^n(A) = C^{n+1}(A)$, entonces para todo $m \geqslant n$ $C^m(A) = C^n(A)$; así $C^n(A) = K(A)$. La otra implicación se deduce de i. iii.- Sea $A \subset B$, si $x \in C(A)$ entonces existen $a,b \in A$ tales que $x \in B(a,b)$; pero como $a,b \in B$, $x \in C(B)$. Por inducción sobre n vemos que $C^n(A) \subset C^n(B)$.

(4.2) $K(a,b) = B(a,b)$.

Demostración. Sean $a,b \in X$; por definición $C(a,b) = B(a,b) \cup B(b,a) \cup B(a,a) \cup B(b,b)$; así, por (P 1), (3.1) y (3.3), $C(a,b) = B(a,b)$. Pero, por (P 1) y (3.2), $C^2(a,b) = B(a,b)$. Luego, por (4.1) ii $K(a,b) = C(a,b) = B(a,b)$.

(4.3) Sea $A \subset X$, entonces son equivalentes:
i.- $A = K(A)$. ii.- $A = C(A)$. iii.- $\{a,b\} \subset A \Rightarrow K(a,b) \subset A$.

Demostración. i $\Leftrightarrow$ ii. Es (4.1) ii para n = 0. ii $\Leftrightarrow$ iii. Es consecuencia de (4.1)i, (4.2) y de la definición de C.

Observemos que, por (4.2), $C(A) = \cup \{K(a,b) \ / \ a,b \in A\}$. De esta forma, si probamos que K satisface (Ax 1), (6.2)i, (Ax 3) y (7.18) del capítulo II, entonces K es el operador K_1 definido en el parágrafo 8 de dicho capítulo a partir de las bandas K(a,b). En consecuencia, (8.9) del capítulo II nos asegura que K cumple (Ax 1) a (Ax 4). Las cuatro proposiciones siguientes afirman que K cumple (Ax 1), (6.2)i, (Ax 3) y (7.18) del capítulo II, respectivamente:

(4.4) $A \subset X \Rightarrow K(K(A)) \subset K(A)$

<u>Demostración</u>. Sean $a,b \in K(A)$, luego existen i,j tales que $a \in C^i(A)$ y $b \in C^j(A)$. En consecuencia, por (4.1)i y (4.2), $K(a,b) \subset C^{m+1}(A) \subset K(A)$. Así, por (4.3), $K(A) = K(K(A))$.

(4.5) $A \subset B \subset X \Rightarrow K(A) \subset K(B)$

<u>Demostración</u>. Es consecuencia de (4.1)iii.

(4.6) $a \in X \Rightarrow K(a) = \{a\}$.

<u>Demostración</u>. Se obtiene de (3.1) y (4.2).

(4.7) Si $a_1 \in K(a,p)$, $b_1 \in K(b,p)$ y $x_1 \in K(a_1,b_1)$, entonces existe $x \in K(a,b)$ tal que $x_1 \in K(x,p)$.

<u>Demostración</u>. Es consecuencia de (P 3) y (4.2).

De esta forma queda probado que si B cumple (P 1) a (P 3) entonces K cumple (Ax 1) a (Ax 4). Esta demostración resultó bastante breve porque hemos utilizado la proposición (8.9) del capítulo II. En los trabajos [9] y [10] del autor de esta tesis se prueba directamente, o sea, sin utilizar (8.9) del capítulo II, que si B cumple (P 1) a (P 3) entonces K cumple (Ax 1) a (Ax 4). Observemos que por (4.2), si B cumple (P 1) a (P 4) entonces K cumple (Ax 1) a (Ax 5).

5.- Equivalencia entre los sistemas axiomáticos para operadores de cápsula convexa y de bandas.

La equivalencia entre los dos sistemas axiomáticos queda expresada en la siguiente proposición:

(5.1) Sean X un conjunto tal que card $X \geq 2$, K una función de P(X) en P(X), y B una función de $X \times X$ en P(X). Entonces:
i.- Si K cumple (Ax 1) a (Ax 4), entonces las bandas K(a,b) generadas por K cumplen (P 1) a (P 3), y el operador K_1 definido a partir de las bandas K(a,b) mediante $K_1(A) = \cup \{C^n(A) / n \geq 0\}$, es igual a K .
ii.- Si B cumple (P 1) a (P 3), entonces el operador K definido a partir de las bandas B(a,b) mediante $K(A) = \cup \{C^n(A) / n \geq 0\}$, cumple (Ax 1) a (Ax 4) y para todo $(a,b) \in X \times X$, B(a,b) = K(a,b).
iii.-Si K cumple (Ax 1) a (Ax 5), entonces las bandas K(a,b) generadas por K cumplen (P 1) a (P 4), y el operador K_1 es igual a K.
iv.- Si B cumple (P 1) a (P 4), entonces el operador K definido a partir de las bandas B(a,b) cumple (Ax 1) a (Ax 5) y para todo $(a,b) \in X \times X$, B(a,b) = K(a,b).

Demostración. i.- Ya se vio en el parágrafo 1 de este capítulo que las bandas K(a,b) cumplen (P 1) a (P 3). En (7.24) del capítulo II vimos que $K_1 = K$.
ii.- Se vio en el parágrafo anterior.
iii.- Es consecuencia de i.
iv.- Es consecuencia de ii y de (4.2).

Observemos que si en (5.1)i pedimos que K cumpla (Ax 1), (Ax 3) y (6.2)i y (7.18) del capítulo II, entonces las bandas

$K(a,b)$ generadas por K también cumplen (P 1) a (P 3), y el operador K_1 definido a partir de las bandas $K(a,b)$ mediante $K_1(A) = \cup \{C^n(A) \;/\; n \geq 0\}$, cumple (Ax 1) a (Ax 4) (y así también (6.2)i y (7.18) del capítulo II) pero no podemos afirmar que $K_1 = K$; simplemente podemos decir que para todo $A \subset X$, $K_1(A) \subset K(A)$. Esto se probó en el parágrafo 8 del capítulo II; según vimos en (8.9) de dicho capítulo, $K_1 = K$ sii K cumple (Ax 1) a (Ax 4).

6.- Relación del sistema axiomático de bandas con el sistema de Voiculescu.

En el parágrafo 3 del capítulo I ya vimos los axiomas del sistema axiomático de Voiculescu [13] . Resulta inmediato que los axiomas (P 1) a (P 4) para operadores de bandas son teoremas de la teoría axiomática de Voiculescu. En efecto, (P 1) se deduce de A. 1 y A. 3; (P 2) trivialmente de A. 2; (P 3) se obtiene aplicando A. 8; y (P 4) es consecuencia de P. 5 (II). Por otra parte, resulta inmediato que los axiomas A. 1, A. 2, A. 3 y A. 8 de Voiculescu son teoremas del sistema axiomático para operadores de bandas. En efecto, A. 1 es (3.3), A. 2 es (3.1), A. 3 se deduce de (P 1), y A. 8 es consecuencia de (9.4) del capítulo II. El modelo del sistema axiomático para operadores de bandas dado en (3.4) del capítulo II nos permite afirmar que A. 6 no se deduce de (P 1) a (P 4); en efecto, si x_1, x_2, x_3 son los vértices de un triángulo equilátero que tiene a s por baricentro y $x_4 \in (x_1, s)$, resulta que $B(x_1,x_2) \cap B(x_3,x_4)$ tiene infinitos elementos pero, sin embargo, no existen k,l tales que $\{x_1,x_2,x_3,x_4\} \subset B(x_k,x_l)$. El modelo dado en (3.3) del capítulo II nos asegura que A. 7 no se deduce de (P 1) a (P 4).

CAPITULO IV

SEMIESPACIOS Y PUNTOS EXTREMALES

En el capítulo II, utilizando únicamente (Ax 1) a (Ax 4) obtuvimos diversos resultados de la teoría de la convexidad. También, en el capítulo III, para probar la equivalencia entre el sistema axiomático para operadores de cápsula convexa y el de bandas, no hemos utilizado (Ax 5) ni su equivalente para bandas (P 4).

En este capítulo vamos a pedir que K cumpla (Ax 1) a (Ax 5) . De esta forma vamos a poder probar el teorema de separación de Kakutani (ver capítulo I, parágrafo 2) y desarrollar una teoría de semiepsacios, semiespacios con vértice y puntos extremales análoga a la de los espacios vectoriales sobre cuerpos ordenados.

De acuerdo con lo probado en (5.5) del capítulo II, (Ax 5) es independiente de (Ax 1) a (Ax 4); es más, veremos que es equivalente al teorema de separación de Kakutani.

1.- El teorema de separación de Kakutani y su equivalencia con (Ax 5).

El contenido del presente parágrafo está basado en el trabajo de Ellis [7] . En (1.1) probaremos un lema que utilizaremos al demostrar, en (1.2), el teorema de separación de Kakutani. Finalmente en (1.3) veremos que (Ax 5), (1.1) y (1.2) son equivalentes.

(1.1) Si C,D son subconjuntos convexos de X disjuntos y $p \in X$, entonces $K(C \cup \{p\}) \cap D = \phi$ o $C \cap K(D \cup \{p\}) = \phi$.

<u>Demostración</u>: Sean C,D subconjuntos convexos de X y $p \in X$. Supongamos que $K(C \cup \{p\}) \cap D \neq \phi$ y $C \cap K(D \cup \{p\}) \neq \phi$; entonces

existen $a \in C \cap K(D \cup \{p\})$ y $c \in K(C \cup \{p\}) \cap D$. Así, por (9.4) del capítulo II, existen $b \in D$ y $d \in C$ tales que $a \in K(b,p)$ y $c \in K(d,p)$. Luego, por (Ax 5), $K(a,d) \cap K(b,c) \neq \phi$. Pero como C y D son convexos, $K(a,d) \cap K(b,c) \subset C \cap D$; así $C \cap D \neq \phi$.

(1.2) Si A,B son subconjuntos convexos de X disjuntos, entonces existen C,D convexos complementarios tales que $A \subset C$ y $B \subset D$.

Demostración.Sea $G = \{(A_i,B_i) \,/\, A_i,B_i$ convexos de X, $A_i \cap B_i = \phi$ y $A \subset A_i$, $B \subset B_i\}$; evidentemente $G \neq \phi$ pues, por hipótesis, $(A,B) \in G$. Definamos en G el siguiente orden parcial $(A_i,B_i) \prec (A_j,B_j)$ sii $A_i \subset A_j$ y $B_i \subset B_j$. Si $L = \{(A_i,B_i) \,/\, i \in I\}$ es una cadena no vacía en G , entonces $(A_0,B_0) = (\cup\{A_i \,/\, i \in I\} , \cup\{B_i \,/\, i \in I\}) \in G$ y es cota superior de la cadena L ; en efecto, por (6.12)c del capítulo II, A_0 y B_0 son convexos; además, $A_0 \cap B_0 = \phi$ ya que en caso contrario existiría $i \in I$ tal que $A_i \cap B_i \neq \phi$. Así, aplicando el lema de Zorn existe (C,D) elemento maximal de G . Para ver que $C \cup D = X$ tomamos $p \in X$, por (1.1), $(K(C \cup \{p\}),D) \in G$ o $(C,K(D \cup\{p\}) \in G$; supongamos, por ejemplo, que $(K(C \cup \{p\}), D) \in G$, así por la maximalidad de (C,D) resulta que $C = K(C \cup \{p\})$ y, por (6.1)i del capítulo II, $p \in C$; si suponemos que $(C,K(D \cup \{p\}) \in G$ llegaremos a que $p \in D$. Así $C \cup D = X$. De esta forma como $(C,D) \in G$, obtenemos que C, D son convexos complementarios tales que $A \subset C$ y $B \subset D$.

(1.3) Si K cumple (Ax 1) a (Ax 4), entonces (Ax 5), (1.1) y (1,2) son equivalentes.

Demostración: De las demostraciones de (1,1) y (1,2) deducimos que (Ax 5) $\Rightarrow$ (1.1) y que (1.1) $\Rightarrow$ (1,2), respectivamente . Resta ver que (1.2) $\Rightarrow$ (Ax 5); para esto consideremos $a \in K(b,p)$ y $c \in K(d,p)$, y supongamos que $K(a,d) \cap K(b,c) = \phi$.

Como $K(a,d)$ y $K(b,c)$ son convexos, resulta por (1.2) que existen C,D convexos complementarios tales que $K(a,d) \subset C$ y $K(b,c) \subset D$. Pero entonces $p \in C$ o $p \in D$; supongamos que $p \in C$, entonces $K(d,p) \subset C$ y así $c \in C$; luego $c \in C \cap D$ lo cual está en contradicción con que $C \cap D = \phi$; si suponemos que $p \in D$, llegamos a la misma contradicción.

2.- Semiespacios.

Por analogía con la teoría de la convexidad en espacios vectoriales sobre cuerpos ordenados, diremos que S es semiespacio si S y $X - S$ son convexos no vacíos de X . De esta forma resulta evidente la siguiente proposición:

(2.1)i.- S es semiespacio sii $X - S$ es semiespacio. ii.- Si $A \subset X$ y S es semiespacio entonces $A \subset S$ sii $K(A) \subset S$.

Dados $A,B \subset X$, diremos que los semiespacios complementarios S_1 , S_2 separan A,B si $A \subset S_1$ y $B \subset S_2$ o si $A \subset S_2$ y $B \subset S_1$. Además diremos que A y B están separados si existe un par de semiespacios complementarios S_1 , S_2 que separan A,B . Así, de (1.2) obtenemos:

(2.2) Si A,B son subconjuntos convexos no vacíos de X disjuntos, entonces existen S_1 , S_2 semiespacios complementarios que separan A,B (o sea, A y B están separados).

Como card $X \geq 2$ y los subconjuntos unitarios son convexos, (2,2) nos asegura la existencia de semiespacios y la siguiente proposición:

(2.3) Si $A \subset X$ y $x \in X - K(A)$, entonces existe S semiespacio tal que $K(A) \subset S$ y $x \notin S$.

Demostración. Si $A \neq \phi$, aplicamos (2.2) a los conjuntos $K(A)$ y $K(x) = \{x\}$. Si $A = \phi$, como card $X \geq 2$, existe $y \in X$ tal que $y \neq x$; luego aplicamos (2.2) a $K(y) = \{y\}$ y a $K(x) = \{x\}$.

En la proposición (6.13) del capítulo II, vimos que la cápsula convexa de un conjunto es igual a la intersección de los convexos que incluyen a dicho conjunto. Ahora veremos que en lugar de tomar los convexos alcanza con tomar los semiespacios.

(2.4) $A \subset X \Rightarrow K(A) = \cap \{S \,/\, S$ semiespacio y $A \subset S\}$.

Demostración. Sea $\mathcal{O}(A) = \{S \,/\, S$ semiespacio y $A \subset S\}$. Si $K(A) = X$, entonces $\mathcal{O}(A) = \phi$ y en consecuencia $X = \cap \mathcal{O}(A)$. Supongamos que $K(A) \neq X$, evidentemente $K(A) \subset \cap \mathcal{O}(A)$; además si $x \notin K(A)$, por (2.3) existe $S \in \mathcal{O}(A)$ tal que $x \notin S$; luego $x \notin \cap \mathcal{O}(A)$.

La proposición (6.12) del capítulo II nos permite probar la siguiente proposición:

(2.5) Sea $\mathcal{O} = \{S_j \,/\, j \in J\}$ una familia de semiespacios de X que cumple alguna de las siguientes condiciones:
a) para todo j_1 , $j_2 \in J$ existe $j_3 \in J$ tal que $S_{j_1} \cup S_{j_2} \subset S_{j_3}$;
b) $\mathcal{O}$ es cerrada para uniones finitas;
c) $\mathcal{O}$ es una cadena.

Si existe un subconjunto no vacío A de X tal que para todo $j \in J$, $A \cap S_j = \phi$ y si $S = \cup \mathcal{O}$, entonces S es un semiespacio tal que $A \cap S = \phi$.

Demostración. Por (6.12) del capítulo II, S es convexo. Obviamente $S \neq \phi$ y $A \cap S = \phi$. Por otra parte, $X - S$ es convexo pues $X - S = \cap \{X - S_j \,/\, j \in J\}$, o sea, $X - S$ es una intersección de convexos. Además $X - S \neq \phi$ pues $A \subset X - S$. Así S es semiespacio.

Como corolario de (2.5) y (2.1)i obtenemos:

(2.6) Sea $\mathscr{S} = \{S_j \,/\, j \in J\}$ una familia de semiespacios de X que cumple alguna de las siguientes condiciones:

a) para todo j_1, $j_2 \in J$ existe $j_3 \in J$ tal que $S_{j_3} \subset S_{j_1} \cap S_{j_2}$;

b) $\mathscr{S}$ es cerrada para intersecciones finitas;

c) $\mathscr{S}$ es una cadena .

Si existe un subconjunto no vacío A de X tal que para todo $j \in J$, $A \subset S_j$ y si $S = \cap \mathscr{S}$, entonces S es un semiespacio tal que $A \subset S$.

Entre los semiespacios que incluyen a un subconjunto A de X , donde $\phi \neq K(A) \neq X$, resulta interesante considerar aquellos que son minimales, o sea, los semiespacios S tales que $A \subset S$ y si S_1 es semiespacio y $A \subset S_1 \subset S$ entonces $S_1 = S$. En nuestro sistema axiomático, estos semiespacios desempeñan un papel análogo al de los semiespacios que incluyen a A determinados por hiperplanos de apoyo de dicho subconjunto en la teoría de la convexidad usual en un espacio vectorial X sobre un cuerpo ordenado completo.

(2.7) Si A es subconjunto no vacío de X y S_1 es semiespacio que incluye a A , entonces existe $S \subset S_1$ tal que S es semiespacio minimal que incluye a A .

Demostración. Definamos $\mathscr{S}(A)$ como en (2.4); y sea $\mathscr{S}(A,S_1) = \{S_i \,/\, S_i \in \mathscr{S}(A) \text{ y } S_i \subset S_1\}$; evidentemente $\mathscr{S}(A,S_1) \neq \phi$ pues $S_1 \in \mathscr{S}(A,S_1)$. Si $\mathscr{S}$ es una cadena no vacía de $\mathscr{S}(A,S_1)$, y $S_0 = \cap \mathscr{S}$, entonces, por (2.6)c, tenemos que $S_0 \in \mathscr{S}(A,S_1)$ y , en consecuencia, $\mathscr{S}$ tiene cota inferior en $\mathscr{S}(A,S_1)$. Así, por el principio minimal, existe S elemento minimal de $\mathscr{S}(A,S_1)$. Resulta inmediato que S es elemento minimal de $\mathscr{S}(A)$ y en consecuencia S cumple la tesis.

Como corolario de (2.4) y (2.7) obtenemos la siguiente proposición:

(2.8) $\phi \neq A \subset X \Rightarrow K(A) = \cap \{S \ / \ S$ es semiespacio minimal que incluye a $A\}$.

(2.9) Ejemplo. Sea X un conjunto convexo acotado con interior no vacío del plano y para todo $A \subset X$, definamos $K(A) = \text{conv}(A)$

Por (3.1) del capítulo II, K cumple (Ax 1) a (Ax 5). Consideremos el círculo cerrado A y el semiespacio S_1 que contiene a A (ver fig. 1). Así S y S_0 son semiespacios minimales que incluyen a A y están incluidos en S_1. En este caso hay infinitos semiespacios minimales que incluyen a A y que están incluidos en S_1.

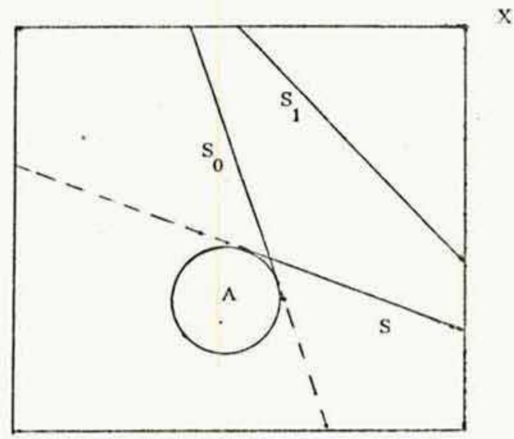


Fig. 1

3.- Semiespacios con vértice.

La noción de semiespacio con vértice en espacios vectoriales fue introducida por P. C. Hammer [8] . Según Hammer, S es un semiespacio de vértice p si S es un cono convexo maximal de vértice p que no contiene al punto p . Como corolario de los teoremas 1 y 2 de [8] , se deduce que S es un semiespacio de vértice p sii S es un subconjunto convexo maximal que no contiene al punto p. De esta forma, en nuestro sistema axiomático, dado $p \in X$, diremos que S_p es un semiespacio de vértice p si S_p es subconjunto convexo maximal incluido en $X - \{p\}$. Los semiespacios con vértice son también semiespacios según puede verse en la siguiente proposición:

(3.1) Si $p \in X$ y $S_p \subset X$, los siguientes enunciados son equivalentes: i.- S_p es semiespacio de vértice p . ii.- S_p es semiespacio maximal incluido en $X - \{p\}$. iii.- $X - S_p$ es semiespacio minimal que incluye a $\{p\}$. iv.- S_p es un subconjunto convexo incluido en $X - \{p\}$ tal que para todo $x \in X - S_p$ existe $y \in S_p$ de forma que $p \in K(x,y)$.

Demostración. i $\Rightarrow$ ii. La maximalidad de S_p nos asegura que $S_p \neq \phi$. Por (2.2) existen S_1 , S_2 semiespacios complementarios que separan S_p , $\{p\}$. Supongamos que $S_p \subset S_1$; por la maximalidad de S_p, $S_p = S_1$ y en consecuencia S_p es semiespacio. Resulta inmediato que S_p es maximal entre los semiespacios incluidos en $X - \{p\}$.
ii $\Rightarrow$ iii. Resulta inmediata por (2.1)i .
iii $\Rightarrow$ iv . Trivialmente obtenemos que S_p es subconjunto convexo incluído en $X - \{p\}$. Sea $x \in X - S_p$; de suponer que $p \in K(S_p \cup \{x\})$, por (2.2), existen S_1 , S_2 semiespacios complementarios tales que $K(S_p \cup \{x\}) \subset S_1$ y $\{p\} \subset S_2$; así S_2 es un semiespacio tal que $\{p\} \subset S_2 \subsetneqq X - S_p$ lo cual contradice iii. De esta forma $p \in K(S_p \cup \{x\})$ y, por (9.4) del capítulo II , existe $y \in S_p$ tal que $p \in K(x,y)$.
iv $\Rightarrow$ i . Si $x \in X - S_p$ existe $y \in S_p$ tal que $p \in K(x,y)$; en consecuencia $p \in K(S_p \cup \{x\})$, luego S_p es subconjunto convexo maximal incluido en $X - \{p\}$, o sea, S_p es semiespacio de vértice p .

(3.2) Si $A \subset X$ y $p \in X - K(A)$, entonces existe S_p semiespacio de vértice p tal que $K(A) \subset S_p$.

Demostración. Sea $\mathcal{C}(A,X - \{p\}) = \{C \,/\, C$ convexo y $A \subset C \subset X - \{p\}\}$; evidentemente $\mathcal{C}(A,X - \{p\}) \neq \phi$ pues $K(A) \in \mathcal{C}(A,X - \{p\})$. Si $\mathcal{C}$ es una cadena no vacía de $\mathcal{C}(A,S - \{p\})$, y $C_0 = \cup\mathcal{C}$, entonces, por (6.12)c del capítulo II, $C_0 \in \mathcal{C}(A,X - \{p\})$ y, en consecuencia, $\mathcal{C}$ tiene cota superior en $\mathcal{C}(A, X - \{p\})$. Así, por el lema de Zorn, existe S_p elemento maximal de $\mathcal{C}(A, X - \{p\})$. Inmediatamente vemos que S_p es semiespacio de vértice p tal que $K(A) \subset S_p$. Observemos que utilizamos únicamente (Ax 1) a (Ax 3).

También podríamos demostrar (3.2) de la siguiente forma:

Como $K(A)$ y $\{p\}$ son convexos disjuntos, por (2.2) existen S_1 , S_2 semiespacios complementarios tales que $K(A) \subset S_1$ y $\{p\} \subset S_2$. Pero, por (2.7), existe $S \subset S_2$ tal que S es semiespacio minimal que incluye a $\{p\}$. Sea $S_p = X - S$; por (3.1) S_p es semiespacio de vértice p y, evidentemente, $K(A) \subset S_p$ ya que $K(A) \subset S_1$.

(3.3) Para todo $p \in X$, existe S_p semiespacio de vértice p .

<u>Demostración</u>. Dado $p \in X$, como card $X \geq 2$ tomamos $q \neq p$ y $q \in X$. Por (Ax 3), $K(q) = \{q\}$; así por (3.2) existe S_p semiespacio de vértice p tal que $\{q\} \subset S_p$.

(3.4) $A \subset X \Rightarrow K(A) = \cap \{S \mid A \subset S$ y para algún $p \in X$, S es semiespacio de vértice p $\}$.

<u>Demostración</u>. Sea $\mathcal{S}_v(A) = \{S \mid A \subset S$ y para algún $p \in X$, S es semiespacio de vértice p $\}$. Si $K(A) = X$, entonces $\mathcal{S}_v(A) = \phi$ y $X = \cap \mathcal{S}(A)$. Supongamos que $K(A) \neq X$, evidentemente $K(A) \subset \cap \mathcal{S}_v(A)$; por (3.2) si $x \notin K(A)$ existe S_x semiespacio de vértice x tal que $K(A) \subset S_x$. Así $S_x \in \mathcal{S}_v(A)$ y $x \notin S_x$; luego $x \notin \cap \mathcal{S}_v(A)$.

4.- <u>Semiespacios que se apoyan sobre un conjunto</u>.

Ahora vamos a generalizar el concepto de semiespacio con vértice. Sea A un subconjunto convexo de X tal que $\phi \neq A \neq X$, diremos que S_A es un <u>semiespacio que se apoya sobre A</u> si S_A es un subconjunto convexo maximal incluido en $X - A$. Evidentemente si $A = \{p\}$ entonces S_A es un semiespacio de vértice p . Proposiciones análogas a las probadas para semiespacios con vértice también pueden probarse para semiespacios que se apoyan sobre un conjunto.

(4.1) Si A es un subconjunto convexo de X tal $\phi \neq A \neq X$ y $S_A \subset X$, los siguientes enunciados son equivalentes: i.- S_A es semiespacio que se apoya sobre A. ii.- S_A es semiespacio maximal incluido en X - A. iii.- X - S_A es semiespacio minimal que incluye A . iv.- S_A es un subconjunto convexo incluido en X - A tal que para todo $x \in X - S_A$ existe $y \in S_A$ de forma que $K(x,y) \cap A \neq \phi$.

Demostración. Es análoga a la de (3.1). Veamos, por ejemplo, que
iii $\Rightarrow$ iv . Trivialmente obtenemos que S_A es subconjunto convexo incluido en X - A . Sea $x \in X - S_A$; de suponer que $K(S_A \cup \{x\}) \cap A = \phi$, por (2.2) existen S_1, S_2 semiespacios complementarios tales que $K(S_A \cup \{x\}) \subset S_1$ y $A \subset S_2$; así S_2 es un semiespacio tal que $A \subset S_2 \subsetneq X - S_A$ lo cual contradice iii. Luego, por (9.4) del capítulo II, existe $y \in S_A$ tal que $K(x,y) \cap A \neq \phi$.

(4.2) Si A, B son subconjuntos convexos de X y $B \neq \phi$, entonces existe S_B semiespacio que se apoya sobre B tal que $A \subset S_B$.

Demostración. Resulta análoga a cualquiera de las dos demostraciones de (3.2). Así siguiendo los pasos de la primera de ellas y teniendo en cuenta que A es convexo, podemos probar (4.2) utilizando únicamente (Ax 2).

Las proposiciones (3.3) y (3.4) también pueden extenderse para semiespacios que se apoyan sobre un conjunto convexo:

(4.3) Para todo A subconjunto convexo de X tal que $\phi \neq A \neq X$, existe S_A semiespacio que se apoya sobre A .

(4.4) $A \subset X \Rightarrow K(A) = \cap \{S$ / $A \subset S$ y para algún B subconjunto convexo de X , tal que $\phi \neq B \neq X$, S es semiespacio que se apoya sobre B $\}$.

Por (4.1) podemos afirmar:

(4.5) Los semiespacios que se apoyan sobre un subconjunto convexo A de X tal que $\phi \neq A \neq X$, son semiespacios.

Pero también vale:

(4.6) Si S es semiespacio, entonces S es el úncio semiespacio que se apoya sobre X - S .

Demostración. Se deduce de las definiciones respectivas y sin utilizar los axiomas.

Ahora ampliaremos las equivalencias dadas en (1.3):

(4.7) Si K cumple (Ax 1) a (Ax 4) entonces (Ax 5), (1.1), (1.2), (2.2) y (4.5) son equivalentes.

Demostración. Ya vimos en (1.3) que (Ax 5) $\Rightarrow$ (1.1) y (1.1) $\Rightarrow$ (1.2). Evidentemente (1.2) $\Rightarrow$ (2.2). Como para probar en (4.1) que i $\Rightarrow$ ii usamos únicamente (2.2), resulta que (2.2) $\Rightarrow$ (4.5). Finalmente resta ver que (4.5) $\Rightarrow$ (Ax 5). Sean $a \in K(b,p)$ y $c \in K(d,p)$; si suponemos que $K(a,d) \cap K(b,c) = \phi$, por (4.2) existe S_1 semiespacio que se apoya sobre K(b,c) tal que $K(a,d) \subset S_1$. Pero, por (4.5) S_1 es semiespacio; luego tomando $S_2 = X - S_1$, resulta que S_1, S_2 son semiespacios complementarios que separan a K(a,d), K(b,c). Si $p \in S_1$ entonces $K(d,p) \subset S_1$ y así $c \in S_1$ lo cual es una contradicción pues $c \in S_2$. De suponer que $p \in S_2$ también llegamos a una contradicción.

En la demostración de (4.7) utilizamos (Ax 4) únicamente para probar que (Ax 5) $\Rightarrow$ (1.1). Además veremos que sin utilizar (Ax 4) se puede probar que (4.5) $\Rightarrow$ (1.1). De esta forma llegamos a la siguiente proposición:

(4.8) Si K cumple (Ax 1) a (Ax 3) entonces (1.1), (1.2), (2.2) y (4.5) son equivalentes.

Demostración. Resta ver que (4.5) $\Rightarrow$ (1.1). Sean C, D subconjuntos convexos de X disjuntos y supongamos que C y D son no vacíos. Por (4.2) y (4.5), existen S_1, S_2 semiespacios complementarios tales que $C \subset S_1$ y $D \subset S_2$. Dado $p \in X$, si $p \in S_1$ entonces $K(C \cup \{p\}) \cap D = \phi$; si $p \in S_2$ entonces $C \cap K(D \cup \{p\}) = \phi$.

En la siguiente proposición vamos a ver cómo están relacionados (Ax 4), (Ax 5) y (1.2) o cualquiera de sus equivalentes dadas en (4.8):

(4.9) Si K cumple (Ax 1) a (Ax 3) entonces:
i.- (Ax 4) y (Ax 5) implican (1.2).
ii.- (1.2) implica (Ax 5).
iii.- (1.2) no implica (Ax 4).
iv.- (Ax 4) no implica (1.2).
v.- (Ax 5) no implica (1.2).

Demostración. i y ii se deducen de la demostración de (1.3). Para probar iii tomamos el último ejemplo dado en (5.4) del capítulo II que también fue utilizado en (2.3) del capítulo III, así (1.2) no implica (Ax 4) ni (P 3). Para probar iv observemos que si suponemos que (Ax 4) $\Rightarrow$ (1.2), obtenemos que (Ax 4) $\Rightarrow$ (Ax 5) lo cual contradice la independencia de (Ax 5). Finalmente para probar v tomemos un conjunto X tal que card $X \geq 5$ y definamos $K(A) = A$ si card $A \leq 2$ y $K(A) = X$ si card $A > 2$; según vimos en el primer ejemplo de (5.4) del capítulo II, K cumple todos los axiomas salvo (Ax 4), es más K también cumple (P 3); sin embargo no cumple (1.2) pues si $A = \{a\}$ y $B = \{b\}$ con $a,b \in X$ y $a \neq b$, no existen C , D convexos complementarios tales que $A \subset C$ y $B \subset D$.

5.- Bases de convexos.

Diremos que una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos convexos de X es base de convexos si para todo A subconjunto convexo de X , existe $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$ tal que $A = \cap \mathcal{B}_1$. Las proposiciones (2.4), (3.4) y (4.4) aseguran respectivamente que tanto la familia $\mathcal{S}$ de todos los semiespacios, como la $\mathcal{S}_v$ de los semiespacios con vértice, como la $\mathcal{S}_{ap}$ de los semiespacios que se apoyan sobre un conjunto convexo distinto del vacío y de X , son bases de convexos.

Observemos que si tomamos A convexo, la primera demostración de (3.2) se obtiene de (Ax 2) y lo mismo ocurre con (3.4). De esta forma resulta:

(5.1) Si K cumple (Ax 2) entonces $\mathcal{S}_v$ es base de convexos.

(5.2) Si K cumple (Ax 2) entonces $\mathcal{S}_v$ es la mínima base de convexos (o sea, si $\mathcal{B}$ es base de convexos entonces $\mathcal{S}_v \subset \mathcal{B}$).

Demostración. Supongamos que existe S_p semiespacio de vértice p tal que $S_p \notin \mathcal{B}$; entonces para todo $C \in \mathcal{B}$, $S_p \subset C \Rightarrow p \in C$. En consecuencia no existe $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$ tal que $S_p = \cap \mathcal{B}_1$, o sea, $\mathcal{B}$ no es base de convexos.

Resulta evidente que si K cumple (Ax 3) entonces $\mathcal{S}_v \subset \mathcal{S}_{ap}$. Así obtenemos:

(5.3) Si K cumple (Ax 2) y (Ax 3) entonces $\mathcal{S}_v \subset \mathcal{S}_{ap}$ y en consecuencia $\mathcal{S}_{ap}$ es base de convexos.

Finalmente, por (4.5), (4.6) y (5.3) obtenemos:

(5.4) Si K cumple (Ax 1) a (Ax 5) entonces $\mathcal{S}_v \subset \mathcal{S}_{ap} = \mathcal{S}$ y en consecuencia $\mathcal{S}$ es base de convexos.

6.- Puntos extremales.

Por analogía con la definición de punto extremal de un convèxo en espacios vectoriales sobre cuerpos ordenados, dado A subconjunto convexo de X y $x \in A$, diremos que x es punto extremal de A si cumple que $y, z \in A$ implica $x \notin K(y,z) - \{y,z\}$. Denotaremos con $ex(A)$ al conjunto de los puntos extremales de A.

(6.1) Sea A subconjunto convexo de X y $x \in A$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes: i.- $x \in ex(A)$. ii.- $A - \{x\}$ es convexo. iii.- $x \notin K(A - \{x\})$. iv.- existe S_x semiespacio de vértice x tal que $A - \{x\} \subset S_x$.

Demostración. i $\Rightarrow$ ii. Sean $y,z \in A - \{x\}$; como A es convexo $K(y,z) \subset A$; pero como $x \in ex(A)$, $x \notin K(y,z) - \{y,z\}$, luego $K(y,z) \subset A - \{x\}$ y, por (7.1) del capítulo II, $A - \{x\}$ es convexo.

ii $\Rightarrow$ iii . Es trivial.

iii $\Rightarrow$ iv. Es consecuencia de (3.2).

iv $\Rightarrow$ i . Si $x \notin ex(A)$, existen $y,z \in A$ tales que $x \in K(y,z) - \{y,z\}$; así $y \neq x \neq z$ de donde $K(y,z) \subset K(A - \{x\})$. De esta forma $x \in K(A - \{x\})$ y, en consecuencia, no existe S_x semiespacio de vértice x tal que $A - \{x\} \subset S_x$.

(6.2) Si A es un subconjunto convexo de X, los siguientes enunciados son equivalentes: i.- $A = K(ex(A))$. ii.- $x \in A$ y S_x semiespacio de vértice $x \Rightarrow (X - S_x) \cap ex(A) \neq \phi$.

Demostración. i $\Rightarrow$ ii. De existir $x \in A$ y S_x semiespacio de vértice x tal que $(X - S_x) \cap ex(A) = \phi$, resulta $K(ex(A)) \subset S_x$. Así $x \notin K(ex(A))$ pero $x \in A$, o sea, $A \neq K(ex(A))$.

ii $\Rightarrow$ i . Si $A \neq K(ex(A))$, existe $x \in A - K(ex(A))$. Por (3.2) existe S_x semiespacio de vértice x tal que $K(ex(A)) \subset S_x$ y en consecuencia $(X - S_x) \cap ex(A) = \phi$.

Para la convexidad en espacios vectoriales, la equivalencia i $\Leftrightarrow$ iv dada en (6.1) aparece sin demostración en Hammer [8] ; también la proposición (6.2) es el teorema 5 de [8] ; siguiendo la demostración de dicho teorema hemos probado (6.2).

(6.3) Observaciones. En (6.1) utilizamos (Ax 1) a (Ax 4), mientras que en (6.2) utilizamos (Ax 1) a (Ax 3). Ya vimos que casi todos los resultados sobre semiespacios con vértice, semiespacios que se apoyan sobre un conjunto y bases de convexos se obtuvieron utilizando (Ax 1) a (Ax 3). De esta forma gran parte de lo hecho en los parágrafos 3, 4 y 5 , y todo lo hecho en el parágrafo 6 podía haberse hecho en el capítulo II cuando todavía no utilizábamos (Ax 5). Sin embargo, preferimos desarrollar las teorías de semiespacios con vértice, semiespacios que se apoyan sobre un conjunto y bases de convexos en el presente capítulo para poder relacionarlas con la teoría de semiespacios.

CAPITULO V

NUMEROS DE CARATHEODORY, HELLY Y RADON

En el parágrafo 1 del capítulo I ya vimos una introducción histórica sobre las relaciones entre los números de Carathéodory, Helly y Radon; también vimos la definición de espacio de convexidad que utiliza Kay y Womble [3] al tratar dicho tema. En este capítulo resumiremos los resultados ya obtenidos por Levi [2] y Kay y Womble [3] sobre las relaciones entre estos números y agregaremos otros resultados propios, algunos de los cuales fueron comunicados por el autor de esta tesis en las Reuniones Anuales de la U.M.A. de los años 1972 [28] y 1974 [29].

Los cinco axiomas, introducidos en el capítulo II, nos permitieron demostrar propiedades geométricas interesantes de la teoría de la convexidad. Sin embargo para probar relaciones entre los números de Carathéodory, Helly y Radon se usa básicamente la interseccionalidad de la familia de los convexos y que la cápsula convexa de un conjunto es igual a la intersección de los convexos que lo contienen; es por eso que en este capítulo trabajaremos con los espacios de convexidad.

1.- Espacios de convexidad.

Diremos que una familia $\mathcal{C}$ de subconjuntos de un conjunto X define una estructura de convexidad sobre X , o también, que (X, $\mathcal{C}$) es un espacio de convexidad si se cumplen las dos condiciones siguientes:

(C 1) $\phi \in \mathcal{C}$ y $X \in \mathcal{C}$

(C 2) $\mathcal{F} \subset \mathcal{C} \Rightarrow \cap \mathcal{F} \in \mathcal{C}$

El operador de cápsula generado por $\mathcal{C}$ queda definido para todo $A \subset X$ por $K(A) = \cap \{C \in \mathcal{C} / A \subset C\}$. Las definiciones precedentes aparecen en [3] .

En virtud de las proposiciones (6.9), (6.11) y (6.13) del capítulo II obtenemos la siguiente proposición:

(1.1) Si X es un conjunto tal que card $X \geqslant 2$ y K es una función de $P(X)$ en $P(X)$ que cumple (Ax 1) a (Ax 3), entonces la familia $\mathcal{C} = \{ A \subset X \mid A = K(A)\}$ define una estructura de convexidad sobre X tal que K es el operador de cápsula generado por $\mathcal{C}$.

Sin embargo, si $\mathcal{C}$ define una estructura de convexidad sobre un conjunto X y K es el operador de cápsula generado por $\mathcal{C}$, puede ocurrir que K no cumpla (Ax 2) ni (Ax 3). Por ejemplo, si $X = R^2$ y $\mathcal{C}$ es la familia formada por el conjunto vacío y todos los conos convexos cerrados con vértice en $(0,0)$, entonces $\mathcal{C}$ define una estructura de convexidad sobre X tal que el operador de cápsula generado por $\mathcal{C}$ no cumple (Ax 2) ni (Ax 3).

(1.2) Sean $(X, \mathcal{C})$ un espacio de convexidad y K la cápsula generada por $\mathcal{C}$. Entonces K sumple las siguientes propiedades:
(K 1) $A \subset X \Rightarrow K(K(A)) \subset K(A)$.
(K 2) $A \subset X \Rightarrow A \subset K(A)$
(K 3) $A \subset B \subset X \Rightarrow K(A) \subset K(B)$.
(K 4) $K(\phi) = \phi$.
y además $\mathcal{C} = \{A \subset X \mid A = K(A)\}$.

<u>Demostración</u>. Como $K(A) = \cap \{C \in \mathcal{C} \mid A \in C\}$, por (C 2) $K(A) \in \mathcal{C}$; así $K(A) \in \{C \in \mathcal{C} \mid K(A) \subset C\}$ y, en consecuencia, $K(K(A)) \subset K(A)$. Evidentemente, $A \subset K(A)$. Si $A \subset B$, $\{C \in \mathcal{C} \mid A \subset C\} \supset \{ C \in \mathcal{C} \mid B \subset C\}$; luego $K(A) \subset K(B)$. Como $\phi \in \mathcal{C}$, $K(\phi) = \phi$. Fácilmente se ve que $\mathcal{C} = \{A \subset X \mid A = K(A)\}$ pues si $A \in \mathcal{C}$ entonces $K(A) \subset A$ y por (K 2) resulta $A = K(A)$; además si $A = K(A)$, como $K(A) \in \mathcal{C}$ resulta que $A \in \mathcal{C}$.

En la siguiente proposición vemos que también vale la recíproca de (1.2); así las propiedades (K 1) a (K 4) caracterizan a la cápsula generada por una estructura de convexidad.

(1.3) Sean X un conjunto, K una función de $P(X)$ en $P(X)$ que cumple (K 1) a (K 4) y $\mathscr{C} = \{A \subset X \mid A = K(A)\}$. Entonces $(X, \mathscr{C})$ es un espacio de convexidad y K es la cápsula generada por $\mathscr{C}$.

Demostración. Por (K 4), $\phi \in \mathscr{C}$. Por (K 2) y teniendo en cuenta que $K(X) \in P(X)$, obtenemos que $X \in \mathscr{C}$. Sea $\mathscr{F} = \{A_j \mid j \in J\} \subset \mathscr{C}$; según vimos en (6.2)ii a) del capítulo II, utilizando únicamente (K 3) podemos probar que $K(\cap \{A_j \mid j \in J\}) \subset \cap \{K(A_j) \mid j \in J\}$; así como para todo $j \in J$, $K(A_j) = A_j$, obtenemos $K(\cap \mathscr{F}) \subset \cap \mathscr{F}$; luego, por (K 2) resulta $K(\cap \mathscr{F}) = \cap \mathscr{F}$ y así $\cap \mathscr{F} \in \mathscr{C}$. Para ver que K es el operador de cápsula generado por $\mathscr{C}$, tomemos $A \subset X$ y $K_1(A) = \cap\{C \in \mathscr{C} \mid A \subset C\}$; si $A \subset C$ y $C \in \mathscr{C}$, por (K 3) obtenemos $K(A) \subset K(C) = C$; luego $K(A) \subset K_1(A)$. Pero por (K 1) y (K 2), $K(K(A)) = K(A)$ y, en consecuencia, $K(A) \in \mathscr{C}$; luego $K_1(A) \subset K(A)$.

Observemos que en la demostración de (1.3) utilizamos (K 1) únicamente para probar que $K_1(A) \subset K(A)$. De esta forma resulta inmediata la siguiente proposición:

(1.4) Sean X un conjunto, K_0 una función de $P(X)$ en $P(X)$ que cumple (K 2) a (K 4) y $\mathscr{C} = \{A \subset X \mid A = K_0(A)\}$. Entonces $(X, \mathscr{C})$ es un espacio de convexidad y si K_1 es el operador de cápsula generado por $\mathscr{C}$, para todo $A \subset X$, $K_0(A) \subset K_1(A)$.

Para ilustrar la proposición anterior, consideremos un conjunto X y una función $B : X \times X \to P(X)$ que cumpla (P 1), o sea, $\{a,b\} \subset B(a,b)$. Si tenemos en cuenta las definiciones de C , C^n y K dadas al comienzo del parágrafo 4 del capítulo III, podemos probar que C cumple (K 2) a (K 4). Así $\mathscr{C} = \{A \subset X \mid A = C(A)\}$ define una estructura de convexidad sobre X y si K_1 es el operador de cápsula generado por $\mathscr{C}$, para todo $A \subset X$, $C(A) \subset K_1(A)$.

Observemos que, para todo $A \subset X$, $K_1(A) \in \mathscr{C}$; de donde procediendo por inducción sobre n , se obtiene que $C^n(A) \subset K_1(A)$ y en consecuencia, $K(A) \subset K_1(A)$. Pero si $a,b \in K(A)$, procediendo como en (4.4) del capítulo III , se prueba que $B(a,b) \subset K(A)$; luego $K(A) = C(K(A))$ y $K(A) \in \mathscr{C}$, en consecuencia, como $A \subset K(A)$, resulta $K_1(A) \subset K(A)$. Luego $K(A) = K_1(A)$.

(1.5) Ejemplos de espacios de convexidad.

i.- Por (1.1), todos los modelos del sistema axiomático dado por (Ax 1) a (Ax 5) nos dan ejemplos de espacios de convexidad; en estos casos $\mathscr{C} = \{A \subset X \;/\; A = K(A)\}$. Para estos ejemplos podemos consultar los parágrafos 2 y 3 del capítulo II .

ii.- Análogamente ocurre con todos los ejemplos utilizados para probar la independencia de (Ax 4) y la de (Ax 5), en (5.4) y (5.5) del capítulo II.

iii.- Si X es un conjunto munido de una topología y $\mathscr{C}$ es la familia de los conjuntos cerrados entonces $(X,\mathscr{C})$ es un espacio de convexidad.

iv.- Si X es un espacio vectorial y $\mathscr{C}$ es la familia de los conjuntos afines obtenemos un espacio de convexidad.

v.- Otro ejemplo se obtiene si X es un espacio vectorial normado y $\mathscr{C}$ la familia de los conjuntos convexos cerrados.

2.- Los números de Carathéodory, Helly y Radon.

En todo este parágrafo supondremos que $(X,\mathscr{C})$ es un espacio de convexidad y que K es el operador de cápsula generado por $\mathscr{C}$.

Diremos que c es el número de Carathéodory de $(X,\mathscr{C})$, o también que $(X,\mathscr{C})$ tiene número de Carathéodory c , si c es el mínimo número natural tal que para todo $A \subset X$, $K(A) = \bigcup\{K(F) \;/\; \text{card } F \leq c \text{ y } F \subset A\}$. Si no existe un tal número natural, diremos que $(X,\mathscr{C})$ tiene número de Carathéodory $c = \infty$. Evidentemente, si $(X, \mathcal{C})$ tiene número de Carathéodory $c < \infty$ entonces K cumple (Ax 2). La recíproca no es cierta, por ejemplo, si X es un espacio vectorial sobre un cuerpo ordenado de dimensión infinita y $\mathcal{C}$ es la familia de los convexos de X, entonces $(X, \mathcal{C})$ tiene número de Carathéodory $c = \infty$ pero sin embargo la cápsula convexa cumple (Ax 2).

Diremos que h es el <u>número de Helly</u> de $(X, \mathcal{C})$, o también que $(X, \mathcal{C})$ tiene número de Helly h, si h es el mínimo número natural tal que para toda $\mathcal{F}$ subfamilia finita de $\mathcal{C}$, si las intersecciones de hasta h conjuntos de $\mathcal{F}$ son no vacías, entonces $\cap\mathcal{F} \neq \phi$. Si no existe un tal número natural, diremos que $(X, \mathcal{C})$ tiene número de Helly $h \doteq \infty$.

Diremos que r es el <u>número de Radon</u> de $(X, \mathcal{C})$, o también que $(X, \mathcal{C})$ tiene número de Radon r, si r es el mínimo número natural tal que para todo $A \subset X$, si card $A \geq r$, entonces A tiene una partición de Radon, o sea, existe una partición $\{A_1, A_2\}$ de A tal que $K(A_1) \cap K(A_2) \neq \phi$. Si no existe un tal número natural diremos que $(X, \mathcal{C})$ tiene número de Radon $r = \infty$.

La única diferencia entre las definiciones precedentes y las dadas en [3] es que en las primeras admitimos que c, h y r puedan tomar el valor infinito. De esta forma, para cualquier espacio de convexidad siempre existen c, h y r ya sea con valores finitos o infinito. Tomando $X \neq \phi$, resulta que $c \geq 1$ pues si suponemos que $c = 0$ obtenemos que $K(X) \neq \cup\{K(F) \,/\, \text{card } F = 0 \text{ y } F \subset X\}$. Además si $\mathcal{F}$ es una subfamilia finita de $\mathcal{C}$ tal que $\phi \in \mathcal{F}$, evidentemente $\cap\mathcal{F} = \phi$ pero $\cap\phi = X \neq \phi$; de allí que $h \geq 1$. Obviamente $r \geq 2$ pues por definición de partición $A_1 \neq \phi \neq A_2$. Por ejemplo, si card $X \geq 2$ y $\mathcal{C} = \{\phi, X\}$ resulta que $K(\phi) = \phi$ y $K(A) = X$ para todo $A \neq \phi$ y $A \subset X$. Así $c = h = 1$ y $r = 2$.

Si card $X \geq 3$ y K cumple (Ax 3) (o sea, $\mathcal{C}$ es T_1), entonces $c \geq 1$, $h \geq 2$ y $r \geq 3$. Por ejemplo si $\mathcal{C} = P(X)$ entonces para todo $A \subset X$, $K(A) = A$; así $c = 1$. Si $\mathcal{C} = \{\phi , X\} \cup \{\{x\} / x \in X \}$ entonces si card $A \leq 1$, $K(A) = A$ y si card $A \geq 2$ $K(A) = X$; así $c = 2$, $h = 2$ y $r = 3$.

Si $X = R^d$ con d finito y $\mathcal{C}$ es la familia de los convexos de R^d , los teoremas de Carathéodory, Helly y Radon afirman que $c = h = d + 1$ y $r = d + 2$ (ver [4]) . Los resultados anteriores también valen si $X = E^d$ donde E es un cuerpo ordenado.

3.- Relaciones entre los números de Carathédory, Helly y Radon.

En todo este parágrafo supondremos que $(X,\mathcal{C})$ es un espacio de convexidad, que K es el operador de cápsula generado por $\mathcal{C}$ y que c, h y r son, respectivamente, los números de Carathéodory, Helly y Radon de $(X, \mathcal{C})$.

La siguiente proposición fue probada por F. W. Levi (ver Teorema H de [2]). La demostración de Levi, evidentemente, está basada en la del teorema de Helly dada por Radon [1] .

(3.1) $r < \infty \Rightarrow h \leq r - 1$.

Demostración. Sea $r < \infty$, para probar que $h \leq r - 1$ tendremos que ver que:

(a) Para toda $\mathcal{F}$ subfamilia finita de $\mathcal{C}$, si las intersecciones de hasta $r - 1$ conjuntos de $\mathcal{F}$ son no vacías, entonces $\cap \mathcal{F} \neq \phi$.

Probaremos (a) por inducción sobre card $\mathcal{F}$. Si card $\mathcal{F} \leq r - 1$, evidentemente vale (a). Supongamos, como hipótesis inductiva, que vale (a) para el caso en que card $\mathcal{F} = j - 1$ donde $j - 1 \geq r - 1$; vamos a ver que también vale (a) para el caso en que card $\mathcal{F} = j$.

Sea $\mathcal{F} = \{A_i / i \in I\}$ subfamilia finita de $\mathcal{C}$, con card $\mathcal{F}$ = card $I = j$; y supongamos que las intersecciones de hasta $r - 1$

conjuntos de $\mathfrak{F}$ son no vacías. Por hipótesis inductiva, para todo $i \in I$ existe $p_i \in \cap \{A_l \ / \ i \neq l \in I\}$. Sea $P = \{p_i \ / \ i \in I\}$ evidentemente, card $P \leqslant j$. Si card $P < j$ entonces existe $i \in I$ tal que $p_i \in \cap \ \{A_i \ / \ i \in I\}$; luego $\cap \mathfrak{F} \neq \phi$. Si card $P = j$, como $j \geqslant r$ existen $P_1 = \{p_i \ / \ i \in I_1\}$ y $P_2 = \{p_i \ / \ i \in I_2\}$ que forman una partición de P tal que existe $z \in K(P_1) \cap K(P_2)$. Pero si $i \neq l$ entonces $p_i \in A_l$; así $P_1 \subset \cap \ \{A_l \ / \ l \in I_2\}$ y $P_2 \subset \cap \ \{A_l \ / \ l \in I_1\}$. Pero como $\mathfrak{F} \subset \mathscr{C}$, utilizando (C 2) y (1.2) obtenemos que $K(P_1) \subset \cap \{A_l \ / \ l \in I_2\}$ y $K(P_2) \subset \cap \{A_l \ / l \in I_1\}$. Así $z \in K(P_1) \cap K(P_2) \subset \cap \{A_i \ / \ i \in I\}$; en consecuencia $\cap \mathfrak{F} \neq \phi$. Esto completa la prueba por inducción de (a), de donde $h \leqslant r - 1$.

Según vimos en el parágrafo 1 del capítulo I, Kay y Womble [3] analizan ejemplos que muestran que, en espacios de convexidad la relación (3.1) dada por Levi es la única posible entre c, h y r si se supone la finitud de uno sólo de estos números y no se utilizan hipótesis adicionales. En cambio, suponiendo la finitud de un par de estos números ellos prueban la siguiente proposición (ver Theorem 3 de [3]) :

(3.2) $c < \infty$ y $h < \infty \Rightarrow r \leqslant c\,h + 1$

<u>Demostración</u>. Sean $c < \infty$ y $h < \infty$; para probar que $r \leqslant c\,h + 1$ tendremos que ver que para todo $A \subset X$ si card $A \geqslant c\,h + 1$ entonces A tiene una partición de Radon. Para esto supongamos que $A \subset X$ y card $A = c\,h + 1$; y consideremos las familias finitas $\mathfrak{F} = \{F \subset A \ / \ \text{card } F \geqslant c\,h + 1 - c\}$ y $\mathscr{G} = \{K(F) \ / \ F \in \mathfrak{F}\}$. Si $G_i \in \mathscr{G}$ para $1 \leqslant i \leqslant h$ (o sea, si $G_i = K(F_i)$ con $F_i \in \mathfrak{F}$), entonces $\cap \{G_i \ / \ 1 \leqslant i \leqslant h\} \neq \phi$; en efecto, card $(A - \cap\{G_i \ / \ 1 \leqslant i \leqslant h\}$ = card $(\cup \{A - G_i \ / \ 1 \leqslant i \leqslant h\}) \leqslant$ card $(\cup \{A - F_i \ / \ 1 \leqslant i \leqslant h\}) \leqslant h\,[(c\,h + 1) - (c\,h + 1 - c)] = c\,h <$ card A ; luego $A - \cap \{G_i \ / \ 1 \leqslant i \leqslant h\} \neq A$ y así $\cap \{G_i \ / \ 1 \leqslant i \leqslant h\} \neq \phi$. Pero $(X, \mathscr{C})$ tiene número de Helly h, de donde $\cap \mathscr{G} \neq \phi$. Sea $x \in \cap \mathscr{G}$; como $A \in \mathfrak{F}$, $K(A) \in \mathscr{G}$ y así $x \in K(A)$. Pero como $(X, \mathscr{C})$

tiene número de Carathéodory c , resulta que existe $A_1 \subset A$ tal que card $A_1 \leq c$ y $x \in K(A_1)$. Sea $A_2 = A - A_1$, card $A_2 \geq c\,h + 1 - c$, así $A_2 \in \mathcal{F}$ y, en consecuencia, $K(A_2) \in \mathcal{G}$ y $x \in K(A_2)$. Así $\{A_1, A_2\}$ es una partición de Radon de A pues $x \in K(A_1) \cap K(A_2)$.

Si suponemos que $A \subset X$ y card $A > c\,h + 1$, podemos tomar $B \subset A$ tal que card $B = c\,h + 1$; así existe $\{B_1, B_2\}$ partición de Radon de B . Obviamente, tomando $A_1 = A - B_2$ y $A_2 = B_2$, resulta que $\{A_1, A_2\}$ es partición de Radon de A . De esta forma queda probado que $r \leq c\,h + 1$.

Como corolario de (3.1) y (3.2) obtenemos la siguiente proposición (ver Corollary 1 de [3]) :

(3.3) Si $c < \infty$, entonces:

i.- $h < \infty \Leftrightarrow r < \infty$.

ii.- $h < \infty \Rightarrow h + 1 \leq r \leq c\,h + 1$.

iii.- $r < \infty \Rightarrow h + 1 \leq r \leq c\,h + 1$.

Observemos que $h < \infty$ y $r < \infty$ no implica que $c < \infty$. En efecto, si $X = R^d$ con d finito y $\mathcal{C}$ es la familia de los conjuntos convexos cerrados en R^d (con cualquier norma), entonces $h = d + 1$, $r = d + 2$ y $c = \infty$.

Por otra parte, el Ejemplo 2 de [3] nos permite afirmar que fijado un número natural $n \geq 3$, y otro número natural m (tan grande como se quiera), existe un espacio de convexidad para el cual $c = n, m < h < \infty$ y $m < r < \infty$.

Para probar nuevas relaciones entre c, h y r tendremos que pedir que $(X, \mathcal{C})$ cumpla hipótesis adicionales:

Diremos que $(X, \mathcal{C})$ cumple la propiedad de <u>dominio finito</u> si K cumple (Ax 2), o sea, $A \subset X \Rightarrow K(A) = \cap \{K(F) \ / \ F$ finito y $F \subset A\}$.

Diremos que $(X, \mathcal{C})$ cumple el <u>tercer axioma de Levi</u> si

$F \subset X$, F finito y $p \in K(F) \Rightarrow K(F) \subset \cup\{K((F - \{a\}) \cup \{p\}) \ /\ a \in F\}$. La propiedad de dominio finito ya fue estudiada en (1.2) del capítulo II, mientras que el tercer axioma de Levi ya fue enunciado (utilizando otra nomenclatura) en (C 3) del parágrafo 1 del capítulo I .

La siguiente proposición fue probada por el autor de esta tesis en [28] :

(3.4) Si $(X, \mathcal{C})$ cumple la propiedad de dominio finito y el tercer axioma de Levi, entonces $r < \infty \Rightarrow c \leq r - 1$.

Demostración. Sea $r < \infty$; para probar que $c \leq r - 1$, tendremos que ver que para todo $A \subset X$ y $x \in K(A)$ existe $F \subset A$ tal que card $F \leq r - 1$ y $x \in K(F)$. Para esto tomemos $A \subset X$ y $x \in K(A)$. Por la propiedad de dominio finito existe F finito y $F \subset A$ tal que $x \in K(F)$. Obviamente tal F se puede tomar minimal, o sea, tal que si $G \subset F$ y $x \in K(G)$ entonces $G = F$. Supongamos que card $F > r - 1$, luego existe $\{F_1 , F_2\}$ partición de Radon de F . Sea $p \in K(F_1) \cap K(F_2)$, evidentemente $p \in K(F)$; luego por el tercer axioma de Levi existe $a \in F$ tal que $x \in K((F - \{a\}) \cup \{p\})$. Pero $a \in F_1$ o $a \in F_2$; si suponemos que $a \in F_1$, resulta que $F_2 \subset F - \{a\}$ y así $p \in K(F - \{a\})$; luego $(F - \{a\}) \cup p \subset K(F - \{a\})$; de allí que $K((F - \{a\}) \cup \{p\}) \subset K(F - \{a\})$; así $x \in K(F - \{a\})$ lo cual contradice la minimalidad de F . A la misma contradicción se llega si suponemos que $a \in F_2$. Así card $F \leq r - 1$; de donde $c \leq r - 1$.

Como corolario de (3.1), (3.2) y (3.4) obtenemos:

(3.5) Si $(X, \mathcal{C})$ cumple la propiedad de dominio finito y el tercer axioma de Levi, entonces $r < \infty \Rightarrow \max\{c,h\} \leq r - 1 \leq c\, h$.

Observemos que en el Teorema 8 de [3], Kay y Womble llegan a la misma conclusión que en (3.4)(o sea, $r < \infty \Rightarrow c \leq r - 1$), pero utilizando distintas hipótesis.

4.- Conjuntos afínmente independientes en espacios vectoriales.

Recordemos que si V es un espacio vectorial sobre un cuerpo E , y $F = \{a_1, \ldots, a_n\}$ es un subconjunto finito de V , se dice que F es afínmente independiente si para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ $a_i \notin af(F - \{a_i\})$.

(4.1) Si $F = \{a_1, \ldots, a_n\}$ es un subconjunto finito de V , entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

i.- F es afínmente independiente.

ii.- $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = 0$ y $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0 \Rightarrow$ para todo i , $\alpha_i = 0$.

iii.- $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i$ y $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1 \Rightarrow$ para todo i , $\alpha_i = \beta_i$.

iv.- $x \in af(F) \Rightarrow x$ puede expresarse en forma única como combinación afín de $a_1, \ldots, a_n$.

Demostración. Inmediatamente puede probarse que i $\Rightarrow$ ii, ii $\Rightarrow$ iii , iii $\Rightarrow$ iv , y iv $\Rightarrow$ i .

(4.2) Si V es un espacio vectorial sobre un cuerpo ordenado E, y $F = \{a_1, \ldots, a_n\}$ es un subconjunto finito de V , entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

i.- F es afínmente independiente.

ii.- $conv(F) \not\subset \cup \{conv(G) \ / \ G \subsetneq F\}$.

Demostración. i $\Rightarrow$ ii. Sea F afínmente independiente y sea $x = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} a_i$. Así $x \in \text{conv}(F)$ pero si $G \subsetneqq F$ entonces $x \notin \text{conv}(G)$, por (4.1) i $\Leftrightarrow$ iv. ii $\Rightarrow$ i . Si F no es afínmente independiente, entonces existe $i \in \{1 ,\ldots, n\}$ tal que $a_i \in \text{af}(F - \{a_i\})$, así $\dim \text{af}(F) \leqslant n - 2$, y por el teorema de Carathérodory $\text{conv}(F) = \cup \{\text{conv}(G) \ / \ \text{card}\, G \leqslant n - 1 \text{ y } G \subset F\}$; luego $\text{conv}(F) \subset \cup\{\text{conv}(G) \ / \ G \subsetneqq F\}$.

Observemos que (4.2) nos permite expresar el concepto de afínmente independiente utilizando únicamente la cápsula convexa.

(4.3) Si V es un espacio vectorial sobre un cuerpo ordenado E, $F = \{a_1 ,\ldots, a_n\}$ es un subconjunto finito afínmente independiente de V y F_1, $F_2 \subset F$, entonces $\text{conv}(F_1) \cap \text{conv}(F_2) = \text{conv}(F_1 \cap F_2)$.

Demostración. Puesto que $\text{conv}(F_1 \cap F_2) \subset \text{conv}(F_1)$ y $\text{conv}(F_1 \cap F_2) \subset \text{conv}(F_2)$, obtenemos que $\text{conv}(F_1 \cap F_2) \subset \text{conv}(F_1) \cap \text{conv}(F_2)$. Para probar la otra inclusión, supongamos que $x \in \text{conv}(F_1) \cap \text{conv}(F_2)$. Así $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$ con $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ donde $\alpha_i \geqslant 0$ y si $a_i \notin F_1$ entonces $\alpha_i = 0$; y también $x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i$ con $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$ donde $\beta_i \geqslant 0$ y si $a_i \notin F_2$ entonces $\beta_i = 0$. Pero por (4.1) i $\Leftrightarrow$ iv , para todo i $\alpha_i = \beta_i$. De esta forma, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$ con $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ donde $\alpha_i \geqslant 0$ y si $a_i \notin F_1 \cap F_2$ entonces $\alpha_i = 0$. Luego $x \in \text{conv}(F_1 \cap F_2)$.

Observemos que (4.3) afirma que en todo simplex no degenerado (o sea, cuyo conjunto de vértices es afínmente independiente), la intersección de dos facetas es la faceta que tiene por vértices los vértices comunes a las dos facetas intersecandos.

5.- La independencia afín y el axioma del simplex en espacios de convexidad.

En todo este parágrafo supondremos que $(X,\mathscr{C})$ es un espacio de convexidad, que K es el operador de cápsula generado por $\mathscr{C}$ y que c , h y r son, respectivamente, los números de Carathéodory, Helly y Radon de $(X,\mathscr{C})$.

El contenido de este parágrafo fue expuesto, en forma resumida, por el autor de este trabajo de tesis en [28] .

Basándonos en (4.2), dado $F \subset X$, F finito y no vacío, diremos que F es afínmente independiente si $K(F) \not\subset \cup \{K(G) \,/\, G \subsetneqq F\}$ (o sea, si existe $x \in K(F)$ tal que $G \subsetneqq F$ implica que $x \notin K(G)$). Convendremos en que ϕ es también afínmente independiente. La proposición (4.3) nos hace considerar el siguiente axioma:

(5.1) Axioma del simplex. Si F es un subconjunto finito afínmente independiente de X y F_1, $F_2 \subset F$, entonces $K(F_1) \cap K(F_2) \subset K(F_1 \cap F_2)$.

Observemos que, por (1.2)(K 3), también vale que $K(F_1 \cap F_2) \subset K(F_1) \cap K(F_2)$.

(5.2) Si $(X,\mathscr{C})$ cumple la propiedad de dominio finito y el axioma del simplex entonces $h < \infty \Rightarrow c \leqslant h$.

Demostración. Sea $h < \infty$; para probar que $c \leqslant h$, tendremos que ver que para todo $A \subset X$ y $x \in K(A)$ existe $F \subset A$ tal que card $F \leqslant h$ y $x \in K(F)$. Para esto tomemos $A \subset X$ y $x \in K(A)$. Por la propiedad de dominio finito existe F finito y $F \subset A$ tal que $x \in K(F)$. Evidentemente tal F se puede tomar minimal, o sea, tal que $G \subsetneq F$ implique $x \notin K(G)$. En consecuencia, F resulta afínmente independiente. Supongamos que card $F > h$; así $F = \{a_1, \ldots, a_h, \ldots, a_n\}$. Si definimos para todo $i = 1, \ldots, n$, $F_i = F - \{a_i\}$, entonces, por el axioma del simplex, para todo $i = 1, \ldots, n$, $\cap \{K(F_j) / j \neq i\} = K(\cap \{F_j / j \neq i\}) = K(a_i) \neq \phi$. Sin embargo, $\cap \{K(F_j) / j = 1, \ldots, n\} = K(\cap \{F_j / j = 1, \ldots, n\}) = K(\phi) = \phi$. De esta forma, llegamos a que h no es el número de Helly de $(X, \mathcal{C})$ lo cual es una contradicción. Así queda probado que $c \leq h$.

Observemos que si $X = R^d$ y $\mathcal{C}$ es la familia de los subconjuntos convexos cerrados de X , entonces $(X, \mathcal{C})$ es un espacio de convexidad que cumple el axioma del simplex pero no cumple la propiedad de dominio finito. En este caso $h = d + 1$ pero $c = \infty$.

Si $X = R^\infty = \{(x_1, \ldots, x_i, \ldots) / x_i \in R\}$ y $\mathcal{C}$ es la familia de los subconjuntos convexos de X , entonces $(X, \mathcal{C})$ es un espacio de convexidad que cumple la propiedad de dominio finito y el axioma del simplex. En este caso $h = \infty$ y $c = \infty$.

Como corolario de (3.1), (3.2) y (5.2) obtenemos:

(5.3) Si $(X, \mathcal{C})$ cumple la propiedad de dominio finito y el axioma del simplex, entonces $h < \infty \Rightarrow c \leq h \leq r - 1 \leq c\,h$.

6.- Finitud del número de Helly.

La proposición que daremos a continuación expresa condiciones equivalentes a la finitud del número de Helly en espacios de convexidad. La misma fue enviada a la Reunión Anual de la U.M.A. de 1974, por el autor de este trabajo de tesis (ver [29]).

(6.1) Sea $(X, \mathcal{C})$ un espacio de convexidad y K el operador de cápsula generado por $\mathcal{C}$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

i.- $(X, \mathcal{C})$ tiene número de Helly finito.

ii.- Para todo número natural n, existe un número natural p tal que si A es un subconjunto finito de X y card $A = q \geq p$, entonces $\cap\{K(F) \,/\, F \subset A$ y card $F = q - n\} \neq \phi$.

iii.- existe un número natural p tal que si A es un subconjunto finito de X y card $A = q \geq p$, entonces $\cap\{K(F) \,/\, F \subset A$ y card $F = q - 1\} \neq \phi$.

Demostración. Sea $h < \infty$ el número de Helly de $(X, \mathcal{C})$. Dado un número natural n, tomemos $p = n\,h + 1$. Sea A subconjunto finito de X y card $A = q \geq p$; y consideremos las familias finitas $\mathcal{F} = \{F \subset A \,/\, \text{card } F = q - n\}$ y $\mathcal{G} = \{K(F) \,/\, F \in \mathcal{F}\}$. Si $G_i \in \mathcal{G}$ para $1 \leq i \leq h$ (o sea, si $G_i = K(F_i)$ con $F_i \in \mathcal{F}$), entonces, procediendo como en la demostración de (3.2) tenemos que card $(A - \cap\{G_i \,/\, 1 \leq i \leq h\}) =$ card $(\cup\{A - G_i \,/\, 1 \leq i \leq h\}) \leq$ card $(\cup\{A - F_i \,/\, 1 \leq i \leq h\}) \leq [q - (q - n)]\,h = n\,h < n\,h + 1 = p \leq q =$ card A; y así $\cap\{G_i \,/\, 1 \leq i \leq h\} \neq \phi$. Pero como h es el número de Helly de $(X, \mathcal{C})$, obtenemos que $\cap\mathcal{G} \neq \phi$, o sea, $\cap\{K(F) \,/\, F \subset A$ y card $F = q - n\} \neq \phi$.

ii $\Rightarrow$ iii. Resulta trivialmente tomando $n = 1$.

iii $\Rightarrow$ i. Supongamos que p es un número natural tal que si A es un subconjunto finito de X y card $A = q \geq p$ entonces $\cap\{K(F) \,/\, F \subset A$ y card $F = q - 1\} \neq \phi$; y sea h el número de Helly de $(X, \mathcal{C})$. Para probar que $h < \infty$, veremos que $h \leq p - 1$; para lo cual, procediendo como en la demostración de (3.1), tendremos que ver que:

(a) Para toda $\mathcal{F}$ subfamilia finita de $\mathcal{C}$, si las intersecciones de hasta $p - 1$ conjuntos de $\mathcal{F}$ son no vacías, entonces $\cap\mathcal{F} \neq \phi$.

Probaremos (a) por inducción sobre card $\mathcal{F}$. Si card $\mathcal{F} \leq p - 1$, evidentemente vale (a). Supongamos, como hipótesis inductiva, que vale (a) para el caso en que card $\mathcal{F} = j - 1$. donde $j - 1 \geq p - 1$; vamos a ver que también vale (a) para el caso en que card $\mathcal{F} = j$.

Sea $\mathcal{F} = \{C_i \;/\; i \in I\}$ subfamilia finita de $\mathcal{C}$, con card $\mathcal{F}$ = card I = j ; y supongamos que las intersecciones de hasta p - 1 conjuntos de $\mathcal{F}$ son no vací s.

Por hipótesis inductiva, para todo i $\in$ I existe $x_i \in \cap \{ C_l \;/\; i \neq l \in I\}$. Sea $A = \{x_i \;/\; i \in I\}$; evidentemente, card A = $q \leq j$. Si $q < j$ entonces existe i $\in$ I tal que $x_i \in \cap \{ C_i \;/\; i \in I\}$; luego $\cap \mathcal{F} \neq \phi$. Si q = j , entonces $q \geq p$ y, en consecuencia, existe $x \in \cap \{K(F) \;/\; F \subset A$ y card $F = q - 1 \} = \cap \{K(A - \{x_i\}) \;/\; i \in I\}$. Pero si $i \neq l$ entonces $x_i \in C_l$; así $A - \{x_i\} \subset C_i$ para todo i $\in$ I ; luego $x \in K(A - \{x_i\}) \subset C_i$ para todo i $\in$ I. De esta forma $x \in \cap\{C_i \;/\; i \in I\}$; en consecuencia $\cap \mathcal{F} \neq \phi$. Así se completa la prueba de (a), de donde $h \leq p - 1$.

Como consecuencia de la demostración de (6.1) obtenemos la siguiente caracterización del número de Helly:

(6.2) Sean (X, $\mathcal{C}$) un espacio de convexidad, K el operador de cápsula generado por $\mathcal{C}$, y h un número natural, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

i.- h es el número de Helly de (X, $\mathcal{C}$) .

ii.- h es el mínimo número natural tal que para todo A subconjunto finito de X , si card $A \geq h + 1$, entonces $\cap \{K(A - \{a\}) \;/\; a \in A\} \neq \phi$.

<u>Demostración</u>. Para abreviar la demostración consideremos la función proposicional f(m) : para todo A subconjunto finito de X , si card $A \geq m + 1$ entonces $\cap \{K(A - \{a\}) \;/\; a \in A \} \neq \phi$, (donde m es un número natural).

i $\Rightarrow$ ii. Supongamos i; por la demostración de (6.1) (parte i $\Rightarrow$ ii), se cumple f(h). Supongamos $f(h_1)$; por la demostración de (6.1) (parte iii $\Rightarrow$ i) obtenemos $h \leq h_1$. ii $\Rightarrow$ i . Supongamos ii; por la demostración de (6.1) (parte iii $\Rightarrow$ i), si h_2 es el número de Helly de (X, $\mathcal{C}$) entonces $h_2 \leq h$. Pero como i $\Rightarrow$ ii, se cumple $f(h_2)$. Así $h \leq h_2$; luego $h = h_2$.

7.- Finitud del número de Carathéodory y expresión del operador K mediante bandas.

Sean X un conjunto tal que card $X \geq 2$ y K una función de P(X) en P(X) que cumple (Ax 1) a (Ax 4). Según vimos en (1.1) la familia $\mathcal{C} = \{A \subset X \ / \ A = K(A)\}$ define una estructura de convexidad sobre X tal que K es el operador de cápsula generado por $\mathcal{C}$. Por (7.24) del capítulo II, sabemos que si $A \subset X$, $K(A) = \cup \{C^n(A) \ / \ n \geq 0\}$. Ahora veremos que si el número de Carathéodory de $(X, \mathcal{C})$ es finito entonces existe i tal que, para todo $A \subset X$, $K(A) = C^i(A)$ y, en consecuencia, para todo $j \geq i$, $K(A) = C^j(A)$. Para esto, comenzaremos probando la siguiente proposición:

(7.1) Sean A un subconjunto finito de X , i un entero no negativo tal que card $A \leq 2^i$. Entonces $K(A) = C^i(A)$.

Demostración. Se aplica inducción sobre i . Para $i = 0$ vale (7.1) pues $K(\phi) = \phi = C^0(\phi)$ y, por (Ax 3), para todo $a \in X$, $K(a) = \{a\} = C^0(a)$. Supongamos como hipótesis inductiva que vale (7.1) para $i = j \geq 0$; vamos a ver que también vale (7.1) para $i = j + 1$. Sea $A \subset X$ y card $A = m \leq 2^{j+1}$; si $m \leq 2^j$, por hipótesis inductiva $K(A) = C^j(A)$ y, en consecuencia $K(A) = C^{j+1}(A)$. Si $m > 2^j$, existe una partición $\{A_1, A_2\}$ de A tal que máx $\{\text{card } A_1, \text{card } A_2\} \leq 2^j$. Luego, por (9.3) del capítulo II y la hipótesis inductiva, $K(A) = S(C^j(A_1), C^j(A_2)) \subset S(C^j(A), C^j(A)) = C^{j+1}(A)$; pero como $C^{j+1}(A) \subset K(A)$, obtenemos que $K(A) = C^{j+1}(A)$.

(7.2) Sea $c < \infty$ el número de Carathéodory de $(X, \mathcal{C})$; si i es un número natural tal que $c \leq 2^i$, entonces, para todo $A \subset X$, $K(A) = C^i(A)$.

Demostración. Sea $A \subset X$, por hipótesis y (7.1) obtenemos que $K(A) = \cup\{K(F) \ / \ \text{card } F \leq c \text{ y } F \subset A\} = \cup\{C^i(F) \ / \ \text{card } F \leq c$ y

$F \subset A\} \subset C^i(A)$; pero como $C^i(A) \subset K(A)$, resulta que $K(A) = C^i(A)$.

Las proposiciones (7.1) y (7.2) fueron demostradas por el autor de este trabajo de tesis en (4.17) y (4.18) de [9] . Una demostración de (7.2) para X espacio vectorial real, se encuentra en [11], teorema 1.24.

CAPITULO VI

CONJUNTOS ESTRELLADOS

En el parágrafo 4 del capítulo I ya mencionamos que mediante las bandas podemos definir, por analogía con el caso vectorial, la noción de conjunto estrellado. Para esto vamos a trabajar en el sistema axiomático dado en el capítulo II, donde probaremos algunas propiedades elementales de los conjuntos estrellados. También, resultados obtenidos por Toranzos [14] y Dreševič [15] para estrellados en espacios vectoriales, serán probados para estrellados en dicho sistema axiomático.

1.- Conjuntos estrellados, núcleo y componentes convexas.

En todo este parágrafo supondremos que X es un conjunto tal que card $X \geqslant 2$ y K es una función de $P(X)$ en $P(X)$ que cumple (Ax 1) a (Ax 4).

Sea $A \subset X$ y $p \in A$, diremos que A es estrellado en p si, para todo $x \in A$, $K(p,x) \subset A$.

(1.1) Si $A \subset X$, los siguientes enunciados son equivalentes:
i.- $K(A) = A$. ii.- para todo $p \in A$, A es estrellado en p.

Demostración. Es consecuencia de (7.1) del capítulo II.

(1.2) Si $\{A_j \,/\, j \in J\}$ es una familia de subconjuntos de X estrellados en p , entonces $\cap\{A_j \,/\, j \in J\}$ es estrellado en p.

Demostración. Sean $\{A_j \,/\, j \in J\}$ una familia de subconjuntos de X estrellados en p , y $A = \cap\{A_j \,/\, j \in J\}$. Si $\{A_j \,/\, j \in J\} = \phi$, entonces $A = X$ que, obviamente, es estrellado en p . Si $\{A_j \,/\, j \in J\} \neq \phi$, evidentemente $p \in A$; tomemos $x \in A$; así, para todo $j \in J$, $x \in A_j$ y $K(p,x) \subset A_j$; en consecuencia $K(p,x) \subset A$; luego A es estrellado en p .

(1.3) Si $\{A_j / j \in J\}$ es una familia no vacía de subconjuntos de X estrellados en p , entonces $\cup \{A_j / j \in J\}$ es estrellado en p .

Demostración. Sean $\{A_j / j \in J\}$ una familia no vacía de subconjuntos de X estrellados en p y $A = \cup\{A_j / j \in J\}$. Evidentemente, $p \in A$; tomemos $x \in A$, luego existe $j \in J$ tal que $x \in A_j$ y $K(p,x) \subset A_j$; en consecuencia $K(p,x) \subset A$ y A es estrellado en p .

Sea $A \subset X$, diremos que A es estrellado si existe $p \in A$ tal que A es estrellado en p . Observemos que si A es un subconjunto convexo no vacío de X ,entonces A es estrellado. Evidentemente, la recíproca no es cierta. Por otra parte, la intersección y la unión de conjuntos estrellados pueden no ser estrellados.

Sea $A \subset X$, llamaremos núcleo de A al conjunto $N(A) = \{ x \in A / A$ es estrellado en $x \}$. Evidentemente, A es estrellado sii $N(A) \neq \phi$. Como corolario de (1.2) y (1.3) obtenemos la siguiente proposición:

(1.4) Si $\{A_j / j \in J\}$ es una familia de subconjuntos de X , entonces:
i.- $\cap \{N(A_j) / j \in J\} \subset N(\cap \{A_j / j \in J\})$
ii.- $J \neq \phi \Rightarrow \cap \{N(A_j) / j \in J\} \subset N(\cup\{A_j / j \in J\})$.

(1.5) Si $A \subset X$, los siguientes enunciados son equivalentes:
i.- $K(A) = A$ ii.- $N(A) = A$.

Demostración. Es consecuencia de (1.1).

Sea $A \subset X$, diremos que C es una componente convexa de A si C es un subconjunto convexo maximal de A .

(1.6) Si $A \subset X$, entonces A es la unión de la familia de las componentes convexas de A .

Demostración. Sea $\{C_i \mid i \in I\}$ la familia de las componentes convexas de A . Evidentemente, $\cup \{C_i \mid i \in I\} \subset A$. Para probar la otra inclusión, tomemos $y \in A$ y $\mathcal{F} = \{C \mid y \in C \subset A$ y C convexo$\}$; por (Ax 3), $\{y\}$ es convexo y, en consecuencia, $\mathcal{F} \neq \phi$. Si $\{C_j \mid j \in J\}$ es una cadena no vacía de $\mathcal{F}$, entonces, por (6.12)c del capítulo II, $\cup \{C_j \mid j \in J\}$ es convexo y, en consecuencia, es cota superior de dicha cadena en $\mathcal{F}$. Luego, por el principio maximal, existe elemento maximal de $\mathcal{F}$, el que será una componente convexa de A que contendrá a y . Así $A \subset \cup \{C_i \mid i \in I\}$.

La siguiente proposición fue probada, en espacios vectoriales, por Toranzos [14] ; su demostración pudo adaptarse fácilmente a nuestro sistema axiomático:

(1.7) Si $A \subset X$, entonces el núcleo de A es la intersección de la familia de las componentes convexas de A .

Demostración. Sean $\{C_i \mid i \in I\}$ la familia de las componentes convexas de A y $C_0 = \cap \{C_i \mid i \in I\}$; tendremos que probar que $N(A) = C_0$. Sea $x \in C_0$, por (1.6), para todo $y \in A$ existe $i \in I$ tal que $y \in C_i$, de donde $K(x,y) \subset C_i \subset A$; luego $x \in N(A)$ y $C_0 \subset N(A)$. Para probar la otra inclusión tomemos $p \in N(A)$, si suponemos que $p \notin C_0$ entonces existe $i \in I$ tal que $p \notin C_i$; evidentemente $C_i \subsetneq K(C_i \cup \{p\})$; pero, por (9.4) del capítulo II, $K(C_i \cup \{p\}) = \cup\{K(z,p) \mid z \in C_i\}$; así, como $p \in N(A)$, $K(C_i \cup \{p\}) \subset A$; esto contradice la maximalidad de C_i . De esta forma $p \in C_0$ y $N(A) \subset C_0$.

Como corolario de (6.11) del capítulo II y de la proposición anterior obtenemos :

(1.8) Si $A \subset X$, entonces el núcleo de A es convexo.

2.- Separación de estrellados.

En todo este parágrafo supondremos que X es un conjunto tal que card $X \geqslant 2$ y K es una función de $P(X)$ en $P(X)$ que cumple (Ax 1) a (Ax 5). En él, adaptaremos el contenido del trabajo de Dreševič [15] hecho en espacios vectoriales, a nuestro sistema axiomático.

Sea $A \subset X$ y $p \in X$, llamaremos cápsula estrellada de A relativa a p al menor conjunto estrellado en p que contiene a A. Dicho conjunto será denotado por $st(A,p)$. Por (1.2), $st(A,p)$ es la intersección de la familia de los conjuntos estrellados en p que contienen a A .

(2.1) $\quad \phi \neq A \subset X$ y $p \in X \Rightarrow st(A,p) = \cup\{K(a,p) \;/\; a \in A\}$.

Demostración. Sea $\mathcal{F} = \{S_i \;/\; i \in I\}$ la familia de los conjuntos estrellados en p que contienen a A . Tendremos que probar que $\cap \{S_i \;/\; i \in I\} = \cup \{K(a,p) \;/\; a \in A\}$. Por (1.3), $\cup\{K(a,p) \;/\; a \in A\} \in \mathcal{F}$; luego $\cap\{S_i \;/\; i \in I\} \subset \cup \{K(a,p) \;/\; a \in A\}$. Para probar la otra inclusión tomemos $x \in \cup \{K(a,p) \;/ a \in A\}$;así existe $a \in A$ tal que $x \in K(a,p)$; pero para todo $i \in I$, $K(a,p) \subset S_i$; luego $x \in \cap\{S_i \;/\; i \in I\}$ y $\cup \{K(a,p) \;/\; a \in A\} \subset \cap \{S_i \;/\; i \in I\}$.

(2.2) Si C, D son subconjuntos de X disjuntos tales que C es estrellado en p y D es estrellado en q , y $r \in X$, entonces $st(C \cup \{r\}, p) \cap D = \phi$ o $C \cap st(D \cup \{r\},q) = \phi$.

Demostración. Sean $C_1 = st(C \cup \{r\},p)$, $D_1 = st(D \cup \{r\},q)$, y supongamos que $C_1 \cap D \neq \phi$ y $C \cap D_1 \neq \phi$; así existen $q_1 \in C_1 \cap D$ y $p_1 \in C \cap D_1$. Puesto que $q_1 \in C_1$, por (2.1) obtenemos que existe $s \in C \cup \{r\}$ tal que $q_1 \in K(s,p)$; de suponer que $s \in C$, obtendríamos que $q_1 \in C$ pues C es estrellado en p, así $C \cap D \neq \phi$; de allí que $s = r$. Procediendo en forma análoga con p_1 , obtenemos que existe $t \in D \cup \{r\}$ tal que $p_1 \in K(t,q)$ y que $t = r$. Así $q_1 \in K(r,p)$ y $p_1 \in K(r,q)$; luego por (Ax 5), $K(p,p_1) \cap K(q,q_1) \neq \phi$. Pero como C y D son estrellados en p y q respectivamente, $K(p,p_1) \cap K(q,q_1) \subset C \cap D$; así $C \cap D \neq \phi$ lo cual contradice la hipótesis.

(2.3) Si A, B son subconjuntos de X disjuntos tales que A es estrellado en p y B es estrellado en q, entonces existen C, D subconjuntos complementarios tales que $A \subset C$, $B \subset D$, C es estrellado en p y D es estrellado en q.

Demostración. La misma es análoga a la de (1.2) del capítulo IV. En efecto, sea $G = \{(A_i, B_i) \,/\, A_i, B_i$ subconjuntos de X disjuntos y estrellados en p y en q respectivamente, y $A \subset A_i$, $B \subset B_i\}$; evidentemente $G \neq \phi$ pues, por hipótesis, $(A,B) \in G$. Definamos en G el siguiente orden parcial $(A_i, B_i) \prec (A_j, B_j)$ sii $A_i \subset A_j$ y $B_i \subset B_j$. Si $L = \{(A_i, B_i) \,/\, i \in I\}$ es una cadena no vacía en G, entonces $(A_0, B_0) = (\cup\{A_i \,/\, i \in I\}, \cup\{B_i \,/\, i \in I\}) \in G$ y es cota superior de la cadena L, en efecto, por (1.3), A_0 y B_0 son estrellados en p y q respectivamente; además $A_0 \cap B_0 = \phi$ pues en caso contrario existiría $i \in I$ tal que $A_i \cap B_i \neq \phi$. Luego por el lema de Zorn existe (C,D) elemento maximal de G. Para ver que $C \cup D = X$, consideremos $r \in X$, $C_1 = st(C \cup \{r\},p)$ y $D_1 = st(D \cup \{r\},q)$. Por (2.2); $(C_1, D) \in G$ o $(C, D_1) \in G$. Si suponemos que $(C_1, D) \in G$, por la maximalidad de (C,D) resulta que $C = C_1$ y $r \in C$. De suponer que $(C, D_1) \in G$, obtendríamos $D = D_1$ y $r \in D$. De esta forma queda probado que $C \cup D = X$. Puesto que $(C,D) \in G$, obtenemos que C, D cumplen la tesis de (2.3).

BIBLIOGRAFIA

[1] J. Radon , Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten, Math. Ann. 83 (1921), 113-115.

[2] F. W. Levi, On Helly's theorem and the axioms of convexity, J. Indian Math. Soc (N.S.) Part A 15 (1951), 65-76.

[3] D. C. Kay, E. W. Womble, Axiomatic convexity theory and relationships between the Carathéodory, Helly and Radon numbers, Pacific J. Math. 38 (1971), 471-485.

[4] L. Danzer, B. Grünbaum, V. Klee, Helly's theorem and its relatives, Amer. Math. Soc., Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 7 (1963), 101-180.

[5] J. Eckhoff, Der Satz von Radon in konvexen Produktstrukturen I - II, Monatsh. Math. 72 (1968), 303-314; 73 (1969), 7-30.

[6] J. R. Reay, Carathéodory theorems in convex product structures, Pacific J. Math. 35 (1970), 227-230.

[7] J. W. Ellis, A general set-separation theorem, Duke Math. J. 19 (1952), 417-421.

[8] P. C. Hammer, Maximal convex sets, Duke Math. J. 22 (1955), 103-106.

[9] J. C. Bressan, Sistema axiomático para operadores de cápsula convexa, Rev. U.M.A. 26 (1972), 131-142.

[10] J. C. Bressan, Axiomática para operadores de cápsula convexa, Dep. de Fisicomatemática, Fac. de Farm y Bioquímica, U.B.A 1 (1971).

[11] F. A. Valentine, Convex sets, Mc Graw-Hill, New York, (1964).

[12] F. A. Toranzos, Inmersión de espacios métricos convexos en E^n, Math. Notae 21 (1966-67), 29-53.

[13] D. Voiculescu, Spatii cu convexitate, (I), (II), St. Cerc. Mat. 19 (1967), 295-311.

[14] F. A. Toranzos, Radial functions of convex and star-shaped bodies, Amer. Math. Monthly 74 (1967), 278-280.

[15] M. Drešević , A note on Kakutani Lemma, Noticiario Matemático (en ruso) 7 (22), (1970), 347-348.

[16] J. C. Bressan, Axiomática para operadores de cápsula convexa, Comunicación presentada en la Reunión Anual de la U.M.A. de 1970.

[17] J. C. Bressan, Axiomática para operadores de cápsula convexa. Comunicación presentada en la Reunión Anual de la U.M.A. de 1971.

[18] J. C. Bressan, Axiomática para operadores de banda, Comunicación presentada en la Reunión Anual de la U.M.A. de 1971.

[19] P. C. Hammer, Extended topology: Carathéodory's theorem on convex hulls, Rendiconti Circ. Mat. Palermo 14 (1965), 34-42.

[20] G. Gastl, P. C. Hammer, Extended topology: neighborhoods and convergents, Københavns Univ. Mat. Institut, Proceedings of the Colloquium on Convexity, Copenhagen (1965), 104-116.

[21] P. C. Hammer, Isotonic spaces in convexity, Københavns Univ. Mat. Institut, Proceedings of the Colloquium on Convexity, Copenhagen (1965), 132-141.

[22] M. Cotlar, R. Cignoli, Nociones de espacios normados, I, EUDEBA, Buenos Aires (1967).

[23] F. A. Toranzos, Inmersión de espacios métricos convexos en espacios euclideanos, (tesis), Dep. de Mat., Fac. de C. Exactas y Nat., Univ. de Bs. As. (1966).

[24] L. M. Blumenthal, Theory and applications of distance geometry, Oxford (1953).

[25] W. Bonnice, V. L. Klee, The generation of convex hulls, Math. Ann. 152 (1963), 1-29.

[26] J. Stoer, C. Witzgall, Convexity and Optimization in Finite Dimensions I , Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1970).

[27] P. C. Hammer, Semispaces and the topology of convexity, Amer. Math. Soc., Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 7 (1963), 305-316.

[28] J. C. Bressan, Números de Carathéodory, Helly y Radon, Comunicación presentada en la Reunión Anual de la U.M.A. de 1972.

[29] J. C. Bressan, Número de Helly para espacios de convexidad, Comunicación enviada a la Reunión Anual de la U.M.A. de 1974.