



# Un modelo de turbulencia de Alfvén en plasmas

Ponce Dawson, Silvina

1988

Tesis Doctoral

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Buenos Aires

[www.digital.bl.fcen.uba.ar](http://www.digital.bl.fcen.uba.ar)

Contacto: [digital@bl.fcen.uba.ar](mailto:digital@bl.fcen.uba.ar)

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Fuente / source:

Biblioteca Digital de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad de Buenos Aires

*Registro n° 2120*

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

UN MODELO DE TURBULENCIA DE ALFVEN EN PLASMAS

Autora: Silvina Ponce Dawson\*

Director: Constantino Ferro Fontán

Lugar de Trabajo: Instituto de Astronomía y Física del Espacio  
(\*Becaria del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y  
Técnicas)

*2120*  
*Ej. 2.*

Tesis presentada para optar al título de Doctora en Ciencias Físicas

## INDICE

	PAGINA
RESUMEN.....	1
I. INTRODUCCION.....	2
II. METODO DE RESOLUCION NUMERICA DE LA ECUACION NO LINEAL DERIVADA DE SCHRODINGER.....	52
III. FORMACION DE SOLITONES DE LA ECUACION NO LINEAL DERIVADA DE SCHRODINGER.....	61
IV. SIMETRIAS DE LA ECUACION NO LINEAL DERIVADA DE SCHRODINGER Y ESTABILIDAD DE LOS SOLITONES.....	70
V. ESTADISTICA DE SOLITONES DE ALFVEN. CALCULO DE LA DISTRIBUCION DE SOLITONES COMO FUNCION DE LAS CONDICIONES INICIALES.....	91
VI. ESTADISTICA DE SOLITONES DE ALFVEN. APLICACION A OBSERVACIONES DEL VIENTO SOLAR.....	113
VII. CONCLUSIONES.....	138
REFERENCIAS.....	144
AGRADECIMIENTOS.....	149

## RESUMEN

Se presenta un modelo de turbulencia de Alfvén basado en una estadística de solitones de la ecuación no lineal derivada de Schrödinger (DNLS). Se desarrolla un código de resolución numérica de dicha ecuación y se lo prueba para distintas condiciones iniciales. Se obtiene un criterio para determinar bajo qué condiciones iniciales tendrá lugar la formación de solitones, que resulta una versión integrada de uno obtenido previamente en la literatura (Mjølhus, 1976) para distinguir entre casos modulacionalmente estables e inestables. Se encuentra una nueva constante de movimiento para la ecuación DNLS que permite escribirla como una ecuación de Hamilton en forma canónica y se demuestra la relación existente entre las simetrías de la ecuación y el análisis de estabilidad de los solitones. El trabajo numérico sugiere la estabilidad de forma de los mismos. Se elabora un método que permite calcular, dada la condición inicial, el tren de solitones en que decaerá dicha condición al evolucionar de acuerdo a la ecuación DNLS. Se obtiene una expresión analítica para el número de solitones y otra para la distribución de uno de los dos parámetros que definen cada solitón como funcional de las condiciones iniciales. Ambas concuerdan muy bien con resultados analíticos y numéricos previos. Se comparan dos tratamientos de la estadística de solitones con observaciones del viento solar y se obtienen en ambos casos resultados cualitativamente correctos. Se discute luego cuál es el que mejor ajusta las observaciones.

## I. INTRODUCCION

Un plasma es un medio aproximadamente continuo y no lineal, en el que se asientan fenómenos característicos de los fluidos y otros que son privativos de las interacciones de las partículas cargadas que lo integran con el campo electromagnético. Posee un rico espectro de excitaciones colectivas longitudinales y transversales. Cada modo de oscilación lineal que se propaga en un plasma está caracterizado por una relación de dispersión, es decir, una relación  $\omega(k)$  entre la frecuencia de oscilación  $\omega$  y el número de onda  $k$ . En presencia de un campo magnético pueden propagarse, entre otros modos, las llamadas ondas de Alfvén. Son éstas ondas lentas, poco dispersivas, de frecuencia menor que la de ciclotrón-ion  $\omega_{ci} = eB_0/mic$  que se propagan a la velocidad de Alfvén  $v_A = B_0 / (4\pi n m_i)^{1/2}$ . Puede pensarse a estas ondas como perturbaciones de las líneas de campo magnético que viajan a lo largo de las mismas, comportándose dichas líneas como cuerdas tensas.

Una gran parte de los plasmas naturales está bajo la acción de campos magnéticos. Es de esperar entonces, que las ondas de Alfvén jueguen un rol importante en estos casos. Entre otros ejemplos, se ha usado la interacción entre ondas de Alfvén y partículas para determinar el límite superior de la velocidad de propagación de los rayos cósmicos. Se ha aplicado esta interacción para explicar la ausencia de pérdidas radiativas en fuentes de radio extragalácticas (Spangler, 1985). Se han identificado también ondas

de Alfvén en el viento solar (Belcher y Davis, 1971) y se supone que juegan un papel preponderante en la estructura turbulenta del plasma allí presente. Pero para poder describir las fluctuaciones observadas en los plasmas cósmicos, es necesario desarrollar un modelo claro de evolución no lineal de las ondas de Alfvén (Sakai y Sonnerup, 1983) y, en particular, un modelo de turbulencia con preponderancia de dichas ondas.

El estado del plasma se dice turbulento cuando el espectro de las oscilaciones presentes es de banda ancha tanto en frecuencia como en número de onda. Comparando el contenido de energía en las oscilaciones  $W_k$  con la energía térmica  $W_T$ , se clasifica a los estados turbulentos en débil ( $W_k/W_T \ll 1$ ) y fuertemente ( $W_k/W_T > 1$ ) turbulentos. La turbulencia suele caracterizarse también de acuerdo al tipo de oscilaciones que predominan en el plasma (turbulencia de Langmuir, turbulencia de Alfvén, etc.).

La turbulencia es un fenómeno eminentemente no lineal, caracterizado por interacciones entre las oscilaciones entre sí y con las partículas del medio, lo que permite una transferencia de energía entre distintas regiones del espectro. Esto hace que el estudio de los plasmas turbulentos sea sumamente complicado. Por esta razón, a lo largo del tiempo, se intentaron distintas aproximaciones que permitieran describir determinados fenómenos. En primer lugar se desarrolló la teoría cuasilineal para describir la turbulencia débil (Kadomtsev, 1979) donde el espectro de energía se supone formado por la superposición de ondas planas con fases al

azar. Para poder aplicar este método es necesario que la relación entre los tiempos característicos de disipación ( $\tau_{dis}$ ), de transferencia de energía entre los modos ( $\tau_{transf}$ ) y de la oscilación ( $\tau_{osc}$ ) sea  $\tau_{dis} \gg \tau_{transf} \gg \tau_{osc}$  (Thornhill y ter Haar, 1978). De ese modo tiene sentido el concepto de contenido de energía en un modo. Según esta descripción es posible asociar un modelo de cuasipartícula a las oscilaciones (plasmones). El plasma entonces se describe como un gas de partículas y plasmones que interactúan entre sí. En la aproximación más baja, la ecuación de evolución para las partículas es una ecuación tipo Fokker-Planck donde el coeficiente de difusión es debido a la interacción onda-partícula (Tsytovich, 1977). Este modelo es útil para describir interacciones entre pocas ondas (a medida que se aumenta el número las ecuaciones se vuelven terriblemente complicadas), el efecto Cherenkov, la formación de mesetas en las funciones de distribución de las partículas como mecanismo de saturación del amortiguamiento de Landau negativo, etc. Sin embargo, en el caso de la turbulencia de Langmuir (Goldman, 1984), predice una acumulación de las oscilaciones en la región de longitudes de onda largas del espectro (condensado de Langmuir). Como es sabido, los mecanismos de disipación de las oscilaciones son efectivos en las regiones de longitud de onda corta. Por lo tanto, esa energía acumulada en ciertos modos no puede ser removida y transferida a las partículas. El plasma se vuelve pronto fuertemente turbulento y la aproximación cuasilineal deja de valer. Por otro lado, una situación espacialmente homogénea es modulacionalmente inestable (ter Haar y Tsytovich, 1981). Supongamos que la densidad disminuye levemente en

un punto del espacio. Disminuirá entonces también la frecuencia del plasma electrónico  $\omega_{pe} = (4\pi n_e e^2 / m_e)^{1/2}$ . Las ondas de Langmuir quedarán atrapadas en la región, ya que no pueden escapar a zonas donde  $\omega_{pe}$  es mayor. De este modo aumenta el campo eléctrico y la presión que éste ejerce sobre las partículas (proporcional a  $|E|^2$ ). Las partículas son expulsadas de la región disminuyendo aún más la densidad. Se ve que esta situación es inestable. Pero este tipo de interacción coherente entre modos no puede ser descrito en el marco de la teoría cuasilineal (Thornhill y ter Haar, 1978).

Fue por eso que en el año 1972 Zakharov (Zakharov, 1972) dedujo a partir de las ecuaciones magnetohidrodinámicas un par de ecuaciones simplificadas que permitieran describir una situación en la que coexistieran oscilaciones rápidas (ondas de Langmuir, vinculadas a perturbaciones de alta frecuencia en la densidad electrónica) y oscilaciones iónico-acústicas (oscilaciones de baja frecuencia de iones y electrones como un todo). Simulaciones numéricas de estas ecuaciones muestran que, en el caso unidimensional, la inestabilidad modulativa satura dando lugar a la formación de ondas solitarias de amplitud finita llamadas, por abuso de lenguaje, solitones. Estas ondas, que viajan sin deformarse durante tiempos largos, son componentes importantes de los estados fuertemente turbulentos. En particular Kingsep, Rudakov y Sudan propusieron un modelo de turbulencia fuerte como un ensamble de solitones no interactuantes (Kingsep et al 1973). Estos entes no lineales pueden servir como los componentes básicos para una



descripción estadística de la turbulencia y, por su carácter no lineal, pueden dar una aproximación mejor que una superposición de modos propios de oscilación. Pero, ¿por qué se forman los solitones?, ¿son estables? Esta es una serie de preguntas que surge naturalmente. Pues bien, pudo demostrarse el por qué de la aparición de los solitones en casos particulares: aquéllos descritos por ecuaciones que son integrables por el método de la transformada espectral inversa (TEI) (Ablowitz et al, 1974). En particular, las ecuaciones de Zakharov unidimensionales pueden reducirse en el caso subsónico o estático a la ecuación no lineal de Schrödinger que es integrable por dicho método (Zakharov y Shabat, 1972). Por otro lado, la estabilidad en el caso unidimensional también fue demostrada (Gibbons et al. 1977, Laedke y Spatschek, 1980).

El objetivo de la tesis es avanzar en la descripción de la turbulencia de Alfvén. La situación que acabamos de describir para la turbulencia de Langmuir nos muestra que es conveniente derivar, bajo ciertas aproximaciones, una ecuación o conjunto de ecuaciones simplificadas a partir de las más generales ecuaciones magnetohidrodinámicas que permita describir la situación de interés. Bajo ciertas hipótesis, la ecuación relevante para la turbulencia de Alfvén es la ecuación no lineal derivada de Schrödinger (DNLS) (Rogister, 1971, Mjølhus, 1976, Spangler y Sheerin, 1982a, Sakai y Sonnerup, 1983), que también es integrable por el método de la transformada espectral inversa. Nuestro interés es describir esta turbulencia usando los solitones de esta ecuación como componentes

fundamentales. En el momento de iniciar esta investigación no era claro que las inestabilidades modulativas dieran lugar en este caso a la formación de un tren de solitones (Spangler et. al, 1985). Por lo tanto seguimos los siguientes pasos. Primero, elaboramos un código numérico de resolución de la ecuación que aplicamos para distintas condiciones iniciales. Luego estudiamos la estabilidad de los solitones. Finalmente elaboramos una estadística de solitones de Alfvén que confrontamos con observaciones del viento solar.

La tesis está organizada del siguiente modo. El resto de la introducción está subdividido en cinco partes. En la primera se describe el método de la transformada espectral inversa. En la segunda se describen distintos métodos estadísticos aplicables a sistemas dinámicos con ecuaciones de evolución no lineales. En la tercera se introducen los conceptos fundamentales de estabilidad de Liapunov y cómo deben ser extendidos al caso de solitones. En la cuarta se deduce la ecuación no lineal derivada de Schrödinger, su integración por el método de la transformada espectral inversa y sus solitones. En la quinta parte se describen algunas observaciones del viento solar. Luego, en el capítulo II, se describe el código de resolución numérica. En el capítulo III se muestran algunas simulaciones y se establece un criterio para determinar en qué casos un pulso inicial decaerá en un tren de solitones. En el capítulo IV se analizan aspectos formales de la ecuación no lineal derivada de Schrödinger y su vinculación con el estudio de la estabilidad de los solitones, la que se determina numéricamente. En el capítulo V se estudia la distribución de los solitones en función de las

condiciones iniciales. En el capítulo VI se obtiene una descripción estadística para un ensamble de condiciones iniciales y se la aplica al viento solar. En el capítulo VII se resumen las conclusiones.

#### EL METODO DE LA TRANSFORMADA ESPECTRAL INVERSA: SOLITONES Y CONSTANTES DE MOVIMIENTO DE ECUACIONES NO LINEALES.

El método de la transformada espectral inversa (TEI), también llamado del "scattering" inverso\*, permite integrar ciertas ecuaciones no lineales

$$q_t = N ( q ) \quad (1.1)$$

donde  $N$  es un operador no lineal que actúa sobre la variable de evolución  $q$  y el subíndice  $t$  indica una derivación parcial respecto del tiempo. Este método fue inicialmente desarrollado en el trabajo de Gardner et al. (1967) para resolver la ecuación Korteweg-de Vries (KdV) que describe, entre otras, las ondas hidromagnéticas en un plasma frío o las ondas superficiales de amplitud finita en canales. Esta ecuación es de la forma

$$q_t - 6qq_x + q_{xxx} = 0 \quad (1.2)$$

donde  $q(x,t)$  es una función real. El trabajo de Gardner et al.

\* En teoría cuántica del potencial, el problema del "scattering" consiste en hallar los corrimientos de fase, o la matriz  $S$ , dado el potencial. El problema inverso es deducir el potencial a partir de  $S$ .

surgió como consecuencia de lo observado en simulaciones numéricas de la ecuación KdV. Estas simulaciones muestran que distintos pulsos iniciales decaen en una superposición de ondas solitarias que viajan hacia la derecha sin deformarse, más un tren oscilatorio (radiación) que se dispersa hacia la izquierda (ver Figura 1). Las ondas solitarias, que preservan su identidad aún luego de interacciones no lineales, son llamadas solitones. Gardner et al (1967) encontraron un resultado asombroso para KdV: vieron que los autovalores del espectro discreto de la ecuación de Schrödinger estacionaria con potencial igual a  $q(x,t)$ , siendo  $t$  un instante fijo arbitrario, no dependen de  $t$  si  $q$  satisface la ecuación KdV (1.2). Además observaron que cada uno de estos autovalores está asociado a un solitón de la ecuación mientras que el espectro continuo se vincula a la radiación. Por otro lado, a partir de los parámetros de scattering correspondientes a la ecuación de Schrödinger e invirtiendo el problema de scattering para tiempos posteriores, es posible obtener el potencial de la ecuación de Schrödinger o sea, la integral  $q(x,t)$  de la ecuación (1.2). Estos resultados fueron posteriormente formalizados y descriptos de un modo más abstracto por Lax (1968) quien presentó un procedimiento general para asociar a una ecuación de la forma (1.1) un operador lineal, cuyos autovalores sean constantes de movimiento de (1.1). Por otro lado mostró también que, en el caso de la ecuación KdV, estos autovalores son proporcionales a la velocidad de los solitones que se separan para  $t \rightarrow \infty$ . A pesar de estos resultados, sólo más tarde, cuando el problema de scattering fue generalizado por Zakharov y Shabat (1972) para resolver la ecuación no lineal de Schrödinger (NLS),

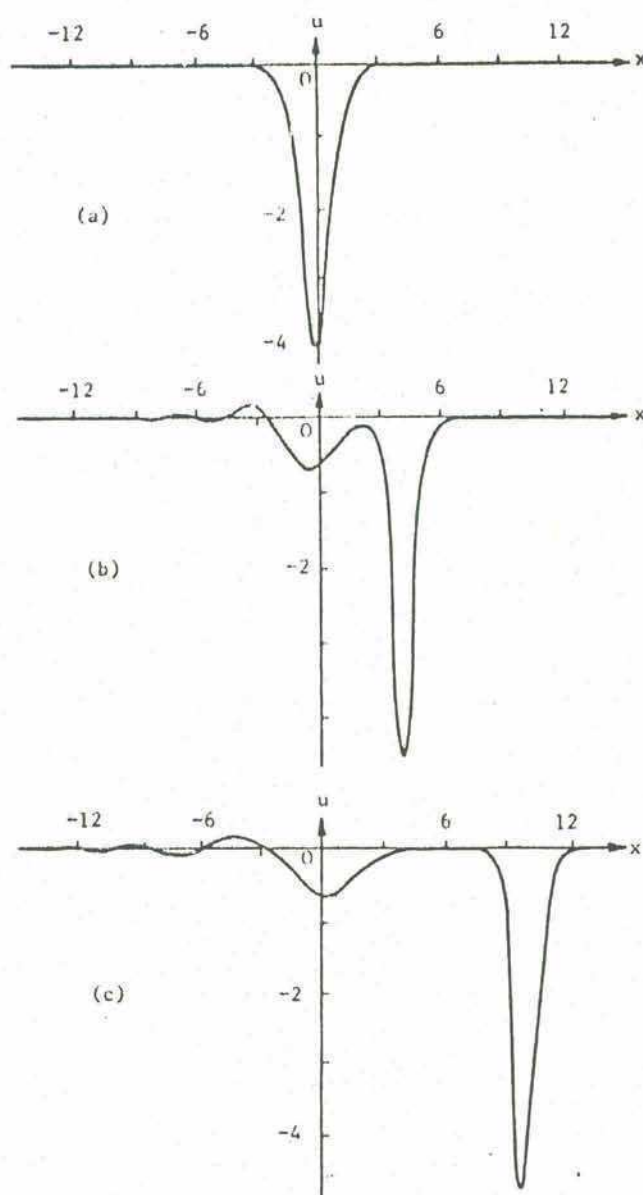


Figura 1 Gráficos de (a)  $q(x,0)=-4\text{sech}^2x$ ; (b)  $q(x,0.4)$  y (c)  $q(x,1.0)$  para  $q(x,t)$  una solución de la ecuación KdV (1.2) (figuras reproducidas del libro de Drazin, 1983)

$$i q_t + 2 s q^2 q^* + q_{xx} = 0 \quad (1.3)$$

(donde  $q(x,t)$  es una función compleja y  $s$  es un signo) se vio que el método podía ser poderoso ya que, de algún modo, actuaba sobre las ecuaciones no lineales como la transformada de Fourier sobre las lineales. Todos estos resultados fueron luego unificados, resumidos y extendidos en el trabajo de Ablowitz et. al. (1974) que es el que vamos a seguir. Estos autores muestran que el método es apropiado para resolver cualquier par de ecuaciones acopladas de la forma

$$\begin{pmatrix} r_t \\ -q_t \end{pmatrix} + 2 A_0(L^+) \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} = 0 \quad (1.4)$$

con el operador integro-diferencial

$$L^+ = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} \partial_x & -2 r \int_{-\infty}^x dy q & & 2 r \int_{-\infty}^x dy r \\ -2 q \int_{-\infty}^x dy q & & -\partial_x & +2 q \int_{-\infty}^x dy r \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

y  $A_0(\xi)$  un cociente arbitrario de funciones enteras que está relacionado por medio de

$$A_0(\xi) = i \omega_r(2\xi)/2 = -i \omega_q(-2\xi)/2 \quad (1.6)$$

con  $\omega_r$  y  $\omega_q$ , las relaciones de dispersión linealizadas para las ecuaciones de  $r$  y  $q$ .

Se comienza por asociar al par (1.4) un problema lineal de autovalores de la forma

$$\begin{aligned} v_{1x} + i \xi v_1 &= q v_2 \\ v_{2x} - i \xi v_2 &= r v_1 \end{aligned} \quad (1.7)$$

sobre el intervalo  $-\infty < x < \infty$  donde  $v_1$  y  $v_2$  son las autofunciones y  $\xi$  el autovalor. En principio, todas las cantidades involucradas dependen paramétricamente del tiempo. Sin embargo, el método fue ideado inicialmente para casos en que los autovalores no varían con el tiempo (aunque más tarde fue extendido a otras situaciones, Newell, 1980) lo que es suficiente para nuestro propósito. Con  $r=1$  puede verificarse que el sistema (1.7) es equivalente a la ecuación estacionaria (de autovalores) de Schrödinger para un hamiltoniano con potencial  $q$ . La ecuación de evolución correspondiente a (1.7), análoga a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, se escribe con toda generalidad en la forma

$$\begin{aligned} v_{1t} &= A(x, t, \xi) v_1 + B(x, t, \xi) v_2 \\ v_{2t} &= C(x, t, \xi) v_1 + D(x, t, \xi) v_2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Derivando (1.8) respecto de  $x$  y (1.7) respecto de  $t$ , se obtienen las relaciones de consistencia

$$\begin{aligned}
 A_x &= q C - r B \\
 B_{x+2} i \xi & B = q_t - 2 A q \\
 C_{x-2} i \xi & C = r_t + 2 A r \\
 D &= -A
 \end{aligned}
 \tag{1.9}$$

El conjunto de ecuaciones (1.7), (1.8) y (1.9) forman la base del método. En este trabajo se simplifica aún más el problema, limitándose a estudiar casos en que puede ponerse

$$A = \sum_{n=0}^N A^{(n)} \xi^n; \quad B = \sum_{n=0}^N B^{(n)} \xi^n; \quad C = \sum_{n=0}^N C^{(n)} \xi^n
 \tag{1.10}$$

Reemplazando (1.10) en (1.9) e igualando potencias de  $\xi$  se obtienen ecuaciones diferenciales en  $x$  para  $A^{(n)}$ ,  $B^{(n)}$ ,  $C^{(n)}$  y  $D^{(n)}$  que pueden ser resueltas sencillamente en función de constantes, de  $q$ ,  $r$  y sus derivadas partiendo de  $A^{(N)} = \text{cte} = a_N$ . Del balance del término homogéneo en  $\xi$ , se obtienen las ecuaciones de evolución, que expresan  $(q_t, r_t)$  en función de las constantes mencionadas y de sus derivadas. Eligiendo diferentes valores para las constantes se obtienen distintas ecuaciones de evolución, que surgen como condiciones de integrabilidad del sistema (1.7)-(1.8). Por ejemplo, si se hace  $N=3$  se obtiene:

$$\begin{aligned}
 A &= a_3 \xi^3 + a_2 \xi^2 + (a_3 q r / 2 + a_1) \xi + a_2 q r / 2 - i a_3 (q r_x - q_x r) / 4 + a_0 \\
 B &= i a_3 q \xi^2 + (i a_2 q - a_3 q_x / 2) \xi + (i a_1 q + i a_3 q^2 r / 2 - a_2 q_x / 2 - i a_3 q_{xx} / 4) \\
 C &= i a_3 r \xi^2 + (i a_2 r + a_3 r_x / 2) \xi + (i a_1 r + i a_3 r^2 q / 2 + a_2 r_x / 2 - i a_3 r_{xx} / 4)
 \end{aligned}
 \tag{1.11}$$



junto con las ecuaciones de evolución

$$\begin{aligned} q_{t+i} & a_3(q_{xxx} - 6qrq_x)/4 + a_2(q_{xx} - 2q^2r)/2 - ia_1q_x - 2a_0q = 0 \\ r_{t+i} & a_3(r_{xxx} - 6qrr_x)/4 - a_2(r_{xx} - 2r^2q)/2 - ia_1r_x + 2a_0r = 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Casos particulares de (1.12) son:

1.  $a_0 = a_1 = a_2 = 0, a_3 = -4i$

(a) la ecuación KdV (1.2) para  $q$ , si  $r=1$ . (1.13)

Es inmediato ver que en este caso el problema de autovalores (1.7) se reduce a la ecuación de Schrödinger  $(-\partial_x^2 + (q - \xi^2))v_2 = 0$  donde  $q(x,t)$  actúa como el potencial. Como los estados ligados de esta ecuación están asociados a autovalores  $\xi^2$  negativos, los autovalores  $\xi_k$  del espectro discreto de (1.7) son imaginarios puros  $\xi_k = i\eta_k$ .

(b) la ecuación KdV modificada (MKdV)  $q_{t \pm} \pm 6q^2q_x + q_{xxx} = 0$ , si  $r = \mp q$ .

2.  $a_0 = a_1 = a_2 = 0, a_3 = -2i$

(a) la ecuación NLS (1.3) para  $q$ , si  $r = -s q^*$ . (1.14)

A continuación daremos una descripción somera del método de la transformada espectral inversa (TEI). El lector interesado puede consultar el minucioso texto de Calogero y Degasperis (1982).

Aunque las ecuaciones (1.7) y (1.8) son más generales, al físico puede resultarle más familiar pensar en términos del problema de Schrödinger ( $r=1$ ), en que la función de onda  $v_2$  es dispersada por el potencial  $q(x,t)$ . Este satisface la ecuación de evolución no lineal (1.2). La idea consiste en aprovechar las propiedades asintóticas ( $|x| \rightarrow \infty$ ) de las soluciones de (1.7), que son simples ondas planas si el potencial está confinado (tiende a cero en el infinito). Es bien sabido que la solución asintótica a la izquierda del potencial se conecta con la solución a la derecha mediante los coeficientes de reflexión y transmisión, que son funciones del autovalor  $\xi$  en la región continua del espectro ( $\xi$  real). Estos coeficientes no son independientes entre sí pues sus módulos están vinculados por la conservación del flujo. Pueden existir además estados ligados, caracterizados por su autovalor  $\xi_k$ , que es imaginario en el caso  $r=1$  ( $\xi_k = i \eta_k$ ) y complejo en el caso general, y la normalización asintótica de la función de onda  $v_2 \approx \sigma_k \exp(-\eta_k x)$ . El conjunto formado por el coeficiente de reflexión  $R(\xi)$ ,  $-\infty < \xi < \infty$ , y los pares  $(\eta_k, \sigma_k)$  correspondientes a los estados ligados, se conoce como la transformada espectral (TE) del potencial  $q(x,t)$ . Se la puede pensar como la generalización de la transformada de Fourier (TF). En efecto, la TE de potenciales suficientemente débiles coincide, excepto quizás en el umbral del continuo, con la aproximación de Born, o sea la TF del potencial. En forma análoga es posible reconstruir el potencial a partir de su TE resolviendo la ecuación de Gel'fand-Levitan-Marchenko (GLM), cuya expresión omitiremos por ser innecesaria en esta tesis, remitiéndose al lector a la obra de Calogero y Degasperis (1982) para una

presentación didáctica.

La clave para la integración en el tiempo de la ecuación (1.2) es la simplicidad de la evolución temporal de la TE. En efecto, como el tratamiento es, por construcción, isoespectral (los autovalores  $\xi$  son independientes del tiempo) y los parámetros asintóticos evolucionan de acuerdo con (1.8) en el límite en que  $q, r, B, C \rightarrow 0$ ,  $A \rightarrow \sum_{n=0}^N a_n \xi^n$ , la integración es inmediata resultando una dependencia exponencial de  $R(\xi)$  y  $\mathcal{T}_k$  con el tiempo, a partir de valores iniciales fijados por la TE de  $q(x, t=0)$ . La inversión "a la GLM" completa la deducción de  $q(x, t) \forall t > 0$ .

En el caso general ( $r \neq 1$ ) se sigue un tratamiento análogo, con el objetivo de integrar las ecuaciones de evolución (1.12). Técnicamente es conveniente trabajar con las soluciones asintóticamente entrantes y salientes, a la izquierda y a la derecha del potencial, o funciones de Jost

$$\begin{aligned}
 \phi(-\infty) &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-i \xi x) & \bar{\phi}(-\infty) &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \exp(i \xi x) \\
 \psi(\infty) &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(i \xi x) & \bar{\psi}(\infty) &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-i \xi x)
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

que están conectadas linealmente por la matriz unimodular de transferencia

$$\begin{aligned}
 \phi &= a \bar{\psi} + b \psi & \psi &= \bar{b} \phi - a \bar{\phi} \\
 \bar{\phi} &= -\bar{a} \psi + \bar{b} \bar{\psi} & \bar{\psi} &= \bar{a} \phi + b \bar{\phi}
 \end{aligned}
 \tag{1.16}$$

En términos de esta matriz la TE está definida por (ver p. ej. Newell, 1980)

$$S = \{ (\xi_k, \tau_k)_{k=1}^N, (\bar{\xi}_k, \bar{\tau}_k)_{k=1}^{\bar{N}}; b/a(\xi, t), \bar{b}/\bar{a}(\xi, t), \xi \text{ real} \} \tag{1.17}$$

donde  $N$  es el número de autovalores  $\xi_k$  del espectro discreto con parte imaginaria positiva;  $\bar{N}$  el de autovalores  $\bar{\xi}_k$  con parte imaginaria negativa;  $\tau_k = b_k / \partial_{\xi} a_k$ ;  $\bar{\tau}_k = \bar{b}_k / \partial_{\xi} \bar{a}_k$ .

La solución asintótica en  $t$  que predice el método es, en el caso general, similar a la observada para la ecuación KdV (una superposición de solitones asociados a los autovalores con parte imaginaria mayor que cero del espectro discreto de (1.7) y un tren de radiación). Sin embargo hay algunas diferencias. Mientras para KdV y MKdV los solitones viajan hacia un lado y la radiación se dispersa hacia el otro, estas componentes no están espacialmente separadas en otros casos. Por otro lado, el problema general puede ser irresoluble dando lugar a una solución de la ecuación de evolución original no acotada. Este problema no se presenta si la cantidad  $\int_{-\infty}^{\infty} dx |q|^2$  es una constante de movimiento del problema y está acotada. El método da también una relación de recurrencia para obtener un conjunto infinito de constantes de movimiento asociadas a (1.4). Definamos

$$\begin{aligned}
 g_1 &= r \quad ; \quad g_2 = -i \partial_x g_1 \\
 g_n &= -i \partial_x g_{n-1} + q \sum_{p=1}^{n-2} g_p g_{n-p-1}
 \end{aligned}
 \tag{1.18}$$

entonces, las constantes  $C_n$  están dadas por

$$C_n = \int dx g_n q \tag{1.19}$$

Estas constantes pueden ponerse en función de la TE. Por ejemplo para ecuaciones con  $r = -q^*$  (como la NLS) resulta (ver Newell, 1980)

$$C_n = i 2^n \sum_{k=1}^N \frac{\xi_k^n - (\xi_k^*)^n}{n} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d(2\xi) (2\xi)^{n-1} \ln |a|^2 \tag{1.20}$$

Para la ecuación KdV, como los autovalores del espectro discreto son imaginarios puros  $\xi_k = i\eta_k$ , sólo las constantes impares son distintas de cero y se escriben

$$\begin{aligned}
 C_{2m+1} &= (-1)^{m+1} 2^{2m+2} \sum_{k=1}^N \eta_k^{2m+1} / (2m+1) - \\
 &\quad \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d(2\xi) (2\xi)^{2m} \ln (1 - 4 \xi^2 (b/a)^2)
 \end{aligned}
 \tag{1.21}$$

Se observa tanto en (1.20) como en (1.21) que la contribución de los solitones (cada uno caracterizado por un valor de  $\xi_k$ , un número complejo para la NLS e imaginario puro para la KdV) y la de la radiación (integral sobre el espectro continuo) está sumada directamente. La forma funcional de un solitón puede obtenerse haciendo  $b/a=0$  e invirtiendo la TE.

Pensemos ahora en la ecuación de evolución (1.1) o en el par (1.4) como sistemas dinámicos de dimensión infinita. Supongamos que estas ecuaciones son integrables por el método de la TEI. Como poseen un conjunto infinito de constantes de movimiento, ¿serán sistemas totalmente integrables? Pues bien, las ecuaciones de interés físico (como las descritas más arriba) son sistemas hamiltonianos totalmente integrables. Más aún, el método de la TEI que pasa de los datos de Cauchy iniciales a los parámetros de dispersión (1.17) actúa como una transformación canónica no lineal que lleva de las variables  $q$  y  $r$  a variables tipo ángulo-acción (Faddeev, 1980, Newell, 1980). Por ejemplo, para la ecuación NLS con  $s=1$  ( $r=-q^*$ ) el hamiltoniano es

$$H = i \int dx (qr_{xx} - q^2 r^2) = -8 \sum_{k=1}^N \frac{\xi_k^3 - \bar{\xi}_k^3}{3} + \frac{4i}{\pi} \int d\xi \xi^2 \ln |a|^2, \quad (1.22)$$

la estructura simpléctica

$$\omega(2) = \int \delta q \wedge \delta r, \quad (1.23)$$

las variables ángulo-acción

$$\ln b_k, 2i \xi_k, \ln b_{k^*}, 2i \bar{\xi}_{k^*}, \ln b(\xi), \ln |a|^2 / \pi, \quad (1.24)$$

cuyas ecuaciones de evolución son

$$\begin{aligned}
d_t(\ln b_k) &= \delta H / \delta (2i \zeta_k) = 4i (\zeta_k)^2 \\
d_t(\ln b_k) &= \delta H / \delta (2i \zeta_k^*) = -4i (\zeta_k^*)^2 \\
d_t(\ln b) &= \delta H / \delta (\ln |a|^2 / \pi) = 4i \zeta^2 \\
d_t(2i \zeta_k) &= d_t(2i \zeta_k^*) = d_t(\ln |a|^2 / \pi) = 0
\end{aligned} \tag{1.25}$$

donde el simbolo  $\delta/\delta\alpha$  representa la derivada funcional respecto de  $\alpha$ .

#### DESCRIPCION ESTADISTICA

La gran complejidad dinámica de los procesos turbulentos torna conveniente la descripción estadística de los mismos. Las ecuaciones dinámicas son no lineales y, por lo que hemos visto, los solitones o las ondas solitarias juegan un papel importante. Veremos que varios de los distintos métodos estadísticos aplicables a sistemas dinámicos no lineales los tienen en cuenta. En particular, dos de ellos los usan como elementos básicos, describiendo el sistema como el de un gas de solitones.

Supongamos un sistema dinámico cuya ecuación de evolución es de la forma (1.1). En la literatura se han desarrollado diferentes métodos, aplicables a distintas situaciones.

1. Cuando las ecuaciones dinámicas no son totalmente integrables pero dan lugar a la formación de solitones, se toma a estos como los

elementos básicos de la descripción estadística, en lugar de los modos de Fourier. En ese caso se busca en forma heurística la función de distribución de solitones. Este método fue propuesto por Kingsep et al (1973) para la turbulencia de Langmuir, cuyas ecuaciones dinámicas son las ecuaciones de Zakharov (Zakharov, 1972), las que, escritas en variables convenientemente adimensionalizadas son de la forma (Rudakov y Tsytovich, 1978)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (i \partial_t + \nabla^2) \mathbf{E} &= \nabla \cdot (n \mathbf{E}) \\ (\partial_t^2 - \nabla^2)n &= \nabla^2 |\mathbf{E}|^2 \end{aligned} \quad (1.26)$$

donde  $n$  es una perturbación de baja frecuencia de la densidad  $n_0$  (asociada a las ondas iónico-acústicas) y  $\mathbf{E}$  es la amplitud compleja del campo eléctrico de alta frecuencia (asociado a las oscilaciones electrónicas de alta frecuencia, es decir, a las ondas de Langmuir). En el caso unidimensional, las ecuaciones (1.26) poseen soluciones tipo solitón (en realidad, ondas solitarias) de la forma

$$\begin{aligned} E &= E_0 \exp[-i\Omega t + i u_0(x - u_0 t)/2 + i\psi_0] / \\ &\quad [\cosh(E_0(x - u_0 t)(\alpha/2)^{1/2})] \\ n &= -\alpha |E|^2 \end{aligned} \quad (1.27)$$

con  $\Omega = -u_0^2/4 - E_0^2 \alpha/2$

$$\alpha = \begin{cases} T_e/(T_e + T_i) & u_0 \ll (T_i/T_e)^{1/2} \\ 1/(1 - u_0^2) & (T_i/T_e)^{1/2} \ll u_0 \ll 1 \end{cases}$$



$T_e$  y  $T_i$  son las temperaturas de electrones y de iones respectivamente.

En el trabajo de Kingsep et al (1973) se desarrolla el siguiente modelo para el caso unidimensional. Se supone que todos los estados posibles del sistema están formados por solitones idénticos distribuidos al azar sobre una región de longitud  $L$ . Como éstos no son verdaderos solitones, dos de ellos pueden fusionarse formando un nuevo solitón. De este modo el número de solitones en el sistema puede variar. Por lo tanto, cada estado está caracterizado por el número  $N$  de solitones presentes. Se define entonces  $P(N)$  como la probabilidad de que el sistema tenga entre  $N$  y  $N+dN$  solitones de parámetros  $E_0(N)$  y  $\Omega(N)$ . Las posiciones  $x_0$  y las fases  $\psi_0$  están distribuidas al azar. Se calcula el espectro de Fourier de la energía  $\langle |E_k|^2 \rangle$  que da este modelo y se encuentra que sólo depende de  $E_0(N)$  y no de  $\Omega(N)$ . Para determinar  $E_0$  como función de  $N$  se iguala el contenido energético de  $N$  solitones a la energía total  $WL$  del sistema. Para determinar el valor máximo que puede tomar  $N$  se sigue el siguiente argumento. Cada solitón está caracterizado por un ancho  $\ell \sim 1/(E_0(\alpha/2)^{1/2})$ . Por lo tanto, el número máximo de solitones  $N_{\max}$  que puede sostener el sistema debe obtenerse de la igualdad

$$\ell(N_{\max})N_{\max} = L \quad (1.28)$$

El número mínimo es  $N=1$ , aunque, por simplicidad, suele tomarse el

límite inferior igual a cero. De comparar el espectro así obtenido con el que se deriva de algunas simulaciones numéricas se encuentra un buen ajuste para  $P(N)=\text{constante}$ . Esto significa que todos los estados de  $N$  solitones entre 1 y  $N_{\text{max}}$  son equiprobables. Una justificación para esta elección puede hallarse en la ecuación de Liouville que debe seguir  $P(N)$ , que es de la forma

$$\partial_t P = \partial_N (\nu_{ef} P(N)) \quad (1.29)$$

con  $\nu_{ef}$  la frecuencia asociada al proceso de fusión de dos solitones en uno, la que resulta independiente de  $N$ . Esta ecuación de Liouville posee la solución estacionaria  $P(N)=\text{constante}$  en la parte principal del espectro, siempre que la fuente de energía excite las longitudes de onda largas (Kingsep et al., 1973).

Sin embargo existen simulaciones numéricas unidimensionales que dan espectros de potencias para la energía con índices diferentes (Rudakov y Tsytovich, 1978). Lo que afirman estos autores es que es necesario tener en cuenta el estado inicial a partir del cual se genera el estado turbulento. Distinguen entonces dos casos: 1) excitación de un modo de Fourier; 2) transición desde un estado de turbulencia débil donde ya hay muchas oscilaciones concentradas en la region de longitudes de onda larga (condensado de Langmuir). Esta segunda situación está caracterizada por la presencia de un gran número de ondas iónico-acústicas que tienden a romper los solitones llevando el sistema a un estado ergódico. Elaboran entonces un modelo alternativo que tiene en cuenta los

procesos de fusión de dos solitones de igual amplitud y de ruptura de un solitón de amplitud  $E_0$  en dos de amplitud  $E_0/2$  debido a la interacción con ondas iónico-acústicas. De este modo obtienen la dependencia de la función de distribución  $f$  con  $E_0$ :  $f \sim E_0^{-1.84}$ . Para este tipo de modelos existen métodos gráficos (Gibbons et al 1977) para determinar cuáles son las interacciones permitidas. Estos métodos fueron usados, por ejemplo, en Verga y Ferro Fontán (1984) para la obtención del índice espectral del espectro de energía en un modelo adecuado a la magnetosfera de los pulsares.

2. El segundo tratamiento es aplicable al caso de ecuaciones totalmente integrables por el método de la TEI. Este método fue usado para la ecuación KdV por Matsuno (1977) y, más tarde, aplicado al caso de ondas de deriva de longitud de onda larga (Meiss y Horton, 1982) cuya ecuación de evolución se reduce a KdV en cierta aproximación. Consiste en escribir la solución general para tiempos grandes de la ecuación no lineal correspondiente como una superposición de solitones (se desprecia la radiación) con fases y posiciones al azar (en el caso KdV, en realidad, no existen las fases). Se considera luego un ensamble de condiciones iniciales y todos los promedios necesarios para la descripción estadística (valores medios, funciones de correlación, etc.) se hacen sobre dichas condiciones iniciales, las fases y las posiciones de los solitones. La dependencia de los parámetros de los solitones (en el caso KdV, es la amplitud o la velocidad) con las condiciones iniciales queda expresada en el trabajo de Matsuno a través de un funcional obtenido por Karpman y Sokolov (Karpman y Sokolov, 1968)

para la ecuación KdV. Este toma la forma

$$F(A, [q(x, 0)]) = \frac{1}{4\pi} \int_{0 < A < 2q(x, 0)} dx (-q(x, 0) - A/2)^{-1/2} \quad (1.30)$$

para la ecuación KdV escrita como en (1.2), donde A es la amplitud de los solitones y F(A) dA es el número de solitones con amplitud entre A y A+dA. En el trabajo de Meiss y Horton, en cambio, sólo se usa el número total de solitones N que da la expresión (1.30)

$$N = \frac{1}{\pi} \int_{-q(x, 0) > 0} dx (-q(x, 0))^{1/2} \quad (1.31)$$

y se supone que los solitones están canónicamente distribuidos en energía con una temperatura  $T_s$ . Esta temperatura se determina igualando el contenido energético de  $\langle N \rangle$  solitones a la energía media total del sistema. La función de distribución resulta entonces

$$f(A) = \langle N \exp(-E_s/T_s) \rangle_{q(x, 0), x_0} \quad (1.32)$$

donde  $E_s$  es la energía de un soliton y el valor medio  $\langle \rangle$  se calcula promediando sobre las condiciones iniciales y las posiciones  $x_0$ .

3. El tercer método fue desarrollado principalmente en problemas vinculados a la física del sólido (Scalapino et al, 1972, Bishop et al., 1980). Consiste en la obtención de la función de partición como una integral funcional de la forma

$$Z = \int \Delta q \Delta p \exp(-H[q,p]/T) \quad (1.33)$$

donde  $H$  es la energía y el hamiltoniano del sistema,  $p$  y  $q$  son variables canónicamente conjugadas,  $T$  es una temperatura (medida en unidades de energía) y  $\Delta q \Delta p$  representa la medida de integración en el espacio de funciones. Claramente, estos cálculos valen para una situación de equilibrio. El caso más estudiado es el de la ecuación seno-Gordon (Bullough, 1985)

$$q_{tt} = q_{xx} - m^2 \sin(\sqrt{a} q/m)/\sqrt{a} \quad (1.34)$$

para la que  $p = q_t$  y  $H = p^2/2 + q_x/2 + m^4 (1 - \cos(\sqrt{a} q/m))/\sqrt{a}$ . Esta ecuación también es integrable por el método de la TEI y posee solitones de un solo parámetro (Newell, 1980). El cálculo de (1.33) se puede hacer por el método de la integral de transferencia (TIM) como el usado en Scalapino et al 1972 o por el de descenso rápido. Este último consiste en desarrollar el hamiltoniano alrededor de las funciones que lo hacen mínimo. Para el caso seno-Gordon (ver Bullough, 1985 o Rajaraman y Raj-Lakshmi, 1982) se encuentran dos tipos de mínimos: los solitones de velocidad cero y la solución  $q=0 \forall x$ , a la que se identifica con la "radiación" ya que al orden no nulo siguiente en la expansión ( $H^{(2)}$ ) alrededor de  $q=0$  se obtienen las oscilaciones lineales de la ecuación (1.34), es decir, los fonones. Este método es extendido en Rajaraman y Raj-Lakshmi (1982) al caso de solitones cargados, es decir, con dependencia temporal explícita en el sistema de referencia del solitón. Lo que observan estos autores es que hay que tener en

cuenta otra de las constantes de movimiento, la carga  $Q$ , asociada a la invariancia de medida de la ecuación de evolución. Existen entonces dos posibilidades, introducir un potencial químico y calcular una gran función de partición o dar un valor fijo a  $Q$  de modo que resulta

$$Z = \int \Delta p \Delta q \exp(-H[q,p]/T) \delta(Q-Q_0) \quad , \quad (1.35)$$

alternativa que eligen los autores de la referencia. Cálculos de este tipo para problemas vinculados a la física del plasma fueron hechos por Tasso (1983) y por Tasso y Lerbinger (1983). En estas referencias se intenta aplicar el método a la ecuación KdV. Pero como en este caso el hamiltoniano no es la energía y, más aún, no está acotado inferiormente, se pasa a un problema equivalente descrito por una ecuación cuyos solitones son de la misma forma que los de KdV.

4. Existe una serie de trabajos en los que se agrega a las ecuaciones dinámicas originales (1.1) términos de ruido ( $\underline{Q} \cdot \underline{f}$ ) que tienen en cuenta grados de libertad dejados originalmente de lado. En el caso de ruido blanco ( $\langle f_i(t) f_j(t') \rangle = \delta_{ij} \delta(t-t')$ ) puede pasarse de la descripción tipo Langevin a una ecuación de Fokker-Planck (ver, por ejemplo, Langouche et al., 1979)

$$d_t \mathcal{P}(\underline{q}, t) = \partial_{q_i} [A_i(\underline{q}, t) + \partial_{q_j} D_{ij}(\underline{q}, t)/2] \mathcal{P}(\underline{q}, t) \quad (1.36)$$

para la probabilidad  $\mathcal{D}(\underline{q}, t) \Delta \underline{q}$  de que el sistema se halle entre

los estados  $q$  y  $q + \Delta q$  al tiempo  $t$ . En (1.36) hemos definido  $A_1 = N_1(q) - \partial_q(Q_{1k}(q, t) \cdot Q_{kj}(q, t))/2$ ,  $D_{ij} = Q_{ki}Q_{kj}$ .

Claramente, para poder resolver esta ecuación es necesario dar el valor inicial de la densidad de probabilidad. La misma ecuación (1.36) vale también para la probabilidad de transición entre un estado inicial y otro cualquiera a un tiempo  $t$  posterior. Este tipo de tratamientos se usa principalmente para sistemas dinámicos de dimensión finita. Existen otros trabajos que a partir de las ecuaciones estocásticas originales (las ecuaciones con ruido) obtienen sistemas cerrados de ecuaciones para las funciones de correlación y de respuesta (Jensen, 1981). El caso de ecuaciones con solitones en presencia de términos de ruido está tratado analíticamente en Kustmarsev (1985) y en Bass et al (1988). Existe también un gran número de simulaciones numéricas de ecuaciones de evolución a las que se agrega ruido y disipación. Por ejemplo, en Moon y Goldman (1984) se perturba la ecuación NLS y en Ghosh y Papadopoulos (1987) la ecuación no lineal derivada de Schrödinger.

#### ESTUDIO DE ESTABILIDAD DE SOLITONES.

Por lo que acabamos de ver muchos de los modelos estadísticos se basan en describir al sistema como un gas de solitones. Pero, ¿por qué es esto posible? ¿Qué ocurre cuando se los perturba? ¿Son los solitones estables? ¿Podrá encontrarse siempre un funcional, como el hamiltoniano de la ecuación seno-Gordon (S-G) descrito en la sección anterior, para el cual los solitones representan un

mínimo? ¿Cómo se vincula esto con la estabilidad? Pues bien, existe una gran cantidad de trabajos donde se estudia la estabilidad de soluciones tipo solitón usando los métodos de Liapunov. Estos métodos extienden la idea de equilibrio como correspondiente a un mínimo de la energía. En esta sección vamos a describir estas técnicas y cómo se aplican a los solitones en el caso unidimensional.

Llamemos  $q_e$  a la solución de equilibrio ( $q_t = 0$ ) de una ecuación de evolución de la forma (1.1). La solución  $q_e$  será estable si al tomar una condición inicial  $q(t=0)$  en un entorno de  $q_e$  la solución para tiempos posteriores se mantiene cerca de  $q_e$ . La idea de cercanía se expresa a través de la distancia  $d$  entre dos funciones  $q_1$  y  $q_2$

$$d(q_1, q_2) = \|q_1 - q_2\| \quad (1.37)$$

donde  $\|\cdot\|$  es una norma que es necesario definir. Esta definición de estabilidad se expresa matemáticamente del siguiente modo. La solución  $q_e$  es estable si y sólo si (Holm et al., 1985)

$$d_I(q(t=0), q_e) < \delta \Rightarrow d_{II}(q, q_e) < \varepsilon \quad \forall t \quad (1.38)$$

donde  $\delta$  y  $\varepsilon$  son dos cantidades positivas y  $d_I$  y  $d_{II}$  son dos distancias que no necesariamente están definidas de igual forma. En particular, para el estudio de la estabilidad de solitones  $d_I$  y  $d_{II}$  son diferentes (Benjamin, 1972). Una condición suficiente



de estabilidad es que existan un funcional  $\mathcal{L}$ , llamado funcional de Liapunov, y dos constantes positivas  $\alpha$  y  $\beta$  tales que (Benjamin, 1972; Holm et al., 1985; Laedke et al. 1985)

$$\begin{aligned} \alpha (d\mathcal{L}(q, q_e))^2 &> \mathcal{L}[q] & t=0 \\ \beta (d^2\mathcal{L}(q, q_e))^2 &< \mathcal{L}[q] & t>0 \end{aligned} \quad (1.39)$$

En el caso de sistemas dinámicos de dimensión finita (la cantidad  $q$  en (1.1) es un vector de dimensión finita dependiente sólo del tiempo) la condición (1.39) es equivalente a la definición de estabilidad formal. Una solución  $q_e$  se dice formalmente estable si existe un funcional de Liapunov tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(0)} &= \mathcal{L}^{(1)} = 0 \\ \mathcal{L}^{(2)} &> 0 \end{aligned} \quad (1.40)$$

donde  $\mathcal{L}^{(i)}$  es el término de orden  $i$  en  $\delta q$  del desarrollo del funcional de Liapunov alrededor de la solución de equilibrio

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(0)} + \mathcal{L}^{(1)} + \mathcal{L}^{(2)} + \dots \quad (1.41)$$

Para el caso de sistemas de dimensión infinita, el hecho de que  $\mathcal{L}^{(2)}$  sea de signo definido para un punto extremal ( $\mathcal{L}^{(1)}=0$ ) no es suficiente para establecer que se trata realmente de un extremo (Morrison y Eliezer, 1986).

Ahora bien, en el caso de solitones no puede probarse la

estabilidad absoluta sino sólo la llamada estabilidad de forma (Benjamin, 1972; Laedke y Spatschek, 1980, 1982, 1984, Laedke et al. 1983). Este análisis se hace trabajando en un espacio cociente  $S$ , llamado conjunto invariante en Laedke et al (1985), formado por clases de equivalencia de funciones. Cada clase está formada por funciones que sólo difieren entre sí en una traslación espacial o en una rotación. Es por esta razón que se definen dos normas  $d_I$  y  $d_{II}$  distintas para el estudio de estabilidad de solitones. Mientras  $d_I$  se define como en (1.37) con la norma

$$\|q\|^2 = \int dx (|q|^2 + |q_x|^2) \quad (1.42)$$

$d_{II}$  se define como

$$d_{II}(q_1, q_2) = \inf_{R, T} \|RTq_1 - q_2\| \quad (1.43)$$

donde  $R$  representa el operador de rotación y  $T$  el de traslación espacial y la notación  $\inf_{R, T}$  indica que debe tomarse el ínfimo de  $\|RTq_1 - q_2\|$  sobre el conjunto de todas las rotaciones y traslaciones posibles de  $q_1$ . Este efecto está relacionado con las simetrías de la ecuación original que el solitón rompe (Morrison y Eliezer, 1987; Grillakis et. al. 1987) y, en realidad,  $d_{II}$  debe definirse usando todas las representaciones de los grupos de simetría que el soliton rompe (Strauss, 1988).

Por otro lado, en el caso de solitones no puede demostrarse la estabilidad formal, ya que puede verse que el operador  $H_{1j}$

definido por  $\mathcal{L}^{(2)} = H_{ij} \delta q_i \delta q_j$  posee al menos un autovalor negativo (Grillakis et al, 1987, Bona et al, 1987). Lo que se hace generalmente en la literatura (Benjamin, 1972) es demostrar la estabilidad en un espacio de fases reducido (Arnold, 1972) definido por un valor dado de alguna de las constantes de movimiento del sistema y luego, usando desigualdades triangulares, se deduce la estabilidad (no formal) en el caso general. El ejemplo más claro es el de la ecuación KdV (1.2). Los solitones de esta ecuación son de la forma

$$q_0 = -A \operatorname{sech}^2[(x - 2At - x_0)(A/2)^{1/2}] \quad (1.44)$$

y, como se puede ver, están definidos por un único parámetro, su amplitud  $A$  o su velocidad  $v = 2A$ . En el trabajo de Benjamin (1972) se muestra que el Liapunov se construye con dos constantes de movimiento, el hamiltoniano

$$H = \int dx (q_x^2/2 + q^3) \quad (1.45)$$

y la constante  $V$

$$V = \int dx q^2/2 \quad (1.46)$$

El autor considera en primera instancia perturbaciones tales que  $V[q_0 + \delta q] = V[q_0] = V_0$  donde  $q_0$  es el soliton cuya estabilidad se quiere estudiar y demuestra que, en este caso, se satisface la condición suficiente (1.39) y, por lo tanto, se cumple (1.38). La

norma  $d_{II}$  usada se define como en (1.43) pero sin aplicar el operador de rotación, ya que los solitones KdV sólo rompen la simetría de traslación espacial. Una vez demostrada la estabilidad en el espacio reducido definido por  $V = V_0$ , se demuestra la estabilidad en el caso general del siguiente modo. Consideremos una perturbación cualquiera. La constante  $V$  tomará el valor  $V_1 = V[q_0 + \delta q]$ . Como cada solitón está caracterizado por su velocidad, inmediatamente puede determinarse cuál es el solitón  $q_1$  tal que  $V[q_1] = V_1$ . El valor de  $x_0$  (posición inicial del máximo de  $|q|$ ) se toma igual al del solitón  $q_0$ . Se puede demostrar que, tomando un valor inicial de  $\delta q$  tal que  $\|\delta q\|$  sea suficientemente pequeña, la diferencia entre  $V_1$  y  $V_0$  puede hacerse tan pequeña como uno quiera. En particular, esta diferencia tiende a cero con  $\|\delta q\|$ . Por lo tanto, la velocidad del solitón  $q_1$  tiende a la del solitón  $q_0$  para  $\|\delta q\| \rightarrow 0$ . Como ambos solitones están inicialmente centrados en el mismo punto  $x_0$ , si  $d_I(q_0 + \delta q, q_0) = \|\delta q\| < \delta$  se cumple

$$d_I(q_1, q_0)|_{t=0} = d_{II}(q_1, q_0) < f(\delta) \quad (1.47)$$

con  $f(\delta)$  un número pequeño y positivo que tiende a cero con  $\delta$ . Consideremos entonces la desigualdad triangular

$$d_I(q_0 + \delta q, q_1) < d_I(q_1, q_0) + d_I(q_0 + \delta q, q_0) \quad (1.48)$$

De (1.47) resulta  $d_I(q_0 + \delta q, q_1) < \delta + f(\delta)$ . Pero, como  $V[q_0 + \delta q] = V[q_1]$ , por ser  $q_1$  un solitón, puede aplicarse la demostración de estabilidad condicional (estabilidad en el espacio reducido)

desarrollada más arriba. Luego,  $d_{II}(q_0 + \delta q, q_1)$  se mantiene acotada por un número positivo  $\xi'$  que depende de  $\delta$ . Considerando luego la desigualdad triangular

$$d_{II}(q_0 + \delta q, q_0) < d_{II}(q_0 + \delta q, q_1) + d_{II}(q_0, q_1) \quad (1.49)$$

como, por la definición de  $d_{II}$  es  $d_{II}(q_0, q_1) = d_I(q_0, q_1)|_{t=0} \forall t$ , la parte derecha de la desigualdad (1.49) está acotada por  $\xi(\delta) = \xi'(\delta) + f(\delta)$ . Queda entonces demostrada la estabilidad del solitón  $q_0$  en el caso general, ya que se cumple la implicación (1.38).

Por último, en el caso KdV, logró demostrarse la estabilidad de forma en el espacio de los parámetros de dispersión transformando la ecuación mediante el método de la TEI (Scharf y Wreszinski, 1981). Se muestra en este trabajo que una perturbación inicial que cumple ciertas condiciones modifica levemente el autovalor asociado al solitón perturbado, pero no genera nuevos autovalores en el espectro discreto ni destruye el original. Como los autovalores se vinculan a la velocidad de los solitones esto significa que una perturbación modifica la velocidad del solitón original. Debido a este efecto la distancia entre el solitón original y el nuevo, al que da lugar la perturbación, crece con el tiempo. Es por eso que sólo puede demostrarse la estabilidad de forma en el caso de solitones.

## LA ECUACION NO LINEAL DERIVADA DE SCHRODINGER.

En esta sección vamos a mostrar cómo, a partir de las ecuaciones magnetohidrodinámicas puede derivarse, mediante el método de reducción perturbativa (Taniuti y Wei, 1968) la ecuación no lineal derivada de Schrödinger (DNLS). Esta ecuación fue obtenida aplicando este método por Mjolhus (1976) para el caso de un plasma frío y por Spangler y Sheerin (1982a) y por Sakai y Sonnerup (1983) para el caso caliente.

Consideremos el conjunto de ecuaciones magnetohidrodinámicas para un gas de electrones y protones en donde se han hecho las siguientes aproximaciones:

1. las corrientes de desplazamiento son despreciables
2. hay cuasineutralidad de carga ( $n_e \approx n_i \approx n$ )
3. el tensor de presiones es diagonal e isótropo y la presión y la densidad están vinculadas por una polítropa  $p = kn^\gamma$ .
4. Existe un campo magnético ambiente en la dirección  $x$ :  

$$\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{x}$$

Estamos interesados en estudiar la propagación de ondas a lo largo de  $B_0$ . Podemos entonces suponer que todas las cantidades

dependen sólo de la coordenada  $x$ . De este modo el sistema de ecuaciones originales puede llevarse a (Sakai y Sonnerup, 1983, Terasawa et al., 1986)

$$\begin{aligned}
 \partial_t n + \partial_x(nu) &= 0 \\
 dtu + \partial_x(|B|^2)/(2n) + \beta \partial_x n/n &= 0 \\
 dtv - \partial_x B/n + i(\omega_{ci}/\alpha \omega_{ce}) dt(\partial_x B/n) &= 0 \\
 dtB - \partial_x v + B \partial_x u - (i/\alpha) \partial_x(dtv) &= 0
 \end{aligned} \tag{1.50}$$

donde  $dt = \partial_t + u \partial_x$ ;  $u = v_{ix}$  ( $v_i$  es la velocidad de los iones);  $B = B_y - i B_z$ ;  $v = v_{iy} - i v_{iz}$ ;  $\omega_{ci}$  es la frecuencia de ciclotrón para iones y  $\omega_{ce} = eB_0/m_e c$  la de ciclotrón para electrones;  $\alpha = (1 - \omega_{ci}/\omega_{ce})/2$  ( $\alpha \approx 1/2$ );  $\beta = \sigma k n_0^{\sigma} / (B_0^2/4\pi) = (c_s/v_A)^2$  con  $c_s$  la velocidad del sonido  $c_s = (\sigma(T_e + T_i)/(m_i + m_e))^{1/2}$  ( $\sigma$  el cociente de calores específicos) y  $v_A$  la velocidad de Alfvén. Todas las velocidades están medidas en unidades de la velocidad de Alfvén, el campo magnético en unidades de  $B_0$ , el tiempo en unidades de  $1/\omega_{ci}$ , las longitudes en unidades de  $d_i = \alpha v_A/\omega_{ci}$ , las densidades en unidades de  $n_0$  y la presión en unidades de  $B_0^2/4\pi$ .

Este conjunto de ecuaciones posee la solución de equilibrio

$$\begin{aligned}
 n &= 1 \\
 B = u = v &= 0
 \end{aligned} \tag{1.51}$$

Cuando se perturba este equilibrio, diferentes tipos de ondas se pueden propagar a lo largo del eje  $x$ . Una solución exacta de (1.50)

es la onda de Alfvén monocromática circularmente polarizada de amplitud finita

$$\begin{aligned} B &= A \exp(i(kx - \omega t)) \\ v &= -B; \quad n=1; \quad u=0 \end{aligned} \quad (1.52)$$

cuya relación de dispersión es

$$\omega^2 - k^2(1 - \omega_{ce} \omega / \omega_{ce})(1 + \omega / \alpha) = 0 \quad (1.53)$$

Por otro lado, si se linealizan las ecuaciones (1.50) alrededor del equilibrio (1.51), se encuentran tres modos de oscilación independientes: las ondas de Alfvén circularmente polarizadas derecha e izquierda y la onda sonora

$$\begin{aligned} n &= 1 + A_0 \exp(i(kx - \omega t)) \\ u &= \omega(n-1)/k; \quad v=B=0 \\ \omega^2 &= \beta k^2 \end{aligned} \quad (1.54)$$

Supongamos entonces que queremos describir una situación en la que coexisten ondas de Alfvén de amplitud finita y ondas sonoras de pequeña amplitud. Podemos entonces desarrollar perturbativamente las distintas magnitudes de la siguiente manera

$$\begin{aligned} n &= 1 + \epsilon n_1 + \epsilon^2 n_2 + \dots \\ u &= \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots \\ v &= \epsilon^{1/2}(v_1 + \epsilon v_2 + \dots) \\ B &= \epsilon^{1/2}(B_1 + B_2 + \dots) \end{aligned} \quad (1.55)$$



donde  $\epsilon$  es una cantidad pequeña que mide la amplitud de la onda sonora. Por otro lado,  $\epsilon$  también mide el cociente entre las amplitudes de ambos tipos de ondas. Si las perturbaciones presentes en el gas son predominantemente alfvénicas, es conveniente describir el sistema desde el referencial de Alfvén. Por otro lado, si estamos interesados en describir una situación en donde las perturbaciones son de longitud de onda larga (mucho mayores que uno, en el sistema de unidades elegido), al cambiar de sistema de referencia se pueden contraer las coordenadas según

$$\begin{aligned} X &= \delta(x-t) \\ T &= \delta^2 t \end{aligned} \tag{1.56}$$

donde  $\delta$  es una medida del número de onda de la perturbación y  $T$  describe la variación temporal lenta en el sistema de Alfvén. Esta variación lenta está relacionada con el corrimiento de la frecuencia de las ondas de Alfvén respecto de la relación  $\omega = k$  y es debido a la interacción no lineal con las ondas sonoras y a la dispersión. Al orden más bajo, la dispersión produce un corrimiento  $\sim \delta^2$ . Por lo tanto, para que los efectos no lineales puedan balancear los de la dispersión es necesario que ellos también contribuyan con un corrimiento del mismo orden. Para que ello ocurra  $\epsilon$  y  $\delta$  deben ser iguales. Ahora bien, si bien la contracción (1.56) es razonable para las cantidades alfvénicas ( $B$  y  $v$ ), puede no serlo para las vinculadas a las ondas sonoras. Si insertamos (1.56) en (1.50)

estaremos describiendo solamente las variaciones lentas en el referencial de Alfvén (variaciones más rápidas quedan automáticamente integradas). Esta aproximación es la llamada estática en Sakai y Sonnerup (1983) donde los autores también analizan el caso general. La aproximación estática sirve para estudiar inestabilidades del tipo modulacional. Reemplazando (1.55) y (1.56) en (1.50) obtenemos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} n_1 &= u_1 \\ v_1 &= -B_1 \\ n_1 &= |B|^2/2(1-\beta) \end{aligned} \tag{1.57}$$

de donde se puede ver también que esta aproximación no sirve para el caso  $\beta=1$ . Finalmente la ecuación de evolución que obtenemos para  $B$  es la ecuación no lineal derivada de Schrödinger (DNLS) que, en las coordenadas originales pero en el referencial de Alfvén, es de la forma

$$i q_t + i s (|q|^2 q)_x + q_{xx} = 0 \tag{1.58}$$

donde  $q = \epsilon^{1/2} B_1 / (2(|1-\beta|)^{1/2})$ ,  $s$  es un signo ( $s = \text{sig}(1-\beta)$ ). Esta ecuación también posee una solución de la forma (1.52) con  $A$  una amplitud arbitraria y  $\omega$  y  $k$  relacionados por

$$\omega = s k |A|^2 + k^2 \tag{1.59}$$

que, en el caso lineal ( $A=0$  en (1.59)), es la relación de dispersión

(1.53) en el referencial de Alfvén desarrollada hasta segundo orden en  $k$ . Esto significa que la ecuación (1.58) sirve para describir situaciones con dispersión pequeña. Por otro lado si se introduce la contracción (1.56) sólo en las ecuaciones de evolución de las variables alfvénicas, pero se mantienen las coordenadas originales para las sonoras, se obtiene el sistema de ecuaciones (Sakai y Sonnerup, 1983), en el referencial original

$$\begin{aligned} i B_t + i B_x + B_{xx} + (i/2) [(uB)_x + (u-n)B_x] &= 0 \\ n_{tt} - \beta n_{xx} &= (|B|^2)_{xx}/2 \\ n_t + u_x &= 0 \end{aligned} \quad (1.60)$$

que es el equivalente de las ecuaciones de Zakharov para la turbulencia de Alfvén. Se puede observar entonces que, si se introduce (1.56) en (1.60), las derivadas temporales de  $n$  y  $u$  no aparecen al orden deseado, de ahí el nombre de aproximación estática para la DNLS. Recordemos que la aproximación estática reduce las ecuaciones de Zakharov a la ecuación NLS.

La ecuación DNLS también es integrable por el método de la TEI. Sin embargo, el problema de autovalores asociado no es el de Zakharov-Shabat (1.7), sino (Kaup y Newell, 1978)

$$\begin{aligned} v_{1x} + i \lambda^2 v_1 &= q \lambda v_2 \\ v_{2x} - i \lambda^2 v_2 &= r \lambda v_1 \end{aligned} \quad (1.61)$$

donde  $r = -sq^*$  y  $\lambda$  es el autovalor.

Sin embargo, definiendo

$$Q = q \exp(-2i\mu) \quad (1.62)$$

$$R = -(i/2) (r_x + i q r^2/2) \exp(2i\mu) \quad (1.63)$$

con

$$\mu = \int_{-\infty}^x dx \, r q/2 \quad (1.64)$$

y

$$w_1 = v_1 \exp(-i\mu) \quad (1.65)$$

$$w_2 = v_2 \exp(i\mu) - (i/2) v_1 r \exp(i\mu) \quad (1.66)$$

(1.61) se convierte en

$$\begin{aligned} w_{1x} + i \lambda^2 w_1 &= Q w_2 \\ w_{2x} - i \lambda^2 w_2 &= R w_1 \end{aligned} \quad (1.67)$$

que es justamente el problema usual de autovalores (1.7) donde  $\xi = \lambda^2$  es el autovalor. Las nuevas funciones R y Q satisfacen las condiciones de integrabilidad

$$\begin{aligned} i Q_t - 2 Q^2 R + Q_{xx} &= 0 \\ i R_t + 2 R^2 Q - R_{xx} &= 0 \end{aligned} \quad (1.68)$$

que son ecuaciones del tipo NLS pero donde la relacion entre R y Q es

$$R = -|Q|^2 Q^* / 4 + i s Q^*_{,x} / 2 \quad (1.69)$$

en lugar de  $R = -sQ^*$ .

Es fácil demostrar que (1.58) y la ecuación correspondiente para  $r$

$$i r_t + i s (|r|^2 r)_{,x} - r_{,xx} = 0 \quad (1.70)$$

son equivalentes a (1.68). Esta transformación nos permite usar todos los resultados que se derivan para el problema de Zakharov-Shabat común para las variables  $R$  y  $Q$ . Por otro lado es necesario mencionar que fue esta transformación la que permitió integrar la DNLS en el trabajo de Kaup y Newell (1978). En particular, la primera constante que da el método de la TEI es

$$C_1 = \int dx RQ = \int dx (-i q r_{,x} / 2 + q^2 r^2 / 4) \quad (1.71)$$

La ecuación DNLS posee además las constantes

$$C = \int dx q \quad (1.72)$$

$$C_0 = \int dx (-rq) \quad (1.73)$$

que no predice el método de la TEI. El par formado por la ecuación (1.58) y la (1.70) puede ponerse como un par de ecuaciones de Hamilton

$$\begin{pmatrix} q_t \\ r_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} \delta H / \delta q \\ \delta H / \delta r \end{pmatrix} \quad (1.74)$$

con el hamiltoniano  $H=2C_1$ . El corchete de Poisson y la simpléctica implícitos en (1.74) son

$$\{F, G\} = \int dx \begin{pmatrix} \delta F / \delta q \\ \delta F / \delta r \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} \delta G / \delta q \\ \delta G / \delta r \end{pmatrix} \quad (1.75)$$

$$\omega^{(2)} = \int \delta q \wedge \delta r + \int r \wedge \delta q \quad (1.76)$$

Las constantes de movimiento  $C_n$  con  $n \geq 1$  pueden ponerse en función de los parámetros de dispersión como

$$C_n = -i \frac{2n}{n} \sum_{k=1}^N [(\xi_k^*)^n - (\xi_k)^n] + \int d(2\xi) (2\xi)^{n-1} \ln(a\bar{a}) / 2\pi \quad (1.77)$$

donde  $\bar{a}(\sqrt{\xi}) = a^*(\sqrt{\xi}^*)$ . La contribución de los solitones es similar a la del caso NLS (ver ecuación (1.19)).

La ecuación DNLS posee dos soluciones de tipo solitón. Ambas pueden ponerse como

$$q_0(x, t) = q_0(x - vt) \exp(i\varphi(x - vt) + 4i\Delta^4 t) \quad (1.78)$$

A estos solitones suele llamárselos cargados, ya que poseen una

dependencia temporal explícita ( $\exp(i4\Delta^4 t)$ ) en su sistema de referencia.

Para los del primer tipo es

$$|q_0(z)|^2 = 8\Delta^2 \operatorname{sen}^2 \delta / (\cosh(4\Delta^2 \operatorname{sen} \delta (z-x_0)) + \cos \delta) \quad (1.79)$$

$$\psi(z) = vz/2 - 3s \int_{-\infty}^z dz' |q|^2/4 + \psi_0 \quad (1.80)$$

y la velocidad

$$v = -4s \Delta^2 \cos \delta \quad (1.81)$$

Los parámetros  $\Delta^2$  y  $\delta$  se vinculan con los autovalores  $\xi = \lambda^2$  de (1.67) según

$$|\xi| = \Delta^2; \quad \arg(s \xi) = s \delta \quad (1.82)$$

La cantidad  $x_0$  determina la posición del pico del solitón en  $t=0$  y  $\psi_0$  es una fase arbitraria.

Los solitones del segundo tipo, llamados algebraicos, se obtienen de los primeros tomando el límite  $\delta \rightarrow \pi$ . De este modo resulta

$$|q_0(z)|^2 = 16 \Delta^2 / (1 + 16 \Delta^4 (z-x_0)^2) \quad (1.83)$$

La expresión para  $\psi(z)$  es la misma de (1.80) y la de la velocidad

es

$$v = 4s \Delta^2 \quad (1.84)$$

Estos solitones son inestables y, frente a una perturbación, decaen en un solitón del primer tipo muy ancho ( $\delta \approx \pi$ ) o se dispersan como la componente de radiación (Kaup y Newell, 1978). Por lo tanto, de ahora en más, llamaremos solitones de la ecuación DNLS sólo a los del primer tipo (salvo en un caso particular en que lo aclararemos explícitamente).

A partir de (1.77) y (1.82) puede obtenerse la expresión de las constantes de movimiento  $C_n$ ,  $n \geq 1$  para un solitón. Usando (1.73) y la fórmula explícita para un solitón se puede determinar la de  $C_0$ . De este modo los valores de  $C_0$  y  $C_1$  resultan

$$C_0 = 4s \delta \quad (1.85)$$

$$C_1 = -4 \Delta^2 \text{sen } \delta \quad (1.86)$$

#### ALGUNAS OBSERVACIONES DEL VIENTO SOLAR.

El viento solar es un laboratorio natural donde pueden observarse gran cantidad de fenómenos interesantes de la física del plasma. La presencia de diversas sondas espaciales permitió a lo largo de los años obtener gran variedad de información sobre los



procesos que allí se producen. Una de las características del viento solar es la presencia de fluctuaciones del campo magnético, de la densidad y de la velocidad, como se puede observar en la Figura 2, reproducida del trabajo de Denskat y Neubauer (1983).

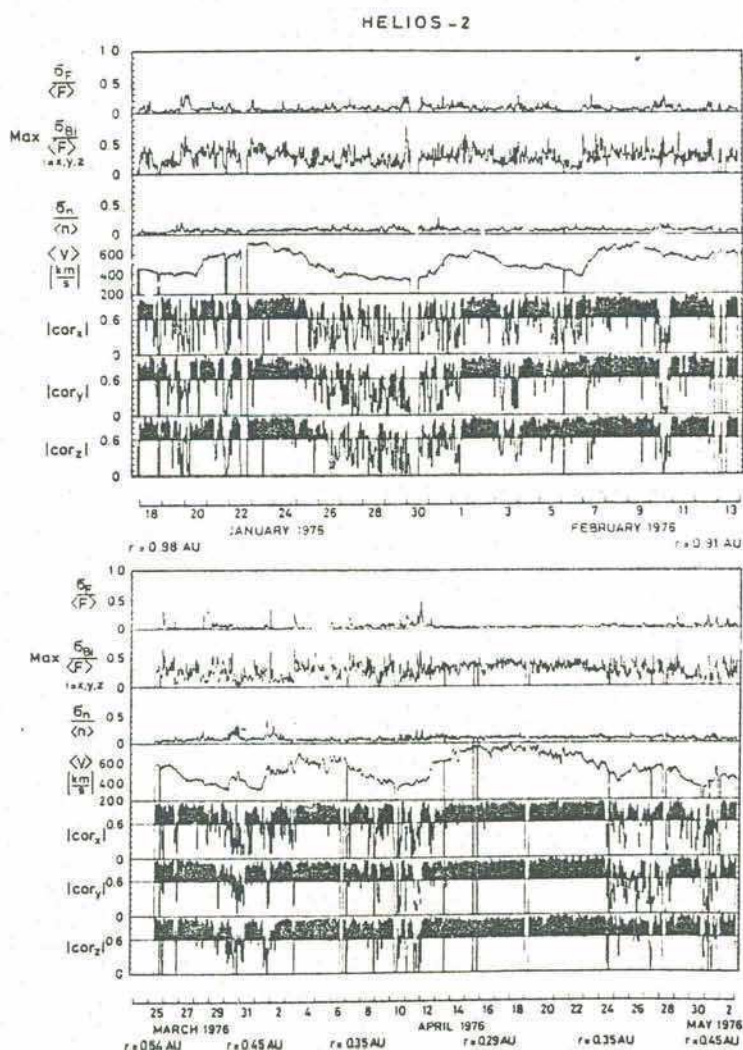
Las observaciones sobre fluctuaciones se resumen mediante el cálculo de funciones de correlación

$$R_{HG}(X, T) = \langle \delta H(x, t) \delta G(x + X, t + T) \rangle \quad (1.87)$$

donde H y G son dos cantidades de interés. Generalmente se presenta la transformada de Fourier de la función de correlación

$$P_{HG}(k, \nu) = \int dT dX R_{HG} \exp(i(k \cdot R - 2\pi\nu T)) \quad (1.88)$$

llamada espectro de Fourier. Estos espectros son funciones reales de la frecuencia en el caso de funciones de autocorrelación ( $H=G$ ) pero, en el caso general, son cantidades complejas. Suele entonces graficarse su módulo y su fase por separado. Ahora bien, las mediciones hechas con sondas que están ubicadas en un punto fijo sólo pueden dar información acerca de funciones de correlación de la forma  $R_{HG}(0, T)$ . Por otro lado, si la velocidad del viento  $v_w$  es mucho mayor que las velocidades características de las perturbaciones que se propagan en él, puede suponerse que estas perturbaciones son simplemente arrastradas por el viento. En ese caso, las correlaciones en el sistema del observador y en el del viento se pueden conectar mediante (Jokipii, 1971)



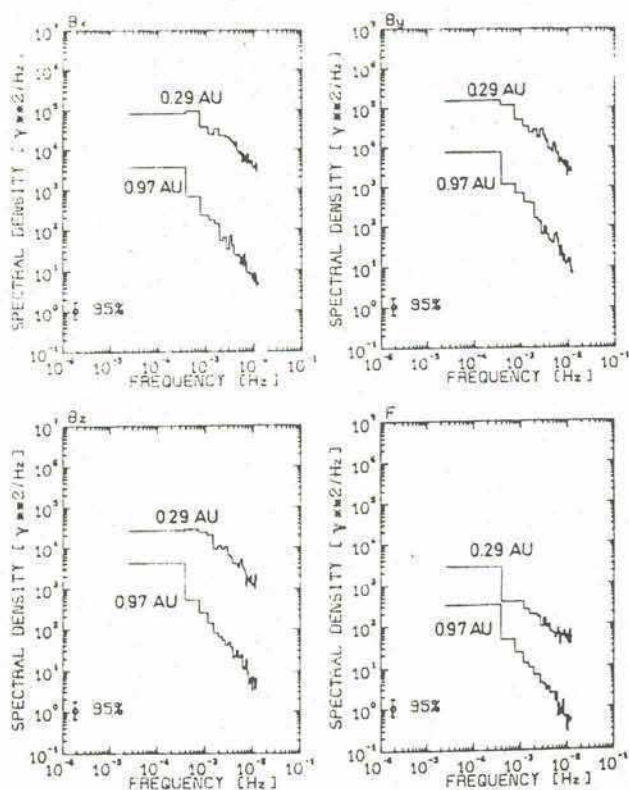
**Figura 2** Propiedades generales de las fluctuaciones del viento solar medidas por la sonda Helios 2 para distancias del Sol comprendidas entre 0.98 y 0.91 U.A. (arriba) y entre 0.29 y 0.5 U.A. (abajo). Las figuras corresponden, de arriba hacia abajo, a: fluctuaciones normalizadas de intensidad de campo magnético, de una componente de campo magnético y de densidad de protones; velocidad media y valores absolutos de los coeficientes de correlación entre  $B$  y  $v$ . Las distancias están medidas en unidades astronómicas (1 U.A. =  $1.5 \cdot 10^{13}$  cm). (Figura reproducida del trabajo de Denskat y Neubauer, 1983).

$$P_{HG}(\nu) = \frac{1}{v_w} \int dX_3 R'_{HG}(0,0,X_3,0) \exp(i 2 \pi X_3/v_w) \quad (1.89)$$

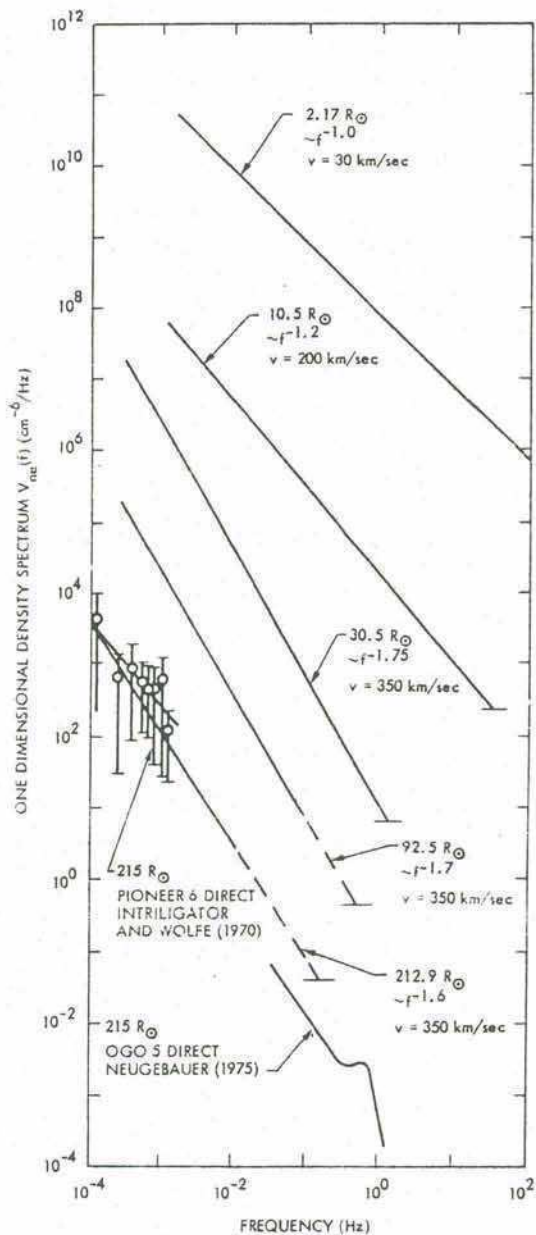
donde las cantidades primadas son las medidas en el sistema del viento,  $X_3$  es la coordenada espacial a lo largo de la dirección de propagación (dirección de  $v_w$ ) y  $P_{HG}$  es el espectro en el sistema del observador.

Las fluctuaciones del campo magnético son medidas in situ y los espectros son automáticamente computados. En todos los casos estos espectros presentan un comportamiento similar (ver Figura 3 de esta tesis o Figura 3 de Jokipii, 1971): son prácticamente constantes para valores de frecuencia o números de onda bajos (la frecuencia  $\nu$  y el número de onda  $k$  se vinculan según la ley  $2 \pi \nu = v_w k$ ) y luego decrecen siguiendo una ley de potencias  $P \sim k^{-s}$  con  $s < 2$ . Este cambio de comportamiento para un valor  $k_e$  de número de onda muestra la existencia de una escala externa  $\sim 1/k_e$ . El índice espectral  $s$  que mejor ajusta las observaciones crece con la distancia al Sol. Las mediciones del Explorer 33 analizadas en Denskat y Burlaga (1977) y las de Helios 2 en Denskat y Neubauer (1983) muestran que  $s$  varía entre 1.59 y 1.69 a una distancia de 0.97 U.A. (1 U.A. =  $1.5 \cdot 10^8$  km) y entre 0.87 y 1.15 a 0.29 U.A. con una incerteza de  $\pm 0.12$ . De todos modos, los autores puntualizan que la ley de potencias no es la que mejor ajusta las observaciones a 0.29 U.A. El rango de frecuencias a lo largo del cual el espectro sigue esta ley abarca, generalmente, dos órdenes de magnitud (ver Figura 3). Para valores de frecuencia entre  $2 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$  y  $\omega_{c1}/2\pi$  es  $s \sim 1.7$  y, para frecuencias mayores que  $\frac{\omega_{c1}}{2\pi}$  el índice crece aún

## HELIOS-2



**Figura 3** Espectros de Fourier de las componentes y del módulo de las fluctuaciones de campo magnético para distintas distancias al Sol (0.29 y 0.97 U.A.). Los datos fueron tomados con la sonda Helios 2 en regiones de alta velocidad. (Figura reproducida del trabajo de Burlaga y Neubauer, 1983).



**Figura 4** Espectro de Fourier de densidad electrónica unidimensional deducido a partir de experimentos de centelleo interplanetario realizados por la sonda Viking. También se incluyen mediciones in situ de las Pioneer 6 y Ogo 5. Las velocidades del viento solar usadas para interpretar estos espectros están indicadas.

más ( $s \approx 3$ ) independientemente de la distancia al Sol (Denskat y Neubauer, 1983).

La información sobre el espectro de fluctuaciones de densidad generalmente se obtiene en forma indirecta usando la técnica del centelleo interplanetario (ISP). Todo lo que se puede determinar a partir de esta técnica es un modelo de espectro que ajuste las observaciones, pero no una medición directa del mismo. En Woo y Armstrong (1979) (ver Figura 4) se muestra que para distancias del Sol mayores que 0.09 U.A. el espectro unidimensional puede ajustarse a una ley de potencias en el rango  $10^{-4}$  a  $5 \cdot 10^{-2}$  Hz. El índice espectral medio es 1.65 y la velocidad del viento se supone  $v_w = 350$  km/seg. Para distancias menores, el espectro puede modelarse con una única ley de potencias sobre el rango  $10^{-3}$ -10 Hz pero con un índice menor ( $s \sim 1.1$ ). Resultados posteriores (Scott et al, 1983a) muestran que el espectro entre 0.27 y 0.47 U.A. sigue una ley de potencias con índice  $s = 1.0 \pm 0.5$  sobre el rango de números de onda  $0.002$ - $0.0016$   $\text{km}^{-1}$  y que luego se hace más pronunciado ( $s = 1.7 \pm 0.3$ ) para números de onda entre  $0.016$  y  $0.05$   $\text{km}^{-1}$ . Otras observaciones que se extienden a valores mayores de frecuencia (Scott et al. 1983b) también muestran que una ley de potencias quebrada es la que mejor describe el espectro de densidad sugiriendo la presencia de una escala interna  $\sim 1/k_1$ . Para distancias entre 0.19 y 0.33 U.A. el exponente toma un valor  $3.0 \pm 0.5$  en el rango  $0.03$   $\text{km}^{-1} < k < 0.3$   $\text{km}^{-1}$ . Las escalas interna y externa determinan el rango sobre el cual la ley de potencias es válida. Aun cuando no existen datos confiables de la dependencia radial de la escala

externa un modelo desarrollado recientemente (Armand et al, 1987) sugiere que ambas escalas crecen con la distancia al Sol.

A partir de este tipo de observaciones lograron identificarse en el viento solar ondas de Alfvén de amplitud finita propagándose en dirección opuesta al Sol (Belcher et al., 1969; Belcher y Davis, 1971). Se supone que estas ondas son generadas cerca del Sol (Belcher, 1972) y luego arrastradas por el viento. En el primero de los trabajos citados más arriba se mostró que eran estas ondas las que dominaban la microestructura (escalas características  $L_M \lesssim 0.01$  U.A.) del medio interplanetario. La presencia de estos largos períodos alfvénicos dio lugar a la elaboración de modelos lineales. Sin embargo, análisis posteriores (Matthaeus y Goldstein, 1983) mostraron una alta probabilidad de que se estuvieran produciendo fenómenos turbulentos. Existen otros dos escenarios para estudiar estos fenómenos (Matthaeus y Goldstein, 1983). Uno de ellos consiste en suponer que los procesos turbulentos no están directamente acoplados a los valores medios de los campos del viento solar. La turbulencia, de este modo, sería estudiada en forma independiente de otros procesos. El tercer escenario supone la interacción de las fluctuaciones con los gradientes de los campos o con estructuras organizadas, tales como nubes magnéticas o corrientes de alta velocidad. En este caso debería elaborarse un modelo autoconsistente que tuviera en cuenta todos los procesos a la vez. El modelo que se discutirá en esta tesis está encuadrado dentro del segundo grupo.

## II. METODO DE RESOLUCION NUMERICA DE LA ECUACION NO LINEAL DERIVADA DE SCHRODINGER.

En una serie de trabajos publicados entre 1975 y 1977 (Ablowitz y Ladik, 1975, 1976a, 1976b, 1977) Ablowitz y Ladik extendieron la teoría de la TEI al caso de ecuaciones no lineales en diferencias finitas. Esta generalización es particularmente útil para la elaboración de esquemas de integración numérica de ecuaciones integrables por el método de la TEI. Tales esquemas numéricos mantienen las principales propiedades de la ecuación original. El procedimiento es paralelo al descrito en la introducción para las ecuaciones de evolución no lineales. Se propone un problema de autovalores discreto

$$\begin{aligned} v_{1n+1}^m &= z v_{1n}^m + Q_n^m v_{2n}^m + S_n^m v_{2n+1}^m \\ v_{2n+1}^m &= z^{-1} v_{2n}^m + R_n^m v_{1n}^m + T_n^m v_{2n+1}^m \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde  $n$  se refiere al punto de grilla espacial y  $m$  al temporal,  $z$  es el autovalor,  $v_1$  y  $v_2$  son las autofunciones y  $R_n^m$ ,  $Q_n^m$ ,  $S_n^m$ ,  $T_n^m$  son los potenciales. Se avanzan las autofunciones en el tiempo según

$$\begin{aligned} v_{1n}^{m+1} - v_{1n}^m &= A_n^m(z) v_{1n}^m + B_n^m(z) v_{2n}^m \\ v_{2n}^{m+1} - v_{2n}^m &= C_n^m(z) v_{1n}^m + D_n^m(z) v_{2n}^m \end{aligned} \quad (2.2)$$

y se fuerza la relación de consistencia

$$\Delta^m(E_n v_n^m) = E_n(\Delta^m v_n) \quad i=1,2 \quad (2.3)$$

donde  $E_n(v_n^m) = v_{n+1}^m$ ;  $\Delta^m v_n = v_n^{m+1} - v_n^m$

son los operadores de desplazamiento espacial y temporal respectivamente. Finalmente se desarrollan las cantidades  $A_n^m$ ,  $B_n^m$ ,  $C_n^m$ ,  $D_n^m$  en potencias de  $z$  y  $1/z$ , se reemplazan en (2.1) y (2.2) imponiendo la condición (2.3) y se igualan términos con igual potencia de  $z$ . Esto establece relaciones entre  $A_n^m$ ,  $B_n^m$ ,  $C_n^m$ ,  $D_n^m$  y los potenciales y determina las ecuaciones de evolución que deben satisfacer estos últimos para cumplir con (2.3). Eligiendo distintos desarrollos para  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  y  $D_n$  se obtienen distintas ecuaciones de evolución no lineales. Siguiendo este procedimiento Taha y Ablowitz (Taha y Ablowitz, 1984a) obtuvieron las versiones discretas de las ecuaciones NLS, KdV y MKdV que luego usaron (Taha y Ablowitz, 1984b, 1984c) para su integración numérica. La diferencia principal entre las expresiones que se derivan por este método y las que se obtendrían escribiendo directamente la ecuación original en diferencias finitas radica en la forma que toman los términos no lineales. Es por lo tanto crucial que estos términos estén expresados de una determinada manera para que el esquema mantenga las propiedades principales de la ecuación original.

Ahora bien, el hecho de que el problema de autovalores para la ecuación DNLS sea (1.61) en lugar de (1.7) hace que el método no pueda ser aplicable directamente. Por otro lado, las ecuaciones de evolución para  $r$  y  $q$  se obtienen a partir de los términos de orden



$\lambda^1$  (debido a la presencia del factor  $\lambda$  frente a los potenciales en (1.61)), mientras en el caso más simple provienen del orden  $\lambda^0$ , hecho que introduce cierta asimetría en el problema y no resulta claro cómo puede removerse. Sin embargo ya vimos en la introducción que es posible definir nuevas variables  $R$  y  $Q$  ((1.62)-(1.63)) para las que el problema de autovalores es el usual (1.7).

Decidimos entonces usar el esquema descrito anteriormente para las ecuaciones de evolución de  $R$  y  $Q$ . Como las ecuaciones para  $R$  y  $Q$  son análogas a la ecuación NLS, el desarrollo del método que lleva a la obtención de la expresión en diferencias finitas también lo es. La única diferencia radica en que la relación entre  $R$  y  $Q$  es (1.69) en el presente caso y  $R = -sQ^*$  para la NLS. A partir de estos resultados es inmediata la obtención de  $r$  y  $q$ . Siguiendo a Taha y Ablowitz (1984a), elegimos  $T_n^m = S_n^m = 0$  y

$$\begin{aligned}
 A^m &= A^{(-2)}z^{-2} + A^{(0)} + A^{(2)}z^2 \\
 B^m &= B^{(-1)}z^{-1} + B^{(1)}z \\
 C^m &= C^{(-1)}z^{-1} + C^{(1)}z \\
 D^m &= D^{(-2)}z^{-2} + D^{(0)} + D^{(2)}z^2
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Luego impusimos la relación de consistencia (2.3) y obtuvimos la versión discreta de la ecuación de evolución para  $Q$ . Si en el límite lineal tomamos

$$i\Delta^m Q^m / \Delta t = -(Q_{n+1} - 2Q_n + Q_{n-1}) / (2(\Delta x)^2) \tag{2.5}$$

la ecuación de evolución resulta

$$\begin{aligned}
 i\Delta^m Q^m / \Delta t = & -(Q_{n+1}^m - 2Q_n^m + P_{n-1} Q_{n-1}^m + P_n Q_{n+1}^m - 2Q_n^{m+1} Q_{n-1}^m) / \\
 & (2(\Delta x)^2) + (P_n R_n^m Q_n^m Q_{n+1}^m + P_{n-1} R_n^{m+1} Q_{n-1}^m Q_n^{m+1} \\
 & + \frac{1}{2}(Q_n^m Q_{n+1}^m R_n^m + Q_{n-1}^m Q_n^{m+1} R_n^{m+1} + Q_{n-1}^m Q_n^{m+1} R_n^m \\
 & + Q_n^m \sum_{k=-N}^n \Delta^m \tilde{S}_k^m - Q_n^{m+1} \sum_{k=-N}^{n+1} \Delta^m \tilde{T}_k^m) \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

donde  $\tilde{S}_k^m = Q_{k+1}^m R_k^m + Q_k^m R_{k-1}^m$ ;  $\tilde{T}_k^m = Q_{k-1}^m R_k^m + Q_k^m R_{k+1}^m$

$$P_n = \prod_{k=-N}^n [(1 - R_k^{m+1} Q_k^{m+1} (\Delta x)^2) / (1 - R_k^m Q_k^m (\Delta x)^2)]$$

que es similar a la ecuación (2.8) de Taha y Ablowitz (1984a), pero donde  $R_n$  no está reemplazado por  $Q_n^*$ . El problema en este caso es que la relación entre  $R$  y  $Q$  es no lineal y el método no nos dice cómo debe ser escrita. Sin embargo, como en la versión discreta de (1.7) el término  $qv$  se reemplaza por  $Q_n^m v_n^m$ , elegimos

$$R_n^m = i s (Q_{n+1}^{m*} - Q_{n-1}^{m*}) / (4 \Delta x) - Q_n^m (Q_n^{m*})^2 / 4. \quad (2.7)$$

Probamos el método para distintos casos con  $s = \pm 1$ . Por simplicidad se eligió un esquema local (que es equivalente a hacer  $P_n = 1$ ,  $\tilde{S}_n^m = \tilde{T}_n^m = 0$  en (2.6)) y condiciones de contorno periódicas con  $2N+1$  puntos de grilla ( $n \leq N$ ). Para resolver (2.6) se usó el algoritmo explicado en la Sección 2 de Taha y Ablowitz (1984b). Las únicas diferencias con las fórmulas allí escritas radican en la expresión para  $R$  y en el signo de la cantidad  $\xi = -2i((\Delta x)^2 / \Delta t)$ . Esto último se debe a que nuestra ecuación difiere en el signo del

término dispersivo con la que se resuelve en esa referencia. El algoritmo elegido posee dos esquemas iterativos, uno dentro del otro. La iteración externa está relacionada con el hecho de que la expresión (2.6) es altamente implícita y contiene términos no lineales con valores de  $Q_n$  en el nuevo instante  $(m+1)$ . En el primer paso tomamos  $Q_n^{m+1}=Q_n^m$ . La iteración interna está relacionada con el método empleado para resolver el sistema lineal en el nuevo instante, ya que no invertimos la matriz sino que usamos un procedimiento iterativo para obtener los valores de  $Q_n^{m+1}$  en los diferentes puntos de grilla. Para ambas iteraciones se utilizó el método de Crank-Nicholson para la ecuación del calor (Taha y Ablowitz, 1984b). Si identificamos con el supraíndice  $j$  la iteración externa, todo el procedimiento se detiene cuando

$$| Q_n^{m+1,j} - Q_n^{m+1,j+1} | / | Q_n^{m+1,j} | < \text{tolerancia} \quad (2.8)$$

y consideramos al valor  $Q_n^{m+1,j+1}$  como la solución aproximada para el instante  $t=(m+1)\Delta t$  y la posición  $x=n\Delta x$ . El algoritmo requiere un valor pequeño del cociente  $\Lambda=(\Delta x)^2/\Delta t$  pero permite la utilización de pasos temporales relativamente largos. Esta última propiedad es particularmente útil y hace que este método sea más efectivo que el que resuelve la transformada de Fourier de la ecuación DNLS (Spangler et al, 1985, Spangler, 1985) pues requiere menor capacidad de cómputo. Todas las simulaciones que discutiremos en este capítulo fueron hechas para  $N=500$  y  $\Delta t \geq 0.2$ .

Usamos el código para investigar dos tipos de condiciones

iniciales. En ambas es  $Q(x,0)=q(x,0)\exp\left(is\int_{-\infty}^x dx' |q(x',0)|^2\right)$ . Estas son

i. Solución de un solitón, dada por (1.78-1.81)

ii. Onda plana modulada

$$q(x,0)=A_0 \exp(2\pi i x/\lambda) \exp(-x^2/\ell^2) \quad (2.9)$$

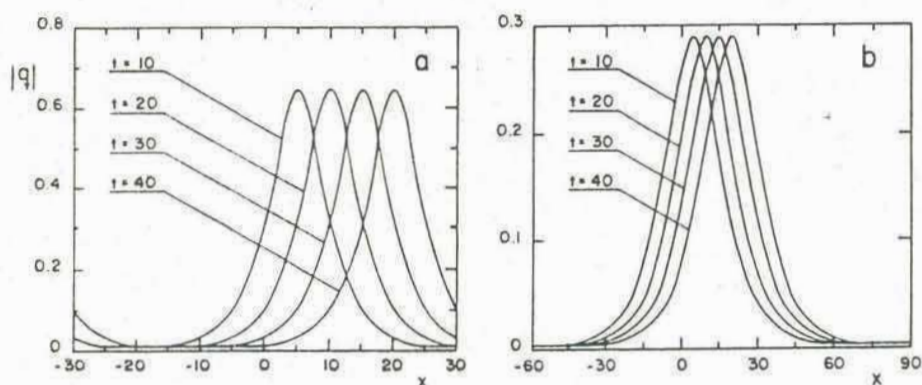
donde  $\lambda$  es la longitud de onda,  $A_0$  la amplitud y  $\ell$  la longitud de modulación del envoltorio gaussiano.

El código preserva la identidad de los solitones como se puede ver en la Figura 5, donde se observa la evolución de dos solitones de velocidad  $v=0.5$  y diferente amplitud. También mantiene las simetrías de la ecuación. Por ejemplo, cambiar  $s$  por  $-s$  en (1.58) es equivalente a cambiar  $x$  por  $-x$ . Por lo tanto debe cumplirse

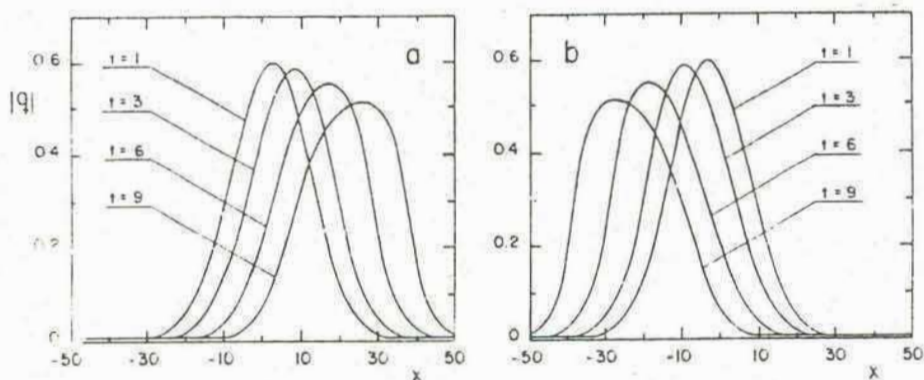
$$q_+(x,t)=q_-(-x,t) \quad (2.10)$$

donde  $q_+$  corresponde a la solución de la DNLS con  $s=1$  y  $q_-$  a la de  $s=-1$ . Esta propiedad se mantiene, según se ve en la Figura 6, donde se muestra la evolución temporal para condiciones iniciales de la forma (2.9) con  $A_0=0.6$  y  $\ell=14$  en ambos casos pero con distinto signo de  $\lambda$ . Cambiar el signo de  $\lambda$  en (2.9) es equivalente a cambiar el signo de  $x$  en la ecuación de evolución. La Figura 5a

corresponde a  $\lambda=5$  y  $s=1$  y la 5b a  $\lambda=-5$  y  $s=-1$ .



**Figura 5** Se muestra la evolución de  $|q(x,t)|$  para una condición inicial tipo solitón (1.78)-(1.81). (a) corresponde a  $\tau=\pi/4$ ,  $\Delta^2=2/8$ ,  $s=-1$ . La velocidad de propagación es  $v=0.5$ ,  $\Delta t=0.2$ ,  $\Delta x=0.12$ ,  $2N=500$ . (b) corresponde a  $\tau=\pi/8$ ,  $\Delta^2=0.1353$ ,  $s=-1$ . La velocidad de propagación es  $v=0.5$ ,  $\Delta t=0.2$ ,  $\Delta x=0.36$ ,  $2N=500$ .



**Figura 6** Se muestra la evolución de  $|q(x,t)|$  para una condición inicial de la forma (2.9) con  $A_0=0.6$  y  $\lambda=14$ . (a) corresponde a  $s=1$  y  $\lambda=5$ . (b) corresponde a  $s=-1$  y  $\lambda=-5$ . Se observa que  $|q_a(x,t)|=|q_b(-x,t)|$  y, por lo tanto, los cambios  $x \rightarrow -x$  y  $s \rightarrow -s$  son equivalentes. En ambos casos es  $\Delta t=0.2$ ,  $\Delta x=0.2$ ,  $2N=500$ .

El código mantiene también los valores de las constantes de movimiento de la DNLS. Se controlaron las variaciones de  $C_0$  y  $C_1$  y éstas nunca excedieron el 5%. La conservación es mejor para los solitones que para las ondas planas moduladas de la forma (2.9). En este caso el comportamiento es distinto según cuál sea el signo de la constante  $C_1$  (la razón se comprenderá mejor en el capítulo siguiente). Para condiciones iniciales con valores negativos de  $C_1$  los errores crecen hasta que el pulso aumenta su amplitud al máximo y disminuye su longitud característica al mínimo. En ese momento, el número de iteraciones externas (IT) necesario para una tolerancia del 1%, alcanza su valor máximo. Luego IT se mantiene constante (IT=2,3) mientras los errores primero disminuyen y aumentan monótonamente al final. Para valores de  $C_1$  positivos, los errores en las constantes crecen monótonamente desde el principio mientras IT se mantiene constante. En este caso los errores son mayores que para  $C_1 < 0$ . Los errores encontrados dependen del paso de integración temporal ( $\Delta t$ ), del tamaño de la grilla espacial ( $\Delta x$ ) y del cociente  $\Lambda$ . Si dejamos  $\Delta t$  fijo y disminuimos  $\Delta x$ , el valor de  $\Lambda$  disminuye y la conservación de  $C_0$  y  $C_1$  es mejor. Este mejoramiento es más evidente en la conservación de  $C_0$ . Si dejamos  $\Delta x$  fijo y aumentamos  $\Delta t$ , la conservación de  $C_0$  empeora. En cambio, como  $\Lambda$  disminuye, los errores en  $C_1$  se reducen levemente y sólo aumentan cuando IT crece. Suponemos que esta sensibilidad diferente de  $C_0$  y  $C_1$  es debida a que  $C_1$  es la primera constante que el método de la TEI prescribe. El algoritmo numérico se basa en la integración de la ecuación por dicho método y sólo entra el cociente  $\Lambda$  en el cálculo de  $Q(\text{nuevo})$  en función de

$Q$ (viejo). Por lo tanto, la conservación de  $C_1$  se ve más afectada por variaciones en  $\mathcal{L}$  mientras que  $C_0$  es sensible a variaciones de  $\Delta x$  y  $\Delta t$  por separado. De todos modos, cuando el número de iteraciones IT se hace muy grande debido a que el paso de integración temporal también lo es,  $C_1$  varía en menor medida cuanto menor sea  $\Delta t$ .

La adaptación del algoritmo original de Taha y Ablowitz (1984a) para la ecuación DNLS que presentamos en este capítulo fue publicada por la autora de esta tesis y C. Ferro Fontán en las referencias (1988a) y (1988b), junto con los respectivos estudios numéricos sobre la formación de trenes de solitones de Alfvén, tema del próximo capítulo.

### III. FORMACION DE SOLITONES DE LA ECUACION NO LINEAL DERIVADA DE SCHRODINGER

En el momento de comenzarse este trabajo, simulaciones numéricas de la ecuación DNLS (Spangler et al., 1985) para una condición inicial de la forma (2.9), no alcanzaban a evidenciar la formación de solitones. El comportamiento obtenido era muy singular. Dependiendo del signo del término no lineal y del dispersivo, el pulso colapsaba o bien se ensanchaba dispersándose con el tiempo. Esta última situación podía deberse a la ausencia de autovalores discretos en la transformada espectral (1.61). Pero, ¿qué significaba el colapso? ¿Precedería a la formación de solitones? Algo que resultaba claro era la necesidad de continuar las simulaciones numéricas mas allá del intervalo temporal relativamente reducido usado en la referencia citada anteriormente. Pues bien, simulaciones numéricas aparecidas con posterioridad (Spangler, 1985) mostraron el surgimiento de pulsos tipo solitón. Este comportamiento fue obtenido merced a un gran esfuerzo computacional. El algoritmo descrito en la sección anterior nos permitió observar con gran economía de cálculo la formación de solitones y seguir aún más su evolución. Por otro lado, era necesario poder determinar a priori en qué casos se obtendría uno u otro comportamiento y para ello usamos la teoría de la TEI descrita en la introducción.

En el trabajo de Ablowitz et al. (1974), se establecen ciertas condiciones para la existencia de autovalores discretos del



sistema (1.7). En el caso de la DNLS podemos extender estos resultados para el problema transformado (1.67) donde las variables de evolución son  $R$  y  $Q$ . En esta referencia se da también una estimación para el valor propio de mayor valor absoluto que, para el problema transformado, resulta

$$2i \xi_0 = C_1 = \int dx RQ \quad (3.1)$$

Los autores puntualizan también que la expresión (3.1) sugiere la ausencia de autovalores discretos (y, por lo tanto, de solitones) para el caso  $\text{Re}(C_1) > 0$ . Esta conclusión está de acuerdo con varios hechos. En primer lugar, la ecuación NLS con no linealidad negativa ( $s = -1$  en (1.3)), no posee soluciones tipo solitón. En este caso (ver (1.14)) es  $r = q^*$  y  $C_1 = \int dx |q|^2$ . En segundo lugar, la ecuación KdV (1.2) sólo muestra la formación de solitones para condiciones iniciales tales que  $q(x, 0) < 0 \forall x$  (Drazin, 1983). En este caso es  $r = 1$  (ver (1.13)) y  $C_1 = \int dx q$  que resulta positiva para  $q(x, 0) > 0$ .

Analicemos entonces el signo de la constante  $C_1$  (1.71) para la ecuación DNLS considerando distintas condiciones iniciales. Para los solitones comunes (1.78-1.81), ésta se expresa mediante (1.86) que es claramente negativa ya que  $0 < \delta < \pi$ . Para los solitones algebraicos (1.78, 1.83) resulta  $C_1 = 0$ , lo que concuerda con el hecho de que sean inestables. Para una condición inicial de la forma (2.9) es

$$C_1 = A_0^2 \ell \sqrt{\pi} (A_0^2/8 + s\pi/(\lambda\sqrt{2})). \quad (3.2)$$

Se puede ver a partir de esta relación que, para el caso de no linealidad positiva ( $s=1$ ), si  $\lambda > 0$  siempre es  $C_1 > 0$ . Por lo tanto en este caso no se deberían observar solitones, que es justamente uno de los resultados de Spangler et al. (1985). Esta condición corresponde a su Figura 7, donde puede verse que el pulso se ensancha dispersándose con el tiempo. Nuestra simulación numérica de esta situación se reproduce en la Figura 6(a) del capítulo anterior. Corresponde a  $\lambda=5$ ,  $A_0=0.6$ ,  $\ell=14$  y resulta  $C_1=4.371$ .

En el caso de no linealidad negativa y  $\lambda > 0$ , en cambio,  $C_1$  puede tener cualquier signo, dependiendo de la relación entre  $A_0$  y  $\lambda$ . Para poder interpretar los resultados de Spangler et al. (1985) es necesario determinar el valor de  $C_1$  para la ecuación DNLS con término dispersivo negativo. Esta ecuación es la que satisface  $r$  (ecuación (1.70)) y corresponde al caso de una onda circularmente polarizada en sentido izquierdo (LCP) mientras que la ecuación para  $q$  (1.58) corresponde al sentido de polarización derecho (RCP). Por lo tanto, si consideramos la condición inicial (2.9) para  $r$ , la correspondiente a  $q$  será

$$q(x,0) = -sA_0 \exp(-2\pi ix/\lambda) \exp(-x^2/\ell^2) \quad (3.3)$$

y, por lo tanto,

$$C_1 = A_0^2 \ell \sqrt{\pi} (A_0^2/8 - s\pi/(\lambda\sqrt{2})) \quad (3.4)$$

Las ecuaciones (3.2) y (3.4) pueden unificarse en la expresión

$$C_1 = A_0^2 \ell \sqrt{\pi} (A_0^2/8 + \tilde{s} \pi / (\lambda \sqrt{2})) \quad (3.5)$$

donde

$$\tilde{s} = s \cdot \text{sgn}(\lambda) \cdot \begin{cases} +1, & \text{RCP} \\ -1, & \text{LCP} \end{cases} \quad (3.8)$$

es un signo. En el trabajo de Spangler et al (1985) se muestran los resultados de dos simulaciones con  $s=-1$ . En ambos casos el pulso inicial colapsa contrayéndose (ver Figuras 5 y 8 de esta referencia). Cuando se evalúa  $C_1$  se obtiene  $C_1 < 0$ . La conclusión inmediata es que debe continuarse la integración numérica en estos casos para poder observar la formación de solitones.

Decidimos entonces realizar una serie de simulaciones con nuestro código (que corresponde a dispersión positiva) para el caso de no linealidad negativa y condición inicial (2.9) dejando fijos  $A_0$  ( $A_0=0.5$ ) y  $\ell$  ( $\ell=14$ ) y variando  $\lambda$  de modo de variar  $C_1$ . Esto puede verse en las Figuras 7 a 10 donde está graficado  $q(x)$  para distintos instantes. La Figura 7 corresponde a  $\lambda=5$ . Es  $C_1=-2.562$  y se observa la formación de un tren de tres solitones que viajan, aparentemente, todos a la misma velocidad. La Figura 8 corresponde a  $\lambda=10$ . En este caso  $C_1$  es negativa pero de menor valor absoluto que en el caso anterior,  $C_1=-1.184$ , y se observa la formación de un tren de dos solitones. La Figura 9 corresponde a  $\lambda=25$  lo que da

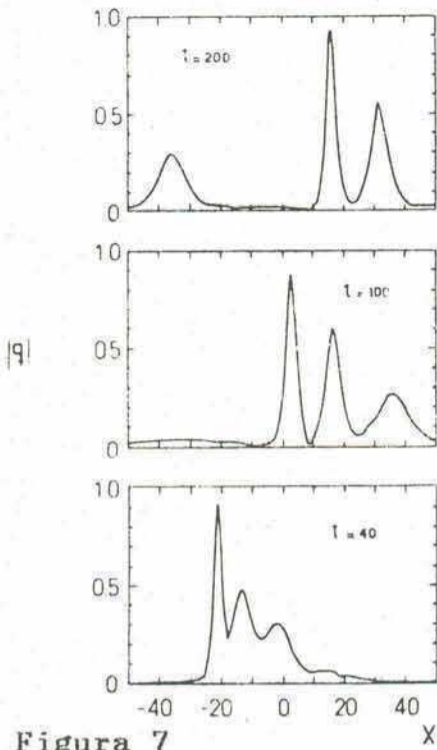


Figura 7

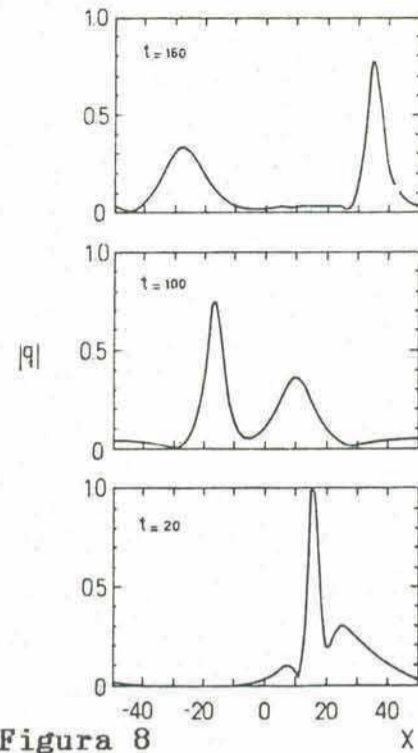


Figura 8

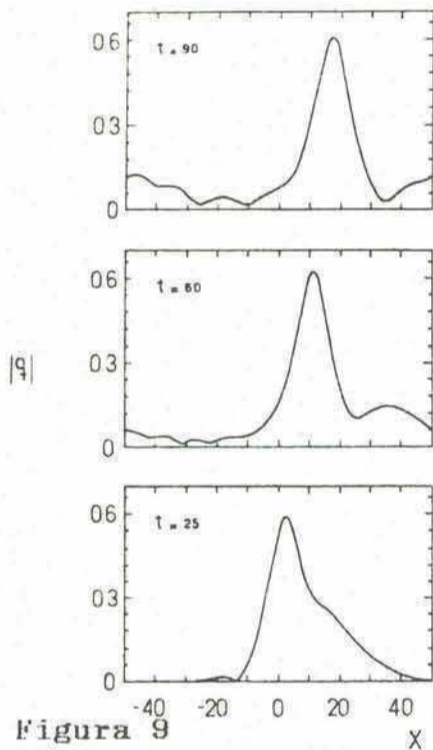


Figura 9

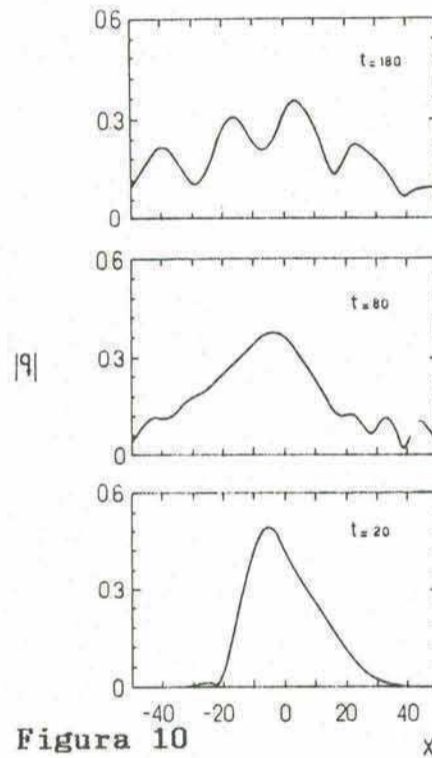
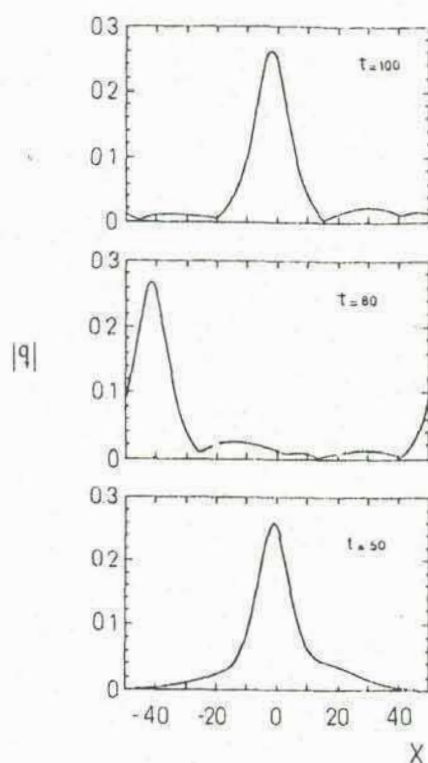


Figura 10

Figuras 7-10 Se muestra la evolución de  $|q(x,t)|$  para  $s=-1$  y una condición inicial de la forma (2.9) con  $A_0=0.5$ ,  $\ell=14$  y distintos valores de  $\lambda$ . La Figura 7 corresponde a  $\lambda=5$ . En este caso es  $C_1=-2.562$  y se forman tres solitones. La Figura 8 corresponde a  $\lambda=10$ , es  $C_1=-1.184$  y se forman dos solitones. La Figura 9 corresponde a  $\lambda=25$ , es  $C_1=-0.357$  y se forma sólo un solitón. La Figura 10 corresponde a  $\lambda=80$ , es  $C_1=0.0216$  y no se forma ningún solitón.

lugar a un valor aún mayor de  $C_1$ ,  $C_1 = -0.357$ , y a la formación de un solo solitón. Por último, la Figura 10 corresponde a  $\lambda = 80$ . En este caso  $C_1$  resulta positiva,  $C_1 = 0.0216$ , y el pulso inicial se dispersa sin formar solitones. Finalmente estudiamos qué sucede si modificamos  $A_0$  y  $\lambda$  pero dejamos fijo el valor de  $C_1$ . La Figura 11 corresponde a una corrida con  $A_0 = 0.2$ ,  $\lambda = 14$  y  $\lambda = 6.085$  y no linealidad negativa ( $s = -1$ ). El valor de  $C_1$  es el mismo que el que se obtiene con los parámetros de la Figura 9 y en este caso también se observa la aparición de un solo solitón que viaja más rápido que el de la Figura 9. Esto es fácil de explicar si despreciamos la



**Figura 11** Evolución de  $|q(x,t)|$  para una condición inicial de la forma (2.9) con  $A_0 = 0.2$ ,  $\lambda = 14$  y  $\lambda = 6.085$ . El valor de  $C_1$  es el mismo que el de la Figura 6. En este caso también se forma sólo un solitón.

contribución de la radiación. Recordando la expresión para la velocidad de un solitón (1.81), ésta puede ponerse como

$$v = sC_1 \cot \tilde{\delta}. \quad (3.7)$$

Pero, al desprestigiar la radiación,  $\tilde{\delta}$  se vincula con  $C_0$  a través de la expresión (1.85). El valor de  $C_0$  para las Figuras 7-10 es 4.39, mientras que para la Figura 11 es  $C_0=0.7$ . Por lo tanto, de (1.85), se deduce  $\tilde{\delta}_{11} < \tilde{\delta}_9 < \pi/2$ , donde  $\tilde{\delta}_{11}$  es el valor de  $\tilde{\delta}$  para el solitón de la Figura 11, mientras que  $\tilde{\delta}_9$  es el correspondiente al de la Figura 9. En consecuencia  $\cot(\tilde{\delta}_{11}) > \cot(\tilde{\delta}_9)$  y, de (3.7),  $v_{11} > v_9$ . Por otro lado, las velocidades determinadas de este modo concuerdan muy bien con las deducidas de las figuras.

Podemos concluir entonces que una condición inicial para la DNLS decaerá en solitones siempre que sea  $C_1 < 0$ . Por otro lado, de las simulaciones numéricas presentadas, se desprende que el número de solitones crece con el valor absoluto de  $C_1$  y que, de alguna manera, este número es independiente del valor de la constante  $C_0$ . Esto muestra que la estimación del número de solitones como proporcional a  $C_0$  presentada por Spangler (1985) es errónea. La causa de este error está en que el autor sólo considera solitones con  $\tilde{\delta} = \pi/4$  o  $\tilde{\delta} = 3(\pi/4)$ .

Ahora bien, es necesario darle una interpretación física a esta cuestión del signo de la constante  $C_1$ . En el año 1976 Mjølhus (Mjølhus, 1976) obtuvo un criterio para determinar si un

pulso inicial de la forma (1.52) y relación de dispersión (1.59) cuya ecuación de evolución es la DNLS resultaría modulacionalmente inestable o no. Este autor trabajó con una ecuación con no linealidad positiva y dispersión negativa. Su resultado, traducido a nuestras variables y al caso de dispersión positiva, se puede expresar como

$$|q|^2 + 2\varphi_x \begin{cases} > 0 \text{ estable} \\ < 0 \text{ inestable} \end{cases} \quad (3.8)$$

donde  $\varphi = \arg(q)$ . Si comparamos esta expresión con la de  $C_1$  (1.70) para  $s=1$  ( $r=-q^*$ ), vemos que el caso estable implica  $C_1 > 0$  y el inestable  $C_1 < 0$ . La afirmación inversa no es verdadera ya que  $|q|^2 + 2\varphi_x$  puede cambiar de signo para distintos valores de  $x$  mientras que el de  $C_1$  está fijo. Concluimos entonces que la clasificación en términos del signo de la constante  $C_1$  es una versión integrada del criterio de Mjølhus para distinguir entre los casos modulacionalmente estables e inestables. Más tarde, en el año 1978 Mjølhus (Mjølhus, 1978) estudió la inestabilidad modulacional de una onda plana de amplitud finita recortada que, para la ecuación escrita como en (1.58), puede ponerse como

$$q = \begin{cases} q_0 \exp(-i k_0 x) & |x| < L \\ 0 & |x| > L \end{cases} \quad (3.9)$$

y determinó cuáles eran los solitones en los que decaería el pulso en distintos casos usando la técnica de la TEI. A partir de este estudio subdividió los casos estable e inestable considerados en su trabajo anterior en débiles y fuertes. Encontró para los casos fuertemente estables ( $k_0 \ll q_0^2/2$ ) y fuertemente inestables ( $k_0 \gg q_0^2/2$ ) un comportamiento similar al de nuestras simulaciones. En el primero no se formaban solitones y en el segundo se formaban solitones con  $0 < \delta < \pi/2$ , a los que llamó normales. En los casos débilmente estables e inestables determinó la existencia de solitones normales y anómalos ( $\pi > \delta > \pi/2$ ). Para  $Lq_0^2 \gg 1$  la amplitud de los normales tendía a cero mientras que los anómalos tendían a solitones algebraicos divergentes y muy anchos. En el caso débilmente inestable encontró también un número de solitones anómalos no divergentes. Ahora bien, como los solitones algebraicos son inestables y decaen en radiación o en solitones normales, podemos concluir que, en el límite  $Lq_0^2 \gg 1$  no se observarían solitones en el caso débilmente inestable. Por lo tanto, al menos en este límite, nuestra conclusión acerca del signo de  $C_1$  se ajusta a lo encontrado por Mjolhus (1978). De todos modos, de esta discusión se desprende que la clasificación en términos del signo de  $C_1$  puede no servir en la región de transición entre los casos estable e inestable. Más precisiones sobre este tema serán presentadas en el Capítulo V.



#### IV. SIMETRIAS DE LA ECUACION NO LINEAL DERIVADA DE SCHRODINGER Y ESTABILIDAD DE LOS SOLITONES.

Nos interesa ahora determinar el comportamiento de los solitones de la DNLS frente a perturbaciones de la forma  $\delta q(x)$  y analizar, si es posible, su estabilidad de Liapunov. Para ello aplicaremos la teoría desarrollada en la introducción. Como este estudio está fuertemente ligado al de las simetrías de la ecuación de evolución y al de las que el solitón rompe, vamos a hacer un análisis previo de estos aspectos formales de la ecuación DNLS.

Vimos en la introducción que la ecuación DNLS puede ponerse como una ecuación de Hamilton con el hamiltoniano  $H=2C_1$ , donde  $C_1$  es la constante definida en (1.71), pero con una simpléctica que no es la standard sino la que aparece en (1.76). Sin embargo es posible pasar a una descripción canonica si definimos el momento conjugado

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} dx q^* \quad (4.1)$$

cuya ecuación de evolución es

$$i P_t + i P_x^2 q + P_{xx} = 0 \quad (4.2)$$

De la expresión (4.1) podemos ver que, mientras  $P(-\infty)=0$ ,  $P(+\infty)$ , que es constante ya que  $\int_{-\infty}^{\infty} dx q^*$  es una cantidad que se conserva para la DNLS (ver (1.72)), sólo se anula si  $\int_{-\infty}^{\infty} dx q = 0$ . P está relacionado

con el potencial vector  $A$  del campo magnético en la medida de Coulomb

$$\partial_x A_y = B_z \quad \partial_x A_z = -B_y \quad (4.3)$$

Si desarrollamos  $A$  perturbativamente ( $A = \epsilon^{-1/2} A^{(1)} + \epsilon^{1/2} A^{(2)} + \dots$ ) entonces

$$P = i s \epsilon^{-1/2} (A_y^{(1)} + i A_z^{(1)}) / (4 |1 - \beta|)^{1/2} \quad (4.4)$$

Las ecuaciones para  $P$  y  $q$  pueden escribirse como un par de ecuaciones canónicas de Hamilton con el mismo hamiltoniano que antes,  $H = 2C_1$ . El pasar a una descripción canónica nos permite obtener el lagrangiano de la DNLS. Este es

$$L = \frac{1}{2} \int dx [(-q P_t + q_t P) - (i(q P_{xx} - q_x P_x) + q^2 P_x^2)] \quad (4.5)$$

Este lagrangiano aparece en Mjølhus (1976) escrito en términos de  $P$  y  $P^*$ .

El lagrangiano definido en (4.5) es invariante frente a traslaciones espaciales y temporales. Las cantidades conservadas asociadas a estas simetrías son  $C_0$  y  $C_1$  las que, formalmente, pueden ser pensadas como el momento lineal y el hamiltoniano. Más aún,  $2C_1$  es el hamiltoniano de la DNLS. El significado físico de  $C_0$  es claro, es proporcional a la energía total del sistema desarrollada a orden  $\epsilon$ . El de la constante  $C_1$ , en cambio, no lo

es. Puede ponérsela como una combinación lineal de tres constantes de movimiento del sistema (1.50): la densidad  $n$ , el momento lineal  $nu$  en la dirección de  $B_0$  y la energía total del sistema. Pero también puede ser interpretada como la combinación de un término de autohelicidad  $\int dx B \cdot (\nabla \wedge B)$  o  $\int dx v_1 \cdot (\nabla \wedge v_1)$  desarrollados a orden  $\epsilon^2$  y un término de flujo de energía al mismo orden.

El lagrangiano  $L$  es también invariante frente a cambios de la forma  $q \rightarrow q \exp(i\epsilon)$ ,  $P \rightarrow P \exp(-i\epsilon)$ . Esta simetría, que llamaremos invariancia de medida o de rotación de la fase, da lugar a la conservación de la cantidad

$$K = i \int dx qP \quad (4.6)$$

Esta cantidad puede ser formalmente considerada como una carga. Es ésta una nueva constante para la DNLS que toma valores reales sólo si  $P(+\infty) = 0$ . Por lo tanto vamos a definir

$$C_{-1} = i/2 \int dx (qP - q^*P^*) \quad (4.7)$$

que siempre es real. Esta constante tiene una interpretación física clara. Si la escribimos en función del potencial vector y del campo magnético resulta

$$C_{-1} = -1/(4(1-\beta)) \int dx B^{(1)} \cdot A^{(1)} \quad (4.8)$$

Por lo tanto, es proporcional al término de orden más bajo no nulo

en el desarrollo perturbativo de la helicidad  $\int dx A \cdot B$  del sistema. La helicidad, que es un invariante de las ecuaciones MHD ideales, no lo es del conjunto (1.50), sino de su desarrollo perturbativo a orden  $\epsilon^2$ .

Como los solitones de la DNLS son cargados, conviene definir la variable  $\tilde{q}$  segun

$$\tilde{q} = q \exp(i \eta^2 t) \quad (4.10)$$

cuya ecuación de evolución es

$$i \tilde{q}_t - \eta^2 \tilde{q} + i s (|\tilde{q}|^2 \tilde{q})_x + \tilde{q}_{xx} = 0 \quad (4.11)$$

Esta ecuación posee solitones no cargados, iguales a los de la DNLS (1.78-1.81) con parámetros  $\eta^2 = 4 \Delta^4$  y  $\tilde{\sigma}$ , pero sin la dependencia temporal  $\exp(i 4 \Delta^4 t)$  que aparece en (1.78). A su vez, resulta a veces conveniente pasar al sistema de referencia del solitón. Si éste se mueve con velocidad  $v = -4s \Delta^2 \cos(\tilde{\sigma})$  ( $4 \Delta^4 = \eta^2$ ), la ecuación (4.11) se transforma en

$$i \tilde{q}_t - i v \tilde{q}_x - \eta^2 \tilde{q} + i s (|\tilde{q}|^2 \tilde{q})_x + \tilde{q}_{xx} = 0 \quad (4.12)$$

El solitón (1.78-1.81) con  $\eta^2 = 4 \Delta^4$  es una solución de equilibrio de (4.12). La nueva constante,  $C_{-1}$ , nos permite escribir a las ecuaciones (4.11) y (4.12) y a las de la variable conjugada  $P$  como un par de ecuaciones de Hamilton con el hamiltoniano

$$\tilde{H} = H - \eta^2 C_{-1} \quad (4.13)$$

para (4.11) y

$$\hat{H} = H - \eta^2 C_{-1} - v C_0 \quad (4.14)$$

para (4.12).

Consideremos la ecuación (4.12). Nos interesa estudiar la estabilidad de aquellos solitones  $\tilde{q}_0$  que son solución de equilibrio de la misma. Si desarrollamos el hamiltoniano  $\hat{H}$  alrededor de  $\tilde{q}_0$  como a  $\mathcal{L}$  en (1.39), podemos ver que el término de primer orden en la perturbación  $\delta q$  ( $\hat{H}^{(1)}$ ) se anula. Por lo tanto  $\hat{H}$  puede servir para estudiar la estabilidad formal de los solitones. Este cálculo coincide con lo expuesto en la introducción en la sección dedicada a la discusión de los métodos estadísticos. En particular habíamos visto allí que, para solitones cargados, era necesario someter el hamiltoniano al vínculo carga=constante para obtener los solitones de velocidad cero como extremo (Rajaraman y Raj Lakshmi, 1982). Pero para estos solitones en el caso DNLS es  $\tilde{H} = \hat{H}$ . El hecho de que  $\hat{H}^{(1)}$  se anule para los solitones de parámetros  $\eta^2$  y  $v$  se puede interpretar del siguiente modo. Es necesario someter al hamiltoniano  $H$  a los vínculos de carga ( $C_{-1}$ ) y momento ( $C_0$ ) constantes para obtener los solitones como extremales (ya que en principio no sabemos si son verdaderos extremos o puntos de ensilladura) del mismo. Se ve entonces la diferencia con el caso

KdV (Benjamin, 1972) descrito en la introducción, en el que era necesario imponer un solo vínculo. Esto es debido a que los solitones KdV están caracterizados por un único parámetro mientras que los solitones DNLS requieren dos. Finalmente, todo está relacionado al número de simetrías que los solitones rompen en cada caso.

Analicemos ahora la segunda variación de  $\hat{H}$

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(2)} = \int dx & (i \delta q \delta P_{xx} - i \gamma^2 \delta q \delta P - v \delta q \delta P_x + 2 \delta q \delta P_x q_0 P_{0x} \\ & + \delta q^2 P_{0x}^2 / 2 + \delta P_x^2 q_0^2 / 2) \end{aligned} \quad (4.15)$$

para  $P(\infty) = 0$ .

Escrita en términos de la parte real y la imaginaria de  $q_0 = a_0 + i b_0$  y de la perturbación  $\delta q = c_x + i d_x$  resulta

$$\hat{H}^{(2)} = -s \int dx \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \underline{H} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

con

$$\underline{H} = \begin{pmatrix} \underline{I} & \underline{\partial}_x \end{pmatrix} \cdot \underline{A}^+ (a_0, b_0) \quad (4.17)$$

o bien

$$\underline{H} = -\underline{A} (a_0, b_0) \cdot \begin{pmatrix} \underline{I} & \underline{\partial}_x \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

con  $\underline{I}$  la matriz identidad y  $\underline{A}^+$  y  $\underline{A}$  dos operadores, uno el adjunto del otro, definidos por

$$\underline{A}(a,b) = \begin{pmatrix} -s((3a^2+b^2)\dots)_x + v\partial_x & \eta^2 - \partial_x^2 - 2s(ab\dots)_x \\ \eta^2 + \partial_x^2 - 2s(ab\dots)_x & -s((3b^2+a^2)\dots)_x + v\partial_x \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

$$\underline{A}^+(a,b) = \begin{pmatrix} s(3a^2+b^2)\partial_x - v\partial_x & -\eta^2 + \partial_x^2 + 2sab\partial_x \\ \eta^2 - \partial_x^2 + 2sab\partial_x & s(3b^2+a^2)\partial_x - v\partial_x \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

Se puede ver entonces que  $\underline{H}$  es autoadjunto y que  $\hat{H}^{(2)}$  es el hamiltoniano asociado a las ecuaciones de evolución linealizadas de  $\delta q$  y  $\delta p$  (Ponce Dawson y Ferro Fontán, 1988c). Esto nos dice que  $\hat{H}^{(2)}$  es una constante de movimiento para el flujo linealizado y que es candidato a ser el funcional de Liapunov para estudiar la estabilidad lineal (Holm y Kupershmidt, 1986).

Los solitones son soluciones de equilibrio de la ecuación (4.12) que rompen la invariancia de medida y de traslación espacial (ver su expresión en (1.78)-(1.81)). Por lo tanto, debido al teorema de Goldstone (ver por ejemplo Morrison y Eliezer 1986), la matriz de masa, en nuestro caso  $\underline{H}$ , tendrá tantos autovalores nulos como simetrías rotas. La existencia de estos autovalores significa, para el estudio de estabilidad, que la solución de equilibrio no es

un mínimo aislado sino que posee direcciones de estabilidad neutral (Morrison y Eliezer, 1986). Este es un hecho conocido en el caso de solitones y es por eso que sólo es posible estudiar su estabilidad de forma. En nuestro caso la degeneración del autovalor nulo es dos y los autovectores correspondientes son

$$z_1 = \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^{\lambda} dx \, b_0 \\ \lambda \\ -\int_{-\infty}^{\lambda} dx \, a_0 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

$$z_2 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

El primero de ellos corresponde a una perturbación  $\delta P = i P_0$ ,  $\delta q = -i q_0$  y el segundo a  $\delta P = P_0 x$ ,  $\delta q = q_0 x$ . Además estos autovectores expanden el núcleo del operador  $\underline{A}^+$ , lo cual nos va a servir para demostrar por qué el funcional de Liapunov para los solitones debe construirse con tres constantes de movimiento.

Definamos el gradiente  $G_n$  de una constante de movimiento  $C_n$  de la ecuación DNLS como

$$G_n = \begin{pmatrix} \delta C_n / \delta a \\ \delta C_n / \delta b \end{pmatrix} \quad (4.23)$$



donde  $a$  y  $b$  son las partes real e imaginaria de  $q$ , y el producto escalar entre dos vectores  $u$  y  $v$  por

$$\langle u, v \rangle = \int dx \ u \cdot v \quad (4.24)$$

Extendiendo los resultados de Lax (1968), es posible mostrar que  $\langle G_n[w], z \rangle$  es independiente del tiempo si el vector  $w = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  satisface la ecuación (4.11) y  $z$  la misma ecuación linealizada alrededor de  $w$ , ambas escritas en parte real e imaginaria (Ponce Dawson y Ferro Fontán, 1988c). En particular, tomando una solución  $w_0$  tipo solitón (con  $\eta^2 = 4\Delta^4$ ) y usando la invariancia del producto escalar (4.24) frente a traslaciones se obtiene

$$\langle A^+(w_0) \cdot G_n(w_0(x)), z(x+vt) \rangle = 0 \quad (4.25)$$

Como en un instante dado  $z$  puede elegirse arbitrariamente, de (4.25) se desprende que

$$A^+(w_0) \cdot G_n(w_0(x)) = 0 \quad (4.26)$$

Es decir, todos los gradientes  $\{G_n(w_0)\}$ , con  $w_0$  un solitón, pertenecen al núcleo de  $A^+$ . Como vimos antes, éste es de dimensión dos. Por lo tanto es posible escribir un gradiente cualquiera como una combinación lineal de dos de ellos

$$G_n = D_{nm} G_m + E_{nr} G_r \quad (4.27)$$

donde  $D_{nm}$  y  $E_{nr}$  son constantes reales que dependen de  $\eta^2$  y  $v$ . En particular, encontramos

$$2 G_1 - v G_0 - \eta^2 G_{-1} = 0 \quad (4.28)$$

que es la primera variación de  $\hat{H}$ , y

$$2 G_2 + v G_1 - \eta^2 G_{-1} = 0 \quad (4.29)$$

que es la primera variación de

$$F = 2 C_2 + v C_1 - \eta^2 C_0 \quad (4.30)$$

Por otro lado, pudimos ver que para  $n \geq 3$  es

$$C_n [w_0] + v(n-1)/n C_{n-1} [w_0] + \eta^{2(n-2)}/n C_{n-2} [w_0] = 0 \quad (4.31)$$

por lo que suponemos que siempre es posible escribir el gradiente  $G_n$  en función de  $G_{n-1}$  y  $G_{n-2}$  con  $D_{n,n-1}$  proporcional a  $v$  y  $E_{n,n-2}$  proporcional a  $\eta^2$ . Todas estas combinaciones de tres constantes cuya primera variación es anulada por los solitones son candidatos a ser funcionales de Liapunov para el estudio de su estabilidad.

Tomemos  $\mathcal{L} = \hat{H} - \hat{H}[q_0]$  como el funcional de Liapunov. Es posible ver que, tanto  $\mathcal{L}$  como su expansión a segundo orden  $\mathcal{L}^{(2)}$  pueden tomar valores negativos. En particular, siguiendo el trabajo de

Grillakis et al (1987) encontramos que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}_\eta \mathbf{w}_0 \rangle_\nu, \underline{H} \cdot \mathcal{D}_\eta \mathbf{w}_0 \rangle_\nu &> \langle 0 \\ \langle \mathcal{D}_\nu \mathbf{w}_0 \rangle_\eta, \underline{H} \cdot \mathcal{D}_\nu \mathbf{w}_0 \rangle_\eta &> \langle 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

por lo que  $\underline{H}$  debe tener al menos un autovector de autovalor negativo. Esto nos muestra que los solitones no son formalmente estables, ya que  $\mathcal{L}^{(2)}$  no es siempre positivo. Pero esto no significa que no sean estables en el sentido (1.38). De lo que expuesto en la introducción para el caso de la ecuación KdV, podemos deducir que sólo es posible demostrar la estabilidad usando la condición suficiente (1.39) en un espacio de fases reducido que, en este caso debería estar definido por un valor fijo de  $C_0$  y otro de  $C_{-1}$ . Una vez demostrada esta estabilidad condicional, siguiendo el razonamiento de Benjamin (Benjamin, 1972) explicado en la introducción, es inmediato deducir la estabilidad en el caso general usando desigualdades triangulares. Como cada solitón está unívocamente caracterizado por dos parámetros (dejando de lado la posición y fase iniciales), el haber definido el espacio reducido fijando el valor de dos constantes es lo que permite demostrar la estabilidad general a partir de la condicional.

Ahora bien, la demostración rigurosa de la estabilidad condicional es un problema abierto, cuya dificultad matemática resultó superior a los objetivos planteados en esta tesis. Por ello decidimos efectuar una serie de simulaciones numéricas tomando condiciones iniciales "cercanas" a las de un solitón  $q_0$  de

parametros  $\Delta^2$  y  $\delta$ . En todos los casos se vio que de cada condición inicial emergía un solitón, en principio con nuevos parametros  $\bar{\Delta}^2$  y  $\bar{\delta}$ , más un tren de radiación despreciable. Usando estos resultados y la expresión de las constantes  $C_{-1}$ ,  $C_0$  y  $C_1$  como la suma de un término debido al solitón y otro a la radiación, podemos hacer una estimación grosera del signo de  $\mathcal{L}$ . Las expresiones de estas constantes para el solitón  $q_0$  son (1.85), (1.86) y

$$C_{-1}[q_0] = 2 \operatorname{sen} \delta / \Delta^2 \quad (4.33)$$

y, para el problema perturbado

$$C_{-1}[q_0 + \delta q] = 2 \operatorname{sen} \bar{\delta} / \bar{\Delta}^2 + a \quad (4.34)$$

$$C_0[q_0 + \delta q] = s(4\bar{\delta} + b) \quad (4.35)$$

$$C_1[q_0 + \delta q] = -4 \bar{\Delta}^2 \operatorname{sen} \bar{\delta} + c \quad (4.36)$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son las contribuciones de la radiación,  $a$  y  $c$  tienen signo indefinido, mientras que  $b$  resulta siempre positiva. Si tomamos una perturbación en el espacio de fases reducido, entonces  $C_0[q_0] = C_0[q_0 + \delta q]$ , de donde se desprende

$$\bar{\delta} \leq \delta \quad (4.37)$$

Si  $\delta \leq \pi/2$ , entonces  $\operatorname{sen}(\bar{\delta}) \leq \operatorname{sen}(\delta)$ . Despreciando  $a$  en la expresión (4.34), la igualdad  $C_{-1}[q_0] = C_{-1}[q_0 + \delta q]$  implica

$$\bar{\Delta}^2 \leq \Delta^2 \quad (4.38)$$

Por lo tanto, despreciando  $c$  en (4.36), obtenemos

$$C_1[q_0 + \delta q] \geq C_1[q_0] \quad (4.39)$$

Para  $\pi/2 < \delta < \pi$ , un razonamiento similar nos lleva a

$$-C_1[q_0 + \delta q] \geq -C_1[q_0] \quad (4.40)$$

Ahora bien, como para una perturbación en el espacio de fases reducido es  $\mathcal{L} = C_1[q_0 + q] - C_1[q_0]$ , de esta demostración aproximada se concluye que mientras  $\mathcal{L}$  puede servir como funcional de Liapunov para solitones con  $0 < \delta \leq \pi/2$ ,  $-\mathcal{L}$  es el candidato para aquéllos con  $\pi/2 < \delta < \pi$ .

Aun cuando hubiéramos derivado estos resultados en forma rigurosa, el problema de los autovalores nulos de  $\underline{H}$  todavía persistiría. (Una perturbación en el espacio reducido puede ser tal que  $\mathcal{L}[q_0 + \delta q] = 0$ ). Como ya dijimos esto se resuelve trabajando con clases de equivalencia que, en nuestro caso, están definidas por

$$C_{\Delta, v} = U_{x_0, \varphi_0} \{ q_0(x-vt) \} \quad (4.41)$$

donde  $q_0$  es el soliton de parametros  $\Delta^2$  y  $v = -4s \Delta^2 \cos \delta$ , y el simbolo  $U$  representa la unión sobre todos los valores posibles de  $x_0$  y de  $\varphi_0$ . El definir estas clases de equivalencia significa

recuperar las simetrías rotas por el solitón: ya no se distingue entre dos solitones que difieren en una traslación rígida o en una fase. Al recuperar las simetrías los autovalores nulos de  $\underline{H}$  desaparecen.

Vamos a mostrar ahora con más detalle las simulaciones numéricas. En todos los casos tomamos como condición inicial un solitón de velocidad cero ( $\tau = \pi/2$  en (1.78)-(1.81)) perturbado. (Recordemos que con esta elección el Liapunov es directamente  $\mathcal{L} = \tilde{H} - \tilde{H}[q_0]$ ). En algunos casos, pero no en todos,  $\int dx q = 0$ . Repetimos los cálculos para distintos signos del término no lineal de la DNLS ( $s = \pm 1$ ) y analizamos perturbaciones con  $\tilde{H}[q_0 + \delta q] \gtrless \tilde{H}[q_0]$ . En todos los casos encontramos los siguientes resultados.

a- El pulso inicial decae en la superposición de un solitón más un tren dispersivo.

b- El nuevo solitón es muy parecido al original pero, en general, tiene velocidad no nula.

c- La diferencia entre las velocidades de ambos solitones es mayor cuanto mayor es la diferencia entre los valores que toma la constante  $C_0$  en ambos casos.

d- Cuando la diferencia de valores de  $C_0$  es prácticamente nula, la solución tiende a un solitón con igual módulo que el original. Al no estar analizándose la fase, la perturbación corresponde al

espacio reducido.

Esto puede verse en las Figuras 12 a 15 en las que se compara el módulo del solitón sin perturbar, en todos los casos con  $\gamma = \pi/2$  (línea llena), con el de la solución  $q(x,t)$  (línea punteada) en distintos instantes. La Figura 12 corresponde a un solitón con  $4\Delta^2=0.3$  y una perturbación de la forma

$$\zeta q = A_0 q_{01}(x,t, \Delta_1^2, \delta_1) \quad (4.42)$$

con  $A_0=1$  y  $q_{01}$  una solución tipo solitón de la forma (1.78)-(1.81) y parámetros  $4\Delta_1^2 \sin \delta_1 = 0.3$ ,  $\delta_1 = 0.1$ . El término no lineal es negativo ( $s=-1$ ). La precisión del cálculo se refleja en la pequeña variación de las constantes de movimiento. En particular  $|C_0(t=1)| = 6.671$ ,  $|C_0(t=60)| = 6.667$ ;  $\tilde{H}(t=1) = -1.526$ ,  $\tilde{H}(t=60) = -1.527$ . En este caso encontramos que el valor de  $\tilde{H}$  es menor mientras que el de  $|C_0|$  es mayor que para la situación sin perturbar ( $\tilde{H}[q_0] = -1.2$ ,  $|C_0[q_0]| = 6.28$ ). Luego de un tiempo se observa un solitón de parámetros  $4\bar{\Delta}^2, \bar{\delta}$  que viaja con una velocidad negativa. Esto es fácil de explicar usando las relaciones (1.81) y (4.35) y despreciando en esta última la contribución de la radiación (b). Como  $|C_0[q_0 + \zeta q]| > |C_0[q_0]| = 2\pi$ , entonces  $\bar{\delta} > \delta$ , y, por lo tanto,  $\cos \bar{\delta} < 0$ . Por otro lado, como es  $s=-1$ , resulta  $\bar{v} = 4\bar{\Delta}^2 \cos \bar{\delta} < 0$ .

La Figura 13 también corresponde a un solitón con  $4\Delta^2=0.3$  y una perturbación de la forma (4.42) con  $4\Delta_1^2 \sin \delta_1 = 0.7$ ,  $A_0=0.4$  y  $\delta_1 = 0.65$ . El término no lineal es negativo ( $s=-1$ ). Para esta

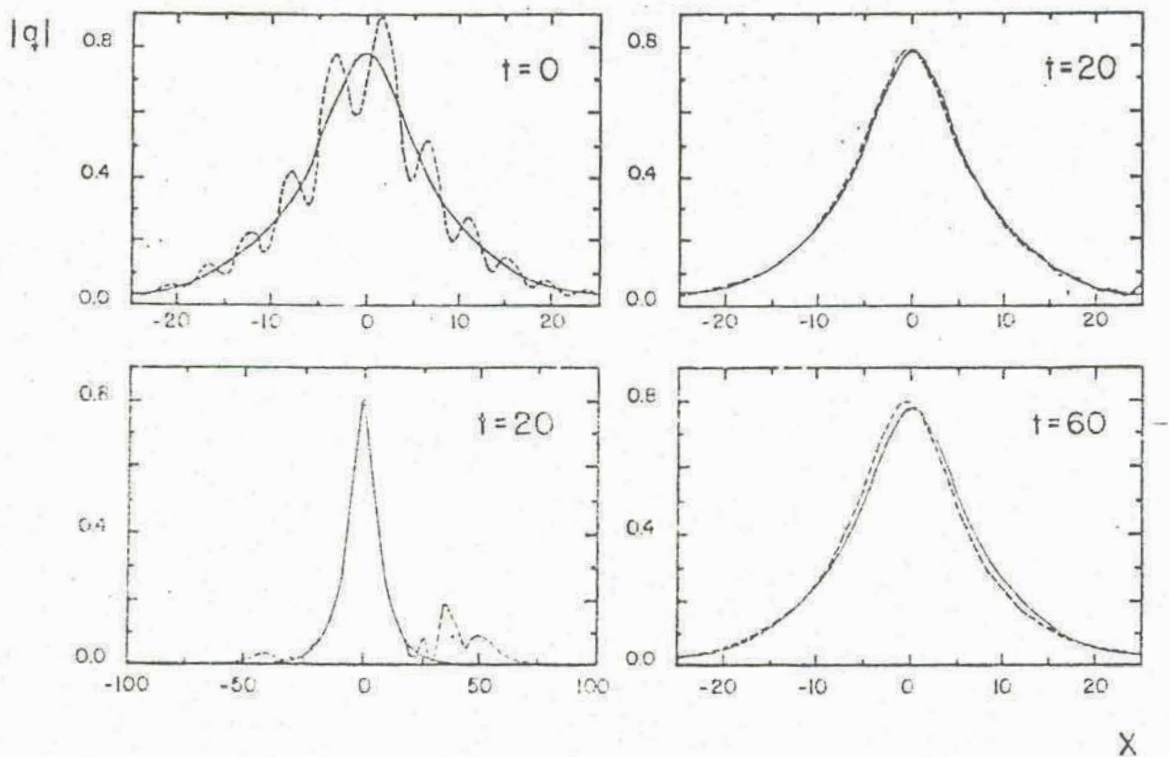
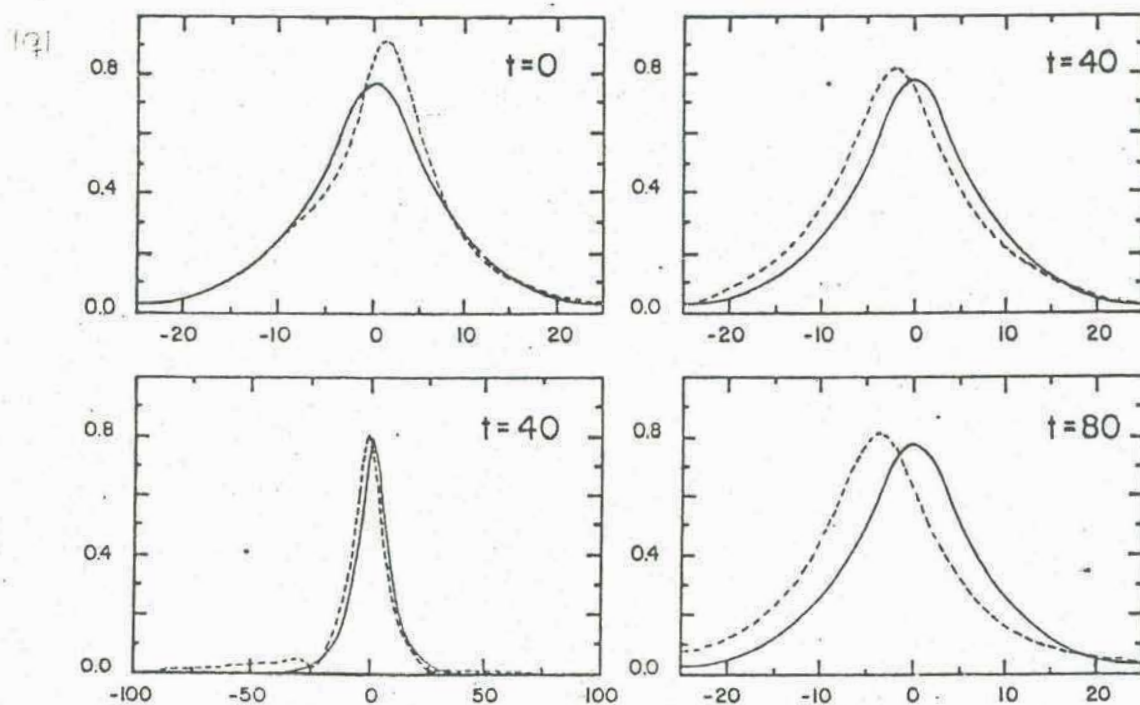


Figura 12 Se grafican las amplitudes  $|q(x,t)|$  (línea punteada) y  $|q_0(x)|$  (línea llena) para distintos instantes  $t$ . El pulso inicial es de la forma  $q_0 + \delta q$  con  $q_0$  un solitón (1.78)-(1.81) de velocidad cero ( $\delta = \pi/2$ ) y  $4\Delta^2 = 0.3$  y  $\delta q$  de la forma (4.42) con  $A_0 = 1$ ,  $4\Delta_1 \sin \delta_1 = 0.3$  y  $\delta_1 = 0.1$ . El término no lineal es negativo ( $s = -1$ ),  $\Delta t = 0.5$  y  $2N = 590$  con  $x \in (-100, 100)$ . Vemos que la perturbación sólo mueve lentamente el solitón hacia la izquierda. En la Fig. 12-c podemos ver la componente de radiación que se dispersa con el tiempo.





X

Figura 13 Idem Figura 12 con  $4\Delta^2=0.3$ ,  $4\Delta^2$ isen  $\gamma_1=0.7$ ,  $\gamma_1=0.65$  y  $A_0=0.4$ . Vemos también en este caso un solitón que se desplaza hacia la izquierda con una velocidad mayor que el de la figura anterior. Esto es debido a que, en este caso, la diferencia entre los valores de  $C_0$  para los casos perturbado y sin perturbar es mayor que en la situación de la figura anterior.

simulación es  $|C_0(t=1)| = 7.045$ ,  $|C_0(t=80)| = 7.032$ ;  $\tilde{H}(t=1) = -1.150$ ,  $\tilde{H}(t=80) = -1.150$ . La perturbación hace crecer el valor de  $\tilde{H}$ . Sin embargo, el nuevo solitón viaja con una velocidad negativa de valor absoluto mayor que en el caso de la Figura 12. Este comportamiento puede explicarse como antes. El hecho de que el valor de  $\tilde{v}$  sea aquí mayor es debido a que la diferencia entre los valores de  $|C_0|$  antes y después de perturbar es también mayor. Se pueden encontrar situaciones similares a las de las Figuras 12 y 13 para  $s=1$  con la diferencia de que en ese caso los nuevos solitones viajan hacia la derecha.

La Figura 14 corresponde a un solitón con  $4\Delta^2 = 0.14$  y una perturbación de la forma

$$q = A_0 \exp(-x^2/\ell^2) (-2x/\ell^2 \cos(2\pi x/\lambda) - 2\pi/\lambda \sin(2\pi x/\lambda)) \\ + i A_0 \exp(-\bar{x}^2/\ell^2) (-2\bar{x}/\ell^2 \cos(2\pi \bar{x}/\lambda) - 2\pi/\lambda \sin(2\pi \bar{x}/\lambda)) \quad (4.43)$$

con  $A_0 = 0.1$ ,  $\ell = 30$ ,  $\lambda = 20$  y  $\bar{x} = x - 2$ . El término no lineal es positivo. Para esta simulación es  $|C_0(t=1)| = 6.282$ ,  $|C_0(t=200)| = 6.287$ ;  $\tilde{H}(t=0.25) = -0.5441$ ,  $\tilde{H}(t=200) = -0.5441$ ; y  $\tilde{H}[q_0] = -0.56$ ,  $|C_0[q_0]| = 6.28$ . En este caso la perturbación aumenta el valor de  $\tilde{H}$  mientras que  $|C_0|$  prácticamente no varía. Si sólo comparamos los módulos de  $q_0$  y  $q_0 + \delta q$  esta perturbación actúa como tal en el espacio de fases reducido. Observamos que, luego de un transitorio, el pulso tiende al solitón no perturbado. No continuamos la integración numérica más allá de  $t=200$  ya que la radiación, que en realidad se dispersa, volvía a entrar al sistema perturbándolo. Este efecto, debido al

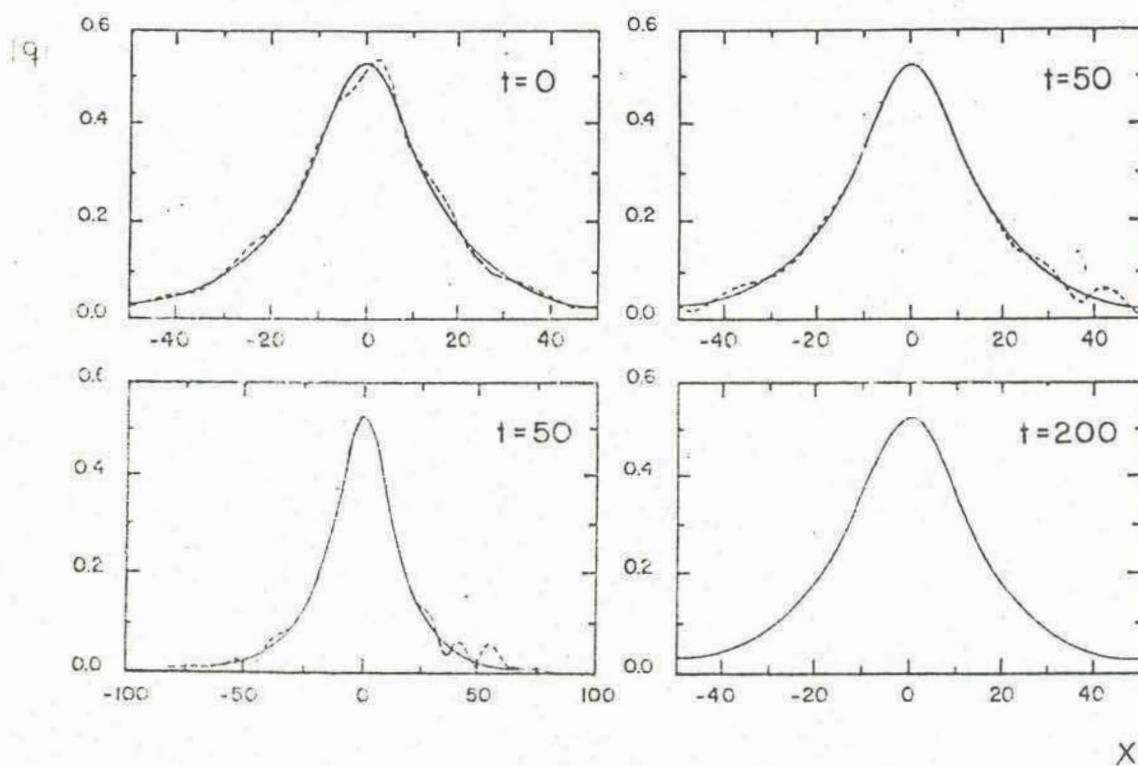


Figura 14 Idem Figura 12. Ahora la perturbación es de la forma (4.43) con  $A_0=0.1$ ,  $\ell=30$  y  $\lambda=20$  y el solitón sin perturbar es de parámetros  $\gamma=\pi/2$  y  $4\Delta^2=0.14$ . El término no lineal es positivo ( $s=1$ ),  $\Delta t=0.25$ ,  $2N=570$  y  $x \in (-200, 200)$ . En este caso, como  $|C_0|$  prácticamente no varía, la condición inicial elegida tiende al solitón sin perturbar.

uso de condiciones de contorno periódicas, no debería verse si la longitud de periodicidad fuera infinita.

Por último, la Figura 15 corresponde a un solitón con  $4\Delta^2=0.15$  y una perturbación de la forma (2.9) con  $A_0=0.01$ ,  $\lambda=-100$ ,  $\ell=14$ , para la cual es  $\int dx q \neq 0$ . En esta simulación el término no lineal es negativo y las constantes varían según  $|C_0(t=1)|=6.179$ ,  $|C_0(t=2000)|=6.188$ ;  $\tilde{H}(t=1)=-0.5999$ ,  $\tilde{H}(t=2000)=-0.5999$ ; mientras que  $\tilde{H}[q_0]=-0.6$ ,  $|C_0[q_0]|=6.28$ . En este caso es  $|C_0[q_0+\delta q]| < |C_0[q_0]|$  y, por lo tanto, observamos que el nuevo solitón viaja hacia la derecha.

Se concluye de estas simulaciones que las perturbaciones sólo imparten movimiento a los solitones dejando su forma prácticamente invariante. Comprobamos que en este caso ocurre algo similar a lo deducido por Scharf y Wreszinski (1981) para la ecuación KdV: una perturbación sólo traslada levemente el autovalor del espectro discreto asociado al solitón, pero no lo destruye ni crea nuevos autovalores. Es interesante notar también la pequeña variación que produce la integración numérica en la combinación de constantes  $\tilde{H}=2C_{-1}-4\Delta^4C_{-1}$  que definen el Liapunov del sistema. La variación encontrada para  $C_{-1}$  y  $C_1$  por separado es bastante mayor (del orden del 1 o 2%).

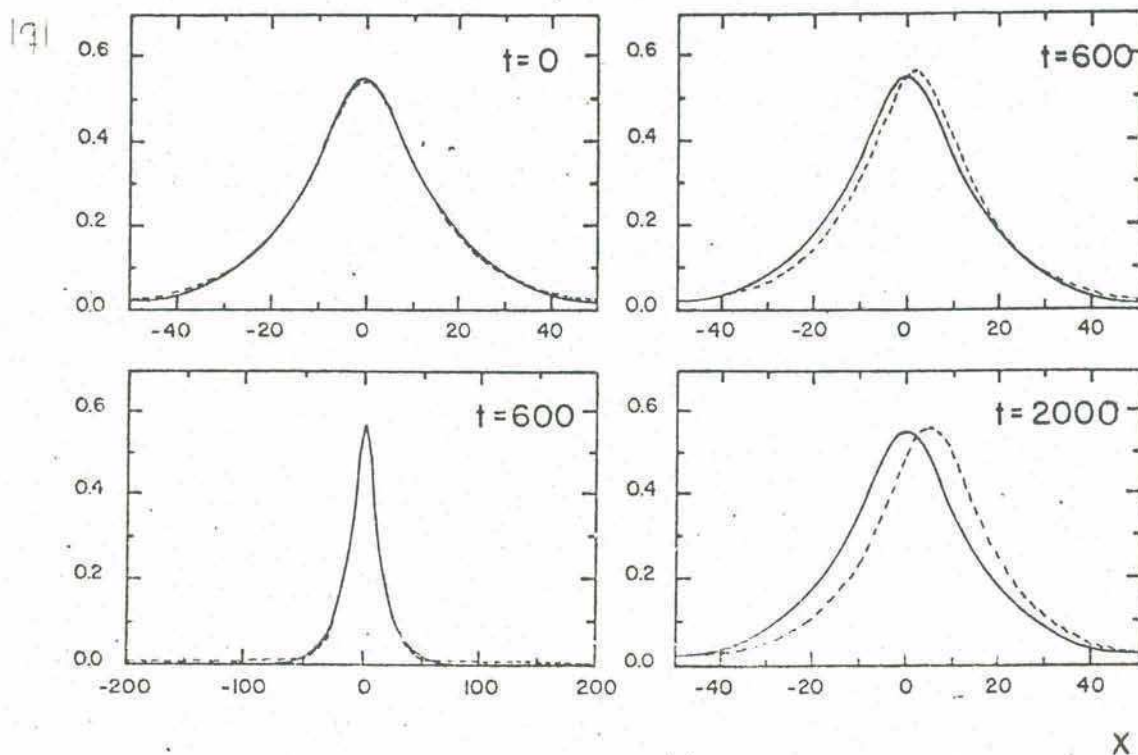


Figura 15 Idem Figura 12. Ahora el solitón es de parámetros  $4\Delta^2=0.15$  y  $\delta = \pi/2$  y la perturbación es de la forma (2.9) con  $A_0=0.01$ ,  $\lambda=14$  y  $\lambda=-100$ . El término no lineal es negativo,  $\Delta t=2$ ,  $2N=600$  y  $x \in (-200, 200)$ . Vemos en este caso un solitón que viaja hacia la derecha. Esto es debido a que la perturbación provoca una disminución en el valor de  $|C_0|$ . Pudimos seguir la integración numérica hasta  $t=2000$  debido a que la componente de radiación es despreciable, como se ve en la Fig. 15-c.

## V. ESTADISTICA DE SOLITONES DE ALFVEN. CALCULO DE LA DISTRIBUCION DE SOLITONES COMO FUNCION DE LAS CONDICIONES INICIALES.

En la introducción presentamos los distintos métodos estadísticos que suelen emplearse para sistemas dinámicos con ecuaciones de evolución no lineales y solitones. Veamos entonces cómo podemos aplicar alguno de ellos al caso de la turbulencia de Alfvén.

Vimos que los desarrollados en el primer grupo (Kingsep et al., 1973 y Rudakov y Tsytovich, 1978) fueron desarrollados para las ecuaciones de Zakharov. Podríamos entonces tratar de extenderlos al par de ecuaciones (1.60). Estas ecuaciones poseen solitones muy similares a los de la ecuación DNLS. En particular, los solitones (1.78)-(1.81) con  $\delta = \pi/2$  son soluciones de (1.60) y los de velocidad  $v$  (1.81) tal que  $|v| \ll 1$  lo son en forma aproximada. Si bien no existen simulaciones numéricas de las ecuaciones (1.60) ni estudios analíticos que permitan deducir como interactúan solitones y ondas sonoras, podemos suponer que los primeros pueden fusionarse o romperse debido a la presencia de las segundas. Siguiendo los métodos estadísticos mencionados podríamos describir los estados accesibles del sistema como de  $N$  solitones idénticos con  $N$  variable debido a estos procesos de fusión y ruptura.

Los métodos descriptos en segundo lugar son más adecuados para el caso de la ecuación DNLS, ya que ésta es totalmente integrable. Pero para poder aplicar el tratamiento de Matsuno

(1977) es necesario obtener una expresión de la función de distribución de solitones como funcional de las condiciones iniciales o, al menos, contar con una estimación del número de solitones para poder usar el tratamiento de Meiss y Horton (1982). Haremos este cálculo más adelante en este capítulo.

Algo que caracteriza los dos métodos mencionados es el hecho de suponer que un estado del sistema está formado principalmente por solitones. Mientras en el primer grupo todos los estados con número de solitones entre 1 y un valor máximo son equiprobables, en el segundo el peso relativo de cada estado es el de la condición inicial que le dio lugar (se prepara el ensamble estadístico sobre las condiciones iniciales). En el tercer método presentado (función de partición) también encontramos solitones, ya que en el caso del ejemplo (1.34) (ecuación S-G), éstos minimizan la energía. Pero, si queremos aplicar este método al caso de la ecuación DNLS nos hallamos ante el mismo problema que enfrentó Tasso (1983) en el caso KdV. El hamiltoniano de estas ecuaciones no es la energía. Peor aún, en el espacio de las funciones no está acotado inferiormente. Por otro lado, si eligiéramos una distribución canónica en energía los solitones no se manifestarían, ya que no son extremos de este funcional. En el Capítulo anterior vimos que los solitones de la ecuación DNLS anulan la primera variación del hamiltoniano sometido a dos vínculos ( $C_{-1}$  y  $C_0$  constantes). Si se pudiera demostrar rigurosamente nuestro resultado aproximado, es decir, que son mínimos de  $H$  con estos vínculos, estaríamos en condiciones de extender el trabajo de Rajaraman y Raj-Lakshmi (1982). Se podría

proponer una función de partición de la forma (1.35) con el hamiltoniano de la DNLS ( $H=2C_1$ ) reemplazando  $\delta(Q-Q_0)$  por  $\delta(C-1-K)$ .  $\delta(C_0-D)$ , siendo  $K$  y  $D$  los valores fijos de  $C-1$  y  $C_0$ . Pero, ¿cuál sería la justificación de esta distribución de probabilidades? Para ello vamos a usar alguno de los elementos de los métodos del cuarto grupo.

Consideremos la probabilidad en el espacio de funciones  $\mathcal{P}(q,t) \Delta q$  de que el sistema se halle alrededor del estado  $q$  al tiempo  $t$ . En el caso de un sistema hamiltoniano, como la ecuación DNLS, la densidad  $\mathcal{P}$  satisface la ecuación de Liouville (Haken, 1978)

$$\mathcal{P}_t = \{ \mathcal{P}, H \} \quad (5.1)$$

con  $H=2C_1$  y  $\{ , \}$  el corchete de Poisson definido en (1.75). En particular, si tomamos una densidad  $\mathcal{P}$  que sea función de alguna constante de movimiento de la ecuación dinámica valdrá

$$\mathcal{P}(q,t) = \mathcal{P}(q,0) \quad \forall t \quad (5.2)$$

Por lo tanto las probabilidades asociadas a una distribución canónica en energía o la extensión de (1.35) son soluciones de (5.1)  $\forall t$ . De este modo trasladamos el problema a la elección de la condición inicial y no hay nada que nos haga inclinar por una u otra.



Ahora bien, si agregamos ruido blanco y disipación a la ecuación dinámica, la función  $\mathcal{P}$  deberá satisfacer una ecuación tipo Fokker-Planck (1.36). Puede demostrarse en ciertos casos que esta ecuación posee una solución de equilibrio  $\mathcal{P}_0$  que además es un atractor (Graham, 1978). Por lo tanto, cualquier condición inicial tenderá a esa solución de equilibrio para la densidad de probabilidad. De este modo, teniendo en cuenta en forma realista los términos de ruido y disipación que deberían agregarse a la ecuación DNLS podríamos justificar la elección de una dada medida invariante. Es de esperar que, si con estos nuevos términos los solitones siguen predominando su peso debería manifestarse también en la densidad de probabilidad  $\mathcal{P}_0$ .

De todos estos métodos estadísticos, nos interesan los del segundo grupo, aun cuando en el próximo capítulo vamos a hacer una aplicación ad-hoc de los mencionados en primer lugar. Ya que discutimos un poco acerca de la justificación de la elección de una determinada distribución de probabilidad en base a las ecuaciones de Liouville y Fokker-Planck, es interesante analizar en este marco el método de Matsuno (1977). Este método consiste en suponer que la solución asintótica de una ecuación de evolución totalmente integrable puede escribirse como

$$q(x,t) = \sum_i q_{0i}(x,t; x_{0i}, \psi_{0i}, \{\Delta_j\}) \quad (5.3)$$

donde  $q_{0i}$  representa una solución de tipo solitón de parámetros  $\{\Delta_j\}$  ubicado inicialmente en el punto  $x_{0i}$  y con una fase inicial

$\psi_{0i}$ . Suele suponerse que las cantidades  $\psi_{0i}$  y  $x_{0i}$  están distribuidas al azar con una distribución uniforme sobre un dado intervalo. De este modo, sólo se mantiene la dependencia con las condiciones iniciales a través de los parámetros  $\{\Delta_j^i\}$ . Ahora bien, la ecuación que debe satisfacer  $\mathcal{P}(q,t)$  en el caso totalmente integrable es la de Liouville (5.1), por lo que vale la relación (5.2) si  $\mathcal{P}(q,0)$  es función de constantes de movimiento. Por ejemplo, si elegimos inicialmente una función de la energía, todos los estados de igual energía serán equiprobables. Pero en la expresión (5.3) se está suponiendo que los estados a los que accede el sistema son los que se obtienen únicamente como superposición de solitones. Lo que sucede es que, al desprestigiar la componente de radiación en (5.3), se da por hecho que ésta se disipa. De este modo, los solitones pasan a ser atractores de la ecuación dinámica y, por lo tanto, son los estados más probables. En consecuencia, si conociéramos las variables angulo-acción para la DNLS y sus ecuaciones de evolución (análogas a las que aparecen en (1.25)) el significado del método se reflejaría en la introducción de términos de disipación en las ecuaciones de evolución de las variables vinculadas a la amplitud de la componente de radiación. Pasando de las ecuaciones en los parámetros de la transformada espectral a las variables originales ( $r$  y  $q$ ) obtendríamos la expresión para la nueva ecuación dinámica (que debería depender de las condiciones iniciales, ya que cada condición inicial da lugar a la formación de un tren determinado de solitones). A partir de ésta podríamos obtener la ecuación de evolución para la densidad de probabilidad  $\mathcal{P}(q,t)$ . Integrándola a partir de una dada distribución de

condiciones iniciales, podríamos obtener la correspondiente distribución de solitones. Pero como esto es bastante especulativo, en este capítulo vamos a extender el cálculo de Karpman y Sokolov (1968) al caso de ecuaciones totalmente integrables con solitones de dos parámetros.

El trabajo de Karpman y Sokolov que acabamos de mencionar desarrolla un método para determinar los parámetros de los solitones en el caso de la ecuación KdV usando las constantes de movimiento de dicha ecuación. Este método fue desarrollado contemporáneamente a la resolución de la ecuación KdV por el método de la TEI (Gardner et al., 1967). Nosotros mostraremos cómo se lo puede derivar usando las herramientas de la TEI.

Consideremos la ecuación KdV (1.2). Como ya dijimos en la introducción, el problema de dispersión asociado es (1.7) con  $r=1$ . Los autovalores del espectro discreto son imaginarios puros  $\xi_{k=i} \eta_k$  y las únicas constantes de movimiento  $C_n$  no nulas son las impares que se vinculan con los parámetros de dispersión a través de (1.21). Si la radiación puede despreciarse resulta

$$S_{2m-1} = \sum_{k=1}^N \eta_k^{2m-1} \quad (5.4)$$

donde definimos las variables  $S_{2m-1} = (-1)^m (2m-1) C_{2m-1} / 2^{2m}$  para deshacernos de las constantes numéricas. Introduciendo la notación (Karpman y Sokolov, 1968)

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \eta_1 + \dots + \eta_N; & \sigma_2 &= \eta_1 \eta_2 + \dots + \eta_{N-1} \eta_N \\
 \sigma_{N-1} &= \eta_1 \eta_2 \dots \eta_{N-1} + \dots + \eta_2 \eta_3 \dots \eta_N \\
 \sigma_N &= \eta_1 \eta_2 \dots \eta_N
 \end{aligned}
 \tag{5.5}$$

se puede ver que los  $N$  valores  $\eta_k > 0$  son las raíces del polinomio

$$P_N(z) = z^n - \sigma_1 z^{n-1} + \sigma_2 z^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n \tag{5.6}$$

de orden  $n=N$ . Es fácil mostrar (ver apéndice en el trabajo de Karpman y Sokolov, 1968) que las cantidades  $\sigma_j$  pueden escribirse en función de las  $S_{2m-1}$  con  $1 \leq m \leq N$  resolviendo un sistema lineal de ecuaciones. El problema es que el orden del polinomio depende del número de solitones que también es una incógnita. Para determinar  $N$  lo que se hace es ir variando el orden  $n$  de  $P_n(z)$  partiendo de  $n=1$  hasta obtener un orden para el que todas las raíces  $\eta_k$  son positivas. Se supone que ese orden es  $n=N$ . Obtenidas estas raíces quedan automáticamente determinados los parámetros de los solitones en los que decaerá la condición inicial al seguir la evolución dada por la ecuación KdV. Como se desprende de la expresión (1.44) para los solitones KdV, éstos dependen de un único parámetro: su velocidad  $v$  o su amplitud  $A=v/2$ . Cada amplitud  $A_k$  se vincula con el autovalor correspondiente  $\eta_k$ , y por lo tanto con una raíz de  $P_N(z)$ , según

$$\eta_k^2 = A_k/2 \tag{5.7}$$

Dada una condición inicial para la ecuación KdV de la forma

$$q(x,0)=u_0h(x/l) \quad (5.8)$$

es posible definir el parámetro de similaridad  $s=l u_0^{1/2}$  de modo que condiciones iniciales con igual perfil  $h(X)$  pueden clasificarse de acuerdo al valor de  $s$ . En particular, dada una función  $h(X)$  fija, el número de solitones y sus velocidades sólo dependerán de  $s$ . Llamando  $I_n$  al intervalo de valores de  $s$  para el cual todas las raíces de (5.6) son reales y positivas se puede ver que  $I_n$  e  $I_{n-1}$  tienen intersección no nula (Karpman y Sokolov, 1968). Si llamamos  $s_n$  al extremo izquierdo de  $I_n$  resulta  $s_n \in I_{n-1}$ . Para el polinomio de orden  $n$  es  $\eta'_i(s_n)=0$ ,  $\eta'_i(s_n)>0$  ( $1 \leq i < n$ ) y para el de orden  $n-1$   $\eta'_i(s_n)>0$  ( $1 \leq i < n$ ) donde los valores  $\{\eta'_i\}$  son los de las  $n-1$  raíces positivas de  $P_n$ . Esto puede observarse en la Figura 1 de Karpman y Sokolov, 1968.

Vamos a extender este tratamiento para cubrir el caso de solitones asociados a autovalores complejos del problema (1.7), es decir, solitones que, como los de la ecuación DNLS, dependen de dos parámetros. Todo lo que necesitamos es conocer la expresión de las constantes de movimiento en función de dichos autovalores. Como siempre, estos resultados valen, en el caso de la ecuación DNLS, para el problema transformado (1.67) de autovalor  $\xi = \lambda^2$ . Definimos entonces

$$\bar{S}_{2m-1} = (-1)^m (2m-1) / 2^{2m-1} C_{2m-1} \quad (5.9)$$

y

$$\alpha_k = \begin{cases} -i \xi_k & 1 \leq k \leq N \\ i \xi_k^* & N+1 \leq k \leq 2N \end{cases} \quad (5.10)$$

donde  $N$  es el número de solitones. Entonces, las cantidades  $\bar{S}_{2m-1}$  pueden escribirse como

$$\bar{S}_{2m-1} = \sum_{k=1}^{2N} \alpha_k^{2m-1} \quad (5.11)$$

es decir, tienen la misma expresión que las  $S_{2k-1}$  en función de  $\eta_k$  en el caso KdV. Más aún, en dicho caso los autovalores  $\xi_k$  tienen la forma  $\xi_k = i \eta_k$  con  $\eta_k > 0$ . Por lo tanto, la definición (5.10) da para el caso KdV  $\alpha_k = \alpha_{k+N} = \eta_k$  ( $1 \leq k \leq N$ ). Análogamente a lo hecho en ese caso, definimos  $2N$  cantidades  $\bar{\sigma}_1$  como en (5.5), donde en lugar de  $\eta_1$  debe aparecer  $\alpha_1$ . Todos los  $\bar{\sigma}_1$  así definidos resultan reales. Por lo tanto, el polinomio

$$P_{2n}(z) = z^{2n} - \bar{\sigma}_1 z^{2n-1} + \bar{\sigma}_2 z^{2n-2} - \dots + \bar{\sigma}_{2n} \quad (5.12)$$

poseerá raíces reales o pares de raíces complejas conjugadas. En particular, los  $N$  valores  $-i \xi_k$  y sus conjugados  $i \xi_k^*$  son todas las raíces del polinomio  $P_{2N}(z)$ . Se sigue entonces el mismo esquema que el desarrollado en el caso KdV. Se va variando el orden del polinomio desde  $2n=2$ . Se computan las cantidades  $\bar{\sigma}_j$  como función de las primeras  $2n$  constantes de movimiento impares  $C_{2k-1}$ ,  $1 \leq k \leq 2n$

resolviendo un sistema lineal de ecuaciones. Dado que todos los valores de  $\xi_k$  en el problema de la TEI son tales que  $\text{Im}(\xi_k) > 0$ , los valores de  $\alpha_k$  satisfacen  $\text{Re}(\alpha_k) > 0$  y, por lo tanto, el proceso se detiene cuando se llega a un orden tal que todas las raíces del polinomio sean complejas conjugadas con parte real positiva.

Ahora bien, tanto  $-i\xi_k$  como  $i\xi_k^*$  son raíces del polinomio  $P_{2N}(z)$ , luego dada una raíz  $\alpha_k$  con parte real positiva no podemos saber si es igual a  $-i\xi_k$  o a  $i\xi_k^*$ . Es decir, este cálculo no determina el signo de  $\text{Re}(\xi_k)$ . Para determinarlo podemos usar las  $N$  primeras constantes pares. Escribamos cada autovalor como

$$\xi_k = s_k a_k + i b_k \quad (5.13)$$

donde los valores  $a_k$  y  $b_k$  (positivos) se conocen del cálculo anterior y  $s_k$  es un signo a determinar. Entonces, una constante de movimiento par se podrá poner como

$$C_{2n} = i 2^{2n}/n \left[ \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^n (2^{j-1}) (i b_k)^{2n-2j+1} a_k^{2j-1} s_k^{2j-1} \right] \quad (5.14)$$

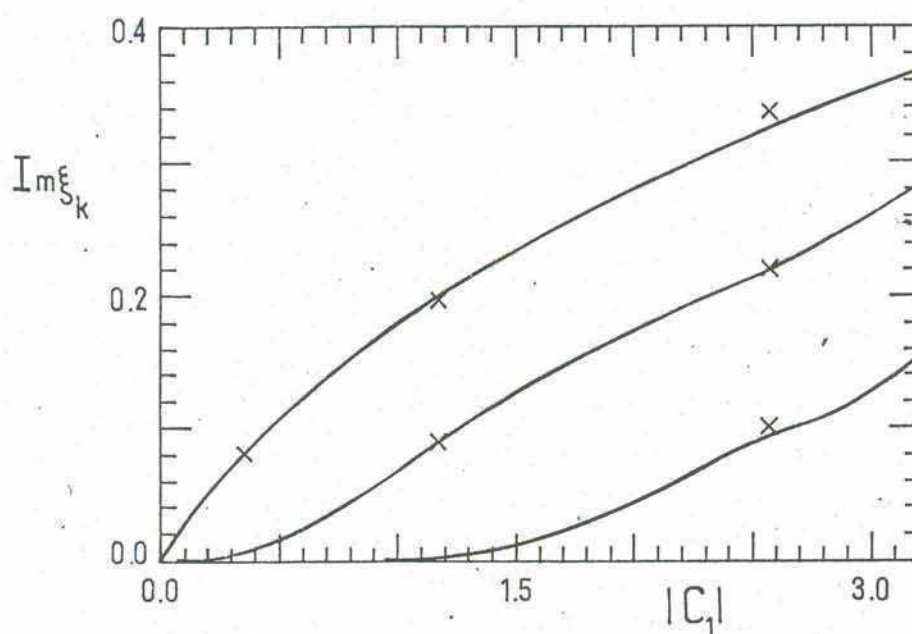
y, como  $s_k^{2j-1} = s_k$ , usando las  $N$  primeras constantes de movimiento pares tenemos un sistema de  $N$  ecuaciones lineales a partir del cual pueden determinarse los  $N$  signos  $s_k$ .

Aplicamos este método a la ecuación DNLS. En este caso, si la condición inicial es tal que  $|C_0| < 2\pi$  la segunda etapa del cálculo puede saltarse. Esto es debido a que, despreciando la radiación,

$|C_0|$  puede escribirse como  $|C_0| = \sum_{k=1}^N 4\delta_k$  donde cada  $\delta_k$  satisface  $0 < \delta_k < \pi$ . Por lo tanto  $|C_0| < 2\pi \Rightarrow \delta_k < \pi/2$ . Cada valor de  $\delta_k$  se vincula con el autovalor  $\xi_k$  según (1.82) donde  $s$  es el signo de la no linealidad en la ecuación DNLS. Se desprende entonces que todos los valores de  $\text{Re}(\xi_k)$  serán positivos si  $s=1$  y negativos en caso contrario.

Estudiamos el caso de una condición inicial de la forma (2.9) para  $\lambda$  variable con  $A_0$  y  $\ell$  fijos,  $A_0=0.5$ ,  $\ell=14$  (análogamente a lo hecho en el capítulo 3). En la Figura 16 pueden verse los valores de  $\text{Im}(\xi_k)$  como función de  $|C_1|$ . La variación de  $\text{Im}(\xi_k)$  con  $|C_1|$  es similar a la de  $\eta_k$  con  $s$  obtenida en el trabajo de Karpman y Sokolov (1968). A medida que aumenta  $|C_1|$  ( $C_1$  es siempre negativa) van apareciendo nuevas raíces y, por lo tanto, nuevos solitones. Este cálculo abarca las simulaciones correspondientes a las Figuras 7-9 del Capítulo III (cruces en la Figura 16). Los valores de  $\xi_k$  obtenidos con este método concuerdan bien con los que pueden estimarse a partir de las figuras del Capítulo III, según se muestra en la Tabla I.





**Figura 16** Se muestran los valores de  $\text{Im } \xi_k$  (parte imaginaria de los autovalores del espectro discreto del problema de dispersión (1.60) con  $\xi = \lambda^2$ ) en función de  $|C_1|$  (línea llena) para una condición inicial de la forma (2.9) con  $A_0=0.5$ ,  $l=14$  y distintos valores de  $\lambda$ . Estos valores, que corresponden a  $s=-1$ , fueron obtenidos a partir de las primeras constantes de movimiento de la ecuación DNLS despreciando la componente de radiación. Indicados con cruces aparecen los valores que pueden deducirse de las Figuras 7-10, las que fueron obtenidas mediante una integración numérica de la ecuación DNLS.

TABLA I

Figura corresp. en el Cap. III	Valores de $\xi_k$ obtenidos con el método de Karpman-Sokolov	Valores de $\xi_k$ estimados a partir de las figuras del C.III
7 ( $\lambda = 5$ )	-0.507+i 0.321	-0.54+i 0.34
	-0.538+i 0.214	-0.54+i 0.22
	-0.580+i 0.0899	-0.54+i 0.11
8 ( $\lambda = 10$ )	-0.265+i 0.0926	-0.26+i 0.085
	-0.213+i 0.199	-0.22+i 0.20
	-0.373+i 0.004	no se puede observar
9 ( $\lambda = 25$ )	-0.052+i 0.0813	-0.05+i 0.083
	-0.158+i 0.0080	no se puede observar

Los autovalores que no pueden deducirse de la simulación numérica, al menos a simple vista, corresponden a solitones de alta velocidad y amplitudes muy pequeñas que entran dentro de la franja de error producida por haber despreciado la radiación. Por otro lado, estos autovalores dependen fuertemente de la precisión del cálculo. Por ambas razones no tiene sentido considerarlos.

Para la ecuación DNLS también puede definirse un parámetro de

similaridad  $\bar{s}=u_0^2$  si la condición inicial es de la forma (5.7) donde ahora  $h$  es una función compleja. Claramente, este parámetro no sirve para una condición inicial de la forma (2.9) ya que existen dos longitudes características:  $\lambda$  para la fase y  $\ell$  para el envoltorio. Es por eso que decidimos graficar los valores de  $\text{Im}(\xi_k)$  en función de  $|C_1|$ .

Volvamos ahora a la igualdad (5.3). Cuando el número de solitones es suficientemente grande se debe poder pasar de la sumatoria discreta a una distribución continua sobre el espacio de los parámetros  $\{\Delta_j\}$

$$q(x,t) = \int d\{\Delta_j\} F(\{\Delta_j\}, [q(t=0)]) q_0(x,t; x_0, \varphi_0, \{\Delta_j\}) \quad (5.15)$$

donde  $F(\{\Delta_j\}, [q(t=0)]) d\{\Delta_j\}$  representa el número de solitones con parámetros  $\Delta_j$  entre  $\Delta_j$  y  $\Delta_j + d\Delta_j$ . Esta función  $F$  es funcional de las condiciones iniciales  $q(t=0)$ . Como dijimos en la introducción, Karpman y Sokolov -en el trabajo antes citado- encontraron la expresión (1.30) para  $F(A, [q(t=0)])$  en el caso KdV, donde  $A$  es la amplitud de los solitones. Vamos a describir brevemente cómo se obtiene esta función usando las herramientas de la TEI.

Como el único parámetro de los solitones KdV es su amplitud  $A_k$ , que se vincula con el autovalor  $\eta_k$  según (5.7), la expresión (5.4) puede ponerse, en el caso continuo, como

$$S_{2m-1} = \int dA (A/2)^{m-1/2} F(A, [q(t=0)]) \quad (5.16)$$

Estas son igualdades entre los infinitos momentos de la función  $F$  y las constantes de la ecuación KdV. Por lo tanto, si se conocen las infinitas constantes de movimiento  $C_{2n-1}$ , es posible invertir la relación (5.16) y determinar  $F$  para esa condición inicial. Por otro lado, las constantes de movimiento impares  $C_{2n-1}$  pueden ponerse, en el caso general, como

$$C_{2n-1} = (2n-2)! / (n!(n-1)!) \left( \int dx [(rq)^n + n(n-1)(n-2)/12 + (q_x^2 r^{n-1} q^{n-3} + r_x^2 q^{n-1} r^{n-3} + c_n r_x q_x q^{n-2} r^{n-2})] \right) \quad (5.17)$$

donde  $r$  y  $q$  ( $R$  y  $Q$  para la ecuación DNLS) son los potenciales del problema (1.7) y  $q^{(m)} = \frac{d^m}{dx^m} q$ . Como  $r=1$  en la ecuación KdV, todos los términos que contienen derivadas de  $r$  se anulan. Karpman y Sokolov (1968) muestran que, si los términos que contienen derivadas espaciales pueden despreciarse frente al que no las contiene (proporcional a  $q^n$ ), la igualdad

$$\int dA (A/2)^{m-1/2} F(A, [q(t=0)]) = \frac{(-1)^m (2m-1)!}{2^{2m} m! (m-1)!} \int_{q(x,0) < 0} dx (-q(x,0))^m \quad (5.18)$$

que viene de reemplazar (5.17) en (5.16) puede invertirse analíticamente en este caso simplificado. La función  $F$  que se obtiene es la que aparece en (1.30) con el número de solitones dado por la expresión (1.31). Es interesante notar que el número de solitones se obtiene integrando sobre una región con  $q(x,0) < 0$ .

Karpman (1968) logró mostrar además usando las mismas simplificaciones que la componente de radiación proviene de las regiones con  $q(x,0) > 0$ . Por lo tanto, la radiación será despreciable, y el tratamiento anterior será válido, si la contribución de las regiones con  $q(x,0) > 0$  es insignificante frente a las de  $q(x,0) < 0$  en el cálculo de las constantes de movimiento. Por otro lado, si en (1.31) se reemplaza  $q(x,0)$  por (5.8) y se pasa de una integral en  $x$  a otra sobre la variable  $X=x/l$ , se puede ver que el número de solitones crece con el parámetro de similaridad  $s$ . Por lo tanto, este tratamiento da mejores resultados cuanto mayor es el parámetro de similaridad.

Esta cuestión del signo de  $q(x,0)$  se vincula con lo discutido en el Capítulo III sobre los solitones y el signo de  $C_1$ . Recordemos que, para KdV, es  $C_1 = \int dx q$  en consecuencia resulta una medida del peso relativo entre las regiones con  $q(x,0) > 0$  y  $q(x,0) < 0$ . De acuerdo a estos resultados, podría haber solitones incluso en un caso con  $C_1 > 0$ , siempre que hubiera regiones con  $q(x,0) < 0$ . Pero ocurre que la amplitud de tales solitones sería menor que la de la componente de radiación por lo que, para poder observarlos en una simulación numérica, sería necesario seguir la integración durante tiempos muy largos sobre una longitud de periodicidad muy grande.

Supongamos que queremos aplicar el mismo razonamiento al caso general de autovalores complejos. En este caso la relación entre las constantes de movimiento y los autovalores es

$$C_n = i 2^n/n \int da db F(a,b,[q(t=0)]) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k (ib)^{n-k} (1+(-1)^{n-k}) \quad (5.19)$$

donde usamos como parámetros de los solitones las partes real e imaginaria del autovalor  $\xi$  ( $\xi = a + i b$ ). Nos encontramos entonces con un problema: las infinitas constantes que podemos conocer no nos permiten invertir la relación (5.19) ya que nos faltan igualdades entre ciertos momentos. Podríamos obtener la distribución de la parte real o de la imaginaria integrando la expresión (5.19) sobre  $a$  o sobre  $b$  para luego tratar de invertirla analíticamente, al menos en el caso simplificado en que pudieran desprejarse los términos con derivadas espaciales. Pero vamos a proceder de otra forma.

Interpretemos el resultado para el caso KdV del siguiente modo. La función de distribución (1.30) es también la de las raíces positivas del polinomio  $P_N(z)$  definido en (5.6) cuando el número de dichas raíces es exactamente  $N$  y cuando las constantes de movimiento pueden reemplazarse por el primer término de (5.17). Pero también es la que da la distribución de las raíces del polinomio  $P_{2N}(z)$ , contadas una vez cada una, cuando todas las raíces son reales, positivas y dos veces degeneradas, la variable  $r$  es  $r=1$  y las constantes de movimiento están simplificadas. ¿Podremos extender analíticamente la expresión (1.30) para el caso en que  $r \neq 1$  y en lugar de  $2N$  raíces reales y positivas se tienen  $N$  pares de raíces complejas conjugadas con parte real positiva? Todo lo que habría que hacer sería reemplazar  $q$  por  $r q$  y  $A$  ( $A=2\eta^2$  con  $\xi = \text{Im } \eta$ ) en el caso KdV por  $2 b^2$  en (1.30) y en (1.31). En ese caso  $F$  sería

la función de distribución de la parte real de dichos pares de raíces, es decir, de la parte imaginaria de los autovalores  $\zeta$ . Por lo tanto, pasando de las raíces de  $P_{2N}(z)$  a los autovalores del problema (1.7), esta extensión, cuya expresión es

$$F(b) = \frac{1}{4\pi} \int_{a < b < \sqrt{-rq(x,0)}} dx / (-rq(x,0) - b^2)^{1/2} \quad (5.20)$$

sería la integral de la función  $F$  en (5.19) sobre todos los valores posibles de  $a$  ( $a = \text{Re}(\zeta)$ ). Por lo tanto  $F(b) d(2b^2)$  daría el número de solitones con parte imaginaria entre  $b$  y  $b+db$  y el número total de solitones sería

$$N = \frac{1}{\pi} \int_{-rq(x,0) > 0} dx (-rq(x,0))^{1/2} \quad (5.21)$$

Decidimos controlar estos resultados en el caso de la ecuación DNLS para distintas condiciones iniciales. En este caso existen dos problemas. El primero es que  $RQ$  no es real, si bien las constantes impares son todas reales ya que los términos imaginarios se anulan al integrar en  $x$ . Por lo tanto, sólo si puede reemplazarse en las integrales el término  $\text{Re}((RQ)^n)$  por  $(\text{Re}(RQ))^n$  es posible usar la expresión (5.21) donde en lugar de  $rq$  debe usarse  $\text{Re}(RQ)$ . El segundo es que en este caso no es muy claro cómo pueden despreciarse términos con derivadas espaciales dentro de las integrales si la misma variable  $R$  contiene una derivación espacial. Las diferencias entre los valores de las constantes calculados de este modo y los verdaderos son mayores cuanto mayor sea el orden de la constante. En particular, la expresión para  $C_1$  es correcta ( $C_1 =$

$\int dx RQ = \int dx \operatorname{Re}(RQ)$ ). Como las constantes de mayor orden se igualan a los momentos de orden superior y éstos sólo reflejan el comportamiento de la función de distribución en las colas, es de esperar que el número de solitones

$$N_s = 1/\pi \int_{-\operatorname{Re}(RQ(x,0)) > 0} dx (-\operatorname{Re}(RQ(x,0)))^{1/2} \quad (5.22)$$

no difiera mucho del verdadero, aunque su distribución

$$F(b) = 1/(4\pi) \int_{0 < b < \sqrt{-\operatorname{Re}(RQ(x,0))}} dx (-\operatorname{Re}(RQ(x,0)) - b^2)^{-1/2} \quad (5.23)$$

en el espacio de los parámetros no sea enteramente correcta. (Recordemos que para la ecuación DNLS es  $b = \Delta^2 \operatorname{sen} \theta$ ).

A pesar de esto, decidimos cotejar la distribución y el número de solitones que predice la función (5.23) para distintas condiciones iniciales. En primer lugar consideramos el trabajo de Mjølhus (1978) donde se determina el número de solitones que da una condición inicial de la forma (3.9) en el caso fuertemente inestable ( $k_0 \gg q_0^2/2$ ) para no linealidad negativa. Este caso es interesante ya que  $\operatorname{Re}(RQ) = RQ$  y  $(RQ)_x = 0$  (recuérdese que para la ecuación KdV es  $r_x = 0$ ). La expresión que da Mjølhus es

$$N \sim (L/\pi) (2q_0^2 k_0)^{1/2} \quad (5.24)$$

y la que se obtiene de (5.22) es



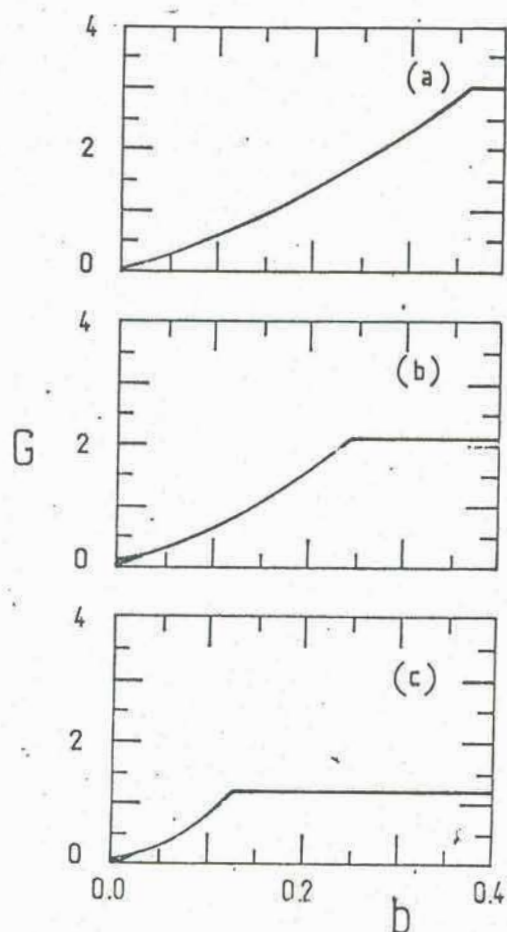
$$N_{\text{a}} = (L/\pi) (2q_0^2 k_0 - q_0^4)^{1/2} \quad (5.25)$$

que coincide con (5.24) en el caso fuertemente inestable.

A continuación decidimos probar el caso de la condición inicial (2.9), para la que ya teníamos varias simulaciones numéricas. Los resultados pueden observarse en la Figura 17, donde la integral

$$G(b) = \int_0^b d(2b'^2) F(b') \quad (5.26)$$

que es el número de solitones asociados a un autovalor con parte imaginaria menor o igual que  $b$ , se grafica en función de  $b$ . El número total de solitones que predice la relación (5.22) es exactamente el que se obtiene de las simulaciones numéricas. En lo que respecta a la distribución, se puede ver que, aproximadamente  $G(b) = n + 1/2$  si  $b$  corresponde al  $n$ -ésimo solitón, numerados en orden creciente de su parte imaginaria. Por lo tanto, la distribución obtenida es una suerte de valor medio de la que ajustaría más exactamente estas simulaciones. De todos modos el número de solitones es demasiado pequeño como para sacar una conclusión definitiva acerca de la exactitud de  $F$ . Por otro lado, vemos que según la fórmula (5.22) sólo las regiones con  $\text{Re}(RQ(x,0)) < 0$  contribuyen a la formación de los solitones. Una vez más, esto coincide con la clasificación de Mjølhus (1976) para distinguir entre los casos modulacionalmente estables ( $\text{Re}(RQ) > 0$ ) y los inestables ( $\text{Re}(RQ) < 0$ ). Cuanto más inestable sea la condición



**Figura 17** Se grafica el número de solitones de la ecuación DNLS con  $\Delta^2 \sin \delta < b$  como función de  $b$  para una condición inicial de la forma (2.9) con  $A_0=0.5$  y  $\lambda=14$ . (a) corresponde a  $\lambda=5$  y muestra que el número total de solitones es  $N_s=3$ . Esto concuerda con lo que se observa en la Figura 7 correspondiente a la misma condición inicial. (b) corresponde a  $\lambda=10$ . En este caso el número de solitones es  $N_s=2$  lo que concuerda con lo observado en la Figura 8. (c) corresponde a  $\lambda=25$ . En este caso el número de solitones es  $N_s=1$  lo que concuerda con lo observado en la Figura 9.

inicial, si valen las hipótesis que llevan a la fórmula (5.22) (en particular, poder despreciar los términos con derivadas frente al proporcional a  $\text{Re}(RQ)^n$  en cada condición inicial), mayor será el número de solitones. La expresión (5.23) nos dice también que no puede haber solitones con parte imaginaria mayor que el máximo de  $(-\text{Re}(RQ))^{1/2}$ . Comparemos esta predicción con lo obtenido por Mjølhus (1978) para el caso inestable. Lo que determina el autor es que, para la condición inicial (3.9), el máximo valor de la parte imaginaria del autovalor es  $(k_0 q_0^2/2 - q_0^4/4)$  y éste es exactamente el valor de  $(\text{Re}(-RQ))^{1/2}$ .

## VI. ESTADISTICA DE SOLITONES DE ALFVEN. APLICACION A OBSERVACIONES DEL VIENTO SOLAR.

En este Capítulo aplicaremos el método estadístico de Matsuno (1977) en la versión simplificada de Meiss y Horton (1982) a la ecuación DNLS. Este modelo será confrontado con el de Kingsep et al. (1973) aplicado al par de ecuaciones (1.60), considerando solitones de la DNLS de baja velocidad. Para ello compararemos las predicciones de ambos modelos con observaciones del viento solar.

Existen dos antecedentes de aplicación al caso del viento solar de algunas de las técnicas de estadística de solitones descritas en la introducción. La primera de ellas (Spangler y Sheerin, 1982) considera los solitones de la ecuación DNLS con  $\hat{\theta} = \pi/4$  y usa directamente el modelo desarrollado para la turbulencia fuerte de Langmuir producida a partir de un estado de turbulencia débil (Rudakov y Tsytovich, 1978), sin identificar cuáles son los mecanismos responsables de tal evolución. En ningún momento los autores mencionan al sistema de ecuaciones (1.60), adoptando de partida la ecuación DNLS (totalmente integrable). Si bien puede encontrarse una justificación a este modelo, los autores no lo hacen.

El segundo de los antecedentes es un trabajo de Ovenden et al (1983) en donde, a partir de las ecuaciones MHD se deduce un sistema de ecuaciones para las perturbaciones de densidad  $\delta n$  y velocidad paralela al campo magnético ambiente  $\delta u$  acopladas a una ecuación

para la amplitud lentamente variable  $b$  de una onda de Alfvén que se propaga a lo largo de  $B_0$

$$\begin{aligned} (B_y - iB_z)/(4|1-\beta|)^{1/2} &= b \exp(i(kAx - \omega At)) \\ \omega_A &= k_A + k_A^2 \end{aligned} \quad (6.1)$$

Las ecuaciones que se obtienen, escritas en nuestras variables adimensionales son

$$\begin{aligned} i b_t + i(1+2k_A) b_x + k_A (\delta n)b/2 - (\delta u)bk_A + b_{xx} &= 0 \\ \delta n_{tt} - \beta \delta n_{xx} &= 2|1-\beta||b|^2 \\ \delta n_t + \delta u_x &= 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Este sistema de ecuaciones es similar al de Zakharov (1972) (ec. (1.26)) en el caso unidimensional, si  $\delta n = \delta u$ . En el límite estático (cuando se puede hacer un reescalamiento del tiempo como en (1.56)) se reduce a las relaciones

$$\begin{aligned} \delta n &= 2s |b|^2 \\ \delta u &= \delta n \end{aligned} \quad (6.3)$$

(análogas a las obtenidas en (1.57)) y a la ecuación NLS para la amplitud  $b$  que, en el referencial de Alfvén, resulta

$$i b_t + 2ik_A b_x - k_A s |b|^2 b + b_{xx} = 0 \quad (6.4)$$

Gracias a la analogía entre el sistema de ecuaciones (6.2) y el de

Zakharov, los autores directamente aplican el modelo de Kingsep et al (1973) ya explicado en la introducción. Consideran solitones de la ecuación (6.4) (los que existen sólo si  $-sk_A > 0$ , es decir, para una onda de polarización izquierda), sin tener en cuenta la fase de los mismos, sino sólo el módulo

$$b = b_0 \operatorname{sech}[b_0(-sk_A/2)^{1/2} (x - 2kat)] \exp(-ikas b_0^2 t/2) \quad (6.5)$$

y obtienen un espectro de Fourier para las fluctuaciones magnéticas de la forma

$$P_B(k) = 8W(-2sk_A \pi)^{1/2} [Kk \operatorname{tanh}(Kk) - \log(\cosh(Kk))]/k^2 \quad (6.6)$$

donde  $W$  es la densidad de energía media en el sistema y  $K = (-\pi/8sk_A)^{1/2}$ . La expresión (6.6) para  $k \gg 1$  tiene una dependencia  $k^{-2}$ .

La ecuación (6.4) también puede obtenerse a partir de la ecuación DNLS (ec. (1.58)) proponiendo una solución de la forma

$$q = \epsilon q_0(x, t) \exp(i(kAx - \omega_A t)) \quad (6.7)$$

donde  $q_0$  es una amplitud lentamente variable. Siguiendo el método de Kakutani y Sugimoto (1974), se puede definir un conjunto de coordenadas dilatadas  $x_j = \epsilon^j x$  y  $t_j = \epsilon^j t$  para describir los distintos órdenes de variación de la amplitud  $q_0$  en el tiempo y en el espacio. De ese modo, las derivadas de  $q_0$  tendrán un desarrollo

de la forma

$$\begin{aligned} \partial_x q_0 &= \epsilon \partial_x q_0 + \epsilon^2 \partial_x^2 q_0 + \dots \\ \partial_t q_0 &= \epsilon \partial_t q_0 + \epsilon^2 \partial_t^2 q_0 + \dots \end{aligned} \quad (6.8)$$

Insertando (6.7) y (6.8) en (1.58) e igualando potencias iguales de  $\epsilon$  se obtiene, al orden más bajo, la relación de dispersión de (6.1) en el referencial de Alfvén ( $\omega_A = k_A^2$ ) y, a orden  $\epsilon^3$ , la ecuación NLS para  $b = \epsilon q_0$  (6.4). Se ve entonces que el tratamiento de Ovenden et al (1983) está contenido en el nuestro.

Vamos a repasar ahora las suposiciones que nos llevaron a la obtención de la ecuación DNLS, contrastándolas con las condiciones que se encuentran en el viento solar. En primer lugar es necesario recalcar que el desarrollo (1.55) supone una velocidad (no perturbada) del medio nula. Por lo tanto, las ecuaciones obtenidas corresponden a una descripción en el sistema del viento solar. Como dijimos anteriormente, éste viaja con velocidad  $v_w$  respecto del observador y su dirección no tiene por qué ser paralela a la del campo magnético ambiente  $B_0$ .

En cuanto a las aproximaciones, discutamos, en primer lugar, el escalamiento de las variables hidrodinámicas. Según la expresión (1.55),  $\delta n \sim \epsilon$ ,  $\delta B \sim \epsilon^{1/2}$ . Esto está de acuerdo con lo que se observa en la Figura 2 donde  $\delta n \sim 0.1$  y  $\delta B \sim 0.4$ . De acuerdo a esta figura sería  $\epsilon \sim 0.1$ . En segundo lugar, examinemos el escalamiento (1.56) para la coordenada espacial. La escala característica  $L_M$  de

la microestructura en el medio interplanetario es menor o del orden de  $1.5 \cdot 10^{11}$  cm (Burlaga, 1972). La velocidad de Alfvén es  $v_A \simeq 50$  km/s y la frecuencia de ciclotrón-ion  $\omega_{ci} = 0.5 \text{ s}^{-1}$ . Por lo tanto,  $L_M$  medida en nuestra unidad de longitud ( $\propto v_A / \omega_{ci} \simeq v_A / 2\omega_{ci}$ ) resulta  $L_M < 3 \cdot 10^4$ . El escalamiento (1.56) es adecuado para estudiar estos fenómenos mientras sea  $L_M \gg 1$ . Sin embargo, las predicciones que da para la región de números de onda grandes pueden no ser correctas. En tercer lugar, analicemos las relaciones (1.57) que se deducen en el caso estático. Estudios de la función de correlación cruzada entre  $\delta n$  y  $\delta u$  dan una fase aproximadamente igual a cero para frecuencias  $\nu > 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  (ver Figura 4 de Goldstein y Siscoe, 1972), lo que está de acuerdo con la primera de las relaciones que aparecen en (1.57). También se puede observar en el trabajo de Denskat y Neubauer (1983) (Figura 3) y en el de Goldstein y Siscoe (1972) (Figura 9) que la fase de la correlación entre  $\delta v$  y  $\delta B$  es aproximadamente igual a  $\pi$  para todo el rango de frecuencias, lo que concuerda con la segunda de las relaciones de (1.57). La correlación entre  $\delta n$  y  $|\delta B|^2$  también da una fase igual a  $\pi$  (ver Figura 10 de Goldstein y Siscoe, 1972) para  $\nu > 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ . Esto significaría un valor de  $\beta$  mayor que uno si la tercera relación de (1.57) es válida. Aun cuando los valores típicos de  $\beta$  en el viento solar son  $\beta \lesssim 1$  (Sakai y Sonnerup, 1983) existen evidencias de valores de  $\beta > 1$  asociados a períodos con fluctuaciones rápidas tanto en la dirección como en la intensidad del campo magnético (Burlaga, 1972).

Pasemos ahora al cálculo de las funciones de correlación



$$P_{By}(\nu) = \int dT \exp(-2\pi\nu iT) \langle \delta B_y(x, t+T) \delta B_y(x, t) \rangle \quad (6.9)$$

$$P_B(\nu) = \int dT \exp(-2\pi\nu iT) \langle |\delta B(x, t+T)| |\delta B(x, t)| \rangle \quad (6.10)$$

$$P_n(\nu) = \int dT \exp(-2\pi\nu iT) \langle \delta n(x, t+T) \delta n(x, t) \rangle \quad (6.11)$$

Estas son las únicas funciones de autocorrelación distintas que puede dar el modelo. Debido a la relación entre  $\delta n$  y  $|\delta B|^2$  (ver (1.57)), el espectro  $P_{|B|}$  asociado a la función de correlación  $\langle \delta |B| \delta |B'| \rangle$  es proporcional a (6.11). Resulta  $P_{|B|} = (1 - \beta)^2 P_n$ .

Como ilustración vamos a mostrar cómo puede calcularse  $P_{By}$ . El campo magnético que aparece en (6.9) es el medido en el sistema del observador. Lo escribimos como una superposición de solitones de la forma (1.78)-(1.81):

$$B_y(x, t) = \sum_n [k_n (2|1-\beta|)^{1/2} \cos(s \cotg(\hat{\delta}_n) k_n x_n / 2 - (3s/4) \int dx |q_n|^2 + 4 \Delta^2 t + \varphi_{0n})] / (\Delta_n (\cosh(k_n x_n) + \cos(\hat{\delta}_n))^{1/2}) \quad (6.12)$$

donde definimos  $k_n = 4 \Delta_n^2 \text{sen } \hat{\delta}_n$

$$x_n = x - (v_{wx} + 1 - s k_n \cotg \hat{\delta}_n) t - x_{0n}$$

$v_{wx} = v_w \cdot \hat{x}$ , la velocidad del viento en la dirección del campo magnético ambiente.

$|q_n|$  el módulo definido en (1.79) con  $\Delta^2 = \Delta_n^2$  y

$$\hat{\delta} = \hat{\delta}_n$$

Las cantidades  $k_n$  y  $\hat{\delta}_n$  son funcionales de las condiciones iniciales

y se supone una distribución uniforme para  $\varphi_{0n}$  sobre el intervalo  $(0, 2\pi)$  y para  $x_{0n}$  sobre una longitud  $L_n$ . Siguiendo el modelo de Matsuno (1977) o el de Meiss y Horton (1982), el valor medio que aparece en (6.9)-(6.11) debe interpretarse como

$$\langle \dots \rangle = \int \mathcal{D}q \, dx_{0n} \, d\varphi_{0n} \, \mathcal{P}[q] \, P(x_{0n}) \, Q(\varphi_{0n}) \dots \quad (6.13)$$

donde  $\mathcal{P}[q]$  es la densidad de probabilidad en el espacio funcional de las condiciones iniciales.  $P(x_{0n}) = 1/L_n$  si  $x_1 < x_{0n} < x_1 + L_n$  y cero fuera, y  $Q(\varphi_{0n}) = 1/2\pi$  si  $0 < \varphi_{0n} < 2\pi$ , son las funciones de distribución de  $x_{0n}$  y de  $\varphi_{0n}$ .

Vamos a hacer ahora una serie de simplificaciones. En primer lugar despreciaremos los términos  $4\Delta^4 t$  y  $(3s/4) \int |q_n|^2 dx$  frente a  $\cotg(\vartheta_n) k_n x_n / 2$ , lo que es razonable en el caso de un gas de solitones con valores de  $\vartheta$  pequeños. Igual suerte correrá el término  $1 - sk_n \cotg \vartheta$  frente a  $v_{wx}$ , lo que es razonable siempre que el ángulo entre la dirección del viento y la del campo magnético no sea cercano a  $\pi/2$ , ya que el módulo de dicha velocidad medido en unidades de Alfvén es del orden de 10, mientras que el término a despreciar es del orden de 1. Por último, supondremos que el gas de solitones es suficientemente diluido como para poder despreciar los productos de términos correspondientes a solitones distintos, que aparecen al reemplazar (6.13) en (6.9). Con estas simplificaciones la expresión (6.9) queda reducida a

$$P_{By}(\nu) = \sum_n 2k_n |1-\beta| \int dz dp_n dq_n P(x_0) Q(x_0) \exp(-2\pi i z / v_{wx}) \cos(q_n) \cos(q_n - sk_n \cotg(\delta_n) z/2) / [\Delta_n^2 v_{wx} ((\cosh(k_n p_n) + \cos \delta_n) (\cosh(k_n(p_n - z)) + \cos \delta_n))^{1/2}] \quad (6.14)$$

donde definimos  $p_n = x - x_0 - v_{wx} t$

$$q_n = sk_n \cotg \delta_n (x - v_{wx} t) / 2 + \psi_0$$

$$z = T / v_{wx}$$

La integral sobre  $q_n$  puede hacerse inmediatamente, lo que da

$$P_{By} = \sum_n k_n^2 |1-\beta| \int dz dp_n P(x_0) \exp(-2\pi i z / v_{wx}) \cos(k_n \cotg(\delta_n) z/2) / [\Delta_n^2 v_{wx} ((\cosh(k_n p_n) + \cos \delta_n) (\cosh(k_n(p_n - z)) + \cos \delta_n))^{1/2}] \quad (6.15)$$

Por otro lado, si el rango de integración de  $p_n$  es suficientemente grande, dicha integral puede interpretarse como la suma de dos transformadas de Fourier de una convolución. De este modo, (6.15) resulta

$$P_{By} = \sum_n \pi |1-\beta| [(\operatorname{sech}(\pi k / k_n + k') P_{-\frac{1}{2} + \frac{k}{k_n}}(\cos(\delta_n)))^2 + (\operatorname{sech}(\pi k / k_n - k') P_{-\frac{1}{2} + \frac{k}{k_n} - k'}(\cos(\delta_n)))^2] / (2 \Delta_n^2 v_{wx} \operatorname{Ln}) \quad (6.16)$$

donde  $k = 2\pi v / v_{wx}$ ,  $k_n = s \cotg \delta_n / 2$ ,

$P_{-1/2+\nu}(\cos \delta)$  es la función de Legendre del primer tipo, también llamada función cónica (Erdelyi, 1953).

Generalmente se toma  $L_n=L$ , con  $L$  la longitud del sistema. Nosotros vamos a tomar una longitud  $L'$  diferente para poder ajustar las observaciones. Por simplicidad, pasaremos de la sumatoria discreta (6.16) a una distribución continua, lo que puede hacerse si el número  $N$  de solitones es suficientemente grande. De este modo (6.16) resulta

$$P_{By} = \int d\Delta^2 d\tilde{\sigma} f(\Delta^2, \tilde{\sigma}) \pi |1-\beta| \left[ \left( \operatorname{sech}(\pi k/K+k') P_{-\frac{1}{2}+\frac{ik+k'}{K}}(\cos(\tilde{\sigma})) \right)^2 + \left( \operatorname{sech}(\pi k/K-k') P_{-\frac{1}{2}+\frac{ik-k'}{K}}(\cos(\tilde{\sigma})) \right)^2 \right] / (2 \Delta^2 v_{wx} L') \quad (6.17)$$

donde definimos  $K=4 \Delta^2 \operatorname{sen} \tilde{\sigma}$ ,  $k'=s \operatorname{cotg} \tilde{\sigma}/2$  y la función de distribución de solitones  $f(\Delta^2, \tilde{\sigma})$  según

$$f(\Delta^2, \tilde{\sigma}) = \langle F(\Delta^2, \tilde{\sigma}, [q(t=0)]) \rangle \quad (6.18)$$

siendo  $F$  la función definida en el capítulo anterior.

Cálculos análogos, pero donde no intervienen las fases, permiten obtener

$$P_B = \int d\Delta^2 d\tilde{\sigma} f(\Delta^2, \tilde{\sigma}) 2\pi |1-\beta| \left( \operatorname{sech}(\pi k/K) P_{-1/2+ik/K}(\cos(\tilde{\sigma})) \right)^2 / (\Delta^2 v_{wx} L') \quad (6.19)$$

y

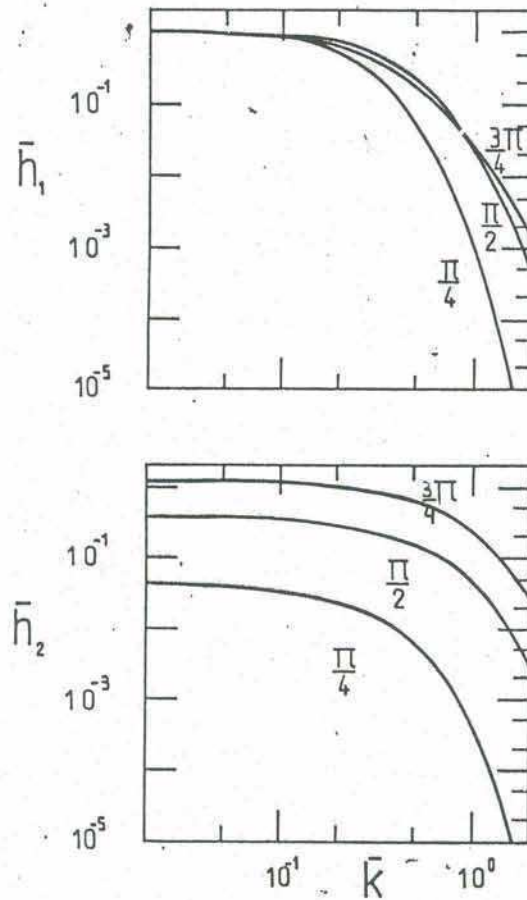
$$P_n = \int d\Delta^2 d\tilde{\sigma} f(\Delta^2, \tilde{\sigma}) 32 \pi \Delta^2 \operatorname{senh}^2(\tilde{\sigma}k/K) / \operatorname{senh}^2(\pi k/K) / v_{wx} L' \quad (6.20)$$

Antes de dar una expresión para la función de distribución, analicemos el núcleo de las integrales (6.19) y (6.20). Es interesante el hecho de que (6.19) contenga un término  $\sim \text{sech}^2(\pi k/K)$ , ya que para un gas de solitones de la ecuación NLS, como el descrito en Ovenden et al. 1983, cada solitón contribuye con un término proporcional a  $\text{sech}^2(kN/(-4sk_{AWL}))$ . El efecto del término  $P_{\nu}(\cos \hat{\nu})$  en (6.19) es el de suavizar la disminución de la sech con  $k$ . Este efecto es más importante a medida que  $\hat{\nu}$  crece, como se puede observar en la Figura 18 donde graficamos las funciones  $h_1 = \text{sech}(\pi k/K) P_{-\frac{1}{2} + \frac{1}{\bar{k}}}(\cos \hat{\nu})$  y  $h_2 = \text{senh}(\hat{\nu} k/K) / \text{senh}(\pi k/K)$  en función de  $\bar{k} = k/4 \Delta^2$ . Se puede ver que ambas presentan un comportamiento cualitativamente análogo a las observaciones. Se mantienen constantes para  $\bar{k} < \bar{k}_0$  y luego disminuyen monótonamente. El valor de  $\bar{k}_0$  es mayor para  $h_1$ , y por lo tanto para  $P_B$ , que para  $h_2$ , es decir, para  $P_n$ , lo que concuerda con lo deducido por Spangler y Sheerin (1982). Para valores pequeños de  $\bar{k}$  ambas funciones pueden ponerse como

$$h_1 = h_1(0) / (1 + (\bar{k}/\bar{k}_{01})^s) \quad (6.21)$$

Si  $\hat{\nu} = \pi/2$  el índice espectral es  $s=2$  y  $\bar{k}_{01}=0.33$  y  $\bar{k}_{02}=0.48$ . Para valores de  $\bar{k}$  mayores, el índice  $s$  crece para todos los valores de  $\hat{\nu}$ .

Pasemos ahora a la expresión de la función de distribución. En el capítulo anterior obtuvimos una expresión para la distribución de  $b = \Delta^2 \text{sen} \hat{\nu}$  como funcional de las condiciones iniciales, aunque



**Figura 18** (a) Se grafica  $\bar{h}_1(k) = h_1(k)/h_1(k=0)$  con  $h_1(k) = \text{sech}(\pi k/K)$ .  $P_{-1/2+i\kappa/K}(\cos \delta)$  en función de  $\bar{k} = k/4 \Delta^2$  para  $\delta = \pi/4$ ,  $\delta = \pi/2$  y  $\delta = 3\pi/4$ . En todos los casos  $h_1$  se mantiene constante para  $\bar{k} < \bar{k}_0$  y luego decrece monótonamente. Se observa que el efecto de suavizar el decrecimiento de  $h_1$  con  $k$  que produce el factor  $P_{-1/2+i\kappa/K}(\cos \delta)$  es más notorio cuanto mayor es  $\delta$ . El valor de  $\bar{k}_0$  es prácticamente el mismo para todos los valores de  $\delta$ . (b) Se grafica  $h_2(k) = \sinh(\delta k/K)/\sinh(\pi k/K)$  en función de  $\bar{k} = k/4 \Delta^2$  para  $\delta = \pi/4$ ,  $\delta = \pi/2$ ,  $\delta = 3\pi/4$ . Se puede observar en este caso que  $h_2(0)$  es mayor cuanto mayor es  $\delta$  (lo mismo ocurre con  $h_1(0)$ ) y que el valor de  $\bar{k}_0$  crece con  $\delta$ . Sin embargo, la forma en que decrece  $h_2$  con  $\bar{k}$  para  $\bar{k} > \bar{k}_0$  es la misma para los distintos valores de  $\delta$  siempre que sea  $\delta \neq 0$ ,  $\delta \neq \pi$ .

ignoramos cómo se distribuyen los parámetros  $\delta$  y  $\Delta^2$  por separado. Por otro lado, sólo pudimos constatar que la expresión (5.22) del número total de solitones que le está asociada es correcta. Como además el cálculo de (6.18) puede hacerse muy complicado, decidimos seguir el esquema diseñado por Meiss y Horton (1982) para la turbulencia de deriva, en el que sólo es necesario conocer la expresión del número de solitones como funcional de las condiciones iniciales.

Consideremos una distribución canónica de condiciones iniciales

$$\mathcal{P}[q] = \exp(-\int dx |q|^2/T)/Z \quad (6.22)$$

$$\text{con } Z = \int \mathcal{D}q \exp(-\int dx |q|^2/T)$$

Con esta distribución es posible calcular el número medio de solitones  $\langle N_s \rangle$ . Usando la aproximación válida para el caso fuertemente inestable ( $|\psi_x q^2| \gg |q|^4/2$ )

$$N_s = \frac{1}{\pi} \int_{s\psi_x > 0} dx (s|q|^2 \psi_x)^{1/2} \quad (6.23)$$

donde  $q = |q| \exp(i\psi)$  y  $s$  es el signo del término no lineal en (1.58),  $\langle N_s \rangle$  resulta

$$\langle N_s \rangle = (1/3)(mL \langle |q|^2 \rangle)^{1/2} \quad (6.24)$$

donde  $\langle |q|^2 \rangle$  se vincula con el contenido medio de energía en las perturbaciones WL segun  $WL=L\langle |q|^2 \rangle/2$ . Para el cálculo de  $\langle N_s \rangle$  hicimos la integral funcional definida en (6.13) discretizando las variables sobre una longitud L suponiendo  $s(\psi(L)-\psi(0))=2m\pi$ . El número entero  $m>0$  mide el número de longitudes de onda de la condición inicial que están contenidas en L. La expresión (6.24) da una densidad de solitones  $n_s=\langle N_s \rangle/L$  que es inversamente proporcional a L ya que  $N_s$  depende de una derivada de q: valores menores de L dan valores mayores de  $n_s$ . Supongamos ahora que, como las condiciones iniciales están distribuidas en forma canónica, los  $\langle N_s \rangle$  solitones también lo están, pero con una temperatura distinta. Como la energía de un solitón de parámetros  $\Delta^2$  y  $\sigma$  es proporcional a  $\sigma$ , esto significa que la función de distribución es de la forma

$$f_I(\Delta^2, \sigma) = \langle N_I \rangle \exp(-\psi \sigma) \int (\Delta^2 - \Delta_0^2) / Z \quad (6.25)$$

con  $Z = \int \exp(-\psi \sigma) d\sigma$  y donde identificamos con el subíndice I el método usado (el que sigue las ideas de Meiss y Horton, 1982). La cantidad  $\psi$  puede ser calculada igualando el contenido de energía medio de los solitones con el de las condiciones iniciales

$$\langle N_I \rangle \langle 2 \sigma \rangle = L \langle |q|^2 \rangle / 2 \quad (6.26)$$

Este cálculo da

$$\psi = a (1 - \pi \psi \exp(-\pi \psi) / (1 - \exp(-\pi \psi))) \quad (6.27)$$



con  $a = (4/3)(m/L\langle |q|^2 \rangle)^{1/2}$

Pero, como  $|q|^2 \psi \sim \langle |q|^2 \rangle m/L$  y  $|q|^4 \sim \langle |q|^2 \rangle^2$ , la hipótesis de que se trata de una situación fuertemente inestable significa que  $\langle |q|^2 \rangle L \ll m$ . Por lo tanto,  $a \gg 1/2\pi$ . En este caso, la expresión (6.27) se convierte en

$$\psi \approx a = (4/3)(m/(L\langle |q|^2 \rangle))^{1/2} \quad (6.28)$$

El valor de  $\Delta_0^2$  puede ser obtenido a partir de otra constante de movimiento, por ejemplo  $C_1$  o  $C_{-1}$ . Suponiendo  $C_{-1} \sim \langle |q|^2 \rangle L^2/m$ ,  $C_1 \sim \langle |q|^2 \rangle m$  ambas constantes dan el mismo resultado

$$\Delta_0^2 = m/2L \quad (6.29)$$

La función  $f$  resulta entonces

$$f_1 = \frac{4m}{q} \exp\left(-\frac{4}{3}(m/L\langle |q|^2 \rangle)^{1/2} \delta\right) \int (\Delta^2 - \Delta_0^2) \quad (6.30)$$

Vamos a comparar ahora los resultados del método I con los que predice otro método al que llamaremos II. Este es el desarrollado por Kingsep et al (1973) para la turbulencia de Langmuir, que fue además usado por Ovenden et al (1983) para el viento solar en el marco de una ecuación NLS, como ya lo describimos al principio de este capítulo. En primer lugar vamos a estimar los valores de los parámetros  $\Delta^2$  y  $\delta$  para un estado formado por  $N$

solitones idénticos a partir de los valores medios de las constantes de movimiento  $C_1$ ,  $C_0$  y  $C_{-1}$ . En el caso en que  $\langle |q|^2 \rangle L/2N \ll 1$  (que es equivalente a la hipótesis  $a \gg 2/\pi$  en el tratamiento anterior) obtenemos

$$\begin{aligned} \delta(N) &= \langle |q|^2 \rangle L/4N \\ \Delta^2(N) &= m/2L \end{aligned} \quad (6.31)$$

Si definimos el ancho de un solitón como  $\lambda = A/(4\Delta^2 \text{sen}(\delta))$  ( $A=1$  tanto en Kingsep, et al. 1973 como en Ovenden et al. 1983) entonces, cuando  $\delta \ll 1$ , resulta

$$\lambda(N) = 2AN / (m \langle |q|^2 \rangle) \quad (6.32)$$

Por lo tanto, el número máximo de solitones  $N_{\max}$  que puede soportar un sistema de longitud  $L$ , es, según (1.28)

$$N_{\max} = (mL \langle |q|^2 \rangle / 2A)^{1/2} \quad (6.33)$$

En este modelo la función de distribución  $f(\Delta^2, \delta)$  que debe usarse para el cálculo de las funciones de correlación (6.17), (6.19) y (6.20) se obtiene promediando sobre todos los estados posibles del sistema. Estos son estados de  $N$  solitones idénticos ( $1 \leq N \leq N_{\max}$ ) y todos tienen igual peso ( $1/N_{\max}$ ). Por lo tanto es

$$f_{II} = \int_1^{N_{\max}} dN \frac{N}{N_{\max}} \cdot \delta(\Delta^2 - m/2L) \delta(\delta - \langle |q|^2 \rangle L/4N) \quad (6.34)$$

de donde resulta

$$f_{II} = (2m/A) \cdot (\delta_m / \delta)^3 \delta(\Delta^2 - m/(2L)) H(\delta - \delta_m) \quad (6.35)$$

siendo  $H(x)$  la función de Heavyside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (6.36)$$

y  $\delta_m$  el mínimo valor de  $\delta$ ,  $\delta_m = (A \langle |q|^2 \rangle L / 8m)^{1/2} = (2A)^{1/2} / 3\psi$ . El número medio de solitones con esta distribución es

$$\langle N_{II} \rangle = \langle \langle |q|^2 \rangle mL / 8A \rangle^{1/2} \quad (6.37)$$

que resulta exactamente igual al obtenido con el método anterior si  $A=9/8$ . Ahora bien, el límite inferior de la integral (6.34) es 1, lo que, de tenerse en cuenta, daría una cota superior para  $\delta$ . Por otro lado el valor máximo de  $\delta$  ( $\delta_M$ ) también debería satisfacer la relación  $NA/4 \Delta^2 \sin \delta_M < L$ . Sin embargo, si la contribución de los valores  $\delta > \delta_M$  al cálculo de las funciones de correlación (6.17), (6.19) y (6.20) es despreciable, puede considerarse correcta la expresión (6.35).

Comparemos ahora  $f_I$  y  $f_{II}$ . En realidad los resultados obtenidos con el primer método deben ser modificados ya que el

sistema no soporta solitones de ancho mayor que  $L$ . Si se tiene esto en cuenta  $f_I$  resulta

$$f_I = (4m/7) \exp(-12 (m/(L\langle |q|^2 \rangle))^{1/2} (\delta - \delta_m)/7) \delta(\Delta^2 - \Delta_c^2) H(\delta - \delta_m) \quad (6.38)$$

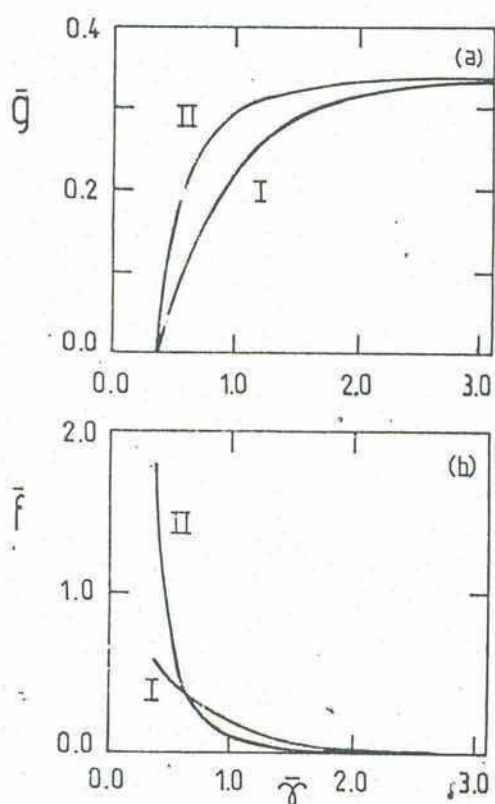
con  $\delta_m = 4A/9\psi$  y  $\psi$  el definido en (6.28).

Aun cuando  $f_I$  y  $f_{II}$  dan un número medio de solitones similar, ( $\langle N_I \rangle / \langle N_{II} \rangle = 0.94$  para  $A=1$ ) la distribución entre los valores posibles de  $\delta$  resulta diferente. Esto puede observarse en la Figura 19 donde graficamos ambas funciones, sin tener en cuenta el término  $\delta(\Delta^2 - m/2L)$ , en función de  $\bar{\delta} = 3\psi\delta/4$ , para  $A=9/8$ . De todos modos, en ambos casos, la mayoría de los solitones están concentrados en valores de  $\delta$  pequeños y esta concentración es más pronunciada cuanto mayor es el valor de  $\psi$ .

Comparemos ahora estos resultados con los que se pueden obtener para la ecuación NLS (6.4). Esta ecuación también posee solitones de dos parámetros. Pero si fijamos uno de ellos, como se hace en Ovenden et al. (1983) y sólo consideramos los que aparecen en (6.5), el primer método da una función de distribución de la forma

$$f_I(b_0) = L(-kAs/2)^{1/2} / (2\pi) \cdot \exp(-b_0 / (\pi \langle |b|^2 \rangle)^{1/2}) \quad (6.39)$$

y el segundo



**Figura 19** Se grafican las funciones  $\bar{g}(\bar{\tau}) = \int_0^{\bar{\tau}} d\bar{\tau}' \bar{f}$  (a) y  $\bar{f}(\bar{\tau}) = f(\bar{\tau}, \Delta^2) / (m \delta (\Delta^2 - \Delta_0^2))$  (b) en función de  $\bar{\tau} = 3\psi\delta/4$  donde  $f(\bar{\tau})$  es la función de distribución de solitones siguiendo el método de Meiss y Horton (I) y el de Kingsep et al (II). Se observa que ambas funciones dan un número similar de solitones (a) pero que su distribución en  $\bar{\tau}$  es levemente diferente (b). Ambos métodos dan como resultado una distribución según la cual la mayor parte de los solitones está concentrada en la región de  $\bar{\tau}$  pequeño. Este efecto es más importante cuanto mayor es el valor de  $\psi$ . (Recuérdese que  $\psi$  mide el nivel de inestabilidad modulativa medio del sistema).

$$f_{II}(b_0) = L(-k_A s)^{1/2} \langle |b|^2 \rangle^{3/2} / (4b_0^3) H(b_0 - A \langle |b|^2 \rangle / 2) \quad (6.40)$$

El número medio de solitones es

$$\langle N \rangle_I = L (-k_A s \langle |b|^2 \rangle / 8\pi)^{1/2} \quad (6.41)$$

para el primer caso

y

$$\langle N \rangle_{II} = L (-k_A s \langle |b|^2 \rangle / 16A)^{1/2} \quad (6.42)$$

para el segundo, que coincide con el (6.41) para  $A = \pi/2$ . Las diferencias entre ambos tratamientos son similares a las que se encuentran para el caso DNLS.

Para comparar estos resultados con los obtenidos en el caso DNLS recordemos primero que el contenido de energía de un solitón de la forma (6.5) es

$$\int dx |b|^2 / 2 = b_0 (-2/sk_A)^{1/2} \quad (6.43)$$

Por lo tanto, la cantidad  $b_0$  en la descripción NLS debe estar relacionada con la cantidad  $\phi$  de la descripción DNLS. Por otro lado, si reemplazamos  $b_0(-2/sk_A)^{1/2}$  por  $2\phi$  y  $(-sk_A)$  por  $8\pi m/9L$  en (6.39) obtenemos la expresión (6.30) y si reemplazamos  $b_0(-2/sk_A)^{1/2}$  por  $2\phi$  y  $(-sk_A)$  por  $2m/L$  en (6.40) reobtenemos la

expresión (6.35). Estas correspondencias tienen un significado claro. Si tomamos para la ecuación DNLS una condición inicial de la forma  $q_0 \exp(ikx)$  con  $k \sim m/L$  los resultados son similares a los de la descripción NLS.

Analicemos cómo son las expresiones de los espectros (6.17), (6.19) y (6.20) cuando elegimos alguna de estas funciones de distribución ( $f_I$  o  $f_{II}$ ). En la Figura 20 están graficadas  $P_{By}$ ,  $P_B$  y  $P_n$  en función de  $\bar{k} = k/4 \Delta_0^2$  para  $\psi = 7$  y en la Figura 21 para  $\psi = 50$ . Una vez más el comportamiento es, en todos los casos, similar a las observaciones.

En lo que se refiere al índice espectral, los obtenidos con el método II para  $P_{By}$  y  $P_B$  concuerdan mejor con las observaciones que los obtenidos con el método I. En cambio para  $P_n$  el comportamiento es similar y sólo varía la escala externa. Las diferencias entre los resultados que dan estos modelos teóricos y las observaciones radican en que los primeros predicen una variación del índice espectral más rápida que la observada. Sin embargo, para  $\psi = 50$ , encontramos que tanto  $P_B$  como  $P_{By}$ , ambas calculadas con el método II, tienen una dependencia  $k^{-s}$  a lo largo de dos órdenes de magnitud lo que está de acuerdo con las observaciones. El valor de  $s$  es 2 para  $P_B$  y 1.88 para  $P_{By}$ . Vemos entonces que el comportamiento de  $P_B$  es similar al que encuentran Ovenden et al. (1983), mientras que el cálculo hecho para  $P_{By}$  (que incluye un promedio sobre las fases) mejora este resultado. La similitud entre  $P_B$  en este caso y en el de Ovenden et al. (1983) es fácil de

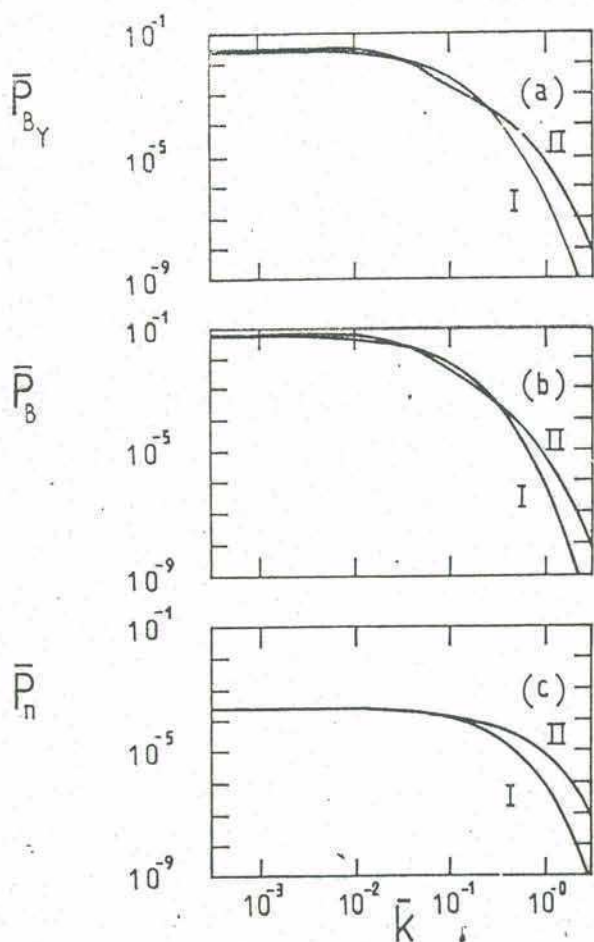


Figura 20

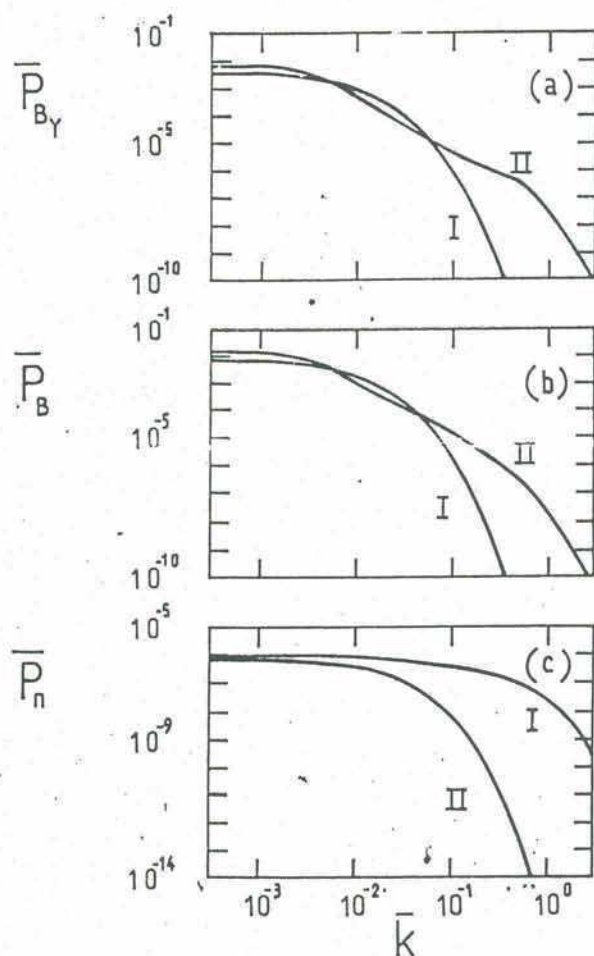


Figura 21

Figuras 20-21 Se grafican los espectros  $\bar{P}_{By}(k) = v_{wx}L'P_{By}/(L\pi|1-\beta|)$  (a),  $\bar{P}_B = v_{wx}L'P_B/(4\pi|1-\beta|)$  (b) y  $\bar{P}_n = v_{wx}L'LP_n/16\pi m^2$  (c) como función de  $\bar{k} = k/4 \Delta_s^2 = Lk/2m$ . En todos los casos los espectros fueron calculados usando la función de distribución de solitones según el método de Meiss y Horton (I) y el de Kingsep et al (II). La Figura 20 corresponde a  $\psi = 7$  y la 21 a  $\psi = 50$ . Los espectros obtenidos son, en ambos casos, cualitativamente similares a los observados. Sin embargo predicen un decrecimiento más rápido con  $k$  que el observado. En el caso  $\psi = 50$  el acuerdo con las observaciones es mejor que en el de  $\psi = 7$ . Esto puede deberse a que los modelos desarrollados son válidos para casos fuertemente inestables y  $\psi$  es una medida de la inestabilidad modulativa media del sistema.



explicar, ya que para un valor tan grande de  $\Psi$ , la integral (6.19) con  $f=f_{II}$ , puede aproximarse por la calculada en el trabajo de Ovenden et al (1983). En el caso  $\Psi=7$   $P_B$  y  $P_{By}$  también siguen una ley  $k^{-s}$  pero sobre un intervalo de números de onda que abarca menos de dos órdenes de magnitud. El valor de  $s$  en este caso está entre 1.81 y 1.98 para  $P_B$  y es aproximadamente igual a 1.79 para  $P_{By}$ . En lo que se refiere a la extensión de la región de números de onda sobre la cual tanto  $P_B$  como  $P_{By}$  siguen una ley de potencias, el acuerdo con las observaciones es mejor para  $\Psi=50$  que para  $\Psi=7$ . Esto puede deberse a que el modelo desarrollado es válido para casos fuertemente inestables modulacionalmente y  $\Psi$  es una medida de esta inestabilidad (es mayor cuanto más inestables son, en promedio, las condiciones iniciales). Sin embargo, los índices espectrales obtenidos en ambos casos son muy similares, e incluso, son levemente menores para  $\Psi=7$  y, por lo tanto, más cercanos a los observados.

En lo que se refiere a las escalas externa e interna, sólo podemos sacar alguna conclusión respecto de las correspondientes a  $P_B$  y  $P_{By}$ . Del análisis de estas funciones (obtenidas con el método II) pudimos deducir los números de onda  $k_e$  y  $k_i$ , asociados, respectivamente, a las escalas externa e interna. Como ya lo mencionamos en la introducción éstos son los valores de número de onda entre los cuales el espectro sigue una ley de potencias. Los valores deducidos aparecen en la siguiente tabla.

TABLA II

	$\Psi = 7$		$\Psi = 50$	
	$\bar{k}_e$	$\bar{k}_i$	$\bar{k}_e$	$\bar{k}_i$
$P_{By}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-1}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-1}$
$P_B$	$2-3 \cdot 10^{-2}$	$2-3 \cdot 10^{-2}$	$3-4 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-1}$

Cuando los espectros son calculados con el método I es imposible obtener información sobre la escala interna. Para la escala externa se puede ver que es  $\bar{k}_e(\Psi=7) > \bar{k}_e(\Psi=50)$ . Algo similar ocurre en el caso de  $P_n$ : con ninguno de los métodos podemos estimar el valor de  $\bar{k}_i$ . Los valores obtenidos con uno y otro método difieren bastante entre sí. Mientras según el método II el valor de  $\bar{k}_e$  es prácticamente el mismo ( $\bar{k}_e \sim 5 \cdot 10^{-1}$ ) tanto para  $\Psi=50$  como para  $\Psi=7$ , según el método I es  $\bar{k}_e \sim 10^{-1}$  para  $\Psi=7$  y  $\bar{k}_e \sim 2 \cdot 10^{-2}$  para  $\Psi=50$ .

Ahora bien, los números de onda  $\bar{k}$  (medidos en nuestras unidades,  $[k]=1/d_i$ ) se vinculan con  $k$  según  $\bar{k}=kL/2m$ . Por lo tanto, si el valor de  $\Psi$  (definido en (6.28)) varía sólo debido a la variación de  $\langle |q|^2 \rangle$  mientras  $m/L$  permanece constante, entonces de la Tabla II y de los resultados obtenidos para  $P_n$  con el método I

se desprende que la escala externa es menor para  $\Psi=7$  que para  $\Psi=50$ , mientras que la interna es prácticamente la misma. En el caso  $m/L$  constante también se puede deducir que  $P_{By}(k=0)$  y  $P_B(k=0)$  son mayores para  $\Psi=7$  que para  $\Psi=50$ .

Si comparamos todos estos resultados teóricos (índice espectral, nivel máximo  $P(k=0)$  y escalas externa e interna) con observaciones hechas a distintas distancias del Sol (ver por ejemplo Fig. 3 y Fig. 4), vemos que son consistentes con un modelo según el cual el valor de  $\Psi$  aumenta con la distancia al Sol. Pero como dijimos antes, el valor de  $\Psi$  es una medida de la inestabilidad modulacional media del sistema. Esto nos estaría diciendo entonces que las zonas más alejadas del Sol son modulacionalmente más inestables que las más cercanas. Ahora bien, estas conclusiones fueron obtenidas suponiendo  $m/L=\text{constante}$ . De este modo, valores mayores de  $\Psi$  corresponden a valores menores de  $\langle |q|^2 \rangle$  y, por lo tanto, a regiones donde la energía contenida en las perturbaciones respecto de la contenida en el campo magnético ambiente es menor. Esto es razonable que suceda a distancias mayores del Sol. De todos modos, para poder determinar cuáles son las zonas modulacionalmente más inestables deberíamos obtener la variación de  $C_1$  con la distancia al Sol en forma más realista.

De todo esto podemos concluir que los modelos teóricos basados en una estadística de solitones ajustan cualitativamente bien las observaciones de fluctuaciones en el viento solar. Vimos también que se obtiene una buena correspondencia entre las escalas

externa e interna teóricas y las observadas cuando la función de distribución de solitones sigue una ley de potencias en la energía de los mismos (es el caso del método II). La elección de una función de distribución de este tipo puede justificarse en el marco de los dos métodos analizados. En el método II aparece naturalmente. En el método I (o en el de Matsuno) podría obtenerse si la distribución de condiciones iniciales siguiera una ley de potencias.

## VII. CONCLUSIONES

En esta tesis nos propusimos desarrollar un modelo de turbulencia de Alfvén en el marco de la ecuación no lineal derivada de Schrödinger (DNLS). El modelo se basa en una adecuada estadística de los solitones de dicha ecuación.

En primer lugar elaboramos un código de resolución numérica de la ecuación DNLS que resultó ser rápido y eficaz. El algoritmo desarrollado mantiene las propiedades de la ecuación DNLS (solitones, simetrías, constantes de movimiento) y permite el uso de pasos temporales relativamente grandes (Capítulo II). Los resultados que se muestran en este capítulo fueron publicados en el *Journal of Computational Physics* con el título "Extension of the Ablowitz-Ladik Method to the Derivative Nonlinear Schrödinger Equation" (Ponce Dawson y Ferro Fontán, 1988a).

Con dicho código se realizó una serie de simulaciones numéricas de la ecuación DNLS para una condición inicial con forma de onda plana modulada. En el Capítulo III se obtuvo un criterio para determinar qué condiciones iniciales dan lugar a la formación de solitones. El número de solitones es cero cuando la constante  $C_1$  definida en (1.73) es positiva y resulta una función creciente de  $|C_1|$  cuando  $C_1$  es negativa. Este criterio es una versión integrada del elaborado por Mjølhus (1976) para distinguir entre los casos modulacionalmente estables e inestables. Los resultados del Capítulo III fueron publicados en *The Physics of Fluids* con el

título "Soliton Decay of Nonlinear Alfvén Waves: Numerical Studies" (Ponce Dawson y Ferro Fontán, 1988b).

En el Capítulo IV investigamos algunas propiedades analíticas de la ecuación DNLS y su vinculación con el estudio de estabilidad de solitones. Obtuvimos una nueva constante de movimiento para la ecuación DNLS que es proporcional a la helicidad  $\int dx A \cdot B$ . Mediante una extensión del trabajo de Lax (1968) pudimos demostrar por qué el funcional de Liapunov para los solitones de la ecuación DNLS se construye con tres constantes de movimiento. Esto está relacionado con el número de simetrías de la ecuación original que el solitón rompe. En el caso de la ecuación DNLS el número de simetrías rotas es dos. Por esta razón los solitones extreman el hamiltoniano cuando se lo somete a dos vínculos (carga y momento constantes). En este Capítulo también estudiamos mediante simulaciones numéricas el comportamiento de los solitones frente a perturbaciones longitudinales. Pudimos observar que estas perturbaciones sólo varían la velocidad de los solitones pero no los destruyen ni crean nuevos. Esto indica que, en el caso de la ecuación DNLS ocurre algo similar a lo demostrado para la ecuación KdV por Scharf y Wreszinski (1981): una pequeña perturbación inicial sólo modifica levemente el autovalor del espectro discreto del problema de dispersión asociado pero no cambia el número de autovalores discretos. Los resultados que aquí se muestran fueron publicados en el Journal of Plasma Physics con el título "Analytical and Numerical Properties of the Derivative Nonlinear Schrödinger Equation" (Ponce Dawson y Ferro Fontán, 1988c).

En el Capítulo V extendimos los resultados de Karpman y Sokolov (1968) al caso de ecuaciones no lineales integrables por el método de la transformada espectral inversa cuyos problemas de dispersión asociados poseen autovalores complejos. Esto nos permitió obtener, en el caso discreto, la distribución de solitones de la ecuación DNLS en función de las condiciones iniciales sin necesidad de integrarla numéricamente. El acuerdo entre los resultados de este método y los deducidos de las simulaciones numéricas del Capítulo III es muy bueno. También hallamos una expresión para el número de solitones como función de las condiciones iniciales que ajusta exactamente los resultados numéricos (Ponce Dawson y Ferro Fontán, 1988b) y analíticos previos (Mjølhus, 1978) y otra expresión para la distribución de la parte imaginaria de los autovalores del espectro discreto. Esta última da una cota superior para dicha parte imaginaria que, en el caso de la condición inicial analizada por Mjølhus (1978) coincide exactamente con lo deducido por este autor. Los resultados aquí presentados han sido enviados al Physical Review A con el título "On the Number of Solitons from Nonlinear Integrable Equations" (Ponce Dawson y Ferro Fontán, 1988d).

Por último, en el Capítulo V confrontamos dos modelos de estadística de solitones, el desarrollado por Kingsep, et al (1973) y el de Meiss y Horton (1982), con observaciones del viento solar. Es interesante notar que los dos modelos dan un número medio de solitones similar. Para el segundo de ellos fue necesario usar la

expresión encontrada en el capítulo V. Si bien ambos modelos reproducen cualitativamente las observaciones, se obtiene un mejor acuerdo con el primero de ellos. Esto indica que para que los espectros definidos en (1.17), (1.19) y (1.20) sigan una ley de potencias  $k^{-\alpha}$  a lo largo de dos órdenes de magnitud es necesario que la función de distribución de solitones siga una ley de potencias con la energía de los mismos. Mientras el método II da directamente una función de distribución de este tipo, el método I (o el de Matsuno, 1977) puede darla si las condiciones iniciales siguen también una ley de potencias con la energía. Vimos también que ninguno de los métodos ajusta las observaciones en la región de números de onda grande, lo que puede deberse a las suposiciones hechas en la derivación de la ecuación original. Por otro lado, en lo que se refiere a las escalas externa e interna, el acuerdo con las observaciones es mejor cuanto mayor es el nivel medio de inestabilidad modulativa de las condiciones iniciales, expresado por  $\psi$ . Encontramos que todas las predicciones son consistentes con un modelo en el cual el valor de  $\psi$  aumenta con la distancia al Sol debido a una disminución de  $\langle |q|^2 \rangle$ . Existen dos antecedentes de análisis de fluctuaciones en el viento solar basados en la estadística de solitones. Comparamos nuestros resultados con los obtenidos en el trabajo de Ovenden et al (1983), donde la evolución del campo magnético perturbado está determinada por la ecuación NLS en lugar de la DNLS. Mostramos que este tratamiento está contenido en el nuestro y que ambos dan resultados similares si se consideran, para la ecuación DNLS, condiciones iniciales en la forma de una onda de Alfvén. Obtuvimos también una mejora respecto de Ovenden et al



(1983) en el cálculo del espectro de Fourier de una componente de campo magnético. Esto se debe a la inclusión de un promedio sobre las fases que había sido dejado de lado en la referencia citada. Los resultados han sido enviados al *Astrophysical Journal* con el título "Statistics of Alfvén Solitons Revisited" (Ponce Dawson y Ferro Fontán, 1988e).

Existen también evidencias de la presencia de ondas no lineales de Alfvén en otras situaciones astrofísicas. Sería interesante confrontar estas observaciones con el modelo desarrollado en esta tesis. En particular, en los gases cometarios (Lakhina, 1987) mediciones del valor de  $\beta$  y de la función de correlación entre la perturbación de densidad y de campo magnético son consistentes con la relación (1.57) para  $\beta < 1$ . Por otro lado, observaciones de la magnetosfera terrestre pudieron ser descritas en términos de solitones de la ecuación NLS (Patel y Dasgupta, 1987). Todo esto indica el interés del tema desarrollado en esta tesis y señala posibilidades de trabajo futuro.

En resumen, el presente trabajo ha explorado en mayor profundidad la ecuación DNLS y ha mostrado la plausibilidad de un modelo de turbulencia desarrollada de Alfvén como el planteado en la introducción. Para ello el primer interrogante dilucidado fue el relativo a la inestabilidad de "colapso", hipótesis sostenida por algunos autores, que a la luz de un código de cálculo eficiente se reveló como la fase premonitoria de la formación de un tren de solitones estables.

El complejo problema de la estadística del gas de solitones fue abordado con la técnica original de Karpman y Sokolov extendida aquí a problemas con transformada espectral compleja, la que arroja una correcta estimación del número de solitones. En lo que se refiere a la distribución energética -una cuestión que puede enfocarse desde distintos puntos de vista- es necesario recalcar que, para obtenerla en forma realista, deberían considerarse los mecanismos de excitación del espectro y la disipación de Landau. En particular, análisis de distintas situaciones (Tsytovich, 1978) muestran que, cuando se tienen en cuenta la generación de la turbulencia y la interacción entre ondas y partículas, los espectros de energía siguen una ley de potencias con la frecuencia. Dejando este aspecto de lado, la buena comparación entre la teoría y las correlaciones experimentales sustenta la aplicabilidad del modelo investigado y sugiere la profundización de su análisis.



## REFERENCIAS

- Ablowitz, M., Kaup, D., Newell, A., y Segur, H. 1974, Stud. Appl. Math. 53, 249
- Ablowitz, M. y Ladik, J. 1975, J. Math Phys. 16, 598
- Ablowitz, M. y Ladik, J. 1976a, Stud. Appl. Math 55, 213
- Ablowitz, M. y Ladik, J. 1976b, J. Math Phys. 17, 1011
- Ablowitz, M. y Ladik, J. 1977, Stud. Appl. Math 57, 1
- Armand, N.A., Efimov, A.I., y Yakovlev, O.I. 1987, Astron. Astrophys. 183, 135
- Arnold, V.I. 1978, "Mathematical Methods in Classical Mechanics", Springer, New York
- Bass, F.G., Kivshar, Y.S., Konotop, V.V., y Sinitsyn, Y.A. 1988, Phys. Rep. 157, 63
- Belcher, J.W. 1972, en "Solar Wind", (NASA, Scientific and Technical Information Office, Washington D.C.), p. 382
- Belcher, J.W., y Davis, L. 1971, J. Geophys. Res., 76, 3534
- Belcher, J.W., Davis, L., y Smith, E.J. 1969, J. Geophys. Res., 74, 2302
- Benjamin, T.B. 1972 Proc. Roy. Soc. London, Ser A 328, 153
- Bishop, A.R., Krumhansl, J.A., y Trullinger, S.E. 1980, Physica 1D, 1
- Bona, J.L., Souganidis, P.E., y Strauss, W.A. 1987, Proc. R. Soc. Lond. A 411, 395
- Bullough, R.K. 1985 en "Nonlinear Phenomena in Physics", ed. por F. Claro (Springer, Berlin, Heidelberg, Nueva York, Tokio), p 70
- Burlaga, L.F. 1972, en "Solar Wind", (NASA, Scientific and Technical Information Office, Washington D.C.), p. 309
- Calogero, F. y Degasperis, A. 1982, "Spectral Transform and Solitons", vol. 13 de la serie "Studies in Mathematics and its Applications", North Holland, Amsterdam.
- Denskat, K., y Burlaga, L.F. 1977, J. Geophys. Res. 82, 2693
- Denskat, K., y Neubauer, F.M. 1983, Solar Wind Five, (NASA, Scientific and Technical Information Branch, Washington D.C.) p. 81

- Drazin, P.G. 1983, "Solitons" (Cambridge U.P., Cambridge)
- Erdélyi, A. ed. 1953, "Higher Transcendental Functions" (New York, Mc Graw Hill Book Company) Vol I, p. 120, p. 170
- Faddeev, L.D. 1980, en "Solitons", ed. por R.K. Bullough y P.J. Caudrey (Springer, Berlin), p. 339
- Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D., y Miura, R.M. 1967, Phys. Rev. Lett. 19, 1095
- Ghosh, S., y Papadopoulos, K. 1987, Phys. Fluids 30, 1371
- Gibbons, J., Thornhill, S.G., Wardrop, M.J., ter Haar, D. 1977 J. Plasma Phys. 17, 153
- Goldman, M.V. 1984, Rev. Mod. Phys. 56, 709
- Goldstein, B., y Siscoe, G.L. 1972, en "Solar Wind", (NASA, Scientific and Technical Information Office, Washington D.C.), p. 506
- Graham, R. 1978, en "Stochastic Processes in Nonequilibrium Systems", ed. por L. Garrido et al. (Springer, Berlin, Heidelberg, Nueva York) p. 83
- Grillakis, M., Shatah, J., Strauss, W. 1987, J. Funct. Anal. 74, 160
- Haken, H. 1978, "Synergetics" (Springer, Berlin, Heidelberg, Nueva York)
- Holm, D.D., Marsden, J.E., Ratiu, T., y Weinstein, A. 1985 Phys. Rep. 123, 2
- Holm, D.D., y Kupershmidt, B.A. 1986 Phys. Fluids 29, 49
- Intrilligator, D.S. y Wolfe, J.H. 1970, Astrophys. J. 162, L187
- Jensen, R.V. 1981, J. Stat. Phys. 25, 183
- Jokipii, J.R. 1968, Rev. Geophys. Space Phys. 9, 27
- Kadomtsev, B. 1979, "Phenomenes collectifs dans les plasmas" (Mir, Moscu)
- Kakutani, T., y Sugimoto, N. 1974, Phys. Fluids 17, 1617
- Karpman, V.I. 1968, Phys. Lett. 26A, 619
- Karpman, V.I., y Sokolov, V.P. 1968, Sov. Phys. JETP 27, 839
- Kaup, D.J., y Newell, A.C. 1978, J. Math. Phys. 19, 798

- Kingsep, A.S., Rudakov, L.I., y Sudan, N. 1973, Phys. Rev. Lett. 31, 1482
- Kustmarsev, F.V. 1985, Landau Institute Preprint.
- Laedke, E.W., y Spatschek, K.H. 1980, Phys Fluids 23, 44
- Laedke, E.W., y Spatschek, K.H. 1982, J. Plasma Phys. 28, 469
- Laedke, E.W., Spatschek, K.H., y Stenflo, L. 1983, J. Math. Phys. 24, 2764
- Laedke, E.W., y Spatschek, K.H. 1984, J. Plasma Phys. 32, 263
- Laedke, E.W., Spatschek, K.H., Wilkens Jr., M., y Zolotariuk, A.V. 1985, Phys. Rev. A 32, 1161
- Lakhina, G.S. 1987, Astrophys. and Space Sci. 133, 203
- Langouche, F., Roekaerts, D., y Tirapegui, E. 1979, Prog. Theor. Phys. 61, 1617
- Lax, P.D. 1968, Comm. Pure Appl. Math. XXI, 467
- Matthaeus, W.L., y Goldstein, M.L. 1983, Solar Wind Five, (NASA, Scientific and Technical Information Branch, Washington D.C.) p. 73
- Matsuno, Y. 1977, Phys. Lett 64A, 14
- Meiss, J.D., y Horton, W. 1982, Phys. Fluids 25, 1842
- Mjølhus, E. 1976, J. Plasma Phys. 16, 321
- Mjølhus, E. 1978, J. Plasma Phys. 19, 437
- Moon, H., y Goldman M. 1948, Phys. Rev. Lett. 53, 1821
- Morrison, P.J., y Eliezer, S. 1986, Phys. Rev. A 33, 4205
- Neugebauer, M. 1975, J. Geophys. Res. 80, 998
- Newell, A.C. 1980, en "Solitons", ed. por R.K. Bullough y P.J. Caudrey (Springer, Berlin), p. 177
- Ovenden, C.R., Shah, H.A., y Schwartz, S.J. 1983, J. Geophys. Res. 88, 6095
- Patel, V.L., y Dasgupta, B. 1987, Physica 27D, 387
- Ponce Dawson, S., y Ferro Fontán, C. 1988a, J. Comp Phys. (en prensa)

- Ponce Dawson, S., y Ferro Fontán, C. 1988b, Phys. Fluids 31, 83
- Ponce Dawson, S., y Ferro Fontán, C. 1988c, J. Plasma Phys. (en prensa)
- Ponce Dawson, S., y Ferro Fontán, C. 1988d, enviado a Phys. Rev. A.
- Ponce Dawson, S., y Ferro Fontán, C. 1988e, enviado a Astrophys. J.
- Rajaraman, R., y Raj Lakshmi, M. 1982, Phys. Rev B 25, 1866
- Register, A. 1971, Phys. Fluids 14, 2733
- Rudakov, L.I., y Tsytovich, V.N. 1978, Phys. Rep. 40C, 1
- Sakai, J., y Sonnerup, B.U.O. 1983, J. Geophys. Res. 88, 9069
- Scalapino, D.J., Sears, M., y Ferrell, R.A. 1972, Phys. Rev B 6, 3409
- Scott, S.L., Rickett, B.J., y Armstrong, J.W. 1983, Astron. Astrophys. 123, 191
- Scott, S.L., Coles, W.A., y Bourgois, G. 1983, Astron. Astrophys. 123, 207
- Scharf, G., y Wreszinski, W.F. 1981 Ann Phys. 134, 56
- Spangler, S.R. 1985, Astrophys. J. 299, 122
- Spangler, S.R., y Sheerin, J.P. 1982a, J. Plasma Phys. 27, 193
- Spangler, S.R., y Sheerin, J.P. 1982b, Astrophys. J., 257, 855
- Spangler, S.R., Sheerin, J.P., y Payne, G.L. 1985, Phys. Fluids 28, 104
- Strauss, W.A. 1988 comunicacion personal
- Taha, T. y Ablowitz, M. 1984a, J. Comput. Phys. 55, 192
- Taha, T. y Ablowitz, M. 1984b, J. Comput. Phys. 55, 203
- Taha, T. y Ablowitz, M. 1984c, J. Comput. Phys. 55, 231
- Taniuti, T., y Wei, C. 1968, J. Phys. Soc. Japan 24, 941
- Tasso, H. 1983, Phys. Lett. 96A, 33
- Tasso, H. y Lerbinger, K. 1983, Phys. Lett. 97A, 384
- Terasawa, T. Hoshino, M., Sakai, J., y Hada, T. 1986 J.

Geophys. Res. 91 , 4171

ter Haar, D. y Tsytovich, V.N. 1981, Phys. Rev 73 , 175

Thornhill, S.G. y ter Haar, D. 1978, Phys. Rep. 43 , 43

Tsytovich, V.N. 1977 "Theory of Turbulent Plasma" (New York, Consultants Bureau)

Verga, A.D., y Ferro Fontan, C. 1984, Phys. Lett. 106A , 281

Woo, R., y Armstrong, J.W. 1979, J. Geophys. Res. 84 , 7288

Zakharov, V.E. 1972, Soviet Phys. JETP 35 , 908

Zakharov, V.E. y Shabat, A.B. 1972, Soviet Phys. JETP 34 , 62

## AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Dr. Constantino Ferro Fontán por haber dirigido esta tesis y por haber colaborado de este modo en mi formación para la investigación.

Agradezco, a la distancia, al Dr. Alberto Verga por sus comentarios e interesantes aportes.

Agradezco al IAFE por haberme brindado lugar de trabajo, acceso a bibliografía y facilidades de cómputo.

Agradezco muy especialmente a mis compañeros y, en particular, a los del grupo de plasmas astrofísicos, por hacer del Instituto un lugar donde trabajar resulta muy agradable.

Agradezco a los grupos de Colisiones Atómicas y de Teorías Cuánticas Relativistas y Gravitación del IAFE el haber cedido su computadora e impresora para el procesamiento de este texto.

Por último, agradezco al CONICET por su financiación durante la realización de esta tesis.