



Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Biblioteca Digital FCEN-UBA

Singularidades genéricas para derivaciones contínuas

Subi, Carlos Samuel

1976

Tesis Doctoral

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

www.digital.bl.fcen.uba.ar

Contacto: digital@bl.fcen.uba.ar

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Fuente / source:

Biblioteca Digital de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD NACIONAL DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

SINGULARIDADES GENERICAS
PARA DERIVACIONES CONTINUAS

por

Carlos Samuel Subi

Director

Ing. Orlando Eugenio Villamayor

Trabajo de Tesis para optar al Título
de Doctor en Ciencias Matemáticas

A MARTA

PREFACIO

El objeto central del presente trabajo es la clasificación de las singularidades de morfismos de k -álgebras, $\lambda: A \rightarrow B$ donde se supone que la característica de k es cero.

Mount y Villamayor resuelven el problema introduciendo la $B \otimes A$ -álgebra $J(L(B/k), B \otimes A)$ y definiendo en el esquema de tal anillo los conjuntos de singularidades genéricas, suponiendo algunas hipótesis sobre el anillo B , entre las cuales juega un papel esencial el hecho que $D(B/k)$ sea un B -módulo de tipo finito.

Mediante el uso del módulo de diferenciales M -ádico, $D_c(B/k)$ puede extenderse la noción de conjuntos de singularidades al caso en que $D(B/k)$ no sea de tipo (por ejemplo anillos locales completos). La clasificación genérica es también posible usando el espacio de jets $J(L, B \otimes A)$, análogo algebraico al espacio de jets infinito $J(V, W)$, usado por Boardman para la clasificación genérica de singularidades de aplicaciones diferenciables.

El capítulo 5 tiene por objeto mostrar que un cierto sistema de coordenadas puntual en $M \in \{(\lambda; i_1, i_2, \dots)\}$ tiene validez en un entorno abierto de dicho conjunto. Esto se lleva a cabo usando las extensiones jacobianas de ideales y mostrando su estrecha relación con el sistema de coordenadas "preparatorio" de Mount-Villamayor.

Quiero expresar mi gratitud al Profesor Ingeniero Orlando E. Villamayor, quien me dirigió en el presente trabajo y orientó en la elaboración del mismo, así como al Instituto Argentino de Matemática que me brindó el lugar y soporte financiero para realizar esta tesis.

Carlos S. Subi
Setiembre de 1976.

Capítulo 1.

- 1.1 Espacios de Jets.
- 1.2 Campos vectoriales totales.
- 1.3 Rango y rango total.
- 1.4 Los subconjuntos de singularidades.

La referencia general, para los conceptos y resultados de este capítulo, es el trabajo de J. M. Boardman [1].

Aquí presentamos sólo los puntos fundamentales de la teoría de Boardman a partir de los cuales puede notarse la analogía que presenta el tratamiento algebraico del problema de clasificación de singularidades.

1.1 Espacio de Jets.

Dadas dos variedades diferenciales V y W , pasamos a construir otra variedad diferencial $J(V,W)$ mediante la cual será posible clasificar las singularidades de aplicaciones diferenciales $f : V \rightarrow W$.

Dado que el problema es esencialmente local, supondremos que $W = \mathbb{R}^m$ y que $V \simeq v$ abierto en \mathbb{R}^n .

Si $v \subset V$ es un abierto, $F(v)$ denotará la \mathbb{R} -álgebra de funciones suaves (en el sentido C^∞) definidas en v a valores en \mathbb{R} .

Si $p \in v$, $F(p)$ será la \mathbb{R} -álgebra de gérmenes de funciones suaves definidas en algún entorno de p . $F(p)$ resulta una álgebra local y m_p denotará su ideal maximal, es decir, el ideal de gérmenes de funciones que se anulan en p .

Sean $\{x_1, \dots, x_n\}$ y $\{y_1, \dots, y_m\}$ sistemas de coordenadas de V y W , respectivamente.

Dado n ($0 \leq n \leq \infty$) se define la relación de equivalencia \sim_n entre los gérmenes de funciones suaves de V en W como sigue:

- $f \sim_n g$ si y sólo si
- (i) f y g son gérmenes definidos en el punto $p \in V$;
 - (ii) $f(p) = g(p)$;
 - (iii) los derivados parciales de orden menor o igual que n , de f y g , coinciden en p .

Llamamos $J^n(V,W)$ al conjunto de clases de equivalencias que

resulta por la relación \sim_n .

Si $m \geq n$ se tiene una proyección canónica $\Pi_n^m: J^m(V,W) \rightarrow J^n(V,W)$.

Si f es representante de un elemento de $J^n(V,W)$, para todo punto p del dominio de f se tienen dos aplicaciones naturales:

$$\Pi_v^n: J^n(V,W) \rightarrow V, f \rightarrow p; \quad \Pi_w^n: J^n(V,W) \rightarrow W, f \rightarrow f(p).$$

Dada una aplicación $f: U \rightarrow W$, donde U es un abierto de V , se asocia la sección jet de $f: J^n f: U \rightarrow J^n(V,W)$ que aplica $p \in U$ en la clase del germen de f en p .

El elemento $J^n f(p)$ se llama el n -jet de f en p .

Resultan claras las relaciones de transitividad

$$J^n f = \Pi_n^m \cdot J^m f \quad \text{y} \quad \Pi_n^k = \Pi_n^m \cdot \Pi_m^k, \text{ si } k \geq m \geq n.$$

Por un campo vectorial definido sobre el abierto $U \subset V$, entenderemos indistintamente una sección del fibrado tangente sobre U o bien una derivación (R-derivación) del álgebra $F(U)$.

Fijado un sistema de coordenadas $\{x_1, \dots, x_v\}$ en V , quedan determinadas derivaciones $\{d_1, \dots, d_v\}$ tales que $d_i(x_j) = \delta_{ij}$.

Dada un v -upla $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_v)$ de enteros positivos escribiremos

$$\begin{aligned} d^\sigma &= d_1^{\sigma_1} \cdot d_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot d_v^{\sigma_v}, \text{ operador sobre } F(v) \\ x^\sigma &= x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot \dots \cdot x_v^{\sigma_v}, \text{ denotando por } |\sigma| \text{ a la suma } \sum_{i=1}^v \sigma_i. \end{aligned}$$

Damos el siguiente sistema de coordenadas en $J^n(V,W)$, n finito:

Serán las funciones coordenadas $X_i, Y_j, Z_{j,\sigma}$ para $1 \leq i \leq v$,

$1 \leq j \leq w$ y $1 \leq |\sigma| \leq n$ definidas por:

$$X_i = x_i \cdot \Pi_v^n, \quad i = 1, \dots, v.$$

$$Y_j = Z_{j,0} = y_j \cdot \Pi_w^n, \quad j = 1, 2, \dots, w.$$

$$Z_{j,\sigma}(f) = (d^\sigma(y_j \cdot f))(p), \quad 1 \leq |\sigma| \leq n.$$

con f germen de una aplicación de V en W , definido en p .

Queda definido sobre $J^n(V, W)$ una estructura de variedad diferenciable con la cual las aplicaciones Π_n^m y $J^n f$ resultan suaves entre variedades diferenciales.

Definición 1.1.1

$$J(V, W) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} J^n(V, W) \quad .$$

Borel ha demostrado que $J(V, W)$ es isomorfo a $J^\infty(V, W)$. Tal límite inverso se toma a partir de las proyecciones $\Pi_n^m: J^m(V, W) \rightarrow J^n(V, W)$ ($m \geq n$), considerando la topología límite inverso.

Definición 1.1.2 Dado $U \subset J(V, W)$ abierto, $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}$ se dirá suave si $\phi = \phi \circ \Pi_n$ localmente, pudiendo n no estar acotado sobre U . Escribamos $F(u)$ el anillo de funciones suaves sobre U , y $F(s)$ el anillo de germenes de tales aplicaciones definidas en $s \in J(V, W)$.

Resulta entonces que $F(\mathcal{S}) = \varprojlim F(\Pi_n s)$, donde $\Pi_n: J(V, W) \rightarrow J^n(V, W)$ es la aplicación canónica del límite en $J^n(V, W)$.

Por lo tanto la composición $\phi \circ Jf$, $\phi \in F(U)$ y $f: U \rightarrow W$, resulta una aplicación suave.

1.2 Campos vectoriales totales.

Definimos los campos vectoriales totales D_i , $i = 1, \dots, u$ sobre $J(V, W)$ por las igualdades:

$$D_i X_j = \delta_{ij}$$

$$D_i Z_{j\sigma} = Z_{j\sigma'}, \text{ donde } \sigma' = (\sigma_1, \dots, \sigma_{i+1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_v)$$

Dado un abierto $U \subset J(V,W)$, llamamos campo vectorial total a una combinación lineal de la forma $\sum_{1 \leq i \leq v} \phi_i D_i$, con $\phi_i \in F(U)$.

Nótese que los operadores D_i sólo tienen sentido en $J(V,W)$, resultando de la definición la imposibilidad de considerarlos en $J^n(V,W)$ ($n < \infty$).

Esta es una de las razones que nos conduce a considerar el espacio de jets infinito $J(V,W)$.

Habiéndose definido los campos vectoriales en término de coordenadas, se quiere caracterizarlos de modo independiente del sistema elegido y definir así un fibrado total global.

Sea $N \subset V$ abierto y $f: N \rightarrow W$ una aplicación suave. Por la definición de $Z_{j\sigma}$ resulta la identidad:

$$D_j \phi \cdot Jf = d_j(\phi \cdot Jf)$$

válida para las funciones coordenadas antes definidas y para cualquier $\phi \in F(U)$, $U = \Pi_V^{-1}(N)$, por aplicación de la regla de la cadena.

Esto elimina la dependencia mencionada y permite dar la siguiente

Definición 1.2.1

Definimos localmente el fibrado tangente total \mathbb{D} sobre $J(V,W)$ como el fibrado vectorial que tiene a los campos vectoriales totales $\{D_1, \dots, D_v\}$ como base de secciones.

Los elementos de la fibra sobre $s \in J(V,W)$ se llaman vectores tangentes totales e inducen funcionales lineales $F(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen la fórmula usual de derivaciones.

El fibrado D está canónicamente identificado por la fórmula:

$$D \phi \cdot JF = d(\phi \cdot JF) , d \in T_v .$$

Si $D = \Pi_v^*(d)$ y $(Jf)^*$ denota la función traspuesta de Jf , se tiene que para toda sección $\text{jet } Jf$ se verifica

$$(Jf)^*(\Pi_v^*d) = d .$$

Como por definición todo campo vectorial total es, localmente, de la forma $\sum \phi_i D_i$ se tiene:

$$D \phi \cdot Jf = ((Jf)^*D)(\phi \cdot Jf) .$$

Dado $U \subset J(V,W)$ abierto, $\phi_1, \phi_2 \in F(U)$ y $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ (sobre U) se define:

$$[D_1, D_2] = D_1 \cdot D_2 - D_2 \cdot D_1 , \text{ de donde}$$

$$[\phi_1 D_1, \phi_2 D_2] = \phi_1 D_1(\phi_2) \cdot D_2 - \phi_2 D_2(\phi_1) \cdot D_1 + \phi_1 \phi_2 [D_1, D_2] .$$

Los campos vectoriales resultan cerrados bajo este producto y tienen entonces estructura de álgebra de Lie.

1.3 Rango y rango total.

Sea $N \subset V$ abierto, $p \in N$ y $A \subset F(N)$ un subconjunto cualquiera.

Si $T_{v/p}$ denota el espacio tangente a V en p , se define la aplicación: $T_{v/p} \rightarrow R^A$, que a cada $d \in T_{v/p}$ le asigna $(d(\alpha))_{\alpha \in A} \in R^A$.

Tal aplicación es R -lineal.

Definición 1.3.1 El rango de A en p , $rK_p(A)$, es la dimensión de la imagen de la transformación lineal definida más arriba. Por co-rango de A en p , $Kr_p(A)$, entenderemos la dimensión del núcleo, resultando

$$rK_p(A) + Kr_p(A) = v .$$

Análogamente, dado $\mathfrak{s} \in V \subset J(V,W)$ y $A \subset F(U)$ queda definida la aplicación lineal

$$D/\mathfrak{s} \rightarrow R^A.$$

Definición 1.3.2 Rango total de A en \mathfrak{s} , $\text{trk}_{\mathfrak{s}}(A)$ será la dimensión de la imagen de esta última transformación lineal y corango total, $\text{tkr}_{\mathfrak{s}}(A)$, la dimensión de su núcleo. Aquí también vale

$$\text{trk}_{\mathfrak{s}}(A) + \text{tkr}_{\mathfrak{s}}(A) = \nu = \dim V.$$

Lema 1.3.3 Sea $s \in U \subset J(V,W)$, $p = \Pi_V(s)$ y $f: N \rightarrow W$ aplicación suave tal que $p \in N$ y $(Jf)(p) = s$. Si $A \subset F(U)$ se tiene también que $(Jf)*A \subset F((Jf)^{-1}(U))$. Entonces

$$\text{trk}_{\mathfrak{s}}(A) = \text{rk}_p((Jf)*A)$$

$$\text{y} \quad \text{tkr}_{\mathfrak{s}}(A) = \text{kr}_p((Jf)*A).$$

Demostración: resulta de la fórmula $D_i \phi \cdot Jf = \text{di}(\phi \cdot Jf)$ #

Definición 1.3.4 Sea $U \subset J(V,W)$ abierto. Una familia $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k\} \subset F(U)$ se dirá totalmente independiente en $\mathfrak{s} \in U$ si el rango total de $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ en \mathfrak{s} es k . Se dirá totalmente independiente en U si lo es en cada punto $\mathfrak{s} \in U$.

Es claro que $k \leq \nu = \dim V$.

Lema 1.3.5 Sea $U \subset J(V,W)$ abierto, y $\{\phi_1, \dots, \phi_\nu\}$ un conjunto totalmente independiente en U .

Entonces existen campos vectoriales D_1, D_2, \dots, D_ν sobre U unívocamente determinados por las condiciones

$$D_i \phi_j = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq \nu.$$

Demostración. Suponemos U suficientemente pequeño como para que el

fibrado total sobre U admita una base $\{\partial_1, \dots, \partial_u\}$.

Por hipótesis el determinante de la matriz $(\partial_i \phi_j)$ no se anula en ningún punto de U . Sea (α_{ij}) la matriz inversa.

Si definimos $D_i = \sum_j \alpha_{ij} \partial_j$, éstos resultan los únicos campos vectoriales totales verificando $D_i \phi_j = \delta_{ij}$. La unicidad asegura la existencia de campos vectoriales totales D_i , $i=1, \dots, u$, definidos globalmente en el abierto en cuestión y verificando las relaciones requeridas. #

Lema 1.3.6 Sea $Q \subset J(V, W)$ una subvariedad, $p \in V$, $f: V \rightarrow W$ una aplicación suave tal que Jf es transversal a Q en p .

$f(p) = q$ y $Jf(p) = s \in Q$. Cerca de p , $Z = (Jf)^{-1}(Q)$ es una subvariedad de V .

Si $\mathfrak{a} \subset F(s)$ es el ideal de gérmenes de funciones que se anulan en Q , entonces:

$$\dim \ker(f/z)_* = \text{tkr}_s(\mathfrak{a} + \Pi_w^* m_q),$$

donde $q = f(p)$ y $(f/z)_*: T_{z/p} \rightarrow T_{w/q}$ es la diferencial de f/z ; $z \rightarrow W$.

Demostración: Cerca de \mathfrak{s} , Q es la imagen inversa de una subvariedad de $J^k(V, W)$ para algún k finito.

La transversalidad, junto con el teorema de la función implícita, implican que $(Jf)*\mathfrak{a}$ genera el ideal de gérmenes en p , de funciones que se anulan en Z .

Del Lema 3.3 se sigue que:

$$\text{tkr}_s(\mathfrak{a} + \Pi_w^* m_q) = \text{kr}_p((Jf)*(\mathfrak{a} + \Pi_w^* m_q)).$$

Pero $d \in (T_v)_p$ anula $(Jf)*\mathfrak{a}$ si y sólo si es tangente a Z y anula a $(Jf)*m_q = f^*(m_q)$ si y sólo si $d \in \text{Ker}(f_*)$.

El lema resulta entonces de $(T_{v/z})_p \cap \text{Ker}(f_*)_p = \text{Ker}(f/z)_p$. #

1.4 Los subconjuntos de singularidades.

Definición 1.4.1 Dado $A \subset F(U)$, $U \subset J(V,W)$ abierto, se define la k -ésima extensión jacobiana total, $\Delta^k A$, como el ideal de $F(U)$ generado por A y el conjunto de menores de dimensión $n \times n$, $\det(D_i \alpha_j)$, donde D_i son campos vectoriales totales sobre U , $\alpha_j \in A$ ($1 \leq i, j \leq n$) y $n = v - k + 1$. Por convención $\Delta^{v+1} A = F(U)$.

Como siempre $v = \dim V$ y $D \in D =$ fibrado tangente total sobre $J(V,W)$.

Consecuencia inmediata de esta definición y conceptos antes introducidos es el siguiente

Lema 1.4.2 Sea $s \in U$ y $A \subset m_s$. Entonces

$$\text{tkr}_s A \geq k \quad \text{si y sólo si} \quad \Delta^k A \subset m_s \quad \#$$

Sea $I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ una n -upla de enteros positivos; diremos que I tiene longitud n ,

Nos proponemos definir subconjuntos Σ^I del espacio de jets $J(V,W)$, para cada sucesión I .

La siguiente definición es motivada por el lema precedente y el Lema 1.3.6.

Definición 1.4.3 Sea $s \in J(V,W)$, $q = \Pi_w(s)$, m el ideal maximal de $F(q)$. Definimos $\Sigma^I \subset J(V,W)$ como:

$$s \in \Sigma^I \quad \text{si y sólo si} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{tkr}_s m_q = i_1 \\ \text{tkr}_s \Delta^1 m_q = i_2 \\ \text{tkr}_s \Delta^2 \Delta^1 m_q = i_3 \\ \dots \\ \dots \\ \text{tkr}_s \Delta^{i_1-1} \dots \Delta^2 \Delta^1 m_q = i_n \end{array} \right.$$

Nota: (i) El espacio de Jets $J(V,W)$ queda partido según los subconjuntos \sum^I , es decir: para todo $s \in J(V,W)$, existe una única sucesión $I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ tal que $s \in \sum^I$.

(ii) Por otra parte, $\sum^I = \emptyset$ a menos que

$$(a) \quad i_1 \geq i_2 \geq i_3 \geq \dots \geq i_{n-1} \geq i_n \geq 0$$

$$(b) \quad u \geq i_1 \geq u - w$$

$$(c) \quad \text{Si } i_1 = u - w, \text{ entonces } i_1 = i_2 = \dots = i_n.$$

(a) Resulta del hecho de tener una sucesión de ideales crecientes y por tanto la sucesión de corangos totales debe decrecer (en sentido amplio).

(b) Es claro que $w \geq i_1$. Por otra parte, m_q puede ser generado por W elementos lo que muestra que $\text{trk}_s m_q \leq w$ y por lo tanto $\text{tkr}_s m_q \geq u - w$.

(c) Si $i_1 = u - w$, $\Delta^{u-w} m_q = F(U)m_q$, donde U es un abierto que contiene s , y puede verse que tiene el mismo corango total y extensiones jacobianas totales que m_q , de donde la sucesión I se estabiliza.

Definición 1.4.4 Dada una aplicación (suave) $f: V \rightarrow W$, definimos $\sum^I(f) \subset V$ como $(Jf)^{-1}(\sum^I)$, para cada u -upla I donde $Jf: V \rightarrow J(V,W)$ es la sección jet. Nótese que $\sum^I(f)$ poseen la misma propiedad de partir V , como la tenían los conjuntos \sum^I en $J(V,W)$.

Si se toma $n = 1$, resulta que $p \in \sum^I(f)$ si y sólo si $\dim \ker f_* = i$, donde $f_*: T_{v/p} \rightarrow T_{w/f(p)}$ es la aplicación diferencial de $f: V \rightarrow W$ en p .

CAPITULO 2

- 2.1 El módulo diferencial m-ádico $D_m(B/k)$.
- 2.2 Invariantes de Fitting.
- 2.3 Definición de singularidades de un morfismo de anillos.

La referencia para 2.1 es fundamentalmente el trabajo de Y. Nakai y S. Suzuki [9] en el que introducen los módulos diferenciales m-ádicos, así como las propiedades detalladas en el apartado.

En lo que respecta al módulo diferencial (ordinario) puede verse [8]. Asimismo en [5] se estudian dichos módulos, como caso particular de los módulos diferenciales de orden superior que factorizan derivados de orden superior.

En 2.2 se presenta la propiedad fundamental de los ideales invariantes de Fitting. Su demostración, así como otros resultados relacionados con estos invariantes, puede verse en [4].

Finalmente, en 2.3 introducimos la noción de los conjuntos de singularidades asociados a un morfismo $\lambda : A \rightarrow B$, que está basada en la dada por Mount y Villamayor en [6].

La definición de los conjuntos de singularidades de un morfismo de k -álgebras, $\lambda: A \rightarrow B$, tiene sentido cuando el B -módulo diferencial $D(B/k)$ es de tipo finito [6]. Extenderemos este concepto al caso en que B es local con radical m , y $D(B/k)$ no necesariamente de tipo finito; la condición de finitud requerida se supondrá en el B -módulo diferencial m -ádico $D_m(B/k)$, objeto un poco más particular que $D(B/k)$.

2.1 El módulo diferencial m -ádico $D(B/k)$.

2.1.1 Salvo mención explícita, todos los anillos se suponen conmutativos con unidad.

Sea B un anillo, $m \subset B$ un ideal.

Consideraremos sobre B la topología m -ádica, que hace de B un anillo topológico, y que tiene como base de entornos del cero a los ideales m^r ($r = 1, 2, \dots$). B se dirá entonces un anillo m -ádico.

Si E es un B -módulo y B un anillo m -ádico, consideramos en E la topología m -ádica cuyo sistema fundamental de entornos del cero es la familia de submódulos $m^r \cdot E$ ($r = 1, 2, \dots$).

El módulo E , equipado con esta topología, se dirá un B -módulo m -ádico.

E se dice separado si $\bigcap_{r \geq 1} m^r E = (0)$.

Los anillos topológicos a considerarse se supondrán espacios topológicos Hausdorff (separados) o sea $\bigcap_{r \geq 1} m^r = (0)$, a menos que se especifique lo contrario.

Notemos que, según un teorema de Krull, si B es un anillo local noetheriano m -ádico, con radical m , entonces B resulta Hausdorff.

2.1.2 Veamos cómo se obtiene el módulo de diferenciales de una A-álgebra B.

Se define $I_A(B)$ por la siguiente sucesión exacta:

$$0 \rightarrow I_A(B) \rightarrow B \otimes_A B \xrightarrow{\mu} B \rightarrow 0,$$

donde $\mu(b \otimes b') = bb'$.

Por ser B conmutativo, μ resulta un morfismo de A-álgebras.

Se comprueba que $I_A(B)$ es la A-subálgebra de $B \otimes_A B$, generada (como A-álgebra) por los elementos de la forma $b \otimes 1 - 1 \otimes b$, $b \in B$.

Sea $T_{B/A} : B \rightarrow I_A(B)$ la aplicación definida por $T_{B/A}(b) = b \otimes 1 - 1 \otimes b$. Se verifica que $T_{B/A}$ tiene la siguiente propiedad

$$T_{B/A}(b \cdot b') = b \cdot T_{B/A}(b') + b' \cdot T_{B/A}(b) + T_{B/A}(b) \cdot T_{B/A}(b').$$

El par constituido por la B-álgebra $I_A(B)$ y la aplicación $T_{B/A} : B \rightarrow I_A(B)$ tiene la siguiente propiedad universal:

Si R es una B-álgebra y $\tau : B \rightarrow R$ es A-lineal verificando:

$$\tau(bb') = b\tau(b') + b'\tau(b) + \tau(b)\tau(b'), \quad b, b' \in B$$

entonces existe uno y sólo un morfismo de B-álgebras (salvo B-isomorfismos) $\tau^* : I_A(B) \rightarrow R$ tal que $\tau^* \cdot T_{B/A} = \tau$.

La aplicación τ es lo que en [5] se llama una A-serie de Taylor R-valuada. Los detalles y demostraciones referentes a series de Taylor pueden encontrarse en la referencia mencionada.

Definición 2.1.2.1 $D(B/A) = I_A(B)/I_A(B)^2$, $d_B : B \rightarrow D(B/A)$ la aplicación $\Pi \circ T_{B/A}$ donde $\Pi : I_A(B) \rightarrow I_A(B)/I_A(B)^2$ es la proyección canónica. $D(B/A)$ es llamado el módulo de A-diferenciales de B y d_B la A-derivación canónica, ya que verifica $d_B(b \cdot b') = b d_B(b') + b' d_B(b)$

y $d_B(a) = 0$, $a \in A$.

Proposición 2.1.2.2 El B-módulo $D(B/A)$ está caracterizado por las siguientes propiedades:

- (1) Existe una A-derivación $d_B: B \rightarrow D(B/A)$;
- (2) $D(B/A)$ está generado, como B-módulo, por $d_B(b)$, $b \in B$;
- (3) Si $\delta: B \rightarrow M$ es una A-derivación de B en el B-módulo M, existe una única aplicación B-lineal $\delta^*: D(B/A) \rightarrow M$ haciendo commutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\delta} & M \\ d_B \downarrow & \nearrow \delta^* & \\ D(B/A) & & \end{array}$$

Supongamos que $\lambda: B' \rightarrow B$ sea un morfismo de A-álgebras.

Entonces $d_B \circ \lambda: B' \rightarrow D(B/A)$ es una A-derivación en el B-módulo $D(B/A)$ ($D(B/A)$ se considera B' -módulo a través de λ).

Luego existe única una aplicación de B' -módulos $d\lambda: D(B'/A) \rightarrow D(B/A)$. De modo que si llamamos $d\lambda: B \otimes_{B'} D(B'/A) \rightarrow D(B/A)$, se tiene que tal morfismo de B-módulos resulta único haciendo el siguiente diagrama commutativo:

$$\begin{array}{ccc} B' & \xrightarrow{\lambda} & B \\ \lambda \otimes d_B \downarrow & & \downarrow d_B \\ B \otimes_{B'} D(B'/A) & \xrightarrow{d\lambda} & D(B/A) \end{array}$$

Más aún: puede verse que $\text{coker}(d\lambda)$ tiene la propiedad universal que caracteriza a $D(B/B')$, usando como derivación canónica a $\Pi \cdot d_B$, donde $\Pi: D(B/A) \rightarrow \text{coker}(d\lambda)$.

De modo que todo morfismo de A-álgebras $\lambda: B' \rightarrow B$, da origen

a una sucesión exacta de B-módulos:

$$B \otimes_{B'} D(B/A) \rightarrow D(B/A) \xrightarrow{\Pi} D(B/B') \rightarrow 0$$

$\quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
 $\quad \quad \quad d\lambda \quad \quad \quad \Pi$

Si S es una parte multiplicativa de B y $\lambda: B \rightarrow BS^{-1}$ es la aplicación canónica, $d\lambda$ resulta un isomorfismo; ie. vale la fórmula:

$$BS^{-1} \otimes_B D(B/A) \simeq D(BS^{-1}/A).$$

En particular si $p \subset B$ es un ideal primo

$$B_p \otimes_B D(B/A) \simeq D(B_p/A).$$

2.1.3 Supongamos ahora que la A -álgebra B , es un anillo m -ádico.

Siguiendo [9] introducimos la siguiente

Definición 2.1.3.1 $D_c(B/A) = D(B/A) / \bigcap_{r \geq 1} m^r D(B/A)$, B -módulo m -ádico

que llamaremos el módulo m -ádico de A -diferenciales de B ; $\hat{d}_B: B \rightarrow D_c(B/A)$ a la composición: $\theta \circ d_B$, donde $\theta: D(B/A) \rightarrow D_c(B/A)$

es la proyección canónica. Notemos que, por definición, $D_c(B/A)$

es un B -módulo separado.

es un B -módulo separado.

Proposición 2.1.3.2 $D_c(B/A)$ está caracterizado por la siguiente propiedad universal:

- (1) Existe una A -derivación $\hat{d}_B: B \rightarrow D_c(B/A)$, que llamaremos A -derivación m -ádica canónica de B ;
- (2) $D_c(B/A)$ es un B -módulo m -ádico separado;
- (3) $D_c(B/A)$ está generado, como B -módulo, por $\hat{d}_B(b)$, $b \in B$;
- (4) Si E es un B -módulo m -ádico separado y $\delta: B \rightarrow E$ una A -derivación de B en E , existe una única aplicación B -lineal δ^* :

$D_c(B/A) \rightarrow E$ haciendo conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{\delta} & E \\
 \downarrow \hat{d}_B & \searrow \delta^* & \\
 D_c(B/A) & &
 \end{array}$$

En particular el módulo de A-diferenciales (0)-ádicos es $D(B/A)$.
 De modo que: si $D(B/A)$ es un B-módulo m-ádico separado $D_c(B/A) \simeq D(B/A)$.

Por lo tanto si B es un anillo de Zariski y $D(B/A)$ es finitamente generado como B-módulo, $D(B/A) \simeq D_c(B/A)$.

Nota. por anillo de Zariski entendemos un anillo B m-ádico noetheriano, tal que todo submódulo F de $\hat{V}^n B$ -módulo finitamente generado E, es cerrado para la m-topología de E.

Sea $\lambda : B' \rightarrow B$ morfismo de A-álgebras.

Supongamos que B es un anillo m-ádico

B' es un anillo η -ádico

y que $\lambda(\eta) \subset m$, i.e. λ es una aplicación continua de dichos espacios topológicos.

Esta última condición asegura que si E es un B-módulo m-ádico separado, E resulta un B' -módulo η -ádico separado.

Consideremos la A-derivación $\hat{d}_B, \lambda : B' \rightarrow D_c(B/A)$. Por la propiedad universal de $D_c(B'/A)$, existe una única aplicación B' -lineal $D_c(B'/A) \rightarrow D_c(B/A)$; llamando $\hat{d}\lambda : B \otimes_{B'} D_c(B'/A) \rightarrow D_c(B/A)$ se obtiene un diagrama conmutativo similar al construido con los módulos diferenciales ordinarios:

$$\begin{array}{ccc}
 B' & \xrightarrow{\lambda} & B \\
 \downarrow \lambda \otimes \hat{d}_{B'} & & \downarrow \hat{d}_B \\
 B \otimes_{B'} D_c(B'/A) & \xrightarrow{\hat{d}\lambda} & D_c(B/A)
 \end{array}$$

Nótese que en general el B-módulo $B \otimes_{B'} D_c(B'/A)$ no es separado en la topología m-ádica, aunque $D_c(B'/A)$ lo sea.

Por ser $D_c(B/A)$ separado $\hat{d} \lambda$ puede factorizarse a través de $B \otimes_{B'} D_c(B'/A) / \bigcap_{r \geq 1} m^r [B \otimes_{B'} D_c(B'/A)]$, y llamando $D_{B, B'}$ al conucleo de $\hat{d} \lambda$ se obtiene la siguiente sucesión exacta de B-módulos:

$$B \otimes_{B'} D_c(B'/A) / \bigcap_{r \geq 1} m^r (B \otimes_{B'} D_c(B'/A)) \xrightarrow{\hat{d} \lambda} D_c(B/A) \rightarrow D_{B, B'} \rightarrow 0.$$

En [9] se demuestra que $D_{B, B'} / \bigcap_{r \geq 1} m^r D_{B, B'} \simeq D_c(B/B')$; si, en particular, $D_c(B/A)$ es de tipo finito y B es Zariski, $D_{B, B'} \simeq D_c(B/B')$.

No vale en general una fórmula de localización para el módulo $D_c(B/A)$, análoga a la obtenida para el caso de módulos diferenciales ordinarios. El siguiente resultado será útil más adelante:

Teorema 2.1.3.3 Sea B una A-álgebra y supongamos que (B, m) es un anillo Zariski. Sea $I \subset B$ un ideal. Entonces si $D_c(B/A)$ es un B-módulo de tipo finito la siguiente sucesión es exacta:

$$I/I^2 \rightarrow (B/I) \otimes_B D_c(B/A) \xrightarrow{\hat{d} \lambda} D_c[(B/A)/A] \rightarrow 0,$$

donde $i(\bar{b}) = 1 \otimes \hat{d}_B(b)$ y $\hat{d} \lambda$ es la deducida de $\lambda: B \rightarrow B/I$.

La demostración puede verse en [9].

2.1.4 En este apartado supondremos que los anillos son noetherianos.

Si B es un anillo m-ádico, \hat{B} denotará su completación con respecto a la topología m-ádica y \hat{m} la clausura de m en \hat{B} que resulta ser $m \cdot \hat{B}$.

Es bien conocido que en tales condiciones \hat{B} resulta un anillo

\hat{m} -ádico (noetheriano) y separado [10].

En [9] se demuestran los siguientes resultados:

2.1.4.1 $D_c(\hat{B}/B) = 0$.

2.1.4.2 Supongamos que B es una A-álgebra, vía $\lambda : A \rightarrow B$.

Supongamos que A es un anillo η -ádico, B un anillo m -ádico y $\lambda(\eta) \subset m$.

Podemos entonces considerar a \hat{B} como una \hat{A} -álgebra vía $\hat{\lambda} : \hat{A} \rightarrow \hat{B}$, morfismo deducido de λ pasando a los completados.

Entonces, si $D_c(B/A)$ es de tipo finito y (B, m) es Zariski se tiene que:

$$\hat{B} \otimes_B D_c(B/A) \simeq D_c(\hat{B}/A) \simeq D_c(\hat{B}/\hat{A})$$

En particular: si A y B son anillos locales, A dominado por B , y $D_c(B/A)$ es de tipo finito, $D_c(\hat{B}/A) \simeq \hat{B} \otimes_B D_c(B/A)$.

2.1.4.3 Supongamos (B, m) y (A, η) anillos locales tales que

- (i) B es completo en la topología m -ádica,
- (ii) (B, m) domina (A, η) ; i.e. $A \subseteq B$ y $m \cap A = \eta$
- (iii) B/m es una extensión finitamente generada (como álgebra) de A/η .

Entonces $D_c(B/A)$ es un B-módulo de tipo finito.

De 2.1.4.3 resulta que si $B = k[[x_1, \dots, x_n]]$, $m = (x_1, \dots, x_n) = \text{Rad}(B)$ (k cuerpo).

$D_c(B/k)$ es un B-módulo finitamente generado.

Nótese que $D(B/k)$ no es un B-módulo finitamente generado.

Este resultado servirá para generalizar la definición de singularidad de un morfismo de k -álgebras locales $\lambda : A \rightarrow B$, suponiendo B

completa.

2.1.5 Finalmente los módulos diferenciales pueden usarse para caracterizar anillos locales regulares, según se demuestra en [9].

Teorema 2.1.5.1 Sea R un anillo local completo regular de rango n y sea m su radical. Sea k un cuerpo contenido en R tal que R/m es una extensión finitamente generada separable de dimensión r sobre k .

Entonces $D_c(R/k)$ es un módulo libre de rango $n+r$. Más aún: si (x_1, \dots, x_n) es un sistema regular de parámetros de R y $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ son elementos de R tales que sus clases residuales mod. m son una base de trascendencia separable de R/m sobre k , entonces $\hat{d}_R x_1, \dots, \hat{d}_R x_n, \hat{d}_R \alpha_1, \dots, \hat{d}_R \alpha_r$ es una base de $D_c(R/k)$.

Teorema 2.5.1 Sea R un anillo local completo con radical m .

Sea $k \subset^R \mathbb{R}$ un cuerpo tal que R/m es una extensión separable y finitamente generada de k .

Supongamos que $\text{corac}(R) = 0$.

Bajo estas hipótesis, si $D_c(R/k)$ es un módulo libre de rango finito, R es un anillo local regular.

Nota: (i) el teorema 2.1.5.2 vale en característica distinta de cero, suponiendo R un dominio entero, k perfecto y R/m algebraico sobre k .

(ii) Si R es local no completo, pueden usarse los teoremas teniendo en cuenta que R regular $\Leftrightarrow \hat{R}$ regular.

2.1 Invariantes de Fitting.

Sea B un anillo, M un B -módulo de tipo finito.

Sea $0 \rightarrow K \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$ una sucesión exacta de B -módulos con F libre de rango finito y base f_1, \dots, f_n .

Si K , el módulo de relaciones, está generado por $\sum_j a_{ij} f_j$, entonces el r -ésimo invariante de Fitting de M es el ideal de B generado por los subdeterminantes de dimensión $(n-r) \times (n-r)$ de la matriz (a_{ij}) .

Tales ideales no dependen de la sucesión exacta considerada ni de la base elegida, sino sólo del B -módulo M . [2]

El r -ésimo invariante de Fitting de M será denotado por $F_r(M)$, pudiendo ser r cualquier entero no negativo. Es claro que $F_r(M) \subseteq F_{r+1}(M)$.

Estos invariantes tienen la siguiente propiedad fundamental, que veremos más adelante:

Proposición 2.1. [4]

Sea $h : B \rightarrow C$ un morfismo de anillos. Entonces vale la fórmula:

$$F_r(C \otimes_B M) = h(F_r(M)) \cdot C.$$

Si, en particular, h es sobreyectiva: $F_r(C \otimes_B M) = h(F_r(M))$.

2.3 Definición de singularidades de un morfismo de anillos.

2.3.1 En lo que resta del capítulo se supone que

k es un cuerpo de característica cero;

B una k -álgebra local noetheriana con radical m tal que $B/m \cong$

$k \subset B$;

A es una k -álgebra, (no necesariamente local);

$\lambda : A \rightarrow B$, un morfismo de k -álgebras, local si A es local.

Finalmente, supongamos que $D_c(B/k)$ es un B -módulo m -ádico de tipo finito y $\hat{d}_B : B \rightarrow D_c(B/k)$ la k -derivación canónica.

La composición $\hat{d}_B \cdot \lambda : A \rightarrow D_c(B/k)$ es una k -derivación de A .

Por lo tanto existe una única aplicación A -lineal: $D(A/k) \rightarrow D_c(B/k)$ que puede extenderse (unívocamente) a una aplicación B -lineal $d\lambda : B \otimes_A D(A/k) \rightarrow D_c(B/k)$.

Por ser $D_c(B/k)$ de tipo finito, así resulta el módulo coker $(d\lambda)$.

Dado que B es Zariski, $\text{coker}(d\lambda) \simeq D_c(B/A)$; en particular $D_c(B/A)$ es de tipo finito.

Se obtiene entonces la siguiente sucesión exacta:

$$\underline{2.3.1.1} \quad B \otimes_A D(A/k) \xrightarrow{d\lambda} D_c(B/k) \rightarrow D_c(B/A) \rightarrow 0 .$$

2.3.2 Siguiendo a [6] introducimos la siguiente

Definición 2.3.2.1 Sea $\Delta : B \rightarrow M$ una k -derivación de B en el B -módulo de tipo finito M. Supongamos que j es un entero no negativo. Entonces ponemos:

$$(i) \quad z_j(M) = F_{j-1}(M)$$

$$(ii) \quad M(j) = \frac{B}{z_j(M)} \otimes_B \frac{M}{[\Delta z_j(M)]} , \text{ donde } [\Delta z_j(M)] \text{ denota el } B\text{-submódulo generado por } \Delta b, b \in z_j(M).$$

Si i_1, i_2, \dots, i_r es una sucesión de enteros no negativos, definimos una sucesión de módulos e ideales como sigue:

$$(iii) \quad z(i_1) = z_{i_1}(M)$$

$$(iv) \quad M(i_1) = \frac{B}{z_{i_1}(M)} \otimes_B \frac{M}{[\Delta z_{i_1}(M)]} \quad ;$$

(v) Si $M(i_1, i_2, \dots, i_{r-1})$ y $z(i_1, i_2, \dots, i_{r-1})$ han sido definidos, entonces $z(i_1, \dots, i_r) = (z(i_1, \dots, i_{r-1}), z_{i_r}(M(i_1, \dots, i_{r-1})))$ y

$$M(i_1, \dots, i_r) = \frac{B}{z(i_1, \dots, i_r)} \otimes_B \frac{M(i_1, \dots, i_{r-1})}{[\Delta z(i_1, \dots, i_r)]} .$$

Definición 2.3.2.2 Dado $\lambda: A \rightarrow B$ como 2.3.1, consideramos la k -derivación m -ádica canónica $\hat{d}_{B/A}: B \rightarrow D_c(B/A)$.

Tomando $M = D_c(B/A)$ y $\Delta = \hat{d}_{B/A}$ se tienen, para toda sucesión i_1, \dots, i_r de enteros no negativos, los módulos $D_c(B/A)(i_1, \dots, i_r)$ y los ideales $z(i_1, \dots, i_r)$.

Definimos un subesquema de $\text{Spec}(B)$, que denotaremos por $\Sigma(\lambda; i_1, i_2, \dots, i_r)$, como sigue:

(i) El soporte de $\Sigma(\lambda; i_1, i_2, \dots, i_r)$, i.e. el espacio topológico subyacente, consiste de todos los $p \in \text{Spec}(B)$ tales que

$$(1) \quad p \supset z(i_1, i_2, \dots, i_r)$$

$$(2) \quad p \not\supset z(i_1, \dots, i_j + 1), \quad 1 \leq j \leq r .$$

(ii) La estructura de haz $\Sigma(\lambda; i_1, i_2, \dots, i_r)$ es la de haz de anillos inducida sobre el subconjunto definido en (i) por el anillo $B/z(i_1, \dots, i_r)$.

CAPITULO 3

3.1. Algebras de Lie. Envolventes

3.2. Teoremas de extensión de derivaciones

La referencia del presente capítulo es el trabajo de K. Mount y O.E.Villamayor, [6]. Todas las definiciones y resultados que figuran en 3.1 y 3.2 han sido introducidos en tal referencia.

3.1. ALGEBRAS DE LIE. ENVOLVENTES

Sea k un anillo; A una k -álgebra. Se ha definido en el Cap. 2 el A -módulo de k -diferenciales $D(A/k)$ y, en el caso de ser A un anillo m -ádico, el A -módulo de k -diferenciales m -ádico $D_c(A/k)$.

Proposición 3.1.1. Sea (A, m) un anillo m -ádico separado. Entonces

$$\text{Hom}_A(D(A/k), A) = \text{Hom}_A(D_c(A/k), A)$$

Demostración: Por definición existe un morfismo suryectivo de A -módulos

$$\pi: D(A/k) \rightarrow D_c(A/k)$$

Se tiene entonces un morfismo inyectivo:

$$\pi^*: \text{Hom}_A(D_c(A/k), A) \rightarrow \text{Hom}_A(D(A/k), A)$$

Afirmamos que π^* es suryectiva.

En efecto, sea $\varphi \in \text{Hom}_A(D(A/k), A)$. Por ser (A, m) separado, $\bigcap_{i \geq 1} m^i = 0$. Luego si $x \in \bigcap_{i \geq 1} m^i D(A/k)$, $\varphi(x) \in \bigcap_{i \geq 1} m^i$ de donde $\varphi(x) = 0$.

De modo que todo morfismo A -lineal $\varphi: D(A/k) \rightarrow A$, se factoriza a través de $D_c(A/k)$, ie existe único $\varphi': D_c(A/k) \rightarrow A$ haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} D(A/k) & \xrightarrow{\varphi} & A \\ \downarrow \pi & \nearrow \varphi' & \\ D_c(A/k) & & \end{array}$$

Luego $\pi^*(\varphi') = \varphi' \cdot \pi = \varphi$, de donde la proposición #

$L(A/k)$ de notará al A -módulo, dual de $D(A/k)$ ó bien de $D_c(A/k)$.

$L(A/k)$ tiene además estructura de k -álgebra de Lie poniendo:

$$[d_1, d_2] = d_1 d_2 - d_2 d_1, \quad d_i \in L(A/k), \quad i = 1, 2, \dots$$

Sea A una k -álgebra

Definición 3.1.2: Dado L , un A -módulo a izquierda que sea una k -álgebra de Lie, diremos que L es una A - k -álgebra de Lie si existe una aplicación $\gamma: L \rightarrow L(A/k)$ tal que

- (i) γ es morfismo de A -módulos (a izquierda)
- (ii) γ es morfismo de k -álgebras de Lie
- (iii) Si $a, b \in A$ y $x, y \in L$ se verifica

$$[ax, by] = a(\gamma(x)(b))y - b(\gamma(y)(a))x + ab[x, y]$$

γ se dirá el A - k -morfismo estructural de L .

Cuando no haya peligro de confusión denotaremos $\gamma(x)(a)$ por xa .

Es claro que $L(A/k)$ es un A - k -álgebra de Lie, con morfismo estructural id .

Definición 3.1.3: Sean A, B y k anillos, donde B es una A -álgebra y A es una k -álgebra. Sea L una A - k -álgebra de Lie con morfismo estructural $\gamma: L \rightarrow L(A/k)$.

Diremos que B es una L -álgebra si existe una aplicación $\theta: L \rightarrow L(B/k)$ de k -álgebras de Lie y de A -lineal tal que para todo $d \in L$ el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\gamma(d)} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\theta(d)} & B \end{array}$$

sea conmutativo.

(Las flechas verticales son las que dan a B estructura de A -álgebra)
 A θ la llamaremos la aplicación L -estructural de B .

Definición 3.1.4: Sean A, k anillos y A una k -álgebra.

Sea (L, γ) una A - k -álgebra de Lie y B una k -álgebra (no unitaria) que es un A -módulo a izquierda.

Probemos que B es una A - k -álgebra envolvente para L si

(i) Existe una aplicación A -lineal $\rho_B: L \rightarrow B$ tal que si $a \in A, x \in B$

$$\rho_B(d).(a.x) = \gamma(d)(a).x + a\rho_B(d).x$$

(ii) Si $d, d' \in L, \rho_B[d, d'] = \rho_B(d).\rho_B(d') - \rho_B(d').\rho_B(d)$

Nota: Si por $[\rho_B(d), \rho_B(d')]$ denotamos $\rho_B(d).\rho_B(d') - \rho_B(d').\rho_B(d)$ resulta:

$$[a\rho_B(d), b\rho_B(d')] = \rho_B[ad, bd'], \quad a, b \in A \text{ y } d, d' \in L$$

Definición 3.1.5: Sea (L, γ) una A - k -álgebra de Lie. Una álgebra envolvente E de L se dirá álgebra envolvente universal de L si dada otra envolvente (B, ρ_B) de L existe una única aplicación $\psi: E \rightarrow B$ tal que:

(i) ψ es morfismo de k -álgebras

(ii) ψ es morfismo de A -módulos a izquierda

(iii) $\psi \circ \rho_E = \rho_B$

Resulta claro que si existe una envolvente universal de L , es única salvo isomorfismos.

Teorema 3.1.6: Sea A una k -álgebra y L una A - k -álgebra de Lie.

Existe una álgebra envolvente universal de L , que denotaremos $E(L)$.

Más aún: $E(L) \cong T(L)/I$, donde $T(L) = \sum_{j=1}^{\infty} \otimes^j L$ es el álgebra tensorial

de L e I es el ideal bilátero de $T(L)$ generado por elementos de la forma $d \otimes d' - d' \otimes d - [d, d']$ con $d, d' \in L$ y elementos

$d(a\theta) - \gamma(d)(a).\theta - a d\theta$ con $a \in A, d \in L$ y $\theta \in T$.

Demostración: Sea B una envolvente de L y $\rho_B: L \rightarrow B$ la aplicación asociada. Si $d_1, \dots, d_r \in L$ entonces $\psi'(d_1 \times \dots \times d_r) = \rho_B(d_1) \dots \rho_B(d_r) \in B$ es k -lineal de donde

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\rho_B} & B \\ \downarrow & \nearrow \psi' & \\ T(L) & & \end{array}$$

es conmutativa

Como ψ' se anula en I , se factoriza a través de $E(L)$. #

$E(L(A/k))$ será denotado por $E(A/k)$.

Llamaremos $F(n,m)$ al conjunto de aplicaciones estrictamente crecientes del conjunto $\{1, \dots, n\}$ en $\{1, \dots, m\}$, n, m enteros no negativos.

Si $\alpha \in F(n,m)$ llamaremos $c\alpha$ a la aplicación de $F(m-n,m)$ que tiene como imagen al complemento de la imagen de α en el conjunto $\{1, \dots, m\}$

Si α es suryectiva, $c\alpha$ se define como la función vacía.

Lemas 3.1.7: Sean A, k anillos, A una k -álgebra.

(L, θ) una A - k -álgebra de Lie y (B, ρ_B) una envolvente para L .

Entonces, si $x \in B$, $d_i \in L$ y $a \in A$:

$$\rho_B(d_r) \dots \rho_B(d_1)(a \cdot x) = \sum_{n=0}^r \left\{ \sum_{\alpha \in F(u,r)} \left(\prod_{v=1}^n \theta(d_{\alpha(v)}) \right) a \right. \\ \left. \cdot \left(\prod_{w=1}^{r-n} \rho_B(d_{c\alpha(w)}) \right) x \right\}$$

donde la expresión $\prod_{v=1}^n \theta(d_{\alpha(v)})$ denota la composición de los k -endomorfismos de A dados por $\theta(d_{\alpha(v)})$ escrito de derecha a izquierda. Es decir

$$\prod_{j=1}^r d_j = d_r \dots d_1 \text{ y pondremos } \prod_{i \in \text{vacío}} d_i = \text{identidad}$$

Demostración: Por inducción en r . Para $r = 1$

$$\begin{aligned} \rho_B(d_1).(a.x) &= \sum_{n=0}^1 \sum_{\alpha \in F(n,1)} [(\prod_{v=1}^n \theta(d_{\alpha(v)}))a] \cdot [(\prod_{w=1}^{1-n} \rho_B(d_{c\alpha(w)}))x] = \\ &= a \cdot \rho_B(\prod_{w=1}^1 d_{c\alpha(w)})x + \sum_{\alpha \in F(1,1)} [(\prod_{v=1}^1 \theta(d_{\alpha(v)}))a] \cdot \\ &\quad \cdot [(\prod_{w=1}^0 \rho_B(d_{c\alpha(w)}))x] = a \rho_B(d_1)x + (\theta(d_1)a) = x \end{aligned}$$

Etapa inductiva: $(r-1)$ implica r .

$$\begin{aligned} &[\rho_B(d_r)(\rho_B(d_{r-1}) \dots \rho_B(d_1))] (ax) = \\ &= \rho_B(d_r) \left\{ \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{\alpha \in F(n,r-1)} [(\prod_{v=1}^n \theta(d_{\alpha(v)}))a] \cdot [(\prod_{w=1}^{r-n-1} \rho_B(d_{c\alpha(w)}))x] \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{\alpha \in F(n,r-1)} [\theta(d_r) \cdot (\prod_{v=1}^n \theta(d_{\alpha(v)}))a] \cdot [(\prod_{w=1}^{r-n-1} \rho_B(d_{c\alpha(w)}))x] + \\ &+ \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{\alpha \in F(n,r-1)} [(\prod_{v=1}^n \theta(d_{\alpha(v)}))a] \cdot [\rho_B(d_r) (\prod_{w=1}^{r-n-1} \rho_B(d_{c\alpha(w)}))x] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^r \sum_{\substack{\alpha \in F(n,r) \\ \alpha(n)=r}} \left[\left(\prod_{v=1}^n \theta(d_{\alpha(v)}) \right) a \right] \cdot \left[\left(\prod_{w=1}^{r-n} \rho_B(d_{c_{\alpha}(w)}) \right) x \right] + \\
&+ \sum_{n=0}^{r-1} \sum_{\substack{\alpha \in F(n,r) \\ \alpha(n) \neq r}} \left[\left(\prod_{v=1}^n \theta(d_{\alpha(v)}) \right) a \right] \cdot \left[\left(\prod_{w=1}^{r-n} \rho_B(d_{c_{\alpha}(w)}) \right) x \right] = \\
&= \sum_{\substack{\alpha \in F(0,r) \\ \alpha(0) \neq r}} \left[\left(\prod_{v=1}^0 \theta(d_{\alpha(v)}) \right) a \right] \cdot \left[\left(\prod_{w=1}^r \rho_B(d_{c_{\alpha}(w)}) \right) x \right] + \\
&+ \sum_{n=1}^{r-1} \sum_{\alpha \in F(n,r)} \left[\left(\prod_{v=1}^n \theta(d_{\alpha(v)}) \right) a \right] \cdot \left[\left(\prod_{w=1}^{r-n} \rho_B(d_{c_{\alpha}(w)}) \right) x \right] + \\
&+ \sum_{\substack{\alpha \in F(r,r) \\ \alpha(r)=r}} \left[\left(\prod_{v=1}^n \theta(d_{\alpha(v)}) \right) a \right] \cdot \left[\left(\prod_{w=1}^{r-n} \rho_B(d_{c_{\alpha}(w)}) \right) x \right] = \\
&= \sum_{n=0}^r \sum_{\alpha \in F(n,r)} \left[\left(\prod_{v=1}^n \theta(d_{\alpha(v)}) \right) a \right] \cdot \left[\left(\prod_{w=1}^{r-n} \rho_B(d_{c_{\alpha}(w)}) \right) x \right].
\end{aligned}$$

Esto completa la prueba del lema#

Teorema 3.1.8: Sean i una A - k -álgebra de Lie, $\varphi: L \rightarrow L(A/k)$ el morfismo estructural.

B una L -álgebra con morfismo $\theta: L \rightarrow L(B/k)$.

Entonces $B \otimes_A E(L)$ es una álgebra envolvente para $B \otimes_A L$.

Más aún $B \otimes_A E(L) = E(B \otimes_A L)$

Demostración:

Consideremos el B-módulo $B \otimes_A \sum_{j=1}^{\infty} \otimes^j L = B \otimes_A T(L)$

A fin de dar a $B \otimes_A T(L)$ una estructura de k-álgebra, será suficiente

definir una aplicación k-bilineal "." de $(B \otimes_A T) \times (B \otimes_A T)$ en $B \otimes_A T$

tal que para los k-generadores de la forma $x = b \otimes_A d_1 \dots d_r$,

y $y = \beta \otimes_A \delta_1 \dots \delta_s$ y $z = \xi \otimes_A \theta_1 \dots \theta_t$ valga la relación $x.(y.z) = (x.y).z$.

Definimos una aplicación k-bilineal de $(B \otimes_A \otimes^r L) \times (B \otimes_A \otimes^s L)$ en

$\sum_{t=1}^{r+s} B \otimes_A \otimes^t L$ como sigue:

$$(b \otimes_A d_1 \dots d_r) (\beta \otimes_A \delta_1 \dots \delta_s) = \sum_{j=0}^r \sum_{\alpha \in F(j,r)} b \left(\prod_{v=1}^j \theta(d_{\alpha}(v)) \right) \beta \otimes_A \left(\prod_{w=1}^{r-j} d_{c_{\alpha}(w)} \right) \delta_1 \dots \delta_s$$

que puede extenderse a una aplicación k-bilineal de $[B \otimes_A T(L)] \times [B \otimes_A T(L)]$ en $[B \otimes_A T(L)]$.

En cuanto a la asociatividad requerida, supongamos que $b \otimes_A \delta_1 \dots \delta_s$ y $c \otimes_A \theta_1 \dots \theta_t$ son elementos de $B \otimes_A T$. Si $d_1 \dots d_r \in L$, entonces:

$$(1 \otimes_A d_1) [(b \otimes_A \delta_1 \dots \delta_s) (c \otimes_A \theta_1 \dots \theta_t)] =$$

$$= (1 \otimes_A d_1) \sum_{n=0}^s \sum_{\alpha \in F(n,s)} b \left(\prod_{v=1}^n \theta(\delta_{\alpha}(v)) \right) c \otimes_A \left(\prod_{w=1}^{s-n} \delta_{c_{\alpha}(w)} \right) \theta_1 \dots \theta_t =$$

$$= \sum_{n=0}^s \sum_{\alpha \in F(n,s)} \theta(d_1) (b \left(\prod_{v=1}^n \theta(\delta_{\alpha}(v)) \right) c) \otimes_A \left(\prod_{w=1}^{s-n} \delta_{c_{\alpha}(w)} \right) \theta_1 \dots \theta_t +$$

$$+ \sum_{n=1}^s \sum_{\alpha \in F(n,s)} b \left(\prod_{v=1}^n \theta(\delta_{\alpha}(v)) \right) c \otimes_A d_1 \left(\prod_{w=1}^{s-n} \delta_{c_{\alpha}(w)} \right) \theta_1 \dots \theta_t =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^s \sum_{\alpha \in F(n,s)} (\theta(d_1)b) \cdot \left(\prod_{v=1}^n \theta(\delta_{\alpha(v)}) \right) c \otimes_A \left(\prod_{w=1}^{s-n} \delta_{c_{\alpha(w)}} \right) \theta_t \dots \theta_1 + \\
&+ \sum_{n=0}^s \sum_{\alpha \in F(n,s)} b(\theta(d_1) \prod_{v=1}^n \theta(\delta_{\alpha(v)})) c \otimes_A \left(\prod_{w=1}^{s-n} \delta_{c_{\alpha(w)}} \right) \theta_t \dots \theta_1 + \\
&+ \sum_{n=0}^s \sum_{\alpha \in F(n,s)} b \left(\prod_{v=1}^n \theta(\delta_{\alpha(v)}) \right) c \otimes_A d_1 \left(\prod_{w=1}^{s-n} \delta_{c_{\alpha(w)}} \right) \theta_t \dots \theta_1.
\end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
&[(1 \otimes d_1)(b \otimes_A \delta_s \dots \delta_1)] \cdot (c \otimes \theta_t \dots \theta_1) = \\
&= (d_1 b \otimes_A \delta_s \dots \delta_1 + b \otimes d_1 \delta_s \dots \delta_1)(c \otimes_A \theta_t \dots \theta_1) = \\
&= (d_1 b \otimes_A \delta_s \dots \delta_1)(c \otimes_A \theta_t \dots \theta_1) + (b \otimes \delta_{s+1} \dots \delta_1)(c \otimes \theta_t \dots \theta_1)
\end{aligned}$$

donde $\delta_{s+1} = d_1$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
&[(1 \otimes d_1)(b \otimes_A \delta_s \dots \delta_1)] \cdot (c \otimes \theta_t \dots \theta_1) = \\
&= \sum_{j=0}^s \sum_{\alpha \in F(j,s)} (d_1 b) \left(\prod_{n=1}^j \theta(\delta_{\alpha(n)}) \right) c \otimes_A \left(\prod_{w=1}^{s-j} \delta_{c_{\alpha(w)}} \right) \theta_t \dots \theta_1 +
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=0}^{s+1} \sum_{\alpha \in F(j, s+1)} b \left(\prod_{w=1}^j \theta(\delta_{\alpha(w)}) \right) c \circ \left(\prod_{v=1}^{s+1-j} \delta_{c\alpha(v)} \right) \theta_t \dots \theta_1 =$$

$$= \sum_{j=0}^s \sum_{\alpha \in F(j, s)} \left(\theta(d_1) b \right) \left(\prod_{n=1}^j \theta(\delta_{\alpha(n)}) \right) c \circ \left(\prod_{w=1}^{s-j} \delta_{c\alpha(w)} \right) \theta_t \dots \theta_1 +$$

$$+ \sum_{j=0}^{s+1} \sum_{\substack{\alpha \in F(j, s+1) \\ \alpha(j) = s+1}} b(\theta(d_1) \prod_{w=1}^{j-1} \theta(\delta_{\alpha(w)})) c \circ \left(\prod_{w=1}^{s-(j-1)} \delta_{c\alpha(w)} \right) \theta_t \dots \theta_1 +$$

$$+ \sum_{j=0}^s \sum_{\alpha \in F(j, s+1), \alpha(j) \leq s} \sum_{n=1}^j b \left(\prod_{n=1}^j \theta(\delta_{\alpha(n)}) \right) c \circ d_1 \left(\prod_{w=1}^{s-j} \delta_{c\alpha(w)} \right) \theta_t \dots \theta_1 =$$

$$= \sum_{j=0}^s \sum_{\alpha \in F(j, s)} \left(\theta(d_1) b \right) \left(\prod_{v=1}^j \theta(\delta_{\alpha(v)}) \right) c \circ \left(\prod_{w=1}^{s-j} \theta(\delta_{c\alpha(w)}) \right) \theta_t \dots \theta_1 +$$

$$+ \sum_{j=1}^s \sum_{\alpha \in F(j, s)} b(\theta(d_1) \prod_{n=1}^j \theta(\delta_{\alpha(n)})) c \circ \left(\prod_{w=1}^{s-j} \delta_{c\alpha(w)} \right) \theta_t \dots \theta_1 +$$

$$+ \sum_{j=0}^s \sum_{\alpha \in F(j, s)} \sum_{n=1}^j b \left(\prod_{n=1}^j \theta(\delta_{\alpha(n)}) \right) c \circ d_1 \left(\prod_{w=1}^{s-j} \delta_{c\alpha(w)} \right) \theta_t \dots \theta_1.$$

Más generalmente si $\psi = \theta_1 + \dots + \theta_n$ y $\varphi = \varphi_1 + \dots + \varphi_v$, con cada θ_j y φ_i de la forma $\theta_1 \dots \theta_w$:

$$\begin{aligned}
 (1 \otimes d_1)(\varphi.\psi) &= (1 \otimes d_1)\left(\sum_{i,j} \varphi_i \theta_j\right) \\
 &= \left(\sum_{i,j} (1 \otimes d_1)\varphi_i\right)\theta_j = ((1 \otimes d_1)\varphi)\psi.
 \end{aligned}$$

Ahora, si $d_r, \dots, d_1 \in L$, usando inducción:

$$\begin{aligned}
 (1 \otimes d_r \dots d_1)(\psi.\varphi) &= ((1 \otimes d_r) \dots (1 \otimes d_1))(\psi.\varphi) \\
 &= ((1 \otimes d_r)(1 \otimes d_{r-1}) \dots (1 \otimes d_1))(\psi.\varphi) \\
 &= (1 \otimes d_r)[(1 \otimes d_{r-1}) \dots (1 \otimes d_1)(\psi.\varphi)] \\
 &= (1 \otimes d_r)[((1 \otimes d_{r-1}) \dots (1 \otimes d_1)\psi).\varphi] \\
 &= [(1 \otimes d_r)((1 \otimes d_{r-1}) \dots (1 \otimes d_1)\psi)].\varphi \\
 &= ((1 \otimes d_r) \dots (1 \otimes d_1)\psi).\varphi
 \end{aligned}$$

De este modo tenemos una estructura de k -álgebra asociativa sobre $B \otimes_{\mathbb{A}} T(L)$. Notemos que se ha visto que

$$(b \otimes d_r \dots d_1)(\beta \otimes \delta_1 \dots \delta_s) = \sum_j b_j' \otimes \theta_j \delta_1 \dots \delta_s, \text{ donde } \theta_j \in T(L) \text{ y } b_j' \in B.$$

Supongamos ahora que $R = b \otimes d_r \dots d_1$, $S = \beta \otimes \delta_s \dots \delta_1$ y $d, d' \in L$. Entonces:

$$\begin{aligned}
 R(d.d' - d'.d - [d, d'])S &= (b \otimes d_r \dots d_1).(dd'S - d'dS - [d, d']S) \\
 &= (b \otimes d_r \dots d_1)(dd'(\beta \otimes \delta_s \dots \delta_1) - d'd(\beta \otimes \delta_s \dots \delta_1) - [d, d'](\beta \otimes \delta_s \dots \delta_1))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (b \otimes d_r \dots d_1) \cdot [d(\theta(d')\beta \otimes \delta_s \dots \delta_1 + \beta \otimes d' \delta_s \dots \delta_1) - \\
&\quad - d'(\theta(d)\beta \otimes \delta_s \dots \delta_1 + \beta \otimes d \delta_s \dots \delta_1) - \\
&\quad - \theta(d)\theta(d')\beta \otimes \delta_s \dots \delta_1 + \theta(d')\theta(d)\beta \otimes \delta_s \dots \delta_1 - \\
&\quad - \beta \otimes [d, d']\delta_s \dots \delta_1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (b \otimes d_r \dots d_1) [\theta(d)\theta(d')\beta \otimes \delta_s \dots \delta_1 + \theta(d')\beta \otimes d \delta_s \dots \delta_1 \\
&\quad + \theta(d)\beta \otimes d' \delta_s \dots \delta_1 + \beta \otimes dd' \delta_s \dots \delta_1 \\
&\quad - \theta(d')\theta(d)\beta \otimes \delta_s \dots \delta_1 - \theta(d)\beta \otimes d' \delta_s \dots \delta_1 \\
&\quad - \theta(d')\beta \otimes d\delta_s \dots \delta_1 - \beta \otimes d'd \delta_s \dots \delta_1 \\
&\quad - \theta(d)\theta(d')\beta \otimes \delta_s \dots \delta_1 + \theta(d')\theta(d)\beta \otimes \delta_s \dots \delta_1 \\
&\quad - \beta \otimes [d, d']\delta_s \dots \delta_1]
\end{aligned}$$

$$= (b \otimes d_r \dots d_1) (\beta \otimes_A (dd' - d'd - [d, d'])\delta_s \dots \delta_1)$$

$$= \sum_n \beta'_n \otimes_{A_n} \theta \theta (dd' - d'd - [d, d'])\delta_s \dots \delta_1$$

Más aún, si $\psi \in T(L)$ y $a \in \Lambda$, entonces

$$\begin{aligned}
\rho &= R(d(a\psi) - (\varphi(d)a)\psi - \text{ad}\psi)S \\
&= R(d(a\psi) - (\varphi(d)a)\psi - \text{ad}\psi)(\beta \otimes \delta_s \dots \delta_1) \\
&= R(d(a\psi)(\beta \otimes \delta_s \dots \delta_1) - ((\varphi(d)a)\psi)(\beta \otimes \delta_s \dots \delta_1) - (\text{ad}\psi)(\beta \otimes \delta_s \dots \delta_1))
\end{aligned}$$

Supongamos que $\psi = d_r \otimes \dots \otimes d_1$. Así:

$$a\psi = \text{ad}_r \otimes d_{r-1} \otimes \dots \otimes d_1$$

y

$$d(a\psi) = d \otimes \text{ad}_r \otimes \dots \otimes d_1$$

Póngase $\xi = d_{r-1} \otimes \dots \otimes d_1$; entonces

$$\begin{aligned}
\rho &= R((d \otimes \text{ad}_r) \xi (\beta \otimes \delta_s \otimes \dots \otimes \delta_1) - \\
&\quad - (\varphi(d)a)(d_r \xi) (\beta \otimes \delta_s \otimes \dots \otimes \delta_1) - \text{ad} \otimes (d_r \xi) (\beta \otimes \delta_s \otimes \dots \otimes \delta_1))
\end{aligned}$$

Por expresiones $\xi \cdot (\beta \otimes \delta_s \otimes \dots \otimes \delta_1)$ son combinaciones lineales de expresiones de la misma forma que $\beta \otimes \delta_s \dots \delta_1$

Por lo tanto ρ es combinación lineal de expresiones de la forma

$$\begin{aligned}
\rho' &= R((d \otimes \text{ad}_r) (\beta \otimes \delta_s \dots \delta_1) - (\varphi(d)a) d_r (\beta \otimes \delta_s \dots \delta_1) - \\
&\quad - (\text{ad} \otimes d_r) (\beta \otimes \delta_s \dots \delta_1)) \\
&= R(\theta(d) \otimes (\text{ad}_r) \beta \otimes \delta_s \dots \delta_1 + \theta(\text{ad}_r) \beta \otimes d \delta_s \dots \delta_1 + \theta(d) \beta \otimes (\text{ad}_r) \delta_s \dots \delta_1 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \beta \otimes d(\text{ad}_r) \delta_s \dots \delta_1 - (\varphi(d)a)\theta(d_r)\beta \otimes \delta_s \dots \delta_1 - \\
& \quad - (\varphi(d)a)\beta \otimes d_r \delta_s \dots \delta_1 \\
& \quad - \theta(\text{ad})\theta(d_r)\beta \otimes \delta_s \dots \delta_1 - \theta(d_r)\beta \otimes (\text{ad})\delta_s \dots \delta_1 \\
& \quad - \theta(\text{ad})\beta \otimes d_r \delta_s \dots \delta_1 - \beta \otimes (\text{ad})d_r \delta_s \dots \delta_1) \\
& = R(a\theta(d)\theta(d_r)\beta \otimes \delta_s \dots \delta_1 + (\varphi(d)a)\theta(d_r)\beta \otimes \delta_s \dots \delta_1 \\
& \quad + a\theta(d)\beta \otimes d_r \delta_s \dots \delta_1 + \beta \otimes d(\text{ad}_r)\delta_s \dots \delta_1 \\
& \quad - (\varphi(d)a)\theta(d_r)\beta \otimes \delta_s \dots \delta_1 - (\varphi(d)a)\beta \otimes d_r \delta_s \dots \delta_1 \\
& \quad - a(\theta(d)\theta(d_r)\beta) \otimes \delta_s \dots \delta_1 - a\theta(d)\beta \otimes d_r \delta_s \dots \delta_1 - \\
& \quad \quad \quad - a\beta \otimes d d_r \delta_s \dots \delta_1) \\
& = R(\beta \otimes d(\text{ad}_r)\delta_s \dots \delta_1 - (\varphi(d)a)\beta \otimes d_r \delta_s \dots \delta_1 - a\beta \otimes d d_r \delta_s \dots \delta_1) \\
& = R[\beta \otimes (d(\text{ad}_r)\delta_s \dots \delta_1 - (\varphi(d)a)d_r \delta_s \dots \delta_1 - (\text{ad})d_r \delta_s \dots \delta_1)]
\end{aligned}$$

Por lo tanto en cada caso un elemento de la forma R y S está en $B \otimes I$, si $\gamma \in I$, donde I es el ideal bilátero de $T(L)$ generado por las relaciones $dd' - d'd - [d, d']$ y $d(a\rho) - (\varphi(d)a)\rho - \text{ad}\rho$.

Se sigue que $B \otimes I$ es un ideal en $B \otimes_A T(L)$ con muestra multiplicación.

Luego $B \otimes_A E(L)$ hereda la estructura de k -álgebra de $B \otimes_A T(L)$.

Para completar la demostración debemos mostrar que $B \otimes_A E(L)$ es una envolvente universal de $B \otimes_A L$.

Primeramente, $B \otimes_A E(L)$ es una álgebra envolvente para $B \otimes_A L$.

La aplicación estructural para $B \otimes_A L$ está dada por $\varphi(b \otimes_A d)(\beta) = b(\theta(d)\beta)$.

Si $\rho: B \otimes_A T(L) \rightarrow B \otimes_A E(L) = E$ es la proyección al cociente, entonces para $\beta \otimes_A \delta_s \dots \delta_1$ en $B \otimes_A E(L)$, $b \in B$ y $c \otimes_A d \in B \otimes_A L$ se sigue que:

$$\begin{aligned} \rho_{B \otimes_A E(L)}(c \otimes_A d)(b \cdot \beta \otimes_A \delta_s \dots \delta_1) &= c((\theta(d)b)\beta \otimes_A \delta_s \dots \delta_1 + b\theta(d)\beta \otimes_A \delta_s \dots \delta_1 + \\ &+ b\beta \otimes_A d \delta_s \dots \delta_1) \end{aligned}$$

$$= (\varphi(c \otimes_A d)b)\beta \otimes_A \delta_s \dots \delta_1 + \rho_{B \otimes_A E(L)}(c \otimes_A d)(\beta \otimes_A \delta_s \dots \delta_1)$$

Más aún:

$$\begin{aligned} \rho[b \otimes_A d, b' \otimes_A d'] &= \rho(b(\theta(d)b') \otimes_A d' - b'(\theta(d')b) \otimes_A d + bb' \otimes_A [d, d']) \\ &= \rho(b(\theta(d)b') \otimes_A d') - \rho(b'(\theta(d')b) \otimes_A d) + \rho(bb' \otimes_A [d, d']) \\ &= \rho(b(\theta(d)b') \otimes_A d') - \rho(b'(\theta(d')b) \otimes_A d) + \rho(bb' \otimes_A (dd' - d'd)) \end{aligned}$$

ya que $dd' - d'd = [d, d']$ en $E(L)$.

Se observa que ésta última expresión es:

$$\rho(b \otimes_A d)\rho(b' \otimes_A d') - \rho(b' \otimes_A d')\rho(b \otimes_A d).$$

Finalmente, supongamos que v una álgebra envolvente para $B \otimes_A L$. Si usamos la aplicación $\lambda: d \rightarrow \rho_v(1 \otimes_A d)$, $d \in L$, v resulta una álgebra envolvente para L .

Existe, entonces, una única aplicación $h: E(L) \rightarrow v$ de A - k -álgebras tal que $h \circ \rho_E(L) = \rho_v$

Podemos extender h , unívocamente, a un morfismo de B -módulos

$$h': B \otimes_A E(L) \rightarrow v, \text{ poniendo } h'(b \otimes \delta) = b \cdot h(\delta)$$

Si $d \in L$ y $b \in B$, entonces:

$$h'(\rho_{B \otimes E(L)}(b \otimes d)) = h'(b \otimes \rho_E(d)) = bh(\rho_E(d)) = \rho_v(b \otimes d).$$

A fin de completar la demostración, será suficiente mostrar que h' es un morfismo de B - k -álgebras. Sólo falta ver que es de k -álgebras: como h' es k -lineal bastará ver que

$$h'((b \otimes d_r \dots d_1)(\beta \otimes \delta_s \dots \delta_1)) = h'(b \otimes d_r \dots d_1) \cdot h'(\beta \otimes \delta_s \dots \delta_1)$$

Pero:

$$h'((b \otimes \rho_E(d_r) \dots \rho_E(d_1))(\beta \otimes \rho_E(\delta_s) \dots \rho_E(\delta_1))) =$$

$$= h' \left[\sum_{n=0}^r b \cdot \sum_{\alpha \in F(n,r)} \left(\prod_{v=1}^n \theta(d_{\alpha(v)}) \right) \beta \otimes \left(\prod_{w=1}^{r-n} \rho_E(d_{c\alpha(w)}) \right) \rho_E(\delta_s) \dots \rho_E(\delta_1) \right]$$

$$= \sum_{n=0}^r b \cdot \sum_{\alpha \in F(n,r)} \left(\prod_{v=1}^n \theta(d_{\alpha(v)}) \right) \beta \cdot h' \left(\prod_{w=1}^{r-n} \rho_E(d_{c\alpha(w)}) \right) \rho_E(\delta_s) \dots \rho_E(\delta_1)$$

$$= \sum_{n=0}^r b \cdot \sum_{\alpha \in F(n,r)} \left(\prod_{v=1}^n \theta(d_{\alpha(v)}) \right) \beta \cdot \left(\prod_{w=1}^{r-n} \rho_v(1 \otimes d_{c\alpha(w)}) \right) \rho_v(1 \otimes \delta_s) \dots \rho_v(1 \otimes \delta_1)$$

$$= b(\rho_v(1 \otimes d_r) \dots \rho_v(1 \otimes d_1))(\beta \rho_v(1 \otimes \delta_s) \dots \rho_v(1 \otimes \delta_1)) \text{ por el}$$

Lema 1.7.

Luego

$$h'((b \otimes d_r \dots d_1)(\beta \otimes \delta_s \dots \delta_1)) = h'(b \otimes d_r \dots d_1 \cdot h'(\beta \otimes \delta_s \dots \delta_1)) \quad \#$$

3.2. TEOREMAS DE EXTENSION DE DERIVACIONES

Lema 3.2.1: Sean k, A anillos y supongamos que B es una A -álgebra. Sean: F un A -módulo libre e $i: F \rightarrow B$ una aplicación A -lineal, $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ una base de F y $(b_\alpha)_{\alpha \in I}$ un conjunto de elementos de B .

Entonces para toda k -derivación $\delta: A \rightarrow B$ existe una única k -derivación $\partial: S_A[F] \rightarrow B$ tal que $\partial(a) = \delta(a)$ si $a \in A$, y $\partial(f_\alpha) = b_\alpha$, $\alpha \in I$.

Demostración: Dado que F es un A -módulo libre, $S_A[F] \cong A[f_\alpha]_{\alpha \in I}$, anillo de polinomios en las indeterminadas f_α a coeficientes en A .

Entonces resulta que $D(S_A[F]/A)$ es un $S_A[F]$ -módulo libre con base $\{df_\alpha : \alpha \in I\}$ y por lo tanto se tiene la siguiente descomposición de $D(S_A[F]/k)$:

$$D(S_A[F]/k) \cong [S_A[F] \otimes_A D'(A/k)] \oplus D(S_A[F]/A)$$

Por otra parte, $i: F \rightarrow B$ se extiende de modo único a $i': S_A[F] \rightarrow B$, definiendo en B una estructura de $S_A[F]$ -módulo.

Puede definirse entonces una aplicación $S_A[F]$ -lineal de $D(S_A[F]/k)$ en B , que induce a la derivación buscada. #

Lema 3.2.2: Sean A, k anillos tal que A es una k -álgebra y supongamos que B es una A -álgebra.

Supongamos que: (i) M es un A -módulo y existe $d: A \rightarrow B$, k -derivaciones
 (ii) $i: M \rightarrow B$ aplicación A -lineal
 (iii) $\delta: M \rightarrow B$ aplicación k -lineal tal que

$$\delta(a.m) = a\delta(m) + (da)i(m), \text{ si } a \in A, m \in M.$$

Entonces existe una única k -derivación $\partial: S_A[M] \rightarrow B$ tal que $\partial(m) = \delta(m)$, si $m \in M$, y $\partial(a) = da$ si $a \in A$.

Demostración: Sea F un A -módulo libre y $0 \rightarrow K \rightarrow F \xrightarrow{h} M \rightarrow 0$ una sucesión exacta de A -módulos.

Tal sucesión induce de modo natural a

$$0 \rightarrow \langle K \rangle \rightarrow S_A[F] \xrightarrow{H} S_A[M] \rightarrow 0$$

con H morfismo de A -álgebras y $\langle K \rangle = \ker H$, ideal de $S_A[F]$ generado por K . La aplicación $i \circ h: F \rightarrow B$ induce sobre B una estructura de $S_A[F]$ -álgebra. Si $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ es una base de F , por el lema anterior, existe una única k -derivación $\Delta: S_A[F] \rightarrow B$ tal que $\Delta(a) = da$ y $\Delta(f_\alpha) = \delta h(f_\alpha)$. Para completar la demostración, bastará que Δ se factorice a través de H . Si $x \in K$, $P \in S_A[F]$:

$$\Delta(P \cdot x) = \Delta(P) \cdot i \circ h(x) + (i \circ H)(P) \cdot (\delta \circ h)(x) = 0 \quad \#$$

3.2.3: Supongamos que L es una A - k -álgebra de Lie.

B una L -álgebra, con morfismo estructural

$$\theta: L \rightarrow L(B/k)$$

Si $\rho_E: L(B/k) \rightarrow E(B/k) = E(L(B/k))$ es el morfismo canónico de $L(B/k)$ en su envolvente universal, $\rho_E \circ \theta: L \rightarrow E(B/k)$ es A -lineal.

Si $a \in A$ y $x \in E(B/k)$, para $d \in L$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \rho_E \circ \theta(d)(ax) &= (\theta(d)(a \cdot 1_B)) \cdot x + (a \cdot 1_B) \rho_E(\theta(d)) \cdot x = \\ &= (da \cdot 1_B) \cdot x + (a \cdot 1_B) \rho_E(\theta(d)) \cdot x. \end{aligned}$$

Además si $d, d' \in L$:

$$\rho_E \cdot \theta[d, d'] = \rho_E[\theta(d), \theta(d')] = \rho_E(\theta(d)) \rho_E(\theta(d')) - \rho_E(\theta(d')) \rho_E(\theta(d))$$

Por tanto $E(B/k)$ es una álgebra envolvente para L . Se sigue que existe un único morfismo A -lineal y de k -álgebras de $E(L)$ en $E(B/k)$, denotado $\epsilon(\theta)$.

En particular, si $d_1, \dots, d_r \in L$ y $b \in B$:

$$\epsilon(\theta)(\rho_E(d_1) \dots \rho_E(d_r)b) = \theta(d_1) \dots \theta(d_r)(b)$$

CAPITULO 4

4.1. Espacio de Jet

4.2. Propiedad universal. Sección jet j_λ

4.3. Singularidades genéricas

La referencia para 4.1 y 4.2 la constituye [6]

En 4.3 se demuestra que el espacio de Jet introducido en [6] sirve para clasificar genéricamente las singularidades de morfismos algebraicos (bajo las hipótesis allí detalladas) definidas en 2.3.

4.1. ESPACIO DE JET

Sean A, B, k anillos, A y B k -álgebras.

Sea L una B - k -álgebra de Lie (Definición 3.1.2.)

$E(L)$ denote el álgebra envolvente universal de L (Definición 3.1.5.)

Definimos en $A \otimes_k E(L) \otimes_k A$ una estructura de $B \otimes_k A$ -módulo como sigue:

$$(b \otimes a)(a' \otimes \theta \otimes a'') = aa' \otimes \theta \otimes a''$$

Definición 4.1.1:

El espacio de jet asociado a B, A será la $B \otimes_k A$ -álgebra

$$J(L(B/k), B \otimes_k A) = S_{B \otimes_k A} [A \otimes_k E(L) \otimes_k A] / I,$$

donde I es el ideal de $S_{B \otimes_k A} [A \otimes_k E(L) \otimes_k A]$ generado por los elementos:

a) $1 \otimes e \otimes 1$, si $e \in E(B/k)$

b) $1 \otimes \rho_E(d_r) \dots \rho_E(d_1) \otimes b_1 b_2 -$

$$- \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{\alpha \in F(j,r)} (1 \otimes \prod_{v=1}^j \rho_E(d_{\alpha(v)}) \otimes b_1) \\ (1 \otimes \prod_{n=1}^{r-j} \rho_E(d_{\alpha(n)}) \otimes b_2) -$$

$$- b_1 \otimes \prod_{j=1}^r \rho_E(d_j) \otimes b_2 - b_2 \otimes \prod_{j=1}^r \rho_E(d_j) \otimes b_1.$$

Daremos a $J(L(B/k), B \otimes_k A)$ estructura de $L(B/k)$ -álgebra a través de un morfismo estructural $\gamma: L(B/k) \rightarrow L(J(L(B/k), B \otimes_k A)/k)$ que pasamos a construir.

4.1.2. Construcción de γ :

a) Definición de $\gamma(d)$, $d \in L(B/k)$

b) γ resulta B-lineal y de k-álgebras de Lie

a) Sea $d \in L(B/k)$. Definimos

i) $d^*: A \times E(B/k) \times A \rightarrow J(L(B/k), A \otimes B)$

$$d^*(a', x, a'') = (1 \otimes \rho_E(d) \otimes a')(1 \otimes x \otimes a'') + (a' \otimes \rho_E(d).x \otimes a'')$$

d^* es 3-lineal; en efecto:

$$\begin{aligned} d^*(a_1+a_2, x, a'') &= (1 \otimes \rho_E(d) \otimes (a_1+a_2))(1 \otimes x \otimes a'') + \\ &+ ((a_1+a_2) \otimes \rho_E(d).x \otimes a'') \\ &= (1 \otimes \rho_E(d) \otimes a_1)(1 \otimes x \otimes a'') + \\ &+ (1 \otimes \rho_E(d) \otimes a_2)(1 \otimes x \otimes a'') + \\ &+ (a_1 \otimes \rho_E(d).x \otimes a'') + (a_2 \otimes \rho_E(d).x \otimes a'') = \\ &= d^*(a_1, x, a'') + d^*(a_2, x, a'') \end{aligned}$$

De modo similar se comprueba que es k-lineal en las variables x y a". Se tiene entonces unívocamente determinada una aplicación k-lineal:

$$d^*: A \otimes_k E(B/k) \otimes_k A \rightarrow J(L(B/k), B \otimes A).$$

ii) Sea $\delta: B \times A \rightarrow J(L(B/k), B \otimes A)$ definida por:

$$\delta(b, a) = d(b) \otimes a + 1 \otimes b \rho_E(d) \otimes a$$

Se comprueba fácilmente que δ es k -lineal de donde se obtiene una aplicación (denotada de igual modo):

$$\delta: B \otimes_k A \rightarrow J(L(B/k), B \otimes_k A)$$

Veamos que δ es una k -derivación. Basta verificar

$$\delta((b \otimes a).(b' \otimes a')) = \delta(b \otimes a).b' \otimes a' + (b \otimes a).\delta(b' \otimes a')$$

$$\begin{aligned} \delta((b \otimes a).(b' \otimes a')) &= \delta(bb' \otimes aa') = \\ &= d(bb') \otimes aa' + 1 \otimes bb' \rho_E(d) \otimes aa' = \\ &= bd(b') \otimes aa' + b'd(b) \otimes aa' + \\ &+ (bb' \otimes 1)(a' \otimes \rho_E(d) \otimes a + a \otimes \rho_E(d) \otimes a') \\ &= (b \otimes a)(d(b') \otimes a' + 1 \otimes b' \rho_E(d) \otimes a') + \\ &+ (b' \otimes a')(d(b) \otimes a + 1 \otimes b \rho_E(d) \otimes a) = \\ &= (b \otimes a).\delta(b' \otimes a') + (b' \otimes a').\delta(b \otimes a) \end{aligned}$$

como queríamos ver.

iii) Si $\alpha \in B \otimes A$ y $x \in A \otimes E(B/k)$ B , afirmamos que

$$d^*(\alpha.x) = \delta(\alpha).i(x) + \alpha.d^*(x).$$

Basta verificarlo para $\alpha = b \otimes a$ y $x = a_1 \otimes 0 \otimes a_2$:

$$\begin{aligned}
d^*((b \otimes a) \cdot (a_1 \otimes \theta \otimes a_2)) &= d^*(aa_1 \otimes b\theta \otimes a_2) = \\
&= (1 \otimes \rho_E(d) \otimes aa_1)(1 \otimes b\theta \otimes a_2) + (aa_1 \otimes \rho_E(d)(b \cdot \theta) \otimes a_2) = \\
&= (a \otimes \rho_E(d) \otimes a_1)(1 \otimes b\theta \otimes a_2) + (a_1 \otimes \rho_E(d) \otimes a)(1 \otimes b\theta \otimes a_2) + \\
&+ (aa_1 \otimes b\rho_E(d)\theta \otimes a_2) + (aa_1 \otimes d(b) \cdot \theta \otimes a_2) = \\
&= (a_1 \otimes \theta \otimes a_2)[(1 \otimes b\rho_E(d) \otimes a) + (d(b) \otimes a)] + \\
&+ (b \otimes a)[(1 \otimes \rho_E(d) \otimes a_1)(1 \otimes \theta \otimes a_2) + (a_1 \otimes \rho_E(d) \otimes a_2)] = \\
&= (a_1 \otimes \theta \otimes a_2)\delta(b \otimes a) + (b \otimes a) d^*(a_1 \otimes \theta \otimes a_2)
\end{aligned}$$

de donde lo afirmado.

Por el Lema 3.2.2.) existe una única k -derivación

$$d' : S_{B \otimes A} [A \otimes E(B/k) \otimes A] + J(L(B/k), B \otimes A)_k$$

que coincide con d^* en $A \otimes E(B/k) \otimes A$ y con δ en $B \otimes A$

Veamos ahora que tal derivación se anula en el ideal I de la Definición 1.1.

En lo que respecta a elementos de la forma (a), es obvio que d' se anula en ellos.

Sean entonces $d_1, \dots, d_r \in L(B/k)$ y $a_1, a_2 \in A$;

$$d'(1 \otimes \rho_E(d_r) \dots \rho_E(d_1) \otimes a_1 a_2) =$$

$$= d' \left(\prod_{j=0}^r \sum_{\alpha \in F(j,r)} (1 \otimes \prod_{n=1}^j \rho_E(d_{\alpha(n)}) \otimes a_1) (1 \otimes \prod_{v=1}^{r-j} \rho_E(d_{c_{\alpha}(v)}) \otimes a_2) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= 1 \otimes \rho_E(d) \rho_E(d_r) \dots \rho_E(d_1) \otimes a_1 a_2 - \\
&- \sum_{j=0}^r \sum_{\alpha \in F(j,r)} (1 \otimes \rho_E(d) \prod_{n=1}^j \rho_E(d_{\alpha(n)}) \otimes a_1) (1 \otimes \prod_{v=1}^{r-j} \rho_E(d_{c\alpha(v)}) \otimes a_2) - \\
&- \sum_{j=0}^r \sum_{\alpha \in F(j,r)} (1 \otimes \prod_{n=1}^j \rho_E(d_{\alpha(n)}) \otimes a_1) (1 \otimes \rho_E(d) \prod_{v=1}^{r-j} \rho_E(d_{c\alpha(v)}) \otimes a_2).
\end{aligned}$$

Si denotamos $d = d_{r+1}$, la última expresión adopta la forma:

$$\begin{aligned}
&1 \otimes \rho_E(d_{r+1}) \dots \rho_E(d_1) \otimes a_1 a_2 - \\
&- \sum_{j=0}^r \sum_{\substack{\alpha \in F(j, r+1) \\ \alpha(j) = r+1}} (1 \otimes \prod_{n=1}^j \rho_E(d_{\alpha(n)}) \otimes a_1) (1 \otimes \prod_{v=1}^{r+1-j} \rho_E(d_{c\alpha(v)}) \otimes a_2) - \\
&- \sum_{j=0}^r \sum_{\substack{\alpha \in F(j, r+1) \\ \alpha(j) = r}} (1 \otimes \prod_{n=1}^j \rho_E(d_{\alpha(n)}) \otimes a_1) (1 \otimes \prod_{v=1}^{r+1-j} \rho_E(d_{c\alpha(v)}) \otimes b_2) = \\
&= (1 \otimes \rho_E(d_{r+1}) \dots \rho_E(d_1) \otimes a_1 a_2) - \\
&- \sum_{j=0}^{r+1} \sum_{\alpha \in F(j, r+1)} (1 \otimes \prod_{n=1}^j \rho_E(d_{\alpha(n)}) \otimes a_1) (1 \otimes \prod_{v=1}^{r+1-j} \rho_E(d_{c\alpha(v)}) \otimes a_2) = 0.
\end{aligned}$$

Se ha construido así una aplicación

$$\gamma: d \rightarrow d', \text{ de } L(B/k) \text{ en } L(J(L(B/k), B \otimes A)/k)$$

b) γ es B-lineal y de k-álgebras de Lie

i) B-linealidad: $\gamma(b.d) = b\gamma(d)$

Para ver esto, basta mostrar que

$$\gamma(bd)(b' \otimes a') = b\gamma(d)(b' \otimes a')$$

y

$$\gamma(bd)(a' \otimes \theta \otimes a'') = b\gamma(d)(a' \otimes \theta \otimes a'')$$

$$\gamma(bd)(b' \otimes a') = b(db') \otimes a' + 1 \otimes \rho_E(b'bd) \otimes a'$$

$$= (b \otimes 1)[(db' \otimes a') + (1 \otimes \rho_E(b'd) \otimes a')]$$

$$\gamma(bd)(a' \otimes \theta \otimes a'') = (1 \otimes \rho_E(bd) \otimes a')(1 \otimes \theta \otimes a'') + a' \otimes \rho_E(bd) \otimes a''$$

$$= (b \otimes 1)[(1 \otimes \rho_E(d) \otimes a')(1 \otimes \theta \otimes a'') +$$

$$+ (a' \otimes \rho_E(d) \otimes a'')]$$

Se puede, de modo análogo, verificar que $\gamma(d_1+d_2) = \gamma(d_1)+\gamma(d_2)$.

ii) γ es de k-álgebras de Lie:

Supongase $d; d' \in L(B/k)$, $a \in A$, $b \in A$; entonces:

$$[\gamma(d), \gamma(d')](b \otimes a) = \gamma(d)\gamma(d')(b \otimes a) - \gamma(d')\gamma(d)(b \otimes a)$$

$$= \gamma(d)[d'b \otimes a + (1 \otimes b\rho_E(d') \otimes a)] - \gamma(d')[db \otimes a + (1 \otimes b\rho_E(d) \otimes a)] =$$

$$\begin{aligned}
&= dd'b \otimes a + 1 \otimes (d'b)_{\rho_E(d)} \otimes a + 1 \otimes \rho_E(d)(b_{\rho_E(d')}) \otimes a \\
&- d'db \otimes a - 1 \otimes (db)_{\rho_E(d)} \otimes a - 1 \otimes \rho_E(d')(b_{\rho_E(d)}) \otimes a \\
&= dd'b \otimes a + 1 \otimes (d'b)_{\rho_E(d)} \otimes a + 1 \otimes (db)_{\rho_E(d')} \otimes a + \\
&+ 1 \otimes b_{\rho_E(d)}_{\rho_E(d')} \otimes a \\
&- d'db \otimes a - 1 \otimes (db)_{\rho_E(d')} \otimes a - 1 \otimes (d'b)_{\rho_E(d)} \otimes a - \\
&- 1 \otimes b_{\rho_E(d')}_{\rho_E(d)} \otimes a \\
&= dd'b \otimes a + 1 \otimes b_{\rho_E(d)}_{\rho_E(d')} \otimes a - d'db \otimes a - 1 \otimes b_{\rho_E(d')}_{\rho_E(d)} \otimes a \\
&= dd'b \otimes a - d'db \otimes a + 1 \otimes b_{\rho_E[d,d']} \otimes a \\
&= (\gamma[d,d'])(b \otimes a)
\end{aligned}$$

Más aún, si $a, a' \in A$, $x \in E(L)$ entonces:

$$\begin{aligned}
[\gamma(d), \gamma(d')](a \otimes x \otimes a') &= (\gamma(d)\gamma(d') - \gamma(d')\gamma(d))(a \otimes x \otimes a') \\
&= (1 \otimes \rho_E(d)_{\rho_E(d')} \otimes a)(1 \otimes x \otimes a') + \\
&+ (1 \otimes \rho_E(d) \otimes a)(1 \otimes \rho_E(d)x \otimes a') + (1 \otimes \rho_E(d) \otimes a)(1 \otimes \rho_E(d')x \otimes a') + \\
&+ (a \otimes \rho_E(d)_{\rho_E(d')} \otimes a') - (1 \otimes \rho_E(d')_{\rho_E(d)} \otimes a)(1 \otimes x \otimes a') - \\
&- (1 \otimes \rho_E(d) \otimes a)(1 \otimes \rho_E(d')x \otimes a') \\
&- (1 \otimes \rho_E(d') \otimes a)(1 \otimes \rho_E(d)x \otimes a') - (a \otimes \rho_E(d')_{\rho_E(d)}x \otimes a')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (1 \otimes \rho_E[d, d'] \otimes a)(1 \otimes x \otimes a') + (a \otimes \rho_E[d, d'] \otimes a') \\
 &= \gamma[d, d'](a \otimes x \otimes a')
 \end{aligned}$$

Finalmente, como $\gamma(d)(b \otimes 1) = db \otimes 1$, se completa la prueba sobre la estructura de $L(B/k)$ -álgebra definida por γ , en $J(L(B/k), B \otimes A)$.

Proposición 4.1.3: En $J(L(B/k), B \otimes A)$ vale la siguiente relación:

$$\gamma(d_r) \dots \gamma(d_1)(1 \otimes a) = 1 \otimes \rho_B(d_r) \dots \rho_B(d_1) \otimes a.,$$

$$d_1, \dots, d_r \in L(B/k), a \in A.$$

Demostración: Basta recordar que, por definición de γ se tiene:

- i) $\gamma(d)(1 \otimes a) = 1 \otimes d \otimes a$
- ii) $\gamma(d)(1 \otimes \alpha \otimes a) = 1 \otimes \rho_B(d) \cdot \alpha \otimes a$

y aplicar inducción en r .

#

Nota 4.1.4:

Luego, de la proposición precedente y la definición de $J(L(B/k), B \otimes A)$ todo elemento del jet puede expresarse como (la clase de) suma de productos de elementos de la forma $\gamma(d_r) \dots \gamma(d_1)(1 \otimes a)$, $d_i \in L(B/k)$, $a \in A$, a coeficientes en $B \otimes A$.

4.2. PROPIEDAD UNIVERSAL. SECCION JET DE $\lambda: A \rightarrow B$

Teorema 4.2.1: La $B \otimes_k A$ -álgebra $J(L(B/k), B \otimes A)$ está unívocamente determinada, a menos de isomorfismos de $B \otimes_k A$ -álgebras, por las siguientes propiedades universales:

- i) $J(L(B/k), B \otimes A)$ es una $B \otimes A$ -álgebra y una $L(B/k)$ -álgebra por medio de $\gamma: L(B/k) \rightarrow L(J(L(B/k), B \otimes A)/k)$, que hace de $E(J(L(B/k), B \otimes A)/k)$ una álgebra envolvente para $L(B/k)$ por $\epsilon(\gamma)$
- ii) Si T es una $B \otimes A$ -álgebra vía $\lambda: B \otimes A \rightarrow T$ y T es una $L(B/k)$ -álgebra vía $\theta: L(B/k) \rightarrow L(T/k)$, entonces existe un único morfismo de $B \otimes A$ -álgebra $j_{\theta, \lambda}: J(L(B/k), B \otimes A) \rightarrow T$ tal que para $\alpha \in E(B/k)$, $a \in A$, $b \in B$ se tiene:

$$j_{\theta, \lambda}(\epsilon(\gamma)(\alpha)(b \otimes a)) = (\epsilon(\theta)(\alpha)) \lambda(b \otimes a).$$

Demostración: denotamos por J a $J(L(B/k), B \otimes A)$.

- i) Ya se ha visto que J admite estructura de $L(B/k)$ -álgebra por medio de γ , definida en 1.2. Si $E(J/k)$ es la envolvente universal de $L(J/k)$ y $\rho_J: L(J/k) \rightarrow E(J/k)$ el morfismo canónico, la composición $\rho_J \cdot \gamma: L(B/k) \rightarrow E(J/k)$ hace de $E(J/k)$ una álgebra envolvente para $L(B/k)$ (2.3. CAP. III). $\epsilon(\gamma)$ denota la única flecha de B -módulos y k -álgebras haciendo conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} L(B/k) & \xrightarrow{\gamma} & L(J/k) \\ \downarrow \rho_B & & \downarrow \rho_J \\ E(B/k) & \xrightarrow{\epsilon(\gamma)} & E(J/k) \end{array}$$

con lo que queda demostrado i).

- ii) Supongamos que T es una $B \otimes A$ -álgebra por medio de $\lambda: B \otimes A \rightarrow T$ y que T es una $L(B/k)$ -álgebra por medio de $\theta: L(B/k) \rightarrow L(T/k)$. Denotaremos por $\epsilon(\theta)$ al único morfismo de B -módulos y de k -álgebras tal que $\rho_T \cdot \theta = \epsilon(\theta) \cdot \rho_B$

Sea $\mu: A \times E(B/k) \times A \rightarrow T$ la aplicación

$$\mu(a, \alpha, a') = \lambda(1 \otimes a) ((\epsilon(\theta)_\alpha) a')$$

Se comprueba fácilmente que μ es k -trilineal y por tanto existe una única aplicación (denotada también por μ):

$$\mu: A \otimes_k E(B/k) \otimes_k A \rightarrow T$$

Además μ resulta un morfismo de $B \otimes A$ -módulos:

$$\begin{aligned} \mu[(b \otimes a)(a' \otimes \alpha \otimes a'')] &= \mu(aa' \otimes b\alpha \otimes a'') = \\ &= \lambda(1 \otimes aa') \cdot ((\epsilon(\gamma)(b\alpha)) a'') = \lambda(1 \otimes a) \cdot \lambda(1 \otimes a') \cdot \\ &\cdot \lambda(b \otimes 1) ((\epsilon(\gamma)(\alpha)) a'') = \lambda(b \otimes a) \cdot \mu(a' \otimes \alpha \otimes a'') \end{aligned}$$

Existe por tanto una única extensión de μ a una aplicación de $B \otimes A$ -álgebras de $S_{B \otimes A}[A \otimes E(B/k) \otimes A]$ en T , denotada una vez más por μ .

Esta construcción de μ muestra que, si $\alpha \in L(B/k)$ entonces:

$$\begin{aligned} \mu(db \otimes a + 1 \otimes bd \otimes a) &= \lambda(db \otimes a) + b\theta(d)a \\ &= \theta(d) \lambda(b \otimes a). \end{aligned}$$

Sean ahora $d_1, \dots, d_r \in L(B/k)$ y $a_1, a_2 \in A$.

El Lema 3.1.7. muestra que:

$$\theta(d_r) \dots \theta(d_1)(a_1 a_2) = \sum_{n=0}^r \sum_{\alpha \in F(n,r)} \left(\prod_{v=1}^n \theta(d_{\alpha(v)}) \right) b_1 \cdot \left(\prod_{w=1}^{r-n} \theta(d_{c\alpha(w)}) \right) b_2$$

y como además $(1 \otimes x \otimes 1) = 0$, μ se factoriza unívocamente a través de J por medio de una aplicación j .

Si $b \in B$, $a \in A$ y $d_r \dots d_1 \in L$, entonces:

$$\begin{aligned}
 & j((\epsilon(\gamma)\rho_B(d_r) \dots \rho_B(d_1))(b \otimes a)) = \\
 & = j\left(\sum_{n=0}^r \sum_{\alpha \in F(n,r)} \left(\prod_{v=1}^n d_{\alpha(v)}\right)b\right) \left(1 \otimes \prod_{w=1}^{r-n} \rho_B(d_{c\alpha(w)}) \otimes a\right) \\
 & = \sum_{n=0}^r \sum_{\alpha \in F(n,r)} \left(\prod_{v=1}^n d_{\alpha(v)}\right)b (\epsilon(\theta) \prod_{w=1}^{r-n} \rho_B(d_{c\alpha(w)}))a \\
 & = \theta(d_r) \dots \theta(d_1) \lambda(b \otimes a) = \epsilon(\theta)(\rho_T(d_r) \dots \rho_T(d_1)) \lambda(b \otimes a)
 \end{aligned}$$

Dado que $\epsilon(\theta)$ y j son B -lineales, esto muestra que para cada $\alpha \in E(L)$ se tiene:

$$j((\epsilon(\gamma)\alpha)(b \otimes a)) = (\epsilon(\theta)\alpha)\lambda(b \otimes a).$$

Queda completada la prueba de (ii)

#

4.2.2. SECCION JET

Si $\lambda: A \rightarrow B$ es un morfismo de k -álgebras, B tiene estructura de $B \otimes A$ -álgebra por medio de $1 \otimes \lambda: B \otimes A \rightarrow B$, $(1 \otimes \lambda)(b \otimes a) = b \cdot \lambda(a)$, y es $L(B/k)$ -álgebra por medio de la identidad, $\text{id}: L(B/k) \rightarrow L(B/k)$. Denotamos por $j_\lambda: J \rightarrow B$ a la única aplicación de $B \otimes A$ -álgebras dada por el teorema precedente y será llamada la sección jet de λ .

4.2.3. Si $d_1, \dots, d_r \in L(B/k)$, $a \in A$ se verifica que

$$j_\lambda(1 \otimes \rho_B(d_r) \dots \rho_B(d_1) \otimes a) = d_r \dots d_1(\lambda a)$$

En efecto, por Proposición 1.3:

$$\begin{aligned} 1 \otimes \rho_B(d_r) \dots \rho_B(d_1) \otimes a &= \gamma(d_r) \dots \gamma(d_1)(1 \otimes a) \\ &= \epsilon(\gamma)(d_r \dots d_1)(1 \otimes a) \end{aligned}$$

Luego por la propiedad de j :

$$\begin{aligned} j_\lambda(1 \otimes \rho_B(d_r) \dots \rho_B(d_1) \otimes a) &= j_\lambda(\epsilon(\gamma)(d_r \dots d_1)(1 \otimes a)) = \\ &= d_r \dots d_1(\lambda(1 \otimes a)) \\ &= d_r \dots d_1(\lambda a). \end{aligned}$$

#

4.3. SINGULARIDADES GENERICAS

4.3.1. L denotará el B -módulo $L(B/k)$ y $J = J(L, B \circ A)$.

Sea $\gamma: L \rightarrow L(J/k)$ el morfismo estructural que hace de J una L -álgebra.

Recordemos que γ es un morfismo de B -módulos y de k -álgebras de Lie.

Extendemos γ a una flecha J -lineal:

$$1 \otimes \gamma: J \otimes_B L \rightarrow L(J/k)$$

Aplicando el functor $\text{Hom}_J(\cdot, J)$ y denotando por M^* al dual de un módulo M , se tiene:

$$(1 \otimes \gamma)^t: D(J/k)^{**} \rightarrow \text{Hom}_J(J \otimes_B L, J)$$

Sobre el anillo B haremos las siguientes hipótesis:

- a) B es local regular m -ádico con radical m .
- b) $B/m = k \subset B$, cuerpo de característica cero.
- c) $D_c(B/k)$ es de tipo finito.

Se sigue, por teorema 1.5.1. CAP II, que $D_c(B/k)$ es libre de rango finito. Como $\hat{B} =$ completación m -ádica de B , es fielmente plano como B módulo y vale la fórmula $D_c(\hat{B}/k) = \hat{B} \otimes_B D_c(B/k)$ (2.1.4.2), se sigue que $D_c(B/k)$ es libre de rango finito.

Según la proposición 3.1.1., $D_c(B/k)^* = L(B/k)$ de donde $L(B/k)$ es libre de rango finito.

Se tiene entonces que:

$$\text{Hom}_J(J \otimes_B L, J) = \text{Hom}_B(L, J) = J \otimes_B D_c(B/k)^{**}$$

Como todo módulo libre de rango finito es reflexivo se obtiene el isomorfismo

$$\alpha: \text{Hom}_J(J \otimes_B L, J) \cong J \otimes_B D_c(B/k)$$

Sea $\Gamma: D(J/k) \rightarrow D(J/k)^{**}$ el morfismo natural del módulo en su doble dual. Se tiene la siguiente sucesión de J -módulos:

$$D(J/k) \xrightarrow{\Gamma} D(J/k)^{**} \xrightarrow{(1 \otimes \gamma)^t} \text{Hom}_J(J \otimes_B L, J) \xrightarrow{\alpha} J \otimes_B D_c(B/k)$$

Denotamos $\theta = \alpha \cdot (1 \otimes \gamma)^t \cdot \Gamma: D(J/k) \rightarrow J \otimes_B D_c(B/k)$

Sea $\lambda: A \rightarrow B$ un morfismo de k -álgebras

Se vió en 2.2 que λ induce una sección $\text{jet } j_\lambda: J \rightarrow B$.

Se tiene, por tanto, el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 J & & B \\
 \downarrow d_J & & \downarrow 1 \otimes d_B \\
 D(J/k) & \xrightarrow{\theta} & J \otimes_B D_C(B/k)
 \end{array}$$

Dado que j_λ hace de B un J -módulo, apliquemos a la flecha horizontal el funtor $B \otimes_J : B \otimes_J D(J/k) \rightarrow B \otimes_J J \otimes_B D_C(B/k) = D_C(B/k)$

Proposición 4.3.2: Sea $\hat{d}x_1, \dots, \hat{d}x_n$ una base de $D_C(B/k)$ y $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ la base dual. Si $j \in J$ se tiene que:

$$(1 \otimes \theta)(1 \otimes d_J y) = \sum_{i=1}^n j_\lambda (e(\gamma) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) y) \hat{d}x_i$$

Demostración:

Sea $y \in J$. Entonces $\Gamma(d_J(y)) = d_J(y)^{**}$, forma de $D(J/k)^{**}$ que actúa en k -derivaciones de J , por especialización en y .

En particular, si $d \in L(B/k)$:

$$d_J(y)^{**}(\gamma(d)) = \gamma(d)(y)$$

Luego

$$[(1 \otimes \gamma)^t \cdot \Gamma \cdot d_J(y)] (1 \otimes d) = [(1 \otimes \gamma)^t \cdot d_J(y)^{**}] (1 \otimes d) = \gamma(d)(y).$$

Por otra parte, si $x \in B$ se tiene que

$$\hat{d}x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x}{\partial x_i} \hat{d}x_i$$

Por tanto:

$$\alpha \cdot (1 \otimes \gamma)^t \cdot r \cdot d_J(y) = \sum_{i=1}^n x_i (1 \otimes \hat{d}x_i), \quad \text{donde}$$

$$x_i = \gamma \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \right] (\theta d_J(y)) \in J.$$

Finalmente en $D_c(B/k) = B \otimes_J D_c(B/k)$ será:

$$j_\lambda(x_i) = j_\lambda \left(\gamma \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \theta d_J(y) \right)$$

ie

$$(1 \otimes \theta)(1 \otimes d_J y) = \sum_{i=1}^n j_\lambda \left(\epsilon(\gamma) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) y \right) \hat{d}x_i,$$

como se quería demostrar #

Proposición 4.3.3: j_λ hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} J & \xrightarrow{\quad j_\lambda \quad} & B \\ \downarrow 1 \otimes d_J & & \downarrow d_B \\ B \otimes_J D(J/k) & \xrightarrow{1 \otimes \theta} & D_c(B/k) \end{array}$$

Demostración: Por la proposición 4.3.2 se tiene que:

$$(1 \otimes \theta)(1 \otimes d_J y) = \sum_{i=1}^n j_\lambda \left(\epsilon(\gamma) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) y \right) dx_i$$

Teniendo en cuenta la Nota 1.4, que j_λ es un morfismo de $B \otimes A$ -álgebra y que $1 \otimes d_J$ es una k -derivación, basta ver la conmutatividad para elementos $y \in J$ de las dos siguientes formas:

$$i) y = b \otimes a$$

$$ii) y = \gamma(d_r) \dots \gamma(d_1)(1 \otimes a), \text{ con } d_1, \dots, d_r \in L, a \in A.$$

En el caso $y = b \otimes a$ se tiene que:

$$j_\lambda \left(\epsilon(\gamma) \frac{\partial}{\partial x_i} (b \otimes a) \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} (b \cdot \lambda a) = \frac{\partial b}{\partial x_i} \lambda a + b \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda a.$$

Luego

$$\begin{aligned} (1 \otimes \theta)(1 \otimes d_J y) &= \lambda a \sum_{i=1}^n \frac{\partial b}{\partial x_i} \hat{d}x_i + b \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\lambda a)}{\partial x_i} \hat{d}x_i \\ &= \lambda(a) \cdot \hat{d}b + b \cdot \hat{d}(\lambda a). \end{aligned}$$

Por otra parte: $j_\lambda(b \otimes a) = b \cdot \lambda a$ y se tiene que

$$d \cdot j_\lambda(b \otimes a) = \lambda a db + b \cdot d(\lambda a) \quad \text{de donde la validez en este caso.}$$

Si $y = \gamma(d_r) \dots \gamma(d_1)(1 \otimes a) = \epsilon(\gamma)(d_r \dots d_1)(1 \otimes a)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} j_\lambda \left[\epsilon(\gamma) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \dots \epsilon(\gamma)(d_r \dots d_1)(1 \otimes a) \right] &= \\ &= j_\lambda \left[\epsilon(\gamma) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) d_r \dots d_1 (1 \otimes a) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot d_r \dots d_1 (\lambda a) \end{aligned}$$

De modo que:

$$\begin{aligned} (1 \otimes \theta)(1 \otimes d_J y) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} d_r \dots d_1 \right) (\lambda a) \hat{d}x_i = \hat{d}(d_r \dots d_1 (\lambda a)) = \\ &= \hat{d} j_\lambda (\epsilon(y)(d_r \dots d_1) 1 \otimes a) = \hat{d} \cdot j_\lambda (y) \end{aligned}$$

de donde la proposición #

Corolario 4.3.4: $1 \otimes \theta = d(j_\lambda)$

Demostración: resulta de la unicidad de la flecha $d(j_\lambda)$ haciendo conmutar el diagrama de la proposición 4.3.3. #

4.3.5: Sea $i: A \rightarrow J$ la inclusión natural, i induce el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & J \\ \downarrow 1 \otimes d_A & & \downarrow d_J \\ J \otimes_A D(A/k) & \xrightarrow{d(i)} & D(J/k) \end{array}$$

como parte del siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{i} & J & & B & & \\ \downarrow 1 \otimes d_A & & \downarrow d_J & & \downarrow 1 \otimes \hat{d} & & \\ J \otimes_A D(A/k) & \xrightarrow{d(i)} & D(J/k) & \xrightarrow{\theta} & J \otimes_B D_C(B/k) & \xrightarrow{\pi} & D \rightarrow 0 \end{array}$$

donde $D = \text{coker}(\theta, d(i))$. Sea $\Delta: J \rightarrow D$ la k -derivación

$$\Delta = \pi \cdot \theta \cdot d_J$$

Dado una sucesión $\{i_1, \dots, i_r\}$ de enteros no negativos, definimos los J -módulos $D(i_1, i_2, \dots, i_\ell)$ y los ideales $Z(i_1, i_2, \dots, i_\ell)$ ($\ell = 1, 2, \dots, r$) a partir de $\Delta: J \rightarrow D$, según la definición 2.3.1.1.

Teorema 4.3.6: Sean A, B k -álgebras.

Supongamos que B verifique las condiciones detalladas en 4.3.1. y que $\lambda: A \rightarrow B$ es un morfismo de k -álgebras, $j_\lambda: J \rightarrow B$ la sección jet de λ . Entonces

$$j_\lambda(Z(i_1, \dots, i_r)) = z(i_1, i_2, \dots, i_r)$$

(Los ideales $z(i_1, \dots, i_r)$ fueron definidos en Definición 2.3.2.2.)

Demostración: Por inducción en r ;

CASO $r = 1$:

Consideremos el diagrama antes obtenido:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & A & \xrightarrow{i} & J & & B \\
 & & \downarrow d_A & & \downarrow d_J & & \downarrow 1 \otimes \hat{d}_c \\
 1 \otimes d_A & & & \xrightarrow{d(i)} & & & \\
 J \otimes_A D(A/k) & \xrightarrow{d(i)} & D(J/k) & \xrightarrow{\theta} & J \otimes_B D_c(B/k) & \xrightarrow{\pi} & D \rightarrow 0
 \end{array}$$

Tensorizando la fila de J -módulos por $B \otimes_A$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & B & \xrightarrow{i} & J & \xrightarrow{d_\lambda j_\lambda} & B \\
 & & \downarrow & & \downarrow d & & \downarrow \hat{d} \\
 B \otimes_A D(A/k) & \xrightarrow{d(i)} & B \otimes_A D(J/k) & \xrightarrow{1 \otimes \theta} & D_c(B/k) & \xrightarrow{\pi} & B \otimes_A D \rightarrow 0
 \end{array}$$

Según el corolario 3.4:

$$1 \otimes \theta = d(j_\lambda)$$

Como además $j_\lambda \cdot i = \lambda$, y $d(j_\lambda) \cdot d(i) = d(j_\lambda \cdot i)$, se obtiene que:

$$B \otimes_A D(A/k) \xrightarrow{d(\lambda)} D_C(B/k) \longrightarrow B \otimes_J D \longrightarrow 0,$$

es una sucesión exacta de B-módulos ya que $B \otimes_J \cdot$ es exacto a derecha.

ie: $\text{cober}(d\lambda) = B \otimes_J D$

Pero se vió (2.1.3) que $\text{cober}(d\lambda) = D_C(B/A)$ ya que $D_C(B/k)$ es finitamente generado, de donde:

$$D_C(B/A) = B \otimes_J D$$

De aquí, usando que j_λ es sobreyectiva y la propiedad de los invariantes de Fi Hing (2.2.1) se deduce que:

$$z(i_1) = j_\lambda[Z(i_1)]$$

Etapa inductiva: $r \Rightarrow r+1$

Denotemos $Z(i_1 \dots i_r)$ por Z y $z(i_1 \dots i_r)$ por z . Se tiene que:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & J \\ \downarrow & & \downarrow d_J \\ J \otimes_A D(A/k) & \xrightarrow{d(i)} & D(/k) / [d_J(Z)] \end{array} \quad \begin{array}{ccc} B & & \\ \downarrow 1 \otimes \hat{d} & & \\ J \otimes D_C(B/k) & \xrightarrow{\theta} & D / [\pi \cdot \theta(d_J(Z))] \end{array} \xrightarrow{\pi} D / [\pi \cdot \theta(d_J(Z))]$$

donde $D/[\pi.\theta.d_J(Z)] = D/[\Delta(Z)]$ y recordemos que $[.]$ denota "Submódulo generado por".

Por ser $B \otimes_J$ un funtor exacto a derecha resulta que:

$$B \otimes_J D/[\Delta(Z)] = \frac{B \otimes_J D}{[\pi.(1 \otimes \theta).d_J(Z)]}$$

Pero: i) $B \otimes_J D = D_C(B/A)$, como se vió en el caso $r = 1$.

ii) $1 \otimes \theta = d(j_\lambda)$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \pi.(1 \otimes \theta).d_J(Z) &= \pi.d(j_\lambda).d_J(Z) \\ &= \pi.1 \otimes \hat{d}_B.j_\lambda(Z) \\ &= \Delta'(z), \text{ por hipótesis inductiva.} \end{aligned}$$

(Recordar: $\Delta': B \rightarrow D_C(B/A)$, k der. canónica)

Luego:

$$B \otimes_J D/[\Delta(Z)] = D_C(B/A)/[\Delta'(z)]$$

de donde:

$$j_\lambda(F_{i(r+1)-1}(D/[\Delta Z])) = F_{i(r+1)-1}(D_C(B/A)/[\Delta'(z)])$$

con lo que se asegura la tesis inductiva:

$$j(Z(i_1 \dots i_{r+1})) = z(i_1 \dots i_{r+1})$$

#

SINGULARIDADES GENERICAS:

4.3.7: Definimos $S(i_1, i_2, \dots, i_r) \subset \text{Esq}(J)$ el subesquema siguiente:

i) el soporte de $S(i_1, i_2, \dots, i_r)$ consiste de los primos $p \in \text{Spec}(J)$ tales que:

$$1) p \supset Z(i_1, i_2, \dots, i_r)$$

$$2) p \supset Z(i_1, \dots, i_j + 1), \quad i \leq j \leq r.$$

O sea que se obtiene un subconjunto localmente CERRADO de $\text{Spec}(J)$

ii) La estructura de haz de anillos sobre $S(i_1, i_2, \dots, i_r)$ es la de haz inducida por el anillo $J/Z(i_1, \dots, i_r)$.

Si dado $\lambda: A \rightarrow B$, morfismo de k -álgebras, con B local regular y $D_c(B/k)$ de tipo finito, denotamos por $\tilde{j}_\lambda: \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(J)$ la aplicación deducida de la sección jet $j_\lambda: J \rightarrow B$, el teorema de 4.3.6 asegura que

$$\tilde{j}_\lambda^{-1}(\text{Sop}(S(i_1, \dots, i_r))) = \text{Sop} \{ (\lambda; i_1, i_2, \dots, i_r) \}$$

en

la completa analogía con el resultado de Boardman para el caso de variedades diferenciables.

CAPITULO 5

- 5.1. El operador δ . Sistemas de coordenadas
- 5.2. La cadena $\{\delta^{i-1}J\}$ y los subconjuntos $\{(\lambda; i_1, i_2, \dots)\}$
- 5.3. Un lema de globalización
- 5.4. Preparación global
- 5.5. Nueva demostración del teorema de caracterización de anillos locales regulares

El operador δ es introducido por J.N.MATHER en [3]. En este trabajo figura el lema 5.1.10.

Las definiciones de 5.4 son debidas a Mount y Villamayor, así como el lema fundamental de preparación ("puntual") 5.4.7.

La demostración de éste último puede verse en [7].

El resultado central del Capítulo es el teorema 5.4.13 en donde se demuestra la validez "global" del sistema de coordenadas "puntuales" verificando las condiciones del lema 5.4.7.

5.1. EL OPERADOR δ . SISTEMAS DE COORDENADAS

Sea k un cuerpo de característica cero, algebraicamente cerrado y $A = k[x_1, \dots, x_n]$ el anillo del polinomios en n indeterminadas a coeficientes en k .

Por \mathfrak{m} denotaremos un ideal maximal de A ; por $A_{\mathfrak{m}}$ la localización en el primo \mathfrak{m} y por $\hat{A}_{\mathfrak{m}}$ el completado (separado) de $A_{\mathfrak{m}}$ en la topología \mathfrak{m} -ádida.

Nótese que de la hipótesis sobre k , resulta que $A/\mathfrak{m} = k$. Además se tiene un isomorfismo natural de k -espacios vectoriales

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \cong \mathfrak{m} \cdot A_{\mathfrak{m}} / (\mathfrak{m} \cdot A_{\mathfrak{m}})^2 \quad \text{y} \quad \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = n.$$

Sea $I \subset A$ un ideal. A lo largo de este apartado supondremos \mathfrak{m} un maximal fijo de A . Por una translación en A , puede suponerse $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$. Supongamos que $I \subset \mathfrak{m}$; \bar{I} denotará el k -subespacio vectorial de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, imagen de I por la aplicación canónica $\mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, $x \mapsto \bar{x}$.

Es claro que $\bar{I} = \frac{I + \mathfrak{m}^2}{\mathfrak{m}^2}$, como k espacios vectoriales.

Definición 5.1.1: Sea $I \subset \mathfrak{m}$, ideal

$$\text{Rang}_{\mathfrak{m}}(I) = \dim_k \bar{I}$$

Cuando no haya peligro de confusión escribiremos $\text{Rang}(I)$ en vez de $\text{Rang}_{\mathfrak{m}}(I)$.

Nótese que como la imagen de I en $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \cong \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}/(\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}})^2 \cong \hat{\mathfrak{m}}/\hat{\mathfrak{m}}^2$ es la misma, se tiene que $\text{Rang}_{\mathfrak{m}}(I) = \text{Rang}_{\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}}(I \cdot A_{\mathfrak{m}}) = \text{Rang}_{\hat{\mathfrak{m}}}(I \cdot \hat{A}_{\mathfrak{m}})$, donde $\hat{\mathfrak{m}}$ denota el Radical de $\hat{A}_{\mathfrak{m}}$, que resulta ser $\mathfrak{m} \cdot \hat{A}_{\mathfrak{m}}$.

Definición 5.1.2: Diremos que $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ es un sistema de coordenadas de \mathfrak{m} en A (respectiv. en $A_{\mathfrak{m}}$, en $\hat{A}_{\mathfrak{m}}$) si $\{z_1, z_2, \dots, z_n\} \subset \mathfrak{m}$ (respectiv. $\subset \mathfrak{m} \cdot A_{\mathfrak{m}}, \subset \hat{\mathfrak{m}}$) y $(z_1, z_2, \dots, z_n) = \mathfrak{m} \cdot A_{\mathfrak{m}}$ (respectiv. $= \mathfrak{m} \cdot A_{\mathfrak{m}}, = \hat{\mathfrak{m}}$), donde (z_1, z_2, \dots, z_n) denota el ideal generado por los z_i en el anillo en cuestión.

En vista del lema de Nakayama, la condición $(z_1, \dots, z_n) = \mathfrak{m} A_{\mathfrak{m}}$ (respectiv. $= \hat{\mathfrak{m}}$) es equivalente a que $\{\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n\}$ sea base de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, o bien sean k -linealmente independientes.

Si $L(A/k) = D(A/k)^*$ es el A -módulo de derivaciones de A , el conjunto $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ constituye una base de tal módulo.

Además tal conjunto resulta base de los módulos $L(A_{\mathfrak{m}}/k) = D(A_{\mathfrak{m}}/k)^*$ y $L(\hat{A}_{\mathfrak{m}}/k) = D_{\mathfrak{C}}(\hat{A}_{\mathfrak{m}}/k)^*$. Obviamente esta no es la única base, pero sí la más natural después de fijar el ideal máximo $\mathfrak{m} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Por matriz jacobiana de $I \subset \mathfrak{m}$ entenderemos la matriz (de n -columnas) que tiene por filas $\{\frac{\partial}{\partial x_1} f, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f\}$ con $f \in I$.

Definición 5.1.3: Dado $I \subset \mathfrak{m}$, definimos siguiendo a MATHER [3]:

$\delta_{\mathfrak{m}} I = I + I'$, donde I' es el ideal de A generado por los determinantes de menores de dimensión $(\text{Rang}_{\mathfrak{m}} I + 1)$ de la matriz jacobiana de I .

Si se sobreentiende el ideal máximo \mathfrak{m} , escribiremos δ por $\delta_{\mathfrak{m}}$.

De la definición se desprende que $\delta_{\mathfrak{m}} I \subset \mathfrak{m}$, ya que $\delta_{\mathfrak{m}} I = 0 \pmod{\mathfrak{m}}$.

Por otra parte se tiene que $\delta_{\mathfrak{m}}(I) \cdot A_{\mathfrak{m}} = \delta_{\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}}(I \cdot A_{\mathfrak{m}})$

$$\text{y} \quad \delta_{\mathfrak{m}}(I) \cdot \hat{A}_{\mathfrak{m}} = \delta_{\hat{\mathfrak{m}}}(I \cdot \hat{A}_{\mathfrak{m}}),$$

ya que todos los ideales admiten iguales generadores.

Proposición 5.1.4: Si $I = (f_1, f_2, \dots, f_s)$, $\delta(I) = I + I''$ donde I'' es el ideal generado por los determinantes de menores de dimensión

$(\text{Rang } I + 1)$ de la matriz $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$ $i = 1, 2, \dots, s; j = 1, 2, \dots, n$

Demostración:

Es claro que $I + I'' \subset \delta(I)$

Si $g \in I$, $g = \sum_{i=1}^s a_i f_i$ ($a_i \in A$), $\frac{\partial}{\partial x_j} g = \sum_{i=1}^s a_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + n_j$, $n_j \in I$

Luego las entradas de la matriz jacobiana de I tienen la forma

$\sum_{i=1}^s a_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + n_j$, $n_j \in I$ y por lo tanto sus menores de orden $\text{Rang } I + 1$

estarán en $I + I^n$. Así $\delta(I) \subset I + I^n$.

#

Más adelante se verá que $\delta(I)$ resulta ser un ideal invariante de Fittin de un cierto A -módulo. De modo que, a posteriori, $\delta(I)$ es independiente de la base de derivaciones elegida. (Esto último puede verse por un sencillo cálculo).

$\delta^k I$ denotará $\delta(\delta^{k-1} I)$ y $\delta^0 I = I$

Vemos que la aplicación reiterada del operador δ conduce a una cadena de ideales en A : $I = \delta^0 I \subseteq \delta^1 I \subseteq \dots \subseteq \delta^k I \subseteq m$. Sea $s_i = \text{Rang } \delta^{i-1}(I)$.

Definición 5.1.5:

Diremos que el conjunto ordenado $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ de elementos de m es un buen sistema de coordenadas de m para la cadena $\{\delta^{i-1}(I), i = 1, 2, \dots, k\}$ en A , si $\{y_1, \dots, y_n\}$ es un sistema de coordenadas de m en A y se verifica $\{y_1, y_2, \dots, y_{s_i}\} \subset \delta^{i-1}(I)$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Análoga definición para el caso A_m y \hat{A}_m . No es cierto, en general, que si $a \subset B \subseteq m$ (ideales) entonces $\delta(a) \subset \delta(B)$, como puede verse tomando $a = (x_1, x_2)$, $B = (x_1)$, $m = (x_1, x_2, x_3) \subset k[x_1, x_2, x_3]$ ya que

$$\text{Rang } a = 0 \Rightarrow \delta(a) = (x_1, x_2, x_1 \cdot x_2)$$

$$\text{Rang } B = 1 \Rightarrow \delta(B) = B = (x_1).$$

Sin embargo se tiene la siguiente

Proposición 5.1.6: $a \subset B \subset m$, ideales y $\text{Rang}(a) = \text{Rang}(B)$

Entonces $\delta(a) \subset \delta(B)$

Demostración: Si $a = (a_1, \dots, a_t)$, podemos suponer que $B = (a_1, \dots, a_t, b_1, \dots, b_s)$ ya que $a \subset B$.

Si $(\frac{\partial a_i}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial a_i}{\partial x_n})$ es una fila de la matriz jacobiana de a , tal fila figura también en la matriz jacobiana del ideal B .

Como $\text{Rang } a = \text{Rang } B$, deben considerarse determinantes de menores de igual dimensión, de donde si $\delta(a) = a + a'$ y $\delta(B) = B + B'$ se tiene que $a' \subset B'$ y por lo tanto $\delta(a) \subset \delta(B)$.

(Nótese que se ha hecho uso de 5.1.4., sin mención explícita)

Proposición 5.1.7: Sea $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ un sistema de coordenadas de m (ya sea en A , A_m ó \hat{A}_m). Sea (t_1, t_2, \dots, t_k) una sucesión no decreciente de enteros positivos y sea $J(t_1, t_2, \dots, t_k) = (z_1, \dots, z_{t_1}) + (z_1, \dots, z_{t_2})^2 + \dots + (z_1, \dots, z_{t_k})^k + m^{k+1}$

Entonces:

$$\delta^v [J(t_1, t_2, \dots, t_k)] = J(t_{v+1}, t_{v+2}, \dots, t_k) = (z_1, \dots, z_{t_{v+1}}) + (z_1, \dots, z_{t_{v+2}})^2 + \dots + (z_1, \dots, z_{t_k})^{k-v} + m^{k+1-v}; \quad v = 0, 1, \dots, k-1$$

Demostración: por inducción en k .

CASO $k = 1$: entonces $v = 0$ y el resultado es trivialmente cierto.

Supongamos válida la tesis para valores $\leq k$.

ie: $\delta^v (J(t_1, t_2, \dots, t_i)) = J(t_{v+1}, t_{v+2}, \dots, t_i), \quad \forall v = 0, 1, \dots, i-1$
con $i < k$.

Notemos que además F puede considerarse monomio, ya que $\delta^{v-1}J$ está generado por monomios.

Luego si M es un monomio de $\delta^v J$, M es un monomio de $\delta^{v-1}J$ o bien

$$M = \frac{\partial}{\partial z_j} M_1, M_1 \in \delta^{v-1}J, j > t_v.$$

Si M es un monomio $\in \delta^{v-1}J$, de la forma $M = z_{j_1} z_{j_2} \dots z_{j_\ell}$,

$1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_\ell \leq t_{v+l-1}$ (o sea $M \in (z_1, \dots, z_{t_{v+l-1}})^\ell$) entonces

$M \in (z_1, \dots, z_{t_{v+l-1}})^{\ell-1}$ y por tanto $M \in J(t_{v+1}, \dots, t_k)$.

Si M es de la forma $\frac{\partial}{\partial z_j} M_1$, supongamos $M_1 \in (z_1, \dots, z_{t_{v+l-1}})^\ell$.

Entonces, como $j > t_v$, $\frac{\partial}{\partial z_j} M_1 \in (z_1, \dots, z_{t_{v+l-1}})^{\ell-1}$.

Además es claro que si $M \in m^{k-v+2}$, M y $\frac{\partial M}{\partial z_j} \in m^{k-v+1}$

Luego $\delta^v J(t_1, \dots, t_k) \subset J(t_{v+1}, t_{v+2}, \dots, t_k)$.

En cuanto a la otra inclusión, si $M \in J(t_{v+1}, t_{v+2}, \dots, t_k)$ es un monomio de $(z_1, \dots, z_{t_{v+l}})^\ell$ se tiene que

o bien $M \in (z_1, \dots, z_{t_{v+l}})^{\ell+1}$

o bien existe $M_1 \in (z_1, \dots, z_{t_{v+l}})^{\ell+1}$ tal que $\frac{\partial M_1}{\partial z_j} = M$, para

algún $j > t_v$.

Luego $J(t_{v+1}, \dots, t_k) \subset \delta^v J(t_1, \dots, t_k)$, lo que completa la demostración #

Corolario 5.1.8: Bajo las mismas hipótesis que en Proposición 5.1.7

$$\text{Rang}[\delta^v J(t_1, t_2, \dots, t_k)] = t_{v+1}, \quad v = 0, 1, \dots, (k-1) \quad \#$$

Proposición 5.1.9: Supongamos $I = (f_1 \dots f_s) \subset m$

Sea $\{y_1 \dots y_n\}$ un buen sistema de coordenadas de m para la cadena $\{\delta_m^{i-1} I, i = 1 \dots k\}$ en A . Sea $s_i = \text{Rang}(\delta_m^{i-1} I)$, $i = 1 \dots k$.

Entonces:

$$\delta_m^i I = \delta_m^{i-1} I + \left(\frac{\partial^i}{\partial y_{j_1} \dots \partial y_{j_i}} (f_h) \right); h = 1 \dots s, j_v > s_v \\ v = 1 \dots i$$

Dem: por inducción en i . Notaremos $\delta = \delta_m$, $\text{Rang} = \text{Rang}_m$.

Si $i = 1$ la tesis expresa que $\delta I = I + \left(\frac{\partial}{\partial y_j} (t_h) \right)$, $h = 1 \dots s, j > s_1$

Siendo $s_1 = \text{Rang } I$.

Por hipótesis $\{y_1 \dots y_{s_1}\} \subset I$. Luego la matriz jacobiana de I presenta un bloque del tipo:

$$\begin{array}{c} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{s_1} \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \dots \\ \hline \text{id}_{s_1} \\ \hline \dots \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \frac{\partial}{\partial y_1} \dots \frac{\partial}{\partial y_{s_1}} \dots \frac{\partial}{\partial y_n} \\ \hline \end{array}$$

Por lo tanto, si $f_h \in I \Rightarrow \frac{\partial f_h}{\partial y_j} \in \delta I$

$j > s_1$

Además todo menor de dimensión $(s_1 + 1)$ presenta alguna columna correspondiente a $\frac{\partial}{\partial y_j}$, para algún $j > s_1$. Luego vale la tesis en el caso $i = 1$.

Supongamos que $\delta^{i-1} I = \delta^{i-2} I + \left(\frac{\partial^{i-1}}{\partial y_{j_{i-1}} \dots \partial y_{j_1}} (t_h) \right); h = 1 \dots s, j_v > s_v$

$v = 1 \dots (i-1)$, y demosetremos

$$\delta^i I = \delta^{i-1} I + \left(\frac{\partial^i}{\partial y_{j_1} \dots \partial y_{j_i}} (t_h) \right); h = 1 \dots s; j_v > s_v, v = 1 \dots i$$

Nuevamente por valor $\{y_1 \dots y_{s_i}\} \subset \delta^{i-1} I$, la matriz jacobiana de $\delta^{i-1} I$ presenta un bloque de la forma

	$\frac{\partial}{\partial y_1}$	$\frac{\partial}{\partial y_{s_i}}$	$\frac{\partial}{\partial y_n}$
y_1	1		
\vdots			
\vdots			
y_{s_i}	id_{s_i}	CEROS	
		1	

Luego, si $F \in \delta^{i-1}I \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y_j} \in \delta^i I, j > s_i$

Por hipótesis inductiva, $\frac{\partial^{i-1}}{\partial y_{j_{i-1}} \dots \partial y_{j_1}} (f_h) \in \delta^{i-1}I, h = 1 \dots s$
 $j_v > s_v, v = 1 \dots (i-1)$

Luego $\frac{\partial^i}{\partial y_{j_i} \dots \partial y_{j_1}} (f_h) \in \delta^i I, h = 1 \dots s \quad j_v > s_v, v = 1 \dots i$

Un argumento similar al hecho en el caso $i = 1$, muestra que cualquier determinante de un menor de dimensión (s_i+1) estará en el ideal

$\delta^{i-1}I + \left(\frac{\partial^i}{\partial y_{j_i} \dots \partial y_{j_1}} (f_h), h = 1 \dots s \quad j_v > s_v, v = 1 \dots i \right)$ de donde

la proposición.

#

Lema 5.1.10:

Sea I ideal en A , m ideal maximal, $I \subset m$.

Sea $s_i = \text{Rang}(\delta^{i-1}I), i = 1, 2, \dots, k$ donde $\delta = \delta_m$ y $\text{Rang} = \text{Rang}_m$.

Sea $\{y_1, \dots, y_n\}$ un buen sistema de coordenadas de m en A , para la cadena $(\delta^{i-1}I)$. Entonces:

a) $I \subset (y_1, \dots, y_{s_1}) + (y_1, \dots, y_{s_2})^2 + \dots + (y_1, \dots, y_{s_k})^k + m^{k+1}$

b) Si $\{z_1, \dots, z_n\}$ es otro sistema de coordenadas de m en A y vale una inclusión del tipo $I \subset (z_1, \dots, z_{t_1}) + (z_1, \dots, z_{t_2})^2 + \dots$

$\dots + (z_1, \dots, z_{t_k})^k + m^{k+1}$ entonces $(s_1, s_2, \dots, s_k) \leq (t_1, t_2, \dots, t_k)$

en el orden lexicográfico.

Notemos que el lema es igualmente válido en A_m y \hat{A}_m .

Demostración: por inducción en el índice k .

$k = 1$

Supondremos $s_1 = \text{Rang}(\delta^0 I) = \text{Rang } I$ y $\{y_1, \dots, y_n\}$ un buen sistema de coordenadas de m en A , con $\{y_1, \dots, y_{s_1}\} \subset I$. Además $\{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{s_1}\}$ es base de \bar{I} .

Sea $f \in I$; $\bar{f} = \sum_{i=1}^{s_1} k_i \bar{y}_i$, $k_i \in k = A/m$

Entonces $f - \sum_{i=1}^{s_1} k_i y_i \in I \cap m^2$. Luego $f = \sum_{i=1}^{s_1} k_i y_i + \mu_2$, $\mu_2 \in m^2$

ie: $I \subset (y_1, \dots, y_{s_1}) + m^2$, que es la tesis a) para $k = 1$

Supongamos ahora que valga

$I \subset (z_1, \dots, z_{t_1}) + m^2$, donde $\{z_1, \dots, z_n\}$ es un sistema de coordena

das de m en A .

Entonces: $\text{Rang } I \leq \text{Rang}[(z_1, \dots, z_{t_1}) + m^2] = \text{Rang}(z_1, \dots, z_{t_1}) = t_1$

ie $s_1 \leq t_1$, de donde b) \square

ETAPA INDUCTIVA: Supongamos a) y b) válidas para $i = 1, \dots, k-1$ y probemos las proposiciones en el caso $i = k$.

Por hipótesis inductiva $I \subset (y_1, \dots, y_{s_1}) + (y_1, \dots, y_{s_2})^2 + \dots + (y_1, \dots, y_{s_{k-1}})^{k-1} + m^k$

Sea $f \in I$. Es claro que existe $g \in (y_1, \dots, y_{s_1}) + (y_1, \dots, y_{s_2})^2 + \dots + (y_1, \dots, y_{s_{k-1}})^{k-1}$ de modo tal que $f-g \in m^k$. Escribamos

$f-g = F_k + \mu_{k+1}$, con F_k componente de grado k y $\mu_{k+1} \in m^{k+1}$. Basta ver entonces que $F_k \in (y_1, \dots, y_{s_k})^k$

Supongamos lo contrario, ie $F_k \notin (y_1, \dots, y_{s_k})^k$.

Entonces entre los monomios de F_k debe existir alguno (con coeficiente $\lambda \neq 0$) de la forma $\lambda \cdot y_{j_1}^{j_1} \cdot y_{j_2}^{j_2} \dots y_{j_k}^{j_k}$, $j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k$ y $j_i > s_i$, $i = 1, 2, \dots, k$

Consideremos el operador $D = \frac{\partial^{k-1}}{\partial y_{j_1} \partial y_{j_2} \dots \partial y_{j_{k-1}}}$. Por proposición 5.1.9,

$Df \in \delta^{k-1} I$ ya que $j_1 > s_1, i = 1, 2, \dots, k-1$

Luego la matriz jacobiana de $\delta^{k-1} I$ tendrá un bloque del siguiente tipo:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\partial}{\partial y_1} \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial y_{s_k}} \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial y_{j_k}} \\
 \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 \begin{array}{c} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{s_k} \\ Df \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ \text{CEROS} \\ \vdots \\ 1 \\ \dots \dots \dots (.) \end{array} \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

donde $(.) = \lambda + \mu$, $\lambda \neq 0$ y $\mu \in m$
 Nótese que el bloque identidad aparece pues por hipótesis $\{y_1, \dots, y_n\}$ es un buen sistema de coordenadas de m para la cadena $\{\delta^{i-1} I, i = 1, \dots, k\}$, o sea que

en particular $\{y_1, \dots, y_{s_k}\} \subset \delta^{k-1} I$.

Pero entonces el Rango de esta matriz (mod. m) resultaría estrictamente mayor que s_k , contra la hipótesis $\text{Rang}(\delta^{k-1} I) = s_k$.

Luego $F_k \in (y_1 \dots y_{s_k})^k$ y por tanto $f = g + F_k + \mu_{k+1}$, de donde la Tesis a).

Supongamos ahora que $\{z_1 \dots z_n\}$ es otro sistema de coordenadas de m en A y que se verifica:

$$I \subset (z_1 \dots z_{t_1}) + (z_1 \dots z_{t_2})^2 + \dots + (z_1 \dots z_{t_k})^k + m^{k+1}$$

Por hipótesis inductiva $(s_1 \dots s_{k-1}) \leq (t_1 \dots t_{k-1})$. (*)

Supongamos $(s_1 \dots s_k) > (t_1 \dots t_k)$

Entonces existe un índice $v/s_j = t_j$, $j = 1 \dots v-1$ y $s_v > t_v$.

Es claro que, valiéndose (*), debe ser necesariamente $v = k$. O sea que se presenta la situación: $s_i = t_i$, $i = 1, 2, \dots, k-1$ y $s_k > t_k$. Aplicando las proposiciones 5.1.6, 5.1.7 y el corolario 5.1.8: $\delta^{k-1}I \subset (z_1 \dots z_{t_k}) + m^2$ de donde $\text{Rang}(\delta^{k-1}I) = s_k \leq \text{Rang}[(z_1 \dots z_{t_k}) + m^2] = t_k$ resultando una contradicción.

Luego $(s_1 \dots s_k) \leq (t_1 \dots t_k)$, lo que completa la demostración del lema #

Corolario 5.1.11: Bajo las mismas hipótesis del lema 5.1.10 supongamos además que la cadena $\{\delta^{i-1}I\}$ se estaciona en el paso k -ésimo, ie $\delta^v I = \delta^{k-1}I$, $v \geq k$.

Entonces

$$I \subset (y_1 \dots y_{s_1}) + \dots + (y_1 \dots y_{s_k})^k$$

Dem: es claro que $\delta^v I = \delta^{k-1}I \Rightarrow s_v = s_k$, $v \geq k$ (*)

Por otra parte, si J_v denota el ideal $(y_1 \dots y_{s_1}) + \dots + (y_1 \dots y_{s_v})^v$ se tiene que $J_v \subset J_{v+1}$ y además $I \subset \bigcup_{v \geq 1} J_v$. Por ser A noetheriano, deducimos $I \subset J_v$ para algún índice v suficientemente grande. Podemos suponer $v \geq k$; en vista de (*) se tiene que

$$J_v = (y_1 \dots y_{s_1}) + \dots + (y_1 \dots y_{s_k})^k + (y_1 \dots y_{s_k})^{k+1} + \dots + (y_1 \dots y_{s_k})^v = J_k, \text{ de donde el corolario #}$$

5.2. La cadena $\{\delta^{i-1}I\}$ y los subconjuntos $\sum (\lambda; i_1, i_2, \dots)$

Como en el párrafo anterior $A = k[x_1, x_2, \dots, x_n]$

Sea $I \subset A$, ideal. Supongamos $I = (f_1 \dots f_h)$

Sea $\lambda: A \rightarrow A/I$ el morfismo canónico.

Consideremos la sucesión de A/I -módulos inducida por λ :

$$I/I^2 \xrightarrow{\alpha} A/I \otimes_A D(A/k) \xrightarrow{d\lambda} D([A/I]/k) \rightarrow 0 \quad [+]$$

Por teorema 2.1.3.3. la sucesión [+] resulta exacta en el caso en que A sea local. De modo que tal sucesión es exacta para toda localización en m maximal de A , $m \supset I$ (ie en todo $m \times I$, de A/I)

Luego resulta EXACTA globalmente, ie. como sucesión de A/I -módulos.

Recordemos que: $\alpha(\bar{f}) = 1 \otimes d_A f$, $\bar{f} \in I/I^2$ y $f \in I$ tq $f \rightarrow \bar{f}$ y donde $d_A: A \rightarrow D(A/k)$ es la k -derivac. canónica.

Asimismo: $d\lambda(1 \otimes df) = d(\lambda f)$, donde $d: A/I \rightarrow D([A/I]/k)$ es la k -derivación canónica.

Es bien conocido que $D(A/k)$ resulta un A -módulo libre de rango n y admite a $\{d_A x_1 \dots d_A x_n\}$ por base. (ver [5] ó [8])

Además, $\text{Im}(\alpha)$ es el A/I -submódulo de $A/I \otimes_A D(A/k)$, generado por $1 \otimes d_A f_i$, $i = 1 \dots h$. En efecto:

Si $\bar{g} \in I/I^2$, y $g = \sum_{i=1}^h a_i f_i \in I$ es tal que $g \rightarrow \bar{g}$ ($a_i \in A$), se

tiene

$$\begin{aligned} \alpha(\bar{g}) &= 1 \otimes d_A \left(\sum a_i f_i \right) = \sum 1 \otimes d_A (a_i f_i) = \\ &= \sum 1 \otimes f_i d_A a_i + \sum 1 \otimes a_i d_A f_i \\ &= \sum \lambda(a_i) (1 \otimes d_A f_i), \text{ ya que} \end{aligned}$$

$$1 \otimes f_i d_A a_i = 0 \text{ en } A/I \otimes_A D(A/k).$$

La matriz de relaciones de $D([A/I]/k)$ resulta ser entonces: $\lambda \left(\frac{df_i}{dx_j} \right)$

ya que:

$$1 \otimes df_i = \sum_{j=1}^n \lambda \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) (1 \otimes dx_j), \quad i = 1 \dots h.$$

O sea: resulta ser la matriz jacobiana de I , mod I .

Sea m un ideal maximal de A , $m \supset I$.

Localizando $[+]$ en m , se tiene la siguiente sucesión exacta:

$$I/I^2 \rightarrow A_m/I \otimes_{A_m} D(A_m/k) \xrightarrow{d\lambda} D(A_m/I/k) \rightarrow 0 \quad [\bullet]$$

donde, por abuso de notación se escribe I en vez de $I \cdot A_m$.

Dado que k es el cuerpo residual de A_m y A_m/I , al tensorizar $[\bullet]$ por $k \otimes_{A_m/I}$, se obtiene la siguiente sucesión exacta de k -espacios vectoriales:

les:

$$k \otimes_{A_m/I} I/I^2 \xrightarrow{1 \otimes \alpha} k \otimes_{A_m/I} [A_m/I \otimes_{A_m} D(A_m/k)] \rightarrow k \otimes_{A_m/I} D([A_m/I]/k) \rightarrow 0$$

Recordemos que $k \otimes_{A_m} D(A_m/k) \cong \frac{m}{m^2}$, según se demuestra en [5]

De modo que la sucesión tensorizada resulta:

$$k \otimes_{A_m/I} I/I^2 \xrightarrow{1 \otimes \alpha} \frac{m}{m^2} \rightarrow k \otimes_{A_m/I} D([A_m/I]/k) \rightarrow 0$$

Nótese que $I_m(1 \otimes \alpha)$ es \bar{I} = imagen de I por el morfismo canónico $m \rightarrow m/m^2$.

Esto muestra que \bar{I} y $k \otimes_{A_m/I} D([A_m/I]/k)$ tienen dimensiones complementarios, ie:

$$\text{Rang}_m \bar{I} + \text{Rang}_m (D([A_m/I]/k)) = n \quad (*)$$

Por lo visto en 2.3 si $F_j \subset A/I$ son los ideales invariantes de Fitting del A/I -módulo $D([A/I]/k)$ y

$$i_1 = \max\{j: F_j \subset m/I\} + 1, \text{ entonces}$$

$$i_1 = \text{Rang}_m (D([A/I]/k)) = \text{Rango del } A_m\text{-módulo } A_m \otimes D([A/I]/k)$$

De modo que de (*) resulta:

$$s_1 + i_1 = n \quad (**)$$

Proposición 5.2.1:

$$\lambda^{-1}(F_{i_1-1}) = \delta_m I$$

Dem: está claro que $I \subset \lambda^{-1}(F_{i_1-1})$

Basta ver entonces que coinciden los demás generadores de los ideales

$$\delta_m I = I + I' \text{ y } \lambda^{-1}(F_{i_1-2})$$

Por definición, F_{i_1-1} está generado por los determinantes de menores de orden $(n - i_1 + 1)$ de la matriz $\lambda\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ $\begin{matrix} i = 1 \dots h \\ j = 1 \dots n \end{matrix}$, ya que hemos

visto que ésta era la matriz de relaciones del A/I -módulo $D([A/I]/k)$

Ahora bien: i) Levantar (por λ) generadores de F_{i_1-1}

y ii) Considerar los determinantes de menores de orden (s_1+1) de la matriz jacobiana de I (tomando como base de deriv. a la dual de $\{d_A x_i\}$)

SON LA MISMA COSA, en vista de (**) y el hecho de ser λ morfismo de anillos.

De aquí la proposición #

Este resultado muestra que $\delta_m I$ no depende del sistema de coordenadas usado en el cálculo de la matriz jacobiana de I , ya que resulta ser, esencialmente un ideal invariante de Fitting.

Aplicando lo hecho a la situación $A \xrightarrow{\lambda} A/\delta_m I$, se obtiene:

$$1) \text{Rang}_m(\delta_m I) + \text{Rang}_m D([A/\delta_m I]/k) = n = s_2 + i_2$$

$$2) \delta_m^2 I = \lambda^{-1}(F_{i_2-1}), \text{ donde } F_{i_2-1} \text{ es el } (i_2-1)\text{-invariante de}$$

Fitting del $A/\delta_m I$ -módulo $D([A/\delta_m I]/k)$

Iterando el procedimiento se obtienen las fórmulas dadas en la siguiente:

Proposición 5.2.2: Sea $I \subset m$, y supongamos $m \in \sum(\lambda; i_1, i_2, \dots, i_v, \dots)$

(ver definición 2.3.2.2)

Entonces:

$$1) \text{Rang}_m(\delta_m^{v-1} I) + \text{Rang}_m(D([A/\delta_m^{v-1} I]/k)) = s_v + i_v = n$$

$$2) \delta_m^v I = \lambda^{-1}(F_{i_v-1}), \text{ donde } F_{i_v-1} \text{ el } (i_v-1)\text{-invariante de Fitting}$$

del $A/\delta_m^{v-1} I$ -módulo $D([A/\delta_m^{v-1} I]/k)$ y $\lambda: A \rightarrow A/\delta_m^{v-1} I$ es el morfismo canónico.

Nótese que en vista de la proposición 5.2.2. y la definición de los conjunto $\sum(\lambda; i_1, i_2, \dots)$, si m y $m' \in \sum(\lambda; i_1, i_2, \dots, i_v, \dots)$ entonces

$$\delta_m I = \delta_{m'} I \text{ y más generalmente } \delta_m^k(I) = \delta_{m'}^k(I).$$

Se tiene entonces el siguiente

Lema 5.2.3:

Sea $I \subset m$, $m \in \sum(\lambda; i_1, i_2, \dots, i_v, \dots)$. Entonces la cadena jacobiana $\{\delta_m^{i-1} I; i = 1, 2, \dots, k\}$ está en todo maximal $m' \in \sum(\lambda; i_1, i_2, \dots, i_v, \dots)$.

5.3: Un lema de Globalización

Lema 3.1: Sea $I \subset m$ y supongamos que $m \in \sum (\lambda; i_1, i_2, \dots, i_v, \dots)$

Sea $\{y_1, \dots, y_n\}$ un buen sistema de coordenadas de m en A para la cadena $\{\delta^{i-1}I, i = 1, \dots, k\}$ (Suponemos que tal cadena se estaciona en $\delta^{k-1}I$).

Entonces:

Existe un abierto V de $\sum (\lambda; i_1, i_2, \dots, i_v, \dots)$ conteniendo m tal que $\{y_1, \dots, y_{s_k}\}$ es parte de un buen sistema de coordenadas de m' en A , para todo $m' \in V$.

Demostración: por Lema 2.3 $\{y_1, \dots, y_k\} \subset m', \forall m' \in \sum (\lambda; i_1, i_2, \dots, i_v, \dots)$

Es claro que $\{y_1, y_2, \dots, y_{s_k}\}$ será parte de un sistema de coordenadas de m' si y sólo si el conjunto $\{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{s_k}\}$ es linealmente independiente en m'/m'^2

Si $P' = (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n) \in k^n$ es el punto que representa al maximal m' , se tiene que las coordenadas de \bar{y}_i en m'/m'^2 serán

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_1}(P'), \dots, \frac{\partial y_i}{\partial x_n}(P') \right),$$

según la base $x'_i = (x_i - \alpha'_i)$.

Luego la independencia equivale a la no anulación del determinante de algún menor de orden S_k de tal matriz, condición que determina un abierto. Finalmente, por el lema 2.3, $\delta_m I = \delta_{m'} I$ y por tanto: si $\{y_1, \dots, y_{s_k}\}$ es parte de un sistema de coordenadas de m en A , será parte de un buen sistema de coordenadas de m' en A , para la cadena $\{\delta^{i-1}I\}$. #

5.4. PREPARACION GLOBAL

En este apartado supondremos que $P_k(n) = k[[x_1, x_2, \dots, x_n]]$, con k de característica cero algebraicamente cerrado, $r_k(n) = \text{Radical}(P_k(n)) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \subset r_k(n)$, ideal generado por f_1, f_2, \dots, f_h .

Introduzcamos algunas definiciones y proposiciones siguiendo [7]. Denotaremos $P_k(n/m)$ el anillo $P_k(n)/r_k(n)^{m+1}$ y por $r_k(n/m)$ el radical de $P_k(n/m)$.

El morfismo canónico $P_k(n/m) \rightarrow P_k(n/m')$, para $m' < m$, será denotado por $\rho(m', m)$ y el correspondiente a $P_k(n) \rightarrow P_k(n/m)$ por $\rho(m)$.

Definición 5.4.1:

Si $z_1, z_2, \dots, z_n \in P_k(n/m)$ son tales que $P_k(n/m) = k[z_1, \dots, z_n]$ (la k -subálgebra generada por los z_i) entonces el conjunto ordenado $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ será llamado un sistema de coordenadas para $P_k(n/m)$. Si z_1, \dots, z_r son elementos de $P_k(n/m)$ tales que $\{z_1, \dots, z_r, z_{r+1}, \dots, z_n\}$ es un sistema de coordenadas para $P_k(n/m)$, entonces $\{z_1, \dots, z_r\}$ será llamado un sistema de coordenadas parcial para $P_k(n/m)$.

Definición 5.4.2:

Supongamos que $I \subset r_k(n/m)$ es un ideal de $P_k(n/m)$

Definiremos por inducción el concepto de $\varphi^*-\lambda$ par $(z_1 \dots z_{\lambda(m)}; \lambda(1) \dots \lambda(m))$

Para I , donde $z_1, \dots, z_{\lambda(m)}$ es un sistema de coordenadas parcial para $P_k(n/m)$ y $0 \leq \lambda(1) \leq \dots \leq \lambda(m)$ es una sucesión de enteros.

La sucesión $\lambda(1), \dots, \lambda(m)$ será llamada la λ -sucesión de I .

La definición será por inducción en m .

Caso $m = 1$ Si $I = (0)$, entonces un par $(\phi; 0)$, donde ϕ es el sistema de coordenadas parcial vacío y 0 es la sucesión $\lambda(1) = 0$, es el único $\varphi^*-\lambda$ par para I .

Si $I \neq (0)$, entonces un par $(z_1, \dots, z_j; j)$, donde $z_1 \dots z_j$ es una k -base para I y $j = \lambda(1)$ es la λ -sucesión, es un posible $\varphi^*-\lambda$ par para I .

Caso $m > 1$: Supongamos que el concepto de $\varphi^*-\lambda$ par haya sido definido para todo ideal $I \subset r_k(n/m-1)$. Si $I = (0)$, entonces el único $\varphi^*-\lambda$ par es $(\phi; (0 \dots 0))$ donde ϕ es el sistema de coordenadas parcial vacío y $\lambda(1) = 0 = \dots = 0 = \lambda(m)$.

Si $I \neq (0)$, entonces un par $(z_1, \dots, z_{\lambda(m)}; \lambda(1), \dots, \lambda(m))$ ($n \geq \lambda(m)$) se dice un $\varphi^*-\lambda$ par para I si:

i) el par $(\rho(m-1, m)z_1, \dots, \rho(m-1, m)z_{\lambda(m-1)}; \lambda(1), \dots, \lambda(m-1))$ es un $\varphi^*-\lambda$ par para $\rho(m-1, m)I$.

ii) $I \subset (z_1, \dots, z_{\lambda(1)}) + (z_1, \dots, z_{\lambda(2)})^2 + \dots + (z_1, \dots, z_{\lambda(m)})^m$

iii) $\lambda(m)$ es el menor entero entre los pares $(z_1, \dots, z_{\lambda(m)}; \lambda(1), \dots, \lambda(m))$ satisfaciendo las condiciones i) y ii)

Teorema 5.43:

Si $I \subset r_k(n/m)$ es un ideal de $P_k(n/m)$, existe un $\varphi^*-\lambda$ par para I .
Más aún:

Si $(z_1, \dots, z_{\lambda(m)}; \lambda(1), \dots, \lambda(m))$ y $(w_1, \dots, w_{\sigma(m)}; \sigma(1), \dots, \sigma(m))$ son dos $\varphi^*-\lambda$ pares para I , entonces $\lambda(i) = \sigma(i)$, para cada $1 \leq i \leq m$.

Demostración: [7]

En vista del teorema 5.4.3: se introduce la siguiente definición:

Definición 5.4.4:

Si $I \subset r_k(n/m)$ es un ideal de $P_k(n/m)$, y si $(x_1, \dots, x_{\lambda(m)}; \lambda(1), \dots, \lambda(m))$ es un $\varphi^*-\lambda$ par para I , entonces $x_1, \dots, x_{\lambda(m)}$ será llamado un φ^* -sistema de coordenadas para I y los enteros $(n-\lambda(1), \dots, n-\lambda(m)) = (\varphi(1), \dots, \varphi(m))$ será la sucesión de φ -invariantes de I .

Denotaremos por $\theta(1)$ el primer entero tal que $\lambda(\theta(1)) \neq 0$, y por $\theta(j)$ el primer entero tal que $\lambda(\theta(j)) > \lambda(\theta(j-1))$.

Nota: Si σ es un k -automorfismo de $P_k(n/m)$, entonces es claro que $\sigma(I)$ e I tienen la misma λ -sucesión. Más aún, si $x_1, \dots, x_{\lambda\theta(t)}$ es un

φ^* -sistema de coordenadas para I , entonces $\sigma x_1, \dots, \sigma x_{\lambda\theta}(t)$ es un φ^* -sistema para σI .

Definición 5.4.5:

Supongamos ahora que $I \subset r_k(n)$ es un ideal de $P_k(n) = k[x_1, \dots, x_n]$. Diremos que I tiene φ -sucesión $(\varphi(1), \dots, \varphi(m), \dots)$ si para cada $m \geq 1$, la sucesión $(\varphi(1), \dots, \varphi(m))$ es la φ -sucesión para $\rho(m)I \subset P_k(n/m)$. Análogamente para la λ -sucesión de I : Diremos que $I \subset P_k(n)$ tiene λ -sucesión $\lambda(1), \dots, \lambda(m), \dots$ si $\rho(m)I$ tiene λ -sucesión $(\lambda(1), \dots, \lambda(m))$, para cada $m \geq 1$. Es claro que cada ideal contenido en el radical de $P_k(n)$ tiene determinada, unívocamente una sucesión. Notemos también que la φ -sucesión de $I \subset r_k(n)$, es decreciente. Dado que $\varphi(i)$ están acotados inferiormente por cero, la φ -sucesión de I debe ser constante para valores suficientemente grandes de i . Queda entonces claro que, para valores grandes de m , la sucesión de saltos (valores de θ) para $\rho(m)I$ son todos iguales.

Definición 5.4.6: Supongamos $I \subset r_k(n)$, ideal de $P_k(n)$.

Si para $m \geq M$ $\varphi(m) = \varphi(m+1) = \dots$, llamaremos sucesión de saltos de I , a la sucesión de saltos de $\rho(M)I$ en $P_k(n/M)$

Un sistema de coordenadas parcial $z_1, \dots, z_{\lambda(M)}$ de $P_k(n)$ será llamado un φ^* -sistema (de coordenadas) para I si $\rho(m)z_1, \dots, \rho(m)z_{\lambda(m)}$ es un φ^* -sistema (de coordenadas) para $\rho(m)I$, para cada $m \geq M$.

En [7] se demuestra el siguiente lema:

Lema 5.4.7: Supongamos que $I \subset r_k(n)^2$ es un ideal en $P_k(n)$ con λ -sucesión $\lambda(1), \dots, \lambda(m), \dots$ y números de salto $\theta(1), \dots, \theta(t)$. Entonces:

Existe un φ^* -sistema $x_1 \dots x_\mu(t)$, (donde $\mu = \lambda \circ \theta$) para I que es parte de un sistema de coordenadas $x_1 \dots x_n$ de $P_k(n)$ tal que las siguientes condiciones son satisfechas para todo $1 \leq c \leq t$.

(D_c-1): existen generadores f_1, \dots, f_s de I tales que

$f_i = \sum_{d \geq 2} F_{id}$, donde F_{id} es un polinomio homogéneo de grado d en x_1, \dots, x_n .

(D_c-2): para cada número de salto $\theta(b)$, escribamos $F_{i\theta(b)} = F_{i\theta(b)}^* + F_{i\theta(b)}^{**}$ donde $F_{i\theta(b)}^* \in (x_1, \dots, x_{\mu(b)})^{\theta(b)}$ y $F_{i\theta(b)}^{**}$ no contiene monomios del ideal $(x_1, \dots, x_{\mu(1)})^{\theta(1)} + \dots + (x_1, \dots, x_{\mu(b-1)})^{\theta(b-1)}$

Si $b \leq c$, existe un conjunto de índices de filas

$S_b = \{(\theta(b)(j), \alpha(b)(j)), j = \mu(b-1)+1, \dots, \mu(b); 1 \leq \alpha(b)(j) \leq S\}$

tal que la submatriz de la matriz de polarización de las formas

$F_{i\theta(b)}^*, \dots, F_{s\theta(b)}^*$ con columnas indicadas por $x_{\mu(b-1)+1}, \dots, x_{\mu(b)}$ y con filas indicadas por el conjunto S_b , es inversible.

(D_c-3): Si M es un monomio de grado $\theta(d)$ para $1 \leq d \leq t$ y M aparece (con coeficiente no nulo) en $F_{i\theta(d)}$ y M es divisible por $m_{\theta(b)(j)}$, para algún $b \leq c$, entonces $M \in (x_1, \dots, x_{\mu(1)})^{\theta(1)} + \dots + (x_1, \dots, x_{\mu(d-1)})^{\theta(d-1)}$ (24)

En vista de este resultado deramos la siguiente:

Definición 5.4.8:

Supongamos que $I \subset r_k(n)^2$ es un ideal de $P_k(n)$.

Si I tiene λ -sucesión $\lambda(1), \dots, \lambda(m)$... y números de salto $\theta(1), \dots, \theta(t)$, entonces un φ^* -sistema para I y un conjunto de generadores f_1, \dots, f_s de I que satisfagan (D_c-1), (D_c-2) y (D_c-3), para todo $1 \leq c \leq t$, será llamado un φ^* -sistema preparado para I y un conjunto de generadores preparados de I con respecto a ése sistema

Los elementos de S_i ($i = 1, \dots, t$) serán llamados filas distinguidas para los generadores preparados y los conjuntos S_1, \dots, S_t serán llamados conjuntos de índices distinguidos para el φ^* -sistema preparado y los generadores preparados f_1, \dots, f_s .

La idea de la demostración del Lema de preparación es la siguiente: Se parte de un sistema de coordenadas $\{y_1, \dots, y_n\}$ de $P_k(n)$ y un sistema f_1, \dots, f_s de generadores de I , escritos en término de las variables y_i .

A partir de la matriz de polarización de las formas de grado mínimo de cada f_j , se obtiene el primer conjunto de índices distinguidos. Se pasa entonces a "la limpieza" de múltiplos de los monomios distinguidos $m_{\theta(1)}(j)$ en cada componente $f_{\alpha_1}^*(j)\theta(d)$, para $d = 2, \dots, t$, $j = 1, \dots, \mu(1)$, realizada por medio de automorfismos σ de $P_k(n)$, que resultan la identidad sobre las variables y_j , $j > \mu(1)$, obteniéndose que en $\sigma(I)$ valen las condiciones D_1^{-1} , D_2^{-2} , D_1^{-3} , respecto del sistema $\{y_1, \dots, y_n\}$.

Se itera este proceso y, en un número finito de pasos, se obtiene en definitiva un automorfismo σ de $P_k(n)$ (de una forma particular) tal que quedan satisfechas las condiciones D_c^{-1} , D_c^{-2} y D_c^{-3} $1 \leq c \leq t$, para el ideal $\sigma(I)$, los generadores $\sigma(f_1), \dots, \sigma(f_s)$ y el sistema de coordenadas $\{y_1, \dots, y_n\}$. El φ^* -sistema buscado resulta ser entonces, $\sigma^{-1}(y_1, \dots, \sigma^{-1}(y_{\mu(t)}))$.

Proposición 5.4.9 Sea $I \subset \Gamma_k(n)$ ideal de $P_k(n)$ con λ -sucesión $\lambda(1), \dots, \lambda(m) \dots$ y números de salto $\theta(1) \dots \theta(t)$.

Entonces: $\text{rang } \delta^{l-1} I = \lambda(\theta)$.

Demostración: Sea $\{z_1, \dots, z_{\mu(t)}\}$ un ϕ^* -sistema para I . Por definición se tiene que $I \subset (z_1, \dots, z_{\lambda(1)}) + (z_1 \dots z_{\lambda(2)})^2 + \dots + (z_1, \dots, z_{\lambda(m)})^m + \dots$

Aclaremos que si $\lambda(\theta) = 0$, $\{z_1, \dots, z_{\lambda(1)}\} = \emptyset$, sistema parcial vacío.

Sea $J = (z_1, \dots, z_{\lambda(1)}) + (z_1, \dots, z_{\lambda(2)})^2 + \dots + (z_1 \dots z_{\lambda(m)})^m + \dots$

Por corolario 5.1.8 se tiene que $\text{rang } \delta^{l-1} J = \lambda(1)$.

Luego basta ver que $\text{rang } \delta^{l-1} I = \text{rang } \delta^{l-1} J$, $l = 1, 2, \dots$

Consideremos las siguientes proposiciones:

$$(*) \begin{cases} 1_i : \delta^{l-1} I \subset \delta^{l-1} J \\ 2_i : \text{rang } \delta^{l-1} I = \text{rang } \delta^{l-1} J . \end{cases}$$

Como $\delta^0 a = a$, para todo ideal a , 1_1 es válida.

Recordemos que $\text{rang } I = \dim_k \bar{I}$, donde $\bar{I} = \text{Im}(I \rightarrow m/m^2)$.

Por definición 5.4.2, caso $m = 1$, $\lambda(1) = \dim_k \rho(1)I$ donde $\phi(1) : P_k(n) \rightarrow P_k(n)/\Gamma_k(n)^2$.

Luego $\bar{I} = \rho(1)I$ y por tanto 2_1 es válida.

Supongamos (*) válido para $i = 1, 2, \dots, e$.

Notemos que $(1_i) + (2_e) \Rightarrow (1_{e+1})$, en virtud de la Proposición 5.1.6.

Por lo tanto: $s_{i+1} = \text{rang } \delta^i I \leq \text{rang } \delta^e J = \lambda(1+1)$.

Por Lema 5.1.10 existe un sistema de coordenadas $\{y_1, \dots, y_{s_{i+1}}, \dots, y_n\}$ (cualquier buen sistema de coordenadas de $r_k(n)$ para la cadena $I \subset \dots \subset \delta^e I$) tal que :

$$I \subset (y_1, \dots, y_{s_1}) + (y_1, \dots, y_{s_2})^2 + \dots + (y_1, \dots, y_{s_1})^1 + (y_1, \dots, y_{1+1})^{1+1} + r_k(n)^{1+2}$$

Dado que suponemos $s_i = \lambda(i)$, $i = 1, \dots, \infty$ no puede ocurrir que $s_{i+1} < \lambda(1+1)$, pues se contradiría el hecho de ser $\{\lambda(m)\}$ la λ -sucesión de I . Luego $s_{i+1} = \lambda(1+1)$, que completa la demostración de la proposición. #

Corolario 5.4.10: Bajo las mismas hipótesis de la proposición 5.4.9, sea l un entero $\theta(a) \leq l < \theta(a+1)$. (Ponemos $\theta(0) = 1$, $\mu(0) = 0$, $\theta(t') = \infty$, si $t' > t$).

Entonces:

$$\text{rang } \delta^{l-1}I = \mu(a). \text{ En particular: } \text{rang } \delta^{\theta(a)-1}I = \mu(a).$$

Demostración: basta recordar que $\mu = \lambda \cdot \theta$ y la definición de la función de salto θ . #

Como consecuencia de la proposición 5.4.9 vemos que si $\{y_1, \dots, y_n\}$ es un buen sistema de coordenadas de $r_k(n)$ para la cadena $\{\delta^{i-1}I : i \geq 1\}$ entonces $\{y_1, \dots, y_{\mu(t)}\}$ es un ϕ^* -sistema para I .

Por otra parte si I tiene números de salto $\theta(1) \dots \theta(t)$, la cadena $\{\delta^{i-1}I : i \geq 1\}$ se estaciona en el ideal $\delta^{\theta(t)-1}I$.

El siguiente lema expresa la relación que existe entre un posible buen sistema de coordenadas de $r_k(n)$ para la cadena $\{\delta^{i-1}I, i \geq 1\}$ y un posible ϕ^* -sistema que prepara I y generadores f_1, \dots, f_s de I .

Lema 5.4.11 Sea $I = (f_1, \dots, f_s) \subset r_k(n)$ ideal de $P_k(n)$ con λ -sucesión $\{\lambda(i), i \geq 1\}$ y números de salto $\theta(1), \dots, \theta(t)$.

Sea $\{y_1, \dots, y_n\}$ un buen sistema de coordenadas de $r_k(n)$ para la cadena $\{\delta^{i-1}I, i \geq 1\}$.

Entonces existen $\mu(t)$ polinomios $P_1 \dots P_{\mu(t)}$ (a coeficientes en k) dependiendo de $\mu(t)$ variables y un ϕ^* -sistema $\{x_1, \dots, x_{\mu(t)}\}$ que prepara I y los generadores $f_1 \dots f_s$, tal que

$$(*) \quad y_j = P_j(x_1 \dots x_{\mu(t)}) \quad , \quad j = 1, \dots, \mu(t).$$

Corolario 5.4.12

$$\{x_1 \dots x_{\mu(t)}\} \subset \delta^{\theta(t)-1} I .$$

Demostración del corolario 5.4.12 Basta observar que

$$(i) \quad \{y_1 \dots y_{\mu(t)}\} \subset \delta^{\theta(t)-1} I$$

(ii) La matriz jacobiana del sistema (*) es inversible en $P_k(n)$ y por tanto es posible obtener, a partir de (*), las x_j como series en $y_1 \dots y_{\mu(t)}$

(iii) Todo ideal de $P_k(n)$ es cerrado por límites, ya que $P_k(n)$ es un anillo de Zariski. #

Demostración del lema 5.4.11 Por ser $\{y_1 \dots y_{\mu(t)}\}$ un ϕ^* -sistema para I se tiene que:

$$I \subset (y_1 \dots y_{\mu(t)})^{\theta(1)} + \dots + (y_1 \dots y_{\mu(t)})^{\theta(t)} .$$

Luego si $f_i = \sum_{d \geq 1} f_{id}$ $i = 1, \dots, s$, con f_{id} componente de grado d de f_i , se deduce que para $1 \leq i \leq s$:

$$\begin{aligned} f_{i\theta(1)} \dots, f_{i\theta(2)-1} &\in (y_1 \dots y_{\mu(1)})^{\theta(1)} \\ f_{i\theta(2)} \dots, f_{i\theta(3)-1} &\in (y_1 \dots y_{\mu(1)})^{\theta(1)} + (y_1 \dots y_{\mu(2)})^{\theta(2)} \\ &\vdots \\ f_{i\theta(t-1)} \dots, f_{i\theta(t)-1} &\in (y_1 \dots y_{\mu(1)})^{\theta(1)} + \dots + (y_1 \dots y_{\mu(t-1)})^{\theta(t-1)} \\ f_{id} &\in (y_1 \dots y_{\mu(1)})^{\theta(1)} + \dots + (y_1 \dots y_{\mu(t)})^{\theta(t)}, \end{aligned}$$

$d \geq \theta(t).$

por razones de grado y el hecho que I esté contenido en un ideal (no sólo homogéneo) generado por monomios.

sin

Pondremos $f_{ia} = f_{ia}^* + f_{ia}^{**}$ donde

(i) si $\theta(b) < a < \theta(b+1)$ (ie: a no es un número de salto) entonces

$$f_{ia}^* = 0 \text{ y } f_{ia}^{**} = f_{ia}$$

(ii) si $a = \theta(b)$, entonces $f_{ia}^{**} \in (y_1 \dots y_{\mu(b)})^{\theta(b)} + \dots + (y_1 \dots y_{\mu(b-1)})^{\theta(b-1)}$ y $f_{ia}^* \in (y_1 \dots y_{\mu(b)})^{\theta(b)}$ donde f_{ia}^* consiste de la combinación lineal de todos los monomios que figuran en f_{ia} y que no están en $(y_1 \dots y_{\mu(b-1)})^{\theta(b-1)} + \dots + (y_1 \dots y_{\mu(b-1)})^{\theta(b-1)}$.

De modo que en particular:

En f_{ia}^* figuran sólo las variables $y_1 \dots y_{\mu(b)}$.

De la demostración del lema de preparación, aplicado a esta situación, puede concluirse que los monomios que intervienen en el conjunto de índices S_b son monomios (de grado $\theta(b) - 1$) en $y_1 \dots y_{\mu(b)}$, $1 \leq b \leq t$.

Si en $f_{\alpha_b(j)\theta(b)}^*$ aparecía un monomio M múltiplo de $m_{\theta(c)}(j)$ (suponiendo $(m_{\theta(c)}(j), \alpha_c(j)) \in S_c$ y $c < b$ de la forma $M = m_{\theta(c)}(j) \cdot Q$, Q resulta monomio en las variables $y_{\mu(b-1)+1}, \dots, y_{\mu(b)}$ ya que M era monomio de $f_{\alpha_b(j)\theta(b)}^*$ y si en Q apareciese una variable de índice $\leq \mu(b-1)$ entonces $M \in (y_1 \dots y_{\mu(c)})^{\theta(c)}$, cosa absurda por definición de $f_{\alpha_b(j)\theta(b)}^*$.

La limpieza de tal monomio se realiza considerando un automorfismo σ de $P_k(n)$ de la forma

$$\begin{cases} \sigma(y_i) = y_i + \alpha_i Q, & \mu(c-1) < i \leq \mu(c), \alpha_i \in k, \text{ convenientemente elegido.} \\ \sigma(y_i) = y_i, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Luego de un número finito de pasos se obtiene un automorfismo de σ de $P_k(n)$, composición de todos los usados en el proceso de elimina-

ción de múltiplos de los distinguidos, de modo tal que:

σI queda preparado, así como los generadores $\sigma(f_i)$, $i = 1, \dots, s$, respecto del sistema $y_1 \dots y_{\mu(t)}$ y se verifica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(y_j) = y_j + \Pi_j(y_{\mu(b)+1}, \dots, y_{\mu(t)}) \quad , \text{ si } \mu(b) < j \leq \\ \leq \mu(b+1) \text{ para } b = 0, \\ 1, \dots, + -1 \\ \Pi_j \text{ polinomios.} \\ \sigma(y_j) = y_j \quad , j \geq \mu(t) \end{array} \right.$$

En la demostración del lema 5.4.7 puede verse que entonces, poniendo $x_j = \sigma^{-1} y_j$, $j = 1 \dots \mu(t)$ I queda preparado, así como $f_1 \dots f_s$, respecto del ϕ^* -sistema $\{x_1 \dots x_{\mu(t)}\}$. O sea

$$y_j = P(x_1, \dots, x_{\mu(t)}) .$$

como se quería demostrar. #

Estamos en condiciones de pasar al resultado central de esta sección.

Teorema 5.4.13 Sea I un ideal de A , generado por $f_1 \dots f_s$.

Supongamos un maximal de A , $m \in \Sigma(\lambda; i_1, i_2, \dots)$.

Entonces existe un entorno abierto v de m en $\Sigma(\lambda; i_1, i_2, \dots)$ y un ϕ^* -sistema $\{x_1 \dots x_{\mu(t)}\}$ para $I \cdot \hat{A}_m$ que prepara $I \hat{A}_m$ y los generadores $f_1 \dots f_s$, tal que $\{x_1 \dots x_{\mu(t)}\}$ es un ϕ^* -sistema para $I \hat{A}_{m'}$, que prepara $I \hat{A}_{m'}$ y los generadores $f_1 \dots f_s$, para todo $m' \in v$.

Demostración

Sea $\{y_1, \dots, y_n\}$ un buen sistema de coordenadas de m en A para la cadena $\{\delta_m^{i-1} I\}$.

Por el Lema 5.3.1, existe un abierto v (entorno de m) donde $\{y_1, \dots, y_{\mu(t)}\}$ es parte de un buen sistema de coordenadas de m' en A , $m' \in v$.

Por el Lema 5.2.3, $\{y_1, \dots, y_{\mu(t)}\} \subset m'$, $m' \in \Sigma(\lambda; i_1, i_2, \dots)$.

Por el Lema 5.4.11, existe un ϕ^* -sistema $\{x_1, \dots, x_{\mu(t)}\}$ en \hat{A}_m que prepara I y los generadores f_1, \dots, f_s , y $\mu(t)$ polinomios P_j tales que:

$$(*) \quad y_j = P_j(x_1, \dots, x_{\mu(t)}), \quad j = 1, \dots, \mu(t).$$

Sea $j(X_1, \dots, X_{\mu(t)}) = \text{jacobiano del sistema } (*)$; $j(X_1, \dots, X_{\mu(t)}) \in A$.

Sea $m' \in [(\lambda; i_1, i_2, \dots)]$ tal que $j(X_1, \dots, X_{\mu(t)}) \notin m'$.

Dado que la preparación de I en m' (i.e. en $\hat{I}\hat{A}_{m'}$) puede llevarse a cabo de modo similar al hecho en Lema 5.4.11 para m , partiendo en ambos casos del sistema parcial $\{y_1, \dots, y_{\mu(t)}\}$, veamos que el proceso de limpieza en m' es idéntico al de m .

Para esto basta observar los siguientes hechos:

(i) $f_{i\theta(b)}^*$ tiene la misma escritura, $m' \in [(\lambda; i_1, i_2, \dots)]$, pues depende solamente de las variables $y_1, \dots, y_{\mu(t)}$ (que como se vio, figuran en el buen sistema elegido en m').

(ii) Si bien respecto de $\{y_1, \dots, y_{\mu(t)}, y'_{\mu(t)+1}, \dots, y'_n\}$, sistema de coordenadas de \hat{A}_m , variarán los demás componentes, seguirán siendo válidas las mismas relaciones que valían en \hat{A}_m , ya que en el sistema adoptado figuran las variables $y_1, \dots, y_{\mu(t)}$. Más explícitamente:

si $f_i = \sum G_{ia}$, G_{ia} polinomios homogéneos de grado d en $\{y_1, \dots, y_{\mu(t)}, y'_{\mu(t)+1}, \dots, y'_n\}$

se tiene que: a) $G_{i\theta(b)}^* = F_{i\theta(b)}^*$, $b=1, 2, \dots, t$;

$$b) \quad G_{i\theta(b)}^{**} \in (y_1, \dots, y_{\mu(t)})^{\theta(1)} + \dots + (y_1, \dots, y_{\mu(b-1)})^{\theta(b-1)}$$

$$c) \quad G_{ia} \in (y_1, \dots, y_{\mu(1)})^{\theta(1)} + \dots + (y_1, \dots, y_{\mu(b-1)})^{\theta(b-1)}$$

si $\theta(b) < a < \theta(b+1)$.

Luego: las matrices de polarización
 filas distinguidas
 y automorfismos del proceso en m' ,
 pueden ser elegidos de modo idéntico al hecho en m .

En particular se obtiene un sistema $\{x'_1, \dots, x'_{\mu(t)}\}$, preparatorio de $I.\hat{A}_{m'}$, y de los generadores f_1, \dots, f_s , y los mismos polinomios P_j tales que:

$$y_j = P_j(x'_1, \dots, x'_{\mu(t)}), \quad j = 1, \dots, \mu(t).$$

Luego $x_i = x'_i$, $i = 1, 2, \dots, \mu(t)$, y esto es válido en todo maximal m' de V tal que $j(X_1, \dots, X_{\mu(t)}) \notin m'$, condición que determina el abierto buscado. #

5.5: Como aplicación del operador δ pasamos a dar una nueva demostración del siguiente resultado de NAKAI [8] que caracteriza ciertos anillos locales regulares.

Sea R un anillo local, noetheriano con $\dim_{\text{krull}} R = d$

Sea $m = \text{Rad}(R)$ y supongamos que $R/m = k \subset R$ con $\text{carac}(k) = 0$

Teorema 5.5.1: Asumamos que el módulo diferencial $D(R/k)$ es de tipo finito como R -módulo. Entonces

$D(R/k)$ es libre de Rango d si y sólo si R es regular.

La demostración resultará de las siguientes proposiciones

5.5.2: Si \hat{R} denota la completación m -ádica de R se tiene que R regular de dimensión d si y sólo si \hat{R} regular de dimensión d .

Dem: es bien conocida. Ver por ejemplo Introduction to Commutative Algebra, Prop. 11.24 Atiyah-Mc.Donald.

#

5.5.3: Si $D_c(R/k)$ denota el R -módulo diferencial m -ádico

$D(R/k) / \bigcap_{r=1}^{\infty} m^r D(R/k)$ vale que:

- i) $D(R/k) = D_c(R/k)$, si $D(R/k)$ es de tipo finito
- ii) $D_c(\hat{R}/k) = \hat{R} \otimes_R D_c(R/k)$

Dem: i) es clara pues R es un anillo de Zariski

ii) Ver [9]

#

5.5.4.: Siempre bajo la hipótesis $D(R/k)$ de tipo finito:

$$D(R/k) \text{ libre de Rango } d \Leftrightarrow D_c(\hat{R}/k) \text{ libre de Rango } d$$

como R -módulo como \hat{R} -módulo

Dem: (\Rightarrow) es clara de 5.5.3 ii)

Recíprocamente: recordemos que \hat{R} es un R -módulo fielmente playo.

Sea $d' = \text{Rango}(D(R/k)) = \dim_K(k \otimes D(R/k))$

Por el lema de Nakayama, toda familia minimal de generadores de $D(R/k)$ tiene exactamente d' elementos.

Como $D_c(\hat{R}/k) = \hat{R} \otimes_R D(R/k)$ se sigue que

$$k \otimes_{\hat{R}} D_c(\hat{R}/k) = k \otimes_{\hat{R}} (\hat{R} \otimes_R D(R/k)) = (k \otimes_{\hat{R}} \hat{R}) \otimes_R D(R/k) = k \otimes_R D(R/k)$$

de donde $\text{Rang}_{\hat{R}} D_c(\hat{R}/k) = \text{Rang}_R D(R/k)$.

Luego $d = d'$. ie ambos módulos tienen igual rango.

Existe por lo tanto una sucesión exacta:

$$(*) \quad 0 \rightarrow K \rightarrow R^d \rightarrow D(R/k) \rightarrow 0, \quad \text{con } R^d = R\text{-módulo libre de Rango } d.$$

Tensorizando $(*)$ por $\hat{R} \otimes_R$ y usando que \hat{R} es playo se obtiene la sucesión exacta de R -módulos:

$$0 \rightarrow \hat{R} \otimes_R K \rightarrow \hat{R}^d \rightarrow \hat{R} \otimes_R D(R/k) \rightarrow 0$$

ie

$$0 \rightarrow \hat{R} \otimes_R K \rightarrow \hat{R}^d \rightarrow D_c(\hat{R}/k) \rightarrow 0$$

Por ser $D_c(\hat{R}/k)$ libre de Rango d se sigue que $\hat{R} \otimes_R K = 0$

Luego $K = 0$ por ser \hat{R} fielmente playo, de donde la Tesis

#

5.5.5: Por un teorema debido a Cohen, \hat{R} es imagen de un anillo local regular de la forma $k[[x_1, \dots, x_n]]$

ie se tiene una sucesión exacta

$$0 \rightarrow I \rightarrow k[[x_1, \dots, x_n]] \rightarrow \hat{R} \rightarrow 0$$

Afirmamos la siguiente equivalencia:

$$R \text{ regular y } \dim R = s \Leftrightarrow I = \delta I \text{ y } \text{Rang}(I) = n-s$$

Dem: (\Rightarrow) Por el teorema 26, Pag. 303 [10] existe una familia de parámetros regulares y_1, \dots, y_n de $k[[x_1, \dots, x_n]]$ tal que $I = (y_1, \dots, y_{n-s})$

Es claro que de aquí $\text{Rang} I = n-s$

Por otra parte resulta $I = \delta I$ ya que I admite $n-s$ generadores

(\Leftarrow) Supongamos $I = \delta I$ con $\text{Rang}(I) = n-s$

Según el corolario 5.1.11, $I = (y_1, \dots, y_{n-s})$ con y_1, \dots, y_{n-s} una familia parcial de parámetros regulares. Invocando el Teorema 26. Pag. 303 [10] resulta \hat{R} regular.

#

Nota: aquí juega un papel esencial el hecho que la característica de k sea nula, ya que por el corolario 5.1.11, puede verse que

$$\left. \begin{array}{l} I = \delta I \\ \text{Rango } I = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow I = 0 \quad (*)$$

(*) Deja de valer si $\text{carac}(k) = p > 0$, como puede verse en el siguiente ejemplo:

$$I = (x_1^p, \dots, x_n^p) \subset k[[x_1, \dots, x_n]] \quad (\text{carac}(k) = p > 0)$$

Ent. $I = \delta I$, $I \subset (x_1, \dots, x_n)^2$ y sin embargo $I \neq 0$

5.5.6: Supongamos que M sea un R -módulo de tipo finito, (R local)
Entonces

$$M \text{ es libre de Rango } d \Leftrightarrow \begin{cases} F_j(M) = 0, & 0 \leq j \leq d-1 \\ F_j(M) = R, & j \geq d \end{cases}$$

Este teorema se debe a K. Mount [4].

Dem: (\Rightarrow) Sigue de la definición de invariantes de Fitting ya que basta tener la sucesión exacta $0 \rightarrow R^d \rightarrow M \rightarrow 0$

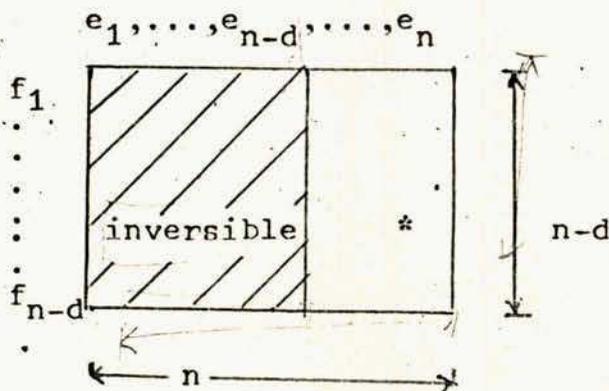
Por lo convenido se tiene además que $F_j(M) = R, j \geq d$

(\Leftarrow) Sea $0 \rightarrow K \xrightarrow{\alpha} R^n \rightarrow M \rightarrow 0$ exacta

Si (a_{ij}) es la matriz de coeficientes de elementos de K escritos en base e_1, \dots, e_n de R^n , la hipótesis $F_j(M) = 0, j = 0, 1, \dots, d-1$

$F_j(M) = R, j \geq d$ expresa que existe un menor de orden $(n-d)$ de determinante inversible y que todo otro menor de dimensión $\geq n-d+1$ posee determinante nulo. Nótese que de aquí, $\text{Rang}(K) = n-d$.

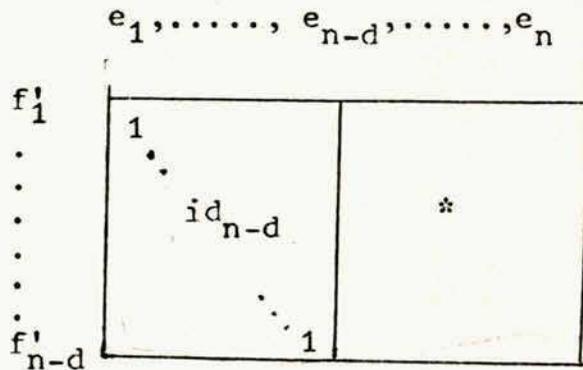
Reordenando filas y columnas podemos suponer que $f_1, \dots, f_{n-d} \in K$ son tales que si $f_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$, el $\det(a_{ij}), 1 \leq i, j \leq n-d$, es una unidad en R . O sea que la matriz de relaciones presenta el siguiente aspecto:



Dado que $\text{mod } m$ (ie en $k \otimes_R K$) $\{f_1, \dots, f_{n-d}\}$ es una base de K/mK , tal conjunto es un sistema minimal de generadores de K .

Sea $(b_{ij}) \in R^{(n-d) \times (n-d)}$ la matriz inversa de la $(a_{ij}), 1 \leq i, j \leq n-d$ (Rayada en la figura)

Si ponemos $f'_i = \sum_{j=1}^{n-d} b_{ij} f_j$, $\{f'_1, \dots, f'_{n-d}\}$ es otro sistema minimal de generadores y la matriz de relaciones adopta la forma:



Definimos la aplicación R -lineal: $\beta: R^n \rightarrow K$, $\beta(e_i) = f'_i, i = 1, \dots, n-d$
 $\beta(e_i) = 0, i \geq n-d+1$

Puede verificarse que $\beta \circ \alpha = \text{id}_k$ de donde la sucesión
 $0 \rightarrow k \xrightarrow{\alpha} R^n \rightarrow M \rightarrow 0$ se parte. M resulta sumando directo de R^n , luego proyectivo.
 Al ser R local M es libre.
 Finalmente $\text{Rang}(M) = n - (n-d) = d$. #

5.5.7: Recordemos que por prop. 5.2.1 se tiene que si

$$0 \rightarrow I \rightarrow K[[x_1, \dots, x_n]] \xrightarrow{\lambda} R \rightarrow 0 \text{ es exacta}$$

entonces, si $\text{Rang}(D_c(\hat{R}/k)) = d$ vale la siguiente fórmula

$$\lambda^{-1}(F_{d-1}(D_c(\hat{R}/k))) = \delta I$$

De 5.5.2 se tiene además que

$$\text{rang}(D_c(\hat{R}/k)) = d \Rightarrow \text{Rang}(I) = n-d$$

5.5.8: Estamos en condiciones de demostrar el teorema 5.1.1

(\Rightarrow) Supongamos $D(R/k)$ en R -módulo libre de Rango d .

Por 5.5.4, $D_c(\hat{R}/k)$ es un \hat{R} -módulo libre de Rango d .

Por 5.5.6, $F_{d-1}(D_c(\hat{R}/k)) = 0$, $F_d(D_c(\hat{R}/k)) = R$

Por 5.5.7, $\lambda^{-1}(F_{d-1}(D_c(\hat{R}/k))) = \delta I$, pero como $F_{d-1}(D_c(\hat{R}/k)) = 0$
se tiene que $\lambda^{-1}(0) = I$ ie $I \cong \delta I$ donde además $\text{Rang } I = n-d$

Por 5.5.5, \hat{R} es regular de dimensión d

Por 5.5.2, R es regular de dimensión d

(\Leftarrow) Supongamos R regular de dimensión d .

Por 5.5.2, \hat{R} es regular y $\dim \hat{R} = d$

Por 5.5.5, $I = \delta I$ y $\text{Rang } I = n-d$, de donde $\text{Rang}(D_c(\hat{R}/k)) = d$

Como λ es suryectiva:

$$\lambda(\delta I) = F_{d-1}(D_c(\hat{R}/k))$$

Pero $I = \delta I$ implica $F_{d-1}(D_c(\hat{R}/k)) = 0$

Ahora: $\text{Rang } D_c(\hat{R}/k) = d$ implica $F_d(D_c(\hat{R}/k)) = R$

Luego por 5.5.6, $D_c(\hat{R}/k)$ es libre de Rango d y finalmente $D(R/k)$ resulta libre de Rango d , por 5.5.4

Carlos I. Lubi

BIBLIOGRAFIA

- [1] J.M.BOARDMAN, Singularities of differentiable maps.
Publ. Math. I.H.E.S. 33 (1967), 21-57
- [2] FITTING, Die Determinantenideale eines Moduls, Jahresbericht
der Deutschen Math. Vereinigung, X, VI (1936)
- [3] J.N.MATHER, On Thom-Boardman Singularities
Dynamical Systems, ed. M.M.Peixoto, Academic Press,
New York 1973, pp 233-247
- [4] K.MOUNT, Some remarks on Fitting's invariants,
Pacific Journal of Math. 13 (1963), 1353-1357
- [5] K.MOUNT y O.E.VILLAMAYOR, Taylor Series and higher derivations
Publicación del Depto. de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas U.B.A.
Argentina
- [6] K.MOUNT y O.E.VILLAMAYOR, An algebraic construction of the general
singularities of Boardman-Thom.
Publ. Math I.H.E.S. 43 (1974), 205-244
- [7] K.MOUNT y O.E.VILLAMAYOR, Special Frames for Thom-Boardman
singularities. No publicado.
- [8] Y.NAKAI, On the theory of differentials in commutative rings.
J. Math. Soc. of Japan, 13 (1961), 63-84
- [9] Y.NAKAI-S.SUZUKI, On m -adic differentials
J.Sci. Hiroshima Univ. Ser. A Vol. 24, Nº 3
(1960)
- [10] O.ZARISKI y P.SAMUEL, Commutative Algebra, Vol II.