



Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Biblioteca Digital FCEN-UBA

El espectro y los procesos no-lineales de la energía en el movimiento atmosférico de gran escala

Barros, Vicente Ricardo
1973

Tesis Doctoral

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

www.digital.bl.fcen.uba.ar

Contacto: digital@bl.fcen.uba.ar

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Fuente / source:

Biblioteca Digital de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad de Buenos Aires

Tesis
1442

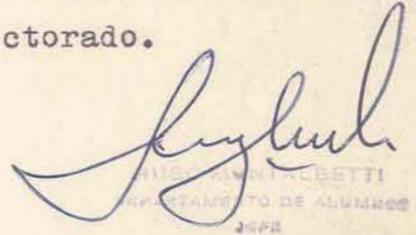


UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Buenos Aires, 22 de noviembre de 1973

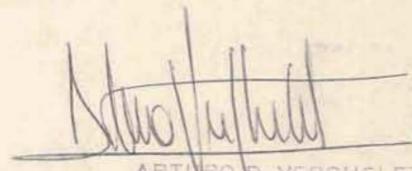
En la fecha, la Sub-Comisión del Departamento de Meteorología presentó un ejemplar del Trabajo de Tesis realizado por el Licenciado VICENTE RICARDO BARROS, para su carrera del Doctorado.


VICENTE RICARDO BARROS
COMITÉ DE ALUMNOS
JCFE

Buenos Aires, 22 de noviembre de 1973

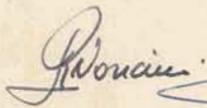
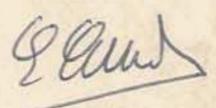
PASE al Jurado designado, a fin de que se sirva considerar el presente Trabajo de Tesis.

l.ch.-


ARTURO D. VERGHELET
SECRETARIO DE EXTENSION UNIVERSITARIA
A/C. SECRETARÍA ACADEMICA

Buenos Aires, diciembre 22 de 1973.

En el día de la fecha el Jurado designado, procedió a considerar la presente tesis, resolviendo aceptarla.

Reg. N° 1442

Tesis 1442

EL ESPECTRO Y LOS PROCESOS NO-LINEALES DE LA ENERGIA
EN EL MOVIMIENTO ATMOSFERICO DE GRAN ESCALA

Tesis de: Vicente Ricardo Barros

Director de Tesis: Dr. Aksel Wiin-Nielsen

Noviembre 1973

1442

- 1442 -

INDICE

- I INTRODUCCION
- I 1 Estudios observacionales
- I 2 Estudios teóricos
- I 3 Estudios numpericos
- I 4 Alcance del presente estudio

CAPITULO I:

- 1. EL MODELO I
- 1.1 Condiciones de contorno
- 1.2 Métodos matemáticos
- 1.3 Condiciones iniciales
- 1.4 Métodos numéricos
- 1.5 Energética
- 1.6 Fórmulas de diagnóstico

CAPITULO II:

- 2. Perfomance del MODELO I

CAPITULO III:

- 3. Resultado de los experimentos (Modelo I)

CAPITULO IV:

- 4. MODELO II
- 4.1 Descripción
- 4.2 Modelos numéricos
- 4.3 Energética del (Modelo II)
- 4.4 Diagnóstico energético

CAPITULO V:

- 5. Resultados de la integración del modelo II

INDICE

CAPITULO VI.

6. Discusión analítica del modelo de dos capas.

CAPITULO VII.

7. Conclusiones
8. Bibliografía
9. Figuras
10. Apéndice A
11. Apéndice B

INTRODUCCION

Durante la última década se ha realizado un gran esfuerzo en la investigación de la turbulencia bidimensional y cuasigeostrofica del flujo atmosférico de gran escala. Los procesos no lineales involucrados son importantes para la redistribución de la energía entre las diferentes ondas y están probablemente muy relacionados con la forma del espectro energético.

Gran parte de la motivación para este esfuerzo, proviene de los estudios teóricos acerca de la predecibilidad del flujo atmosférico, los cuales han mostrado la importancia del espectro energético para la determinación de la velocidad con que los errores en las pequeñas escalas se propagan hacia las escalas mayores. Estas últimas son precisamente las predichas por los modelos numéricos operados por muchos países, para sus pronósticos de rutina.

La predecibilidad de la atmósfera es un tema de interés para la investigación actual por cuanto es importante saber si un mejor conocimiento de las pequeñas escalas a través del mejoramiento de las observaciones va a producir un mejor pronóstico o si hay un límite intrínseco para la predecibilidad de la atmósfera.

1. ESTUDIOS OBSERVACIONALES

Varios trabajos se han realizado sobre la base de las observaciones.

Ogura (1958), Horn y Bryson (1963) y Wiin-Nielsen (1967) han mostrado que la energía cinética en el espacio del número de onda, tiende a comportarse en el rango entre el número de onda 7 y 15, con una ley potencial con exponente -3. El número de onda en estos casos está definido por el número de ondas alrededor de la Tierra en un paralelo de latitudes medias. Wiin-Nielsen (1967) ha mostrado asimismo que la misma ley se aplica a la energía potencial disponible cuando se usa para su cálculo, datos de varios niveles.

Julian y otros (1970) han estudiado el espectro de la energía cinética con una variedad de métodos y han concluido que para longitudes de onda menores de 4000 Km. la representación exponencial requiere un exponente constante, comprendido entre -2.7 y -3.0 y lo que constituyó un nuevo aporte, que este valor no depende de si el espectro es calculado a partir del viento geostro-

fico, del viento calculado de la ecuación de balance o del observado.

La distribución espectral de la energía cinética también fué estudiada por Baer (1972) y Wiin Nielsen (1972) usando funciones armónicas esféricas.

Yang (1967) ha realizado cálculos de las transferencias no lineales de energía potencial disponible y de energía cinética.

Se observó que la energía cinética es cascada desde el medio del espectro, (ondas $5 \leq m \leq 10$) hacia ambos extremos. Parte de la energía así transferida a las ondas cortas es a su vez cedida al flujo zonal. Por otra parte, la ganancia en las ondas N° 13, 14 y 15 no son significativas por cuanto están forzadas por la condición de clausura la que trunca el espacio número de onda en la onda N° 15.

La energía potencial disponible es cascada hacia la pequeña escala.

Steimberg (1971) ha hecho un cálculo similar de las transferencias no lineales de enstrofia y enstrofia potencial. Fué observada una transferencia hacia los números de onda mayores pero la enstrofia no fluye inalterada como ha sido postulado por algunos estudios teóricos.

Un sumario de estos cálculos, Yang (1967) y Steimberg (1971) para un período de tres meses ha sido dado por Steimberg y otros (1971).

Finalmente, Gustavo Necco (1972) ha hecho el primer estudio observacional del espectro de la energía cinética con datos del hemisferio sur.

Usó globos del proyecto Eolo para calcular la vorticidad y la divergencia a partir de triadas de globos. Luego pudo calcular el espectro de enstrofia y divergencia, obteniendo una ley potencial con exponente -3 para la energía cinética en el mismo rango que otros autores.

2. ESTUDIOS TEORICOS

El comportamiento espectral de la energía, descrito por los autores citados, en un rango donde ni las conversiones entre energía potencial disponible y energía cinética, ni los cambios en el equilibrio estadístico son significantes, difiere de lo predicho por la teoría de Kolmogoroff.

En efecto, en este caso, la forma del espectro se deduce a partir de la suposición que la transferencia de energía hacia la pequeña escala es grande comparada con el cambio de energía cinética en cada onda. Esto se da en un rango comprendido entre las escalas en las cuales es generada la energía y aquellas donde es disipada.

En consecuencia una ley potencial con exponente $-5/3$ es predicha sobre la base de una cascada constante de energía hacia la pequeña escala. Al desarrollar esta teoría se supone un flujo tridimensional homogéneo e isotrópico.

La forma diferente del espectro observado sugiere un mecanismo completamente diferente en la turbulencia de la atmósfera en esas escalas de movimiento.

En el movimiento atmosférico, la escala horizontal de las ondas sinópticas es dos o tres órdenes de magnitud mayores que la escala vertical. Esto conduce a la suposición hidrostática, Haltiner (1968) y de esta forma el movimiento de esa escala (o mayor) puede ser considerado cuasibidimensional.

En un movimiento estrictamente bidimensional de un fluido incompresible, se puede identificar dos propiedades conservativas si no hay generación ni disipación de energía. Ellas son la energía cinética

$$K = \int_M \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{2} dM$$

y la enstrofia

$$E = \int_M \frac{\zeta^2}{2} dM$$

donde \vec{v} es la velocidad horizontal

M es la masa del sistema

ζ es la vorticidad, relacionada a la función corriente ψ por

$$\zeta = \nabla^2 \psi$$

Usando estas propiedades conservativas, Fjörft (1953) dedujo que en este caso de movimiento, el flujo de energía cinética en el espacio del número de onda debe seguir una de las siguientes alternativas.

$$k_1 \longleftarrow k_2 \longrightarrow k_3$$

$$\text{ó } k_1 \longrightarrow k_2 \longleftarrow k_3$$

donde $k_1 < k_2 < k_3$ son los respectivos números de onda

En el primer caso, el flujo desde k_2 a k_3 debe ser menor que el de k_2 a k_1 .

Resumiendo, la conclusión de Fjörft es que en un sistema de tres ondas, no puede haber una cascada de energía cinética en ninguna dirección.

Considerando el mismo tipo de movimiento que Fjørtoft, Kraichnan (1967) estudió un espectro continuo.

Supuso que la energía era inyectada en el sistema en un dado número de onda y que solo había disipación en escalas relativamente alejadas de esa región del espectro. Su conclusión es que en esas condiciones existen dos subrangos inerciales. Uno de ellos está caracterizado por una ley potencial de exponente *igual* a -3 para la energía cinética y cubre la región del espectro que va desde la onda forzada hacia las pequeñas escalas.

En este subrango inercial no hay flujo de energía cinética y el flujo de entropía es constante y dirigido hacia las ondas cortas. El otro subrango inercial se da desde la onda forzada hacia las ondas largas, presenta una ley potencial con exponente $a - \frac{5}{3}$ para la energía. En este último subrango el flujo de energía es hacia las ondas largas y constante a través del espectro mientras que no hay flujo de entropía.

Leith (1968 a) (1968 b) con un tratamiento simplificado llegó a las mismas conclusiones que Kraichnan.

La concordancia entre estas teorías y los estudios observacionales fué comentada por Charney (1971) en estos términos.

"A partir de la publicación de la teoría de Kraichnan, el comportamiento potencial (ley del "menos 3") de la turbulencia atmosférica en longitudes de onda menores que aquellas preferentemente excitadas por la inestabilidad baroclínica ha sido explicado por el carácter aproximadamente bidimensional del movimiento atmosférico. Pero uno debe preguntarse: Son los movimientos atmosféricos, especialmente en el rango $k = 7 - 20$ bidimensionales en algún sentido real?. Las observaciones muestran que los principales movimientos sinópticos en la atmósfera son decididamente baroclínicos, con variaciones verticales de la velocidad, temperatura, etc. a través de todo el espesor de la troposfera.

"En general, los cambios en la componente vertical de la vorticidad son debidos tanto al estiramiento o compresión de los tubos de vórtice como a la advección horizontal. La similitud entre el espectro observado y el de un flujo bidimensional sería pues de alguna manera fortuito.

"Hay sin embargo una más profunda similitud. El flujo bidimensional no viscoso está gobernado por la conservación de un sólo invariante: la vorticidad.

"El flujo cuasigeostrófico tridimensional está gobernado a su vez por la conservación de dos escalares invariantes: la vorticidad potencial y la temperatura potencial, Charney (1948). Un análisis de escala sistemático permite que estas dos constantes del movimiento adiabático y no viscoso, puedan ser combinadas en una sola constante, la que será llamada pseudo vorticidad potencial y cuya ley de conservación determina completamente los movimientos (Charney, 1960), (Charney y Stern, 1961)."

En ese mismo trabajo, Charney, después de dimensionar apropiadamente los movimientos verticales y basándose en el carácter cuasigeostrófico de la atmósfera, muestra que la energía cinética y la energía potencial disponible deben seguir una ley potencial con exponente igual a -3.

Merillees y Warn (1972) han mostrado que la baja resolución vertical puede afectar el espectro de la energía potencial disponible. En particular, para un modelo de dos capas, mientras la energía cinética todavía sigue una "ley de menos tres", la energía potencial disponible debe obedecer una "ley de menos cinco".

3. ESTUDIOS NUMERICOS

Mientras que los estudios observacionales y teóricos concuerdan acerca de la forma del espectro, ese acuerdo no se extiende a los flujos de energía y entropía, en los rangos donde supuestamente existirían condiciones inerciales. Esto puede deberse a que la limitada densidad de observaciones meteorológicas implica que cualquier representación en serie de Fourier debe ser truncada alrededor del número de onda 15.

Por otra parte, los estudios teóricos tienen ciertos postulados, especialmente Leith (1968a) y Kraichnan (1967), que deben ser confirmados por experimentación.

Lilly (1969) ha hecho un experimento numérico simulando la turbulencia bidimensional, usando una grilla de 64 por 64 puntos, con condiciones de contorno cíclicas en ambas direcciones. Lilly trató de reproducir las hipótesis de Kraichnan por lo que usó una función de excitación compuesta por todas las componentes bidimensionales de Fourier, cuyo número de onda máximo

igualara a cierto número de onda k_i . El calentamiento total fue mantenido constante, pero las contribuciones de las distintas componentes fueron elegidas al azar de una distribución gaussiana.

El experimento confirmó aproximadamente las conclusiones de Kraichnan acerca de los rangos inerciales y la forma del espectro. Puesto que el experimento no implementa un mecanismo de disipación suficientemente eficiente en los modos bajos del espectro, después de un tiempo la energía comienza a amontonarse en la onda número uno que es la más grande permitida en el sistema. Debido a este efecto la "ley de $-\frac{5}{3}$ para $k < k_i$ " no pudo ser confirmada.

Manabe y otros (1970), han calculado el espectro de la energía cinética de un modelo de circulación general y han obtenido una "ley de -3 " aproximadamente. También encontraron que la mayor parte de la energía cinética proveniente de la conversión baroclínica en el rango de las ondas medias se transfiere hacia las escalas mayores.

Steimberg (1971) condujo un experimento con un modelo, el cual, reteniendo las mismas condiciones de contorno y excitación que el de Lilly, permite la existencia de energía potencial disponible. Este es un modelo de dos capas y la alimentación del sistema se hace a través de una función de calentamiento que genera energía potencial disponible.

Steimberg obtuvo una distribución espectral de la energía cuasiestacionaria, pero los exponentes de la ley potencial varían entre -1.7 y -3.4 , dependiendo de la intensidad de la disipación y de la alimentación energética. El sub-rango inercial en la enstrofia no fue observado pero el flujo de energía cinética hacia la pequeña escala era bastante reducido. La conclusión de Steimberg es que "las teorías de la turbulencia bidimensional coinciden con el modelo y la atmósfera, solo en la medida que predicen las direcciones dominantes de las cascadas no lineales de energía cinética y enstrofia". Esta afirmación es avalada por las observaciones.

4. ALCANCE DEL PRESENTE ESTUDIO

Tanto Lilly como Steimberg han usado una disipación horizontal. Puesto que el modelo de Steimberg semeja más aproximadamente el flujo atmosférico, es po-

sible aumentar esta aproximación, parametrizando el efecto de la capa límite y reteniendo la disipación interna, la que no había sido considerada en el modelo.

Puesto que la disipación usada por Lilly y Steimberg implica que es proporcional a K_k y k^2 , la cuestión que se presenta es si la ley exponencial obtenida es debida a esta clase de parametrización de la disipación o si debe ser atribuida a la dinámica de las interacciones no lineales. Por lo tanto, otra clase de parametrización de la disipación puede ayudar a contestar esta pregunta.

Otra cuestión es la concerniente con lo que sucede a la cascada de energía cinética si la excitación se hace en el modo más bajo posible del espectro.

Por lo tanto, una serie de experimentos fueron realizados mejorando el modelo de Steimberg con el agregado de los mecanismos de disipación mencionados.

Por otra parte, si las simulaciones numéricas son realizadas para ganar el conocimiento que no se puede obtener en el presente de los estudios observacionales, una representación más realista del movimiento atmosférico se impone.

Como queda dicho, Lilly y Steimberg no permitieron, en sus experimentos, la existencia de un flujo zonal y esta es su mayor diferencia respecto del movimiento atmosférico. Por ello, en este estudio, una serie de experimentos han sido realizados con un modelo de dos capas que permite el flujo zonal y cuya descripción se hace más adelante.

Simulaciones numéricas de este tipo han sido realizadas desde el trabajo inicial de Phillips (1956). Pero en nuestro caso utilizaremos la simulación numérica para estudiar los procesos no lineales en el modelo y la posible existencia de subrangos inerciales y leyes exponenciales predichos por los estudios teóricos.

Nos referiremos aquí al segundo modelo mencionado como al modelo I, mientras que en el caso del modelo con condiciones de contorno cíclicas, lo designaremos como modelo II.

CAPITULO I

EL MODELO I

Este modelo es esencialmente el descrito por Phillips (1956), con algunas diferencias que serán puntualizadas más adelante.

El modelo representa la circulación de la atmósfera como si esta estuviera confinada en un canal con condiciones de contorno cíclicas, en la dirección este-oeste. Esta visión simplificada del flujo atmosférico es aún suficientemente realista para describir el flujo en un anillo que contiene las latitudes medias. Esto fue mostrado por el experimento de Phillips. En efecto, dicho experimento mostró que las características esenciales de la circulación atmosférica eran retenidas por el modelo.

La derivada del parámetro de Coriolis $\frac{\partial f}{\partial y} = \beta$ es considerada como constante. Usando la común terminología de Meteorología, podemos decir que se trabaja en el plano β .

La aproximación cuasigeostrofica conduce a un sistema simplificado de las ecuaciones hidrodinámicas. Esta aproximación filtra las ondas inercio-gravitacionales, dejando prácticamente no modificadas las ondas meteorológicas.

La aproximación hidrostática, por otra parte, filtra las ondas sonoras y, por lo tanto, las únicas ondas permitidas son las meteorológicas.

En coordenadas x - y - p se parte del sistema de ecuaciones.

$$1. \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v = - \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \nabla^2 u - g \frac{\partial z_x}{\partial p}$$

$$2. \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f u = - \frac{\partial \phi}{\partial y} + v \nabla^2 v - g \frac{\partial z_y}{\partial p}$$

$$3. \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial p} = 0$$

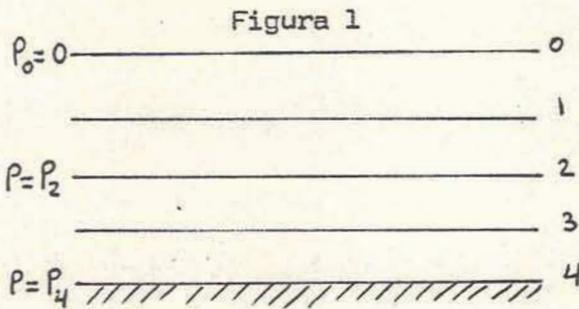
$$4. \frac{1}{c_p T} \frac{dQ}{dt} = \frac{d \ln \theta}{dt}$$

$$5. p = f R T$$

$$6. \frac{\partial p}{\partial z} = - \rho g$$

donde cada símbolo tiene la usual significación dada en Meteorología Dinámica.

La figura 1 ilustra la resolución vertical adoptada.



Todas las derivadas con respecto a p son reemplazadas ^{por diferencias finitas} por diferencias finitas. Nótese que siendo

los niveles igualmente espaciados

$$p_4 - p_2 = p_2 \quad p_2 - p_0 = p_2$$

En el nivel 1,

$$g \frac{\partial \zeta_x}{\partial p} \approx g \frac{\zeta_{x2}}{p_2}$$

$$g \frac{\partial \zeta_y}{\partial p} \approx g \frac{\zeta_{y2}}{p_2}$$

Si suponemos

$$\vec{\zeta} = 0 \quad \text{en } p=0$$

$$\text{y } \omega = 0 \quad \text{en } p=0 \quad \text{y } p=p_4$$

Las ecuaciones 1. y 2. pueden ser reemplazadas por la ecuación de vorticidad y la ecuación de divergencia. Esta última se simplifica a la relación geostrofica

$$f_0 \Psi = \phi \quad \text{donde } \Psi \text{ es la función corriente.}$$

La ecuación de vorticidad se obtiene mediante el operador

$$\frac{\partial (2.)}{\partial x} - \frac{\partial (1.)}{\partial y}$$

y por lo tanto

$$7. \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \vec{V}_1 \cdot \nabla (\xi_1 + f) = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_1 f + v \nabla^2 \xi_1 - g \frac{\partial \zeta_2}{\partial p_2} \cdot \vec{k}$$

El índice 1₀ indica el nivel 1.

Usando la ecuación 3 y para no obtener vorticidades espurias, debido a las simplificaciones introducidas en la ecuación de divergencia y en ecuaciones 1. y 2., se toma $f = f_0 = cte.$ en el primer término del segundo miembro de 7.

Entonces

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \vec{V}_1 \cdot \nabla(\xi_1 + f) = f_0 \left(\frac{\partial \omega}{\partial p} \right)_1 + \nu \nabla^2 \xi_1 - g \frac{\nabla \times \vec{\zeta}_2}{P_2} \cdot \vec{K}$$

si se admite que

$$\vec{\zeta}_2 = -\frac{\mu g P_2}{P_2} (\vec{V}_3 - \vec{V}_1) \quad ; \quad \left(\frac{\partial \omega}{\partial p} \right)_1 = \frac{\omega_2}{P_2}$$

en diferencias finitas debido a que

$$\vec{\zeta}_2 = \mu \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \right)_2 = -\mu g P_2 \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial p} \right)_2$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \vec{V}_1 \cdot \nabla(\xi_1 + f) = \frac{f_0 \omega_2}{P_2} + \nu \nabla^2 \xi_1 + \frac{\mu g^2 P_2}{P_2^2} (\xi_3 - \xi_1)$$

En el nivel 3.

$$\frac{\partial \xi_3}{\partial t} + \vec{V}_3 \cdot \nabla(\xi_3 + f) = -\frac{f_0 \omega_2}{P_2} + \nu \nabla^2 \xi_3 + \frac{g}{P_2} \nabla \times (\vec{\zeta}_4 - \vec{\zeta}_2) \cdot \vec{K}$$

llamando

$$\frac{\mu g^2 P_2^2}{P_2^2} = \tilde{A}$$

y otra vez

$$\frac{g}{P_2} (\nabla \times \vec{\zeta}_2) \cdot \vec{K} = \tilde{A} (\xi_1 - \xi_3)$$

Para $\vec{\zeta}_4$ se hace la suposición, común en Micrometeorología

$$\zeta_{x4} = C_d P_4 V_4 u_4$$

$$\text{donde } V_4 = (u_4^2 + v_4^2)^{1/2}$$

$$\zeta_{y4} = C_d P_4 V_4 v_4$$

$$C_d = cte.$$

y así

$$-\frac{g}{P_2} (\nabla \times \vec{C}_4) \cdot \vec{k} = -\frac{g}{P_2} C_d \rho_4 V_4 \xi_4 = -\tilde{k} \xi_4$$

donde se ha supuesto que $\frac{g C_d \rho_4 V_4}{P_2}$ tiene una variación muy pequeña en el plano horizontal.

\vec{V}_4 es calculado en función de \vec{V}_1 y \vec{V}_3 usando un método diseñado por Deromé suponiendo que $P_1 = 25 \text{ cb}$, $P_3 = 75 \text{ cb}$ y $P_4 = 100 \text{ cb}$ y que el gradiente vertical de temperatura es $0.65^\circ\text{C}/100 \text{ m}$. se llega a que

$$\xi_4 = -0.3 \xi_1 + 1.3 \xi_3$$

La ecuación de vorticidad en el nivel 1. y 3. toma la forma

$$8. \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \vec{V}_1 \cdot \nabla (\xi_1 + f) = \frac{f_0 \omega_2}{P_2} + \nu \nabla^2 \xi_1 + \tilde{A} (\xi_3 - \xi_1)$$

$$9. \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial t} + \vec{V}_3 \cdot \nabla (\xi_3 + f) = -\frac{f_0 \omega_2}{P_2} + \nu \nabla^2 \xi_3 + (\tilde{A} + 0.3 \tilde{k}) \xi_1 - (\tilde{A} + 1.3 \tilde{k}) \xi_3$$

En este modelo

y puesto que $\frac{\partial f}{\partial y} = \beta$

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \xi = \nabla^2 \psi = \frac{1}{f_0} \nabla^2 \phi$$

La ecuación 4. aplicada en el nivel 2. da

$$10. \quad \frac{f_0 \omega_2}{P_2} = \lambda^2 \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_2 \cdot \nabla \right) T - \frac{R}{c_p f_0} \frac{dQ}{dt} \right]$$

donde T está redefinido como $(\psi_1 - \psi_3)$

y $\vec{V}_2 = \frac{1}{2} (\vec{V}_1 + \vec{V}_3)$

En la ecuación 10. fueron usadas diferencias finitas y por lo tanto λ^2 es tomado como una constante para mantener la temperatura media.

$$\lambda^2 = f_0^2 \theta_2 \left[(\phi_3 - \phi_1) (\theta_3 - \theta_1) \right]^{-1} = c \epsilon \epsilon.$$

Usando las ecuaciones 8., 9. y 10. ω es eliminado y si se define la vorticidad potencial q :

$$q_1 = \nabla^2 \psi_1 - \lambda^2 T$$

$$q_3 = \nabla^2 \psi_3 + \lambda^2 T$$

se obtiene

$$11. \frac{\partial q_1}{\partial t} = -\vec{V}_1 \cdot \nabla (\beta Y + q_1) + \frac{\lambda^2 R}{f_0 c_p} \frac{dQ}{dt} + \nu \nabla^2 \xi_1 + \tilde{A} (\xi_3 - \xi_1)$$

$$12. \frac{\partial q_3}{\partial t} = -\vec{V}_3 \cdot \nabla (\beta Y + q_3) - \frac{\lambda^2 R}{f_0 c_p} \frac{dQ}{dt} + \nu \nabla^2 \xi_3 + (\tilde{A} + 0,3 \tilde{k}) \xi_1 - (\tilde{A} + 1,3 \tilde{k}) \xi_3$$

En estas ecuaciones se admiten tres clases de mecanismos friccionales.

Phillips (1956) tomó en consideración la capa límite mediante la parametrización a través de la constante \tilde{k} tal como hemos hecho aquí. Su estimación de \vec{V}_4 fue diferente y creemos que la nuestra es mejor.

Charney (1959) consideró que el efecto de la disipación interna por mezcla vertical era aún mayor que el de la disipación lateral. En el experimento de Phillips solo se tuvo en cuenta este último mecanismo. Nosotros consideramos conveniente mantener los tres mecanismos.

Antes de describir la función de calentamiento es conveniente distinguir entre la función de calentamiento y la difusión lateral de temperatura. Si se permite este tipo de difusión en las ecuaciones

$$\frac{dQ}{dt} = Q_H + Q_d$$

$$Q_d = \frac{c_p f_0 \nu}{R} \nabla^2 T$$

y si ambas funciones de calentamiento están consideradas en $P_2 = 50$ cb las ecuaciones 11. y 12. toman esta forma

$$13. \frac{\partial q_1}{\partial t} = -\vec{V}_1 \cdot \nabla (\beta Y + q_1) - \frac{\lambda^2 R}{f_0 c_p} Q_H + \nu \nabla^2 q_1 + \tilde{A} (\xi_3 - \xi_1)$$

$$14. \frac{\partial q_3}{\partial t} = -\vec{V}_3 \cdot \nabla (\beta \gamma + q_3) + \frac{\lambda^2 R}{f_0 C_p} Q_H + \sqrt{\sigma} \nabla^2 q_3 + (\tilde{A} + 0,3 \tilde{k}) \xi_1 - (\tilde{A} + 1,3 \tilde{k}) \xi_3$$

La función de calentamiento usada por Phillips no puede ser utilizada. Charney (1959) ha mostrado que el estado estacionario que corresponde a tal calentamiento está asociado a valores de viento tan intensos que son de un orden de magnitud mayor que los mayores valores observados.

El experimento de Phillips no alcanzó a producir tales vientos porque se inició desde un estado de reposo y la inestabilidad computacional se produjo mucho antes de alcanzar esos valores.

Por esta razón se usará aquí la función de calentamiento propuesta por Charney, la cual da un flujo estacionario de acuerdo con los valores observados.

Esta función Newtoniana en esencia es

$$15. Q_H = \frac{4g \lambda [2 - \lambda] \sigma T_m^4}{2P_2} \left[1 - \frac{\gamma}{\# a} - \frac{f_0 (\psi_1 - \psi_3)}{RT_m} \right]$$

$$g = 9,81$$

$$T_m = 238$$

$$\lambda = 0,8$$

$$\# = 4$$

$$\sigma = 5,75 \times 10^{-4}$$

$$a = 6371 \times 10^3$$

$$\gamma = j \Delta \gamma$$

$$f_0 = 10^{-4}$$

$$\Delta \gamma = 475 \times 10^3$$

Todos los valores en M.T.S.

$$j = -\pi \text{ --- } 0 \text{ --- } \pi$$

$$\pi = 11.$$

$\Delta \gamma$ es el lado de la grilla.

Otros valores constantes son

$$\lambda = 1,5 \times 10^{-12}$$

$$f_0 = 10^{-4}$$

$$C_p = 1004$$

$$R = 287$$

$$\beta = 1,6 \times 10^{-4}$$

$\sqrt{\tilde{A}}, \tilde{k}$

son constantes que parametrizan la fricción y son variables de los experimentos. De cualquier modo sus valores oscilarán alrededor de los usados por Phillips y Charney.

Con respecto a la función de calentamiento nótese que si

$$\frac{f_0}{R} (\psi_1 - \psi_3) > T_m \left(1 - \frac{y}{a}\right)$$

habrá enfriamiento mientras que si es a la inversa habrá calentamiento. Puesto que $\frac{f_0}{R} (\psi_1 - \psi_3)$ es la temperatura de acuerdo a la aproximación geostrofica e hidrostática, la función de calentamiento es la diferencia entre la temperatura y un perfil lineal con un valor medio igual a T_m . Así en la parte "sur" del canal predomina el calentamiento mientras que en la parte "norte" lo hace el enfriamiento.

1. CONDICIONES DE CONTORNO

En los párrafos anteriores han sido establecidas las condiciones de contorno en la superficie de la tierra y en el tope de la atmósfera.

En la dirección este-oeste se fijan condiciones cíclicas. Las dimensiones del rectángulo sobre el que se integran las ecuaciones son tales que este puede ser representativo de un cinturón de latitudes medias alrededor de la Tierra.

En principio se admiten sendos muros en los bordes norte y sur. Las condiciones de contorno de Phillips eran $\psi'_i = \xi'_i = 0$ en ambos bordes para todo i . La definición de ψ' y ξ' surge de

$$\psi = \bar{\psi} + \psi' \quad \text{donde} \quad \bar{\psi} = \sum_{i=1}^M \psi'_i$$

donde M es el número de puntos de grilla en la dirección este-oeste. Igualmente

$$\xi = \bar{\xi} + \xi' \quad ; \quad \bar{\xi} = \sum_{i=1}^M \xi_i$$

Si ψ_w representa ψ en el borde y ψ_f el valor de ψ en la primera línea hacia el interior del fluido inmediatamente después del borde, la otra condición de contorno era $\bar{\psi}_w = \bar{\psi}_f$

Cuando Phillips realizó sus experimentos, el problema de inestabilidad no-lineal era desconocido. Fue precisamente Phillips (1959) el primero que planteó tal problema.

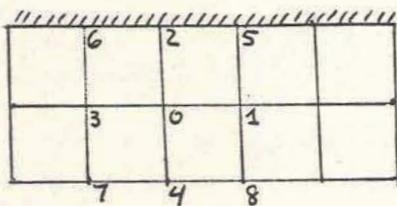
Para salvar este tipo de inestabilidad, Arakawa (1965) diseñó un esquema numérico para poder evaluar jacobianos, de forma de asegurar la conservación de energía cinética, vorticidad y enstrofia.

A través de este esquema numérico, las mencionadas cantidades no son viciadas cuando se calculen los jacobianos. Es, precisamente, este operador la parte no lineal de la computación.

En este trabajo fue usado el jacobiano de Arakawa y de esta forma, integraciones superiores a 4000 horas fueron realizadas sin ningún signo de inestabilidad. Esto sólo fue posible debido a que las condiciones de contorno en los bordes fueron modificados a tal fin.

Figura 2. representa un punto de la grilla en la primera línea inmediatamente cercana al borde.

Fig. 2.



El jacobiano de Arakawa aplicado en el punto 0 tendrá la siguiente expresión:

$$J(\psi, \xi)_0 = \frac{1}{12d^2} \left[(\psi_1 - \psi_3)(\xi_2 - \xi_4) - (\psi_2 - \psi_4)(\xi_1 - \xi_3) \right. \\ \left. + \psi_1(\xi_5 - \xi_8) - \psi_3(\xi_6 - \xi_7) - \psi_2(\xi_5 - \xi_6) + \psi_4(\xi_8 - \xi_7) \right. \\ \left. + \xi_2(\psi_5 - \psi_6) - \xi_4(\psi_8 - \psi_7) - \xi_1(\psi_5 - \psi_8) + \xi_3(\psi_6 - \psi_7) \right]$$

Aquellos términos que no incluyen variables en los puntos 6, 2 y 5, cuando se los multiplica por ψ_0 (para generar la ecuación de energía) o por ξ_0 (para generar la ecuación de enstrofia) van a ser compensados por términos similares provenientes de los jacobianos aplicados en los puntos cercanos. De esta forma, cuando la integración se realiza sobre toda la superficie, los

términos en cuestión no dan ninguna contribución a la generación de energía o enstrofia. Es precisamente lo que se espera de un operador advectivo.

Resta por considerar la contribución de los puntos 2, 5 y 6. Llámese a esta contribución C .

$$C = (\psi_1 - \psi_3) \xi_2 - \psi_2 (\xi_1 - \xi_3) + \psi_1 \xi_5 - \xi_6 \psi_3 - \\ - \psi_2 (\xi_5 - \xi_6) + \xi_2 (\psi_5 - \psi_6) - \xi_1 \psi_5 + \xi_3 \psi_6$$

$\psi' = \xi' = 0$ en los bordes implica

$$\psi_2 (\xi_5 - \xi_6) = 0$$

$$\xi_2 (\psi_5 - \psi_6) = 0$$

los restantes términos son

$$C = (\psi_1 - \psi_3) \xi_2 - \psi_2 (\xi_1 - \xi_3) + \psi_1 \xi_5 - \psi_3 \xi_6 - \xi_1 \psi_5 + \xi_3 \psi_6$$

pero puesto que

$$\xi_6 = \xi_2 = \xi_5$$

$$\psi_6 = \psi_2 = \psi_5$$

Esto puede ser escrito

$$16. \quad C = 2 \left[(\psi_1 - \psi_3) \xi_2 - \psi_2 (\xi_1 - \xi_3) \right]$$

La ecuación de vorticidad multiplicada por ψ da la ecuación de energía cinética.

Por lo tanto $16^* \psi_0$ da

$$KC_0 = 2 \left[(\psi_1 - \psi_3) \xi_2 \psi_0 - \psi_0 \psi_2 (\xi_1 - \xi_3) \right]$$

Cambiando a una nomenclatura más conveniente, ésta expresión puede ser escrita

$$KC_i = 2 \left[(\psi_{i-1} - \psi_{i+1}) \xi_w \psi_i - \psi_i \psi_w (\xi_{i-1} - \xi_{i+1}) \right]$$

El subíndice w significa en el borde.

La integración implica la sumatoria sobre todo i para todos los puntos.

$$KC = 2 \left\{ \sum_{i=1}^M (\psi_{i-1} - \psi_{i+1}) \xi_w \psi_i - \sum_{i=1}^M \psi_i \psi_w (\xi_{i-1} - \xi_{i+1}) \right\} =$$

$$= 2 \left\{ \xi_w \psi_0 \psi_1 - \psi_N \psi_{N+1} - \psi_w \sum_{i=1}^M \psi_i (\xi_{i-1} - \xi_{i+1}) \right\}$$

Pero como

$$\psi_0 = \psi_N$$

$$\psi_1 = \psi_{N+1}$$

Se llega a

$$17. \quad KC = -2 \psi_w \sum_{i=1}^M \psi_i (\xi_{i-1} - \xi_{i+1})$$

Para obtener la ecuación de enstrofia, la ecuación de vorticidad es multiplicada por ξ

Luego

$$EC_0 = 2 \left[(\psi_1 - \psi_3) \xi_2 \xi_0 - \psi_2 \xi_0 (\xi_1 - \xi_3) \right]$$

Siendo el problema totalmente simétrico con el anterior, el cambio en notación conduce a

$$18. \quad EC = 2 \xi_w \sum_{i=1}^M \xi_i (\psi_{i+1} - \psi_{i-1})$$

Las expresiones 18 y 17 son cero ya sea si $\xi = cte.$ ó si $\psi = cte.$

en la primera línea después del borde, por causa de las condiciones de contorno cíclicas en la dirección este-oeste.

Respecto a la conservación de la vorticidad, cuando se suma para toda los $i.$, se obtiene a partir de 16.

$$19. \quad VC = 2 \sum_{i=1}^M \left\{ (\psi_{i+1} - \psi_{i-1}) \xi_w - \psi_w (\xi_{i+1} - \xi_{i-1}) \right\}$$

Puesto ξ_w y ψ_w son constantes, 19. es también cero por la condición de contorno cíclica en la dirección este-oeste.

Así ξ_f y $\psi_f = cte$ significa conservación de energía cinética y enstrofia. ^{La} Vorticidad es también conservada.

2. MÉTODOS MATEMÁTICOS

El segundo miembro de las ecuaciones 13 y 14 es obtenido por medio de diferencias finitas centradas, usando la expresión 15b para la evaluación de los jacobianos.

Una vez hecho esto, q_1 y q_3 son obtenidos a través del siguiente esquema de integración,

2a. MÉTODO DE INTEGRACION EN EL TIEMPO

El método de diferencia finita adelantado fue usado para pronosticar q_1 y q_3 en el tiempo $t = t_0$. Como este es un método inestable, no puede ser usado para todo t . Fue utilizado en el primer paso de integración porque el método elegido para continuar, llamado de Adams-Bashfort, requiere que los campos q_1 y q_3 sean conocidos para dos tiempos consecutivos.

El método conduce en nuestro caso a

$$q^{t+1} = q^t + \left[\frac{3}{2} F^t - \frac{1}{2} F^{t-1} \right] \Delta t$$

donde F es el segundo miembro de 13 ó 14. Δt representa el incremento en el tiempo.

Este método fue usado por Lilly (1965) y es ligeramente inestable. El factor de amplificación para una solución periódica es

$$\left(1 + \frac{p^4}{4} + \dots \right)^{1/2}$$

donde $p = C \Delta t$ siendo C la velocidad de fase.

Para la velocidad de fase de las ondas meteorológicas, que son las únicas presentes en el modelo y para períodos de integración no superiores a 10000 horas, la inestabilidad es tan pequeña que puede ser despreciable.

Por otra parte, este método es más barato que los que usualmente usados para esta clase de integraciones. Ellos son los métodos implícitos que son generalmente estables.

2b. CÁLCULO DE LA FUNCIÓN CORRIENTE A PARTIR DE LA VORTICIDAD POTENCIAL

Para continuar la integración en el tiempo, es necesario calcular ψ_1 y ψ_3

Esto puede ser hecho a partir de

$$20. \quad \begin{aligned} q_1 &= \nabla^2 \psi_1 - \lambda^2 (\psi_1 - \psi_3) \\ q_3 &= \nabla^2 \psi_3 + \lambda^2 (\psi_1 - \psi_3) \end{aligned}$$

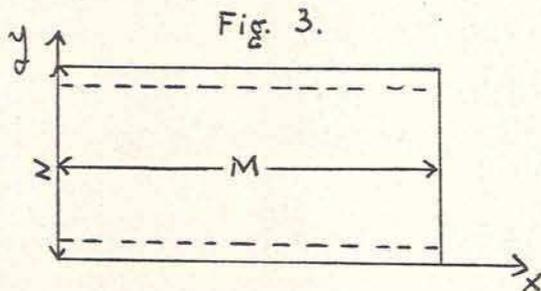
Tomando promedio sobre el índice i

$$21. \quad \begin{aligned} \bar{q}_1 &= \nabla^2 \bar{\psi}_1 - \lambda^2 (\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_3) \\ \bar{q}_3 &= \nabla^2 \bar{\psi}_3 + \lambda^2 (\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_3) \end{aligned}$$

Ecuaciones 20 menos 21 dan

$$22. \quad \begin{aligned} q'_1 &= \nabla^2 \psi'_1 - \lambda^2 (\psi'_1 - \psi'_3) \\ q'_3 &= \nabla^2 \psi'_3 + \lambda^2 (\psi'_1 - \psi'_3) \end{aligned}$$

Nuestro problema se resuelve en un rectángulo $N \times M$ (figura 3).



Entonces 21 implica $2(N-2)$ ecuaciones lineales con $2(N-2)$ incógnitas, puesto que $\bar{\psi}_w = \bar{\psi}_f$ en cada borde.

Cuando se trata de resolver 22. con la condición de contorno $\xi'_i = \psi'_i = 0$ en los bordes y $\psi'_i = 0$ en las primeras líneas, junto a los bordes y con condiciones periódicas en la dirección x , se tiene $2(N \times M)$ ecuaciones con $2[M \times (N-2)]$ incógnitas, puesto que $\psi'_{i1} = \psi'_{i3} = 0$ en las primeras líneas junto a los bordes norte y sur. Por lo tanto, se tiene una sobreespecificación del problema.

La otra alternativa es elegir $\xi'_i = 0$ en esas líneas en lugar de $\psi'_i = 0$. Con esta elección todavía se conserva la energía y la enstrofia. De esta forma

se tendrán $2(N \times M)$ ecuaciones con igual número de incógnitas.

Están implícitas las ecuaciones

$$\nabla^2 \psi'_i = 0$$

$$\nabla^2 \psi'_{i3} = 0$$

en los lugares donde supusimos $\xi'_i = 0$. De cualquier forma se puede argüir que estos valores no son dados por diferencias finitas en esos puntos. Si bien esto puede introducir un cierto error en el pronóstico del sistema, no es menos cierto que el hecho de suponer la existencia de paredes en el borde norte y sur, es tan poco realista que introduce igualmente errores en el método de pronóstico.

Después de resolver 21. y 22. y antes de volver a las ecuaciones 13. y 14. se necesita conocer los valores de ψ_i y q_i en los bordes.

Usando las condiciones de contorno

$$\begin{cases} \psi' = \xi' = 0 & \text{en los bordes} \\ \bar{\psi}_w = \bar{\psi}_f \\ \psi_w = \bar{\psi}_f \end{cases}$$

y como

$$\begin{cases} q_w = \xi_w - \lambda(\psi_{1w} - \psi_{3w}) \\ \bar{q}_w = \bar{\xi}_w - \lambda(\bar{\psi}_{1w} - \bar{\psi}_{3w}) \\ q'_w = 0 \end{cases}$$

Como $\bar{\xi}_w$ no está definido en ninguna parte, puede ser tomado igual a $\bar{\xi}_f$

$$\text{Así } q_w = \bar{q}_f$$

3. CONDICIONES INICIALES

Se eligió como estado inicial, la solución estacionaria del modelo estudiado por Charney (1959). Este estado tienen más energía que el estado medio después de un cierto tiempo de integración.

La solución estacionaria es un flujo zonal y parece adecuada como estado inicial. Iniciar la integración con un estado arbitrario puede introducir una fuerte

perturbación con respecto a la dinámica del modelo, lo que implicaría valores muy grandes de $\frac{\partial \psi_1}{\partial t}$ y $\frac{\partial \psi_3}{\partial t}$ los cuales pueden no ser compatibles con la aproximación cuasigeostrofica (Phillips, 1963). Esto puede darse aún en un caso de reposo.

Por ello, ψ_1 y ψ_3 fueron calculados en el tiempo $t=0$ como

$$\psi_1 = \psi_1^p + \psi_3^p + \frac{RT_m}{f_0} + \frac{1,3 RT_m}{4\alpha f_0} \left[\frac{\sinh(\gamma j \Delta Y)}{\gamma \cosh(\gamma \Delta Y \pi)} - j \Delta Y \right]$$

$$\psi_3 = \psi_3^p + \frac{0,3 RT_m}{4\alpha f_0} \left[\frac{\sinh(\gamma j \Delta Y)}{\gamma \cosh(\gamma \Delta Y \pi)} - j \Delta Y \right]$$

ψ_1^p y ψ_3^p son funciones estocásticas producidas por la subrutina INCOM y representan pequeñas perturbaciones que se agregan a la solución estacionaria. Son introducidas para iniciar el crecimiento de las ondas. Su orden de magnitud es tres veces menor que el valor que adquieren las perturbaciones de ψ_1 y ψ_3 al promediar el experimento.

$$\gamma = \frac{f_0 S}{RT_m}$$

$$S = 3,06 \times 10^{-6}$$

$$T_m = 238$$

4. METODOS NUMERICOS

Para resolver el sistema

$$22. \quad \psi_1' = \nabla^2 \psi_1' - \lambda^2 (\psi_1' - \psi_3')$$

$$\psi_3' = \nabla^2 \psi_3' + \lambda^2 (\psi_1' - \psi_3')$$

Se usa un procedimiento que involucra la expresión en serie de Fourier en la dirección X y diferencias finitas en la dirección Y. Así

$$\begin{bmatrix} \psi_{1j} \\ \psi_{3j} \\ \psi_{1j} \\ \psi_{3j} \end{bmatrix} = \sum_{m=-M}^M \begin{bmatrix} F_{1j}(m) \\ F_{3j}(m) \\ A_{1j}(m) \\ A_{3j}(m) \end{bmatrix} e^{i(Jm + \Delta x)}$$

$$J = \frac{2\pi}{L}$$

$L = 64 \Delta x$ es el lado del rectángulo en la dirección X

$$y \quad \alpha = +\sqrt{-1}$$

Entonces 22. se transforma en

$$23. \begin{cases} F_{1,j}^{(m)} = -[\sigma^2 m^2 + \lambda^2] A_{2,j}^{(m)} + \lambda^2 A_{3,j}^{(m)} + \frac{1}{(\Delta Y)^2} [A_{1,j+1}^{(m)} + A_{1,j-1}^{(m)} - 2A_{1,j}^{(m)}] \\ F_{3,j}^{(m)} = -[\sigma^2 m^2 - \lambda^2] A_{3,j}^{(m)} - \lambda^2 A_{1,j}^{(m)} + \frac{1}{(\Delta Y)^2} [A_{3,j+1}^{(m)} + A_{3,j-1}^{(m)} - 2A_{3,j}^{(m)}] \end{cases}$$

jt toma valores desde $j = -10$ hasta $j = 10$, de forma que se tiene un sistema de 42 ecuaciones con 42 incógnitas.

Este sistema es fácilmente resuelto mediante la inversión de la matriz.

5. ENERGETICA

La formulación de la energética del modelo es similar a la que ^{se} describe para el experimento de Phillips (1956). Es diferente, desde luego, el cálculo de la disipación y generación de energía, debido a que se usa aquí un diferente enfoque para esos mecanismos.

Aquí también se evalúan las transformaciones energéticas onda por onda. Es necesario mencionar que el número de onda se lo define en la dirección este-oeste, como el número de ondas contenidas en el rectángulo de integración. La condición de contorno cíclica permite pensar a este rectángulo como a un anillo alrededor de la Tierra.

Para evaluar el espectro de la energía y de sus transformaciones, se hacen las sumatorias de las cantidades calculadas para cada línea que representan latitudes. Así, la sumatoria total representa valores para toda el área de integración.

La energética del modelo es calculada a partir de las ecuaciones 8, 9, y 10. Phillips (1956).

Entonces $(\psi_1 - \psi_3) \times (10.)$

$$24. \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{d^2}{2S} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} (\psi_1 - \psi_3)^2 dx dy \right] = -\frac{d^2}{S} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} T (\vec{V} \cdot \nabla T) dx dy +$$

$$\frac{f_0}{S P_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \omega_2 T dx dy - \frac{d^2 \nu}{S} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} (\nabla T)^2 dx dy + \frac{d^2 R}{S f_0 c_p} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} Q_H T dx dy$$

$S = L_1 L_2$ donde L_1 y L_2 son los lados del rectángulo. El primer miembro de 24. representa la derivada temporal de la energía potencial disponible, mientras que los términos del segundo miembro representan las diferentes transformaciones y conversiones de energía. El primer término representa la cascada no lineal de energía potencial disponible a través del espacio del número de onda. Este término se anula cuando se integra sobre toda el área.

El segundo término representa la conversión de energía entre la energía potencial disponible y la energía cinética, puesto que aparece con signo opuesto en la ecuación de la energía cinética.

El tercer término es la disipación debida a la difusión hacia escalas no representadas en el modelo.

Finalmente, el último término es representativo de la generación de energía potencial disponible debido al calentamiento.

De acuerdo a la expresión dada a Q_H esta generación solo puede ser hecha en la componente zonal de la energía potencial disponible A , puesto que Q_H puede ser escrita.

$$Q_H = a f(y) - bT$$

donde a y b son

constantes y $b > 0$

Luego $G(A)$, generación de A , es

$$G(A) \sim Q_H T \sim a f(y) T - b T^2$$

En cualquier número de onda diferente de cero

$$G(A_m) \sim b - T_m^2$$

Con lo que en realidad lo que se tiene es una disipación de la energía potencial disponible en cada número de onda, excepto en la componente zonal donde se produce la generación.

En efecto, de acuerdo a (15.) tendremos generalmente calentamiento en la mitad sur del área de integración y enfriamiento en la otra mitad y de esta forma se produce un incremento neto en la energía potencial disponible.

Para obtener la ecuación de la energía cinética, es necesario multiplicar (8.) por $-\psi_2$ y (9.) por $(-\psi_3)$, sumarlas e integrar sobre toda la superficie

$$25. \frac{\partial K}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \frac{1}{2} [(\nabla \psi_1)^2 + (\nabla \psi_3)^2] dx dy \right\} = \frac{1}{S} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} [\psi_1 (\vec{V}_1 \cdot \nabla \xi_1 + \psi_3 (\vec{V}_3 \cdot \nabla \xi_3)] dx dy - \frac{f_0}{S P_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \omega_2 T dx dy - \frac{V}{S} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} (\xi_1^2 + \xi_3^2) dx dy + \frac{1}{S} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} [\psi_1 (\xi_3 - \xi_1) + (\tilde{A} + 0,3 \tilde{k}) \xi_1 \psi_3 - (\tilde{A} + 1,3 \tilde{k}) \xi_3 \psi_3] dx dy$$

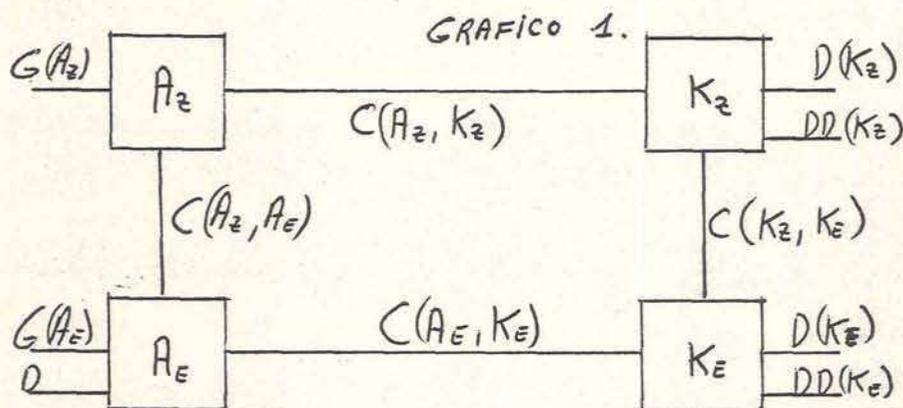
Otra vez, el primer término del segundo miembro representa la cascada de energía en el espacio del número de onda y no dan ninguna contribución al ser integrados sobre toda el área.

El segundo, como queda dicho, representa las conversiones entre la energía potencial disponible A y la energía cinética K.

El tercer término es la disipación debida a la difusión lateral mientras que el último es la disipación debida a los restantes procesos.

Resulta necesario mencionar que el término que involucra al parámetro β no da ninguna contribución, ni a la energética total ni a la espectral.

Si se hace una partición de la energía, tanto cinética como potencial disponible en energía del flujo zonal (número de onda cero) y de las perturbaciones, una descripción esquemática de la energética está dada por el gráfico 1.



El significado de los símbolos es el siguiente:

A_z : Energía potencial disponible (A) del flujo zonal

A_E : A de las perturbaciones

K_z : Energía cinética (K) del flujo zonal

K_e : K de las perturbaciones

$G(A_z)$: generación de A_z

$G(A_e)$: generación de A_e

$D(A_e)$: disipación de A_e

$C(A_z, K_z)$: conversión de A_z en K_z

$C(A_z, A_e)$: conversión de A_z en A_e

$C(A_e, K_e)$: conversión de A_e en K_e

$C(K_z, K_e)$: conversión de K_z en K_e

$D(K_z)$: es la disipación de K_z debida a difusión lateral

$DD(K_z)$: es la disipación de K_z debida al efecto de la capa límite y al mecanismo vertical de la disipación interna.

$D(K_e)$: es la disipación de K_e debida a la difusión lateral.

$DD(K_e)$: es la disipación de K_e debida al efecto de la capa límite y al mecanismo vertical de la disipación interna.

En todos los casos $C(A,B) = -C(B,A)$

Se puede mostrar que de todos los procesos topológicamente posibles, solo los que se muestran en el gráfico son físicamente posibles.

También se evalúa la enstrofia, la cual está dada por (13),

$$26. \quad I = \frac{1}{5} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \frac{1}{2} \left\{ (\nabla^2 \psi_1)^2 + (\nabla^2 \psi_3)^2 \right\} dx dy$$

El cambio de enstrofia debido a interacciones no lineales está dado por

$$I(m/r, l) = \frac{1}{5} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} - \left(\xi_1 \vec{v}_1 \cdot \nabla \xi_1 + \xi_3 \vec{v}_3 \cdot \nabla \xi_3 \right) dx dy$$

que aunque es cero para la sumatoria sobre m, es de interés su descomposición en el espacio del número de onda.

6. FORMULAS DE DIAGNOSTICO

Cada cierto número de horas el diagnóstico de la energética es realizado, no solo como fue descrito en la sección anterior, sino también en el espacio del número de onda.

Entonces si $\psi, T, Q_H \equiv H, \vec{v} \cdot \nabla T, \vec{v} \cdot \nabla \xi, w$ y ξ se escriben

$$\psi_i(i,j) = \sum_{m=-M}^M A_1(j,m) e^{i(j-m)\Delta x}$$

$$\psi_3(i,j) = \sum_{m=-M}^M A_3(j,m) e^{i(j-m)\Delta x}$$

siendo $\alpha^0 = +\sqrt{-1}$; $j = -N \dots N$

$$T(i,j) = \sum_{m=-M}^M B(j,m) e^{\alpha^0 j m i \Delta x}$$

$$H(i,j) = \sum_{m=-M}^M C(j,m) e^{\alpha^0 j m i \Delta x}$$

$$\omega(i,j) = \sum_{m=-M}^M \Omega(j,m) e^{\alpha^0 j m i \Delta x}$$

$$\vec{v} \cdot \nabla T(i,j) = \sum_{m=-M}^M D(j,m) e^{\alpha^0 j m i \Delta x}$$

$$(\vec{v}_l \cdot \nabla \xi)(i,j) = \sum_{m=-M}^M E_l(j,m) e^{\alpha^0 j m i \Delta x} ; l=1,3$$

$$\xi_l(i,j) = \sum_{m=-M}^M F_l(j,m) e^{\alpha^0 j m i \Delta x} ; l=1,3$$

Realizando una transformación de Fourier pueden ser calculados $A_1(j,m)$ y $A_3(j,m)$ para $j = -N \dots N$; $M = -M \dots 0 \dots M$

Es fácilmente demostrable que $B(j,m)$ y $C(j,m)$ pueden ser calculados a partir de $A_1(j,m)$ y $A_3(j,m)$

El campo de $w_{i,j}$ es evaluado a partir de la ecuación 10. la cual involucra $\frac{\partial T}{\partial t}$. Por ello es necesario calcular $B^{t+1}(j,m)$ y $B^{t-1}(j,m)$ donde $t+1$ significa una etapa en tiempo adelante y $t-1$ una detrás.

$D(j,m)$ y $E(j,m)$ son evaluadas directamente a través de las transformadas de Fourier de los campos de $\vec{v} \cdot \nabla T$ y $\vec{v} \cdot \nabla \xi$ respectivamente; $\vec{v} \cdot \nabla T$ es en realidad $\vec{v}_2 \cdot \nabla T$ donde $\vec{v}_2 = \frac{1}{2} (\vec{v}_1 + \vec{v}_3) \cdot \vec{v}_1 \vec{v}_3$ es calculado en ambos niveles 1 y 3.

Si con el asterisco * se indica el complejo conjugado

$$27. A = \sum_{m=-M}^M \frac{1}{4N} \left[\left\{ \sum_{j=-(N-1)}^{N-1} B(j,m) B^*(j,m) \right\} + \frac{1}{2} \left(B(-N,m) B^*(-N,m) + B(N,m) B^*(N,m) \right) \right]$$

Los dos últimos términos son diferentes de cero solo para $m=0$.

$$28. K = \sum_{m=-M}^M \left[\frac{J^2}{4N} \left\{ \sum_{j=-(N-2)}^{N-2} m^2 A(j,m) A^*(j,m) \right\} + \frac{1}{2N(N-1)^2} \sum_{j=-(N-2)}^{N-2} \left\{ [A(j+1,m) - A(j,m)] \cdot [A(j+1,m) - A(j,m)]^* \right\} \right]$$

Esta fórmula es válida para los niveles 1 y 3 siendo $K = K_1 + K_3$

$$29. C(A, K) = \sum_{m=-M}^M \frac{f_0}{2P_2 N} \sum_{j=-(N-1)}^{N-1} B(j,m) \mathcal{N}^*(j,m)$$

$$30. G(A) = \sum_{m=-M}^M \left[\frac{1}{2N} \left(\sum_{j=-(N-1)}^{N-1} C(j,m) B^*(j,m) + \frac{1}{2} \left\{ C(-N,m) B^*(-N,m) + C(N,m) B^*(N,m) \right\} \right) \right]$$

$$31. E_l = \sum_{m=-M}^M \frac{1}{4N} \sum_{j=-(N-1)}^{N-1} F_l(j,m) F_l^*(j,m) \quad ; \quad l=1,3$$

$$32. CK_l = \sum_{m=-M}^M \frac{1}{2N} \sum_{j=-(N-1)}^{N-1} A_l(j,m) E_l^*(j,m) \quad ; \quad l=1,3$$

$$33. CA = \sum_{m=-M}^M \frac{-J^2}{2N} \sum_{j=-(N-1)}^{N-1} B(j,m) D^*(j,m)$$

$$34. I_l = \sum_{m=-M}^M \left\{ -\frac{1}{2N} \sum_{j=-(N-1)}^{N-1} E_l(j,m) F_l^*(j,m) \right\} \quad ; \quad l=1,3$$

$$35. D_l(K) = - \sum_{m=-M}^M \frac{J}{2N} \sum_{j=-(N-1)}^{N-1} F_l(j,m) F_l^*(j,m) \quad ; \quad l=1,3$$

$$36a. DD_1(K) = \sum_{m=-M}^M -\tilde{A} \left\{ 2K_1(m) + \frac{1}{2N} \sum_{j=-(N-1)}^{N-1} F_3(j,m) A_3^*(j,m) \right\}$$

donde $K_l(m)$ representa la contribución de cada término de la sumatoria sobre m a los valores de K dados por 28. Los subíndices 1 y 3 representan los niveles 1 y 3.

$$36b. DD_3(K) = \sum_{m=-M}^M \left\{ -2(\tilde{A} + 1,3\tilde{k}) K_3(m) - \frac{(\tilde{A} + 0,3\tilde{k})}{2N} \sum_{j=-(N-1)}^{N-1} F_1(j,m) A_3^*(j,m) \right\}$$

$$37. DD(K) = DD_1(K) + DD_3(K)$$

Las fórmulas 28, 31, 32, 34 y 35 deben ser calculadas en ambos niveles 1 y 3 y luego sumadas para obtener la contribución de ambos niveles.

En todos los casos las sumatorias sobre m agregan contribuciones parciales que permiten conocer la distribución espectral para cada una de las expresiones 27-37.

Entonces

$$A_m = \frac{d^2}{4N} \left\{ \sum_{j=-(N-1)}^{N-1} \left\{ B_{(j,m)} B_{(j,m)}^* \right\} + \frac{1}{2} \left[B_{(-N,m)} B_{(-N,m)}^* + B_{(N,m)} B_{(N,m)}^* \right] \right.$$

De la misma forma se puede obtener

$$K_{(m)}, C(A_m, K_m), G(A_m), \xi_m, D(K_m)$$

Se puede mostrar fácilmente que

$$D(A_m) = \sqrt{-2j^2 m^2 A_m} + \frac{\sqrt{d^2}}{2N} \sum_{j=-(N-2)}^{N-2} \left[B_{(j+1,m)} - B_{(j-1,m)} \right] \left[B_{(j+1,m)}^* - B_{(j-1,m)}^* \right]$$

donde

$$D(A) = \sum_{m=-M}^M D(A_m)$$

CK, CA e I representan las interacciones no lineales en la energía cinética, potencial disponible y enstrofia y su valor total es obviamente nulo. No obstante, resulta de interés conocer la distribución espectral y por ello se define.

$$CK(m/r, l) = \frac{1}{2N} \sum_{j=-(N-1)}^{N-1} A_{(j,m)} E_{(j,m)}^*$$

$$CA(m/r, l) = -\frac{d^2}{2N} \sum_{j=-(N-1)}^{N-1} B_{(j,m)} D_{(j,m)}^*$$

$$I(m/r, l) = -\frac{1}{2N} \sum_{j=-(N-1)}^{N-1} E_{(j,m)} F_{(j,m)}^*$$

$(m/r, l)$ representa el concepto de que las interacciones están dadas por triadas de ondas, por ejemplo, la onda m interactúa con la onda r junto con la onda l .

La energética del modelo fue evaluada cada 24 horas excepto en un experimento en el que esto fue hecho cada 48 horas.

El incremento de tiempo usado, Δt fue en todos los casos de una hora excepto en aquellos en que el flujo zonal intenso desarrollado por el modelo condujo a inestabilidad computacional.

En tales casos, la información registrada en bandas magnéticas permitió continuar la integración desde un tiempo anterior al desarrollo de la inestabilidad computacional, reduciendo Δt a media hora.

En todos los casos en que se hizo el diagnóstico de la energética fue necesario disponer de los campos de ψ_1 y ψ_3 en los tiempos $t, t-1, t+1$ debido al método elegido para evaluar la velocidad vertical. La alternativa de obtener w a partir de la ecuación ω es mucho más complicante, desde el punto de vista de la computación y no es más representativa de la energética estudiada. En tal sentido, se debe tener en cuenta que esta es evaluada cada 24 horas o más y ello lógicamente afecta su representatividad en el sentido que el incremento de la energía calculada cada 24 horas puede no ser exactamente el valor calculado a partir de estas transformaciones en un cierto tiempo intermedio de ese lapso.

C A P I T U L O I I

PERFORMANCE DEL MODELO I

En uno de los experimentos, la integración fue hecha durante 4000 horas, no mostrando signos de inestabilidad computacional que no fueran los naturales del aumento del viento zonal y que son fácilmente solucionables como fue descrito en el Capítulo I, modificando Δt de forma de no violar el criterio de Levy-Courant.

El nombre de los experimentos, los coeficientes de disipación y las horas de integración, son mostrados en la tabla 1.

Tabla I

CASO	$\int (10^5 m^2 s^{-1})$	$\tilde{k} (10^{-6} s^{-1})$	$\tilde{A} (10^{-6} s^{-1})$	HORAS
WW	0.85	4	0.5	2112
AA	1.70	4	0.5	4000
RR	1.70	2	0.5	1512
ZZ	0.85	2	1.0	1512

La figura 3, muestra la energía cinética, la potencial disponible y la cinética en diferentes números de onda como funciones del tiempo. Se puede apreciar que después de $t = 600$ h se obtiene un espectro cuasiestacionario.

En el apéndice A las figuras A_1 y A_2 muestran el mismo cuadro para los casos AA y RR. En todos los casos la energía crece a expensas del flujo zonal hasta un cierto tiempo en el que el equilibrio cuasiestacionario es alcanzado.

La representatividad de los cálculos de diagnóstico energético debe ser considerada por el uso de las diferencias finitas en espacio y tiempo. Como se explicó en el capítulo I, los cálculos de la energética hechos cada 24 horas no pueden representar exactamente los cambios energéticos del modelo durante esas horas.

De cualquier forma, una medida de el valor de los cálculos de diagnóstico energético hechos, distorsionados por el truncado y los errores debidos al "aliasing" puede ser evaluado mediante la comparación del cambio energético producido entre ciertos tiempos y el balance energético de la disipación y generación de energía.

La tabla II muestra esta comparación para el caso WW, la energía está dada en kilojoules $m^{-2} \times 10^3$.

Tabla II

t (horas)	24	312	600	1200	1800	2112
E	2.89	2.61	1.99	1.61	1.38	1.43
ΔE		-.28	-.62	-.38	-.23	+.05
ΔE (Balance)		-.33	-.70	-.46	-.18	+.05

El cambio total después de 2100 horas es 1.46×10^3 kilojoule m^{-2} mientras que el calculado es 1.62 de las mismas unidades. La diferencia después de 2100 horas es sólo del 8 % y puede ser considerada pequeña si se tiene en cuenta que los diagnósticos son realizados cada 24 horas.

Los resultados de Phillips mostraron una discrepancia tal que después de 600 horas la diferencia era del 100 %. Ello se debía a la inestabilidad no lineal, la que no se halla presente en este experimento debido al método numérico utilizado para calcular los jacobianos.

Si un análisis similar es hecho para el balance de la energía como función del número de onda, el resultado no es tan bueno. Sin embargo si se compara los resultados estadísticos mostrados en las figuras 11, 12, 13, 14, y 15 para el caso WW ó los de las figuras 21, 22, 23, 24 y 25 para el caso RR se puede concluir que en general el balance es bastante bueno.

Para un dado número de onda se puede escribir

$$38. \quad \frac{\partial A_m}{\partial t} = G(A_m) + CA(m/r, l) - C(A_m, K_m) + D(A_m)$$

$$39. \quad \frac{\partial K_m}{\partial t} = C(A_m, K_m) + CK(m/r, l) + D(K_m) + DD(K_m)$$

$D(A_m)$, $D(K_m)$ y $DD(K_m)$ son siempre negativos.

Si se integra 38. y 39. y se divide por el periodo de integración, entonces puesto que se ha alcanzado un estado cuasiestacionario, el primer miembro es casi nulo.

Las estadísticas del segundo miembro es lo que se presenta en la figura 11, 12, 13, 14, y 15 como una función del número de onda $G(A_m)$ no se presenta porque no es de significación para ningún número de onda diferente de cero, siendo varios órdenes de magnitudes menor que los otros procesos.

Entonces se puede escribir para $m \neq 0$

$$40. \quad \overline{CA(m/r, l)} - \overline{C(A_m, K_m)} - \overline{D(A_m)} = 0$$

$$41. \quad \overline{C(A_m, K_m)} + \overline{CK(m/r, l)} + \overline{D(K_m)} + \overline{DD(K_m)} = 0$$

La exactitud con que se satisface 40 es remarcablemente buena; el balance entre los términos negativos y positivos no arroja una diferencia mayor del 10 % de su valor para todos los números de onda. En el caso de la energía cinética, el balance es aún muy bueno para números de onda menores que 11.

La mencionada diferencia aumenta en el rango $11 \leq m \leq 17$ pero en general no supera el 20 % de los términos positivos o negativos en cuestión. Para $m \geq 18$ esta diferencia relativa aumenta hasta ser mayor que el 50 % en algunas ondas.

Aparte del hecho que las diferencias finitas en tiempo y espacio pueden ser responsables de la falta de representatividad en la energética de cada onda, particularmente en las ondas cortas, se debe mencionar que el jacobiano de Arakawa es sólo conservativo del total de la energía cinética del sistema. Puede no obstante, distorsionar la transferencia de energía a través del espectro.

Evidentemente las distorsiones no oscurecen las características principales del espectro y de los procesos no lineales. Esta es la conclusión a que se puede arribar de la observación de las figuras 11, 12, 13, 14 y 15.

La dinámica del modelo es satisfactoria en el sentido que da un cuadro cualitativamente bueno de los procesos de conversiones y disipación de energía. La figura 4 describe ^{el} ciclo energético para el caso WW.

La tabla III muestra los valores de energía cinética y potencial disponible en sus componentes zonales y de perturbación y los valores de las generaciones conversiones y disipaciones para los cuatro casos, para el experimento de Phillips y para los valores observados según un resumen de Oort (1964)

Tabla III

	Energía en KJm^{-2} , Conversiones, generaciones y disipaciones en Wm^{-2}					
	RR	AA	ZZ	WW	Phillips	Observado
Az	11110	11653	13170	10000	12660	4000
A_E	220	330	291	480	260	1500
Kz	2710	2260	2760	2010	2900	800
K_E	760	780	930	1380	720	700
$G(Az) - D(Az)$	470	390	380	350	230	310
$C(Az, A_E)$	370	310	300	300	380	300
$D(A_E)$	40	20	20	30	10	80
$C(A_E, K_E)$	330	290	280	280	370	220
$D(K_E)$	150	140	150	150	100	180
$C(K_E, Kz)$	140	150	150	160	150	40
$D(Kz)$	230	190	310	170	90	50
$C(Az, Kz)$	100	90	160	40	- 40	10

Se ve que hay un acuerdo general con los estudios observacionales con respecto a las direcciones de las generaciones y conversiones. Este acuerdo es aún cuantitativo excepto para $C(K_E, K_z)$, $D(K_z)$ y $C(A_z, K_z)$ donde el modelo en el caso WW, por ejemplo tiene valores 3 ó 4 veces mayores que los observados. Hay sin embargo concordancia respecto a la relativa intensidad de los diferentes procesos.

Hay también un mejor ajuste entre los datos observados y los experimentos realizados aquí, ^{que} entre aquellos y el experimento de Phillips. Esto se debe atribuir a la elección de una función de calentamiento más realista.

Los valores numéricos son satisfactorios de acuerdo a la simplicidad del modelo y se presentan aquí como una nueva prueba de la buena performance del modelo. Con respecto a las cantidades de energía, se ve que en todos los experimentos (incluyendo el de Phillips), la energía zonal es considerablemente mayor que la comunmente observada en la atmósfera. Esto se puede deber a la forma en que se obtuvo T_E , la temperatura de equilibrio en 15, a partir de simples consideraciones sobre radiación. Como fué señalado por Barros y Wiin-Nielsen (1973), T_E puede ser correctamente determinado usando el modelo descrito por Wiin-Nielsen (1972b) en el cual el calentamiento neto de una columna atmosférica esta dado por radiación, convección de pequeña escala y liberación de calor latente.

Como un test final de la performance del modelo, los mapas en ambos niveles y el campo de espesor son presentados aquí para el tiempo $t = 1512$ horas del caso WW.

La figura 5 representa el campo de ψ_3 . Como se ve, la onda número 4 tiene la mayor parte de la energía y se puede observar el flujo del oeste en latitudes medias, los centros anticiclónicos en latitudes comparables a aquellas donde se los observa en la atmósfera. Lo mismo puede decirse de los centros ciclónicos. La forma de las ondas ayuda a transportar momento hacia el medio del canal donde una estructura en forma de jet se observa en el nivel 1, figura 6. También en este nivel el momento es transportado hacia el jet según se infiere de la forma de las ondas.

La inclinación de los sistemas con la altura también se observa como en la atmósfera puesto que el campo térmico descrito en la figura 7. está retrasado respecto al campo de la función corriente,

Los valores numéricos son consistentes con las observaciones atmosféricas; están alrededor de 3000m en el nivel 3 (750 mb) y 10000m en el nivel 1 (250 mb).

En el apéndice A las figuras A_3 , A_4 y A_5 muestran los mismos campos en el tiempo $t = 24$ para dar una idea del campo inicial a partir del cual da comienzo la integración. Las figuras A_6 hasta A_{11} son las equivalentes de las figuras 5, 6, 7, A_3 , A_4 y A_5 pero para el caso ZZ. Las mismas consideraciones se aplican en este caso como en los otros no presentados aquí.

Se puede concluir que el comportamiento general del modelo es bueno y que es posible utilizarlo para obtener algunas conclusiones acerca de la forma del espectro y de las interacciones no lineales.

CAPITULO III

Resultados de los experimentos

$A(m)$, $K(m)$, $E(m)$ y las conversiones y disipaciones de energía en función del número de onda fueron promediados por un periodo que en todos los casos incluyó los últimos 30 días del experimento.

La figura 8. representa la energía cinética para el caso WW en función del número de onda. Se observa un máximo absoluto en la onda número 4 y desde la onda $m > 7$, los valores se ajustan a una línea recta en una representación log - log. la que tiene una pendiente igual a -3.9 . Este ajuste es particularmente muy bueno en el rango $10 \leq m \leq 20$.

En el apéndice A la misma descripción puede darse para los casos ZZ, RR, y AA representados en las figuras A_{12} , A_{13} , y A_{14} . En todos los casos, aunque la pendiente varía de un caso a otro, se puede ver un muy buen ajuste a una ley potencial en el rango 10 - 20. Parece ser que la pendiente es más sensible a los cambios en $\sqrt{\nu}$, no siendo tan sensitiva a los cambios en los otros parámetros \tilde{A} y \tilde{K} .

Se observa que para $m > 20$ parece haber una más rápida disminución de energía. Esto se puede deber a la clausura en la onda número 32, pero según se verá posteriormente se debe a otros motivos.

La figura 9, muestra el gráfico para ^{la}energía potencial disponible ~~la~~ cual se aplica la misma descripción que al de la energía cinética con la excepción de que ahora la pendiente es -5.4.

En el caso del modelo de dos capas, Merilees y Warm (1972) mostraron que si la energía sigue una ley potencial $S(m) = C m^{-\alpha}$, entonces mientras la energía cinética aún sigue la misma clase de ley, la energía potencial disponible sigue $A(m) = C m^{-(\alpha+2)}$. Esto se aplica en nuestro experimento sólo muy aproximadamente por razones que serán discutidas junto con los resultados del modelo II.

Las figuras A_{15} , A_{16} , y A_{17} muestran un cuadro similar para los casos ZZ, RR y AA.

El espectro de enstrofia para el caso WW se presenta en la figura 10. El ajuste a una ley potencial no es tan bueno como en el caso de la energía cinética. En general, con diferencias en el valor de la pendiente, la forma del espectro se asemeja al de la energía cinética y potencial disponible. Esto no puede constituir una sorpresa por cuanto para un flujo homogéneo e isotrópico $E(m) \sim m^{-2} K(m)$ y en consecuencia una diferencia de dos, puede esperarse en el valor de la pendiente. Esto se confirma en todos los casos con algunas pequeñas diferencias debidas a las condiciones noisotrópicas del experimento.

En el apéndice A, las figuras 18, 19 y 20 muestran la enstrofia para los casos ZZ, RR, y AA. Se observa una brusca caída para valores de $m > 20$.

Si se comparan estudios observacionales y estos experimentos se puede concluir que hay un buen acuerdo con lo que es observado en el rango 8 - 15, y lo que el experimento produce en ese rango. Lo que se encuentra es que la ley potencial es válida en los experimentos hasta por lo menos $m \sim 20$. La mayor diferencia con los estudios observacionales se halla en el rango de las ondas largas donde no se debe esperar que el modelo reproduzca el espectro observado en la atmósfera. En efecto, gran parte de la energía observada en las ondas largas corresponde al campo estacionario producido por las fuentes de calentamiento y la orografía, Charney y otros (1949), Smagorinsky (1953), Derome (1966) y Yang (1967).

Por otra parte el máximo observado en las ondas transitorias no es en $m = 4$ como en el experimento. En efecto la sobresimplificación del campo de calentamiento conduce a una sobreestimación del viento térmico zonal el cual a su vez afecta la estabilidad lineal corriendo el máximo de la inestabilidad hacia las ondas largas.

La Figura 11, muestra la ganancia de energía potencial disponible $CA(m/r, l)$ en función del número de onda. Se observa que la máxima ganancia está en el rango $4 \leq m \leq 7$ con un máximo en $m = 5$. Resulta significativo que la máxima ganancia está inmediatamente hacia la derecha del máximo observado en el espectro energético.

Las conversiones tienen alguna significación hasta la onda número 10, luego hay una brusca disminución, la que es mostrada en la figura con una escala exagerada para $m > 10$.

La figura A_{21} corrobora la descripción dada para la figura 11.

La figura 12 muestra el espectro de la conversión $C(A_m, K_m)$. Hay un ajuste remarcable entre las Figuras 11 y 12. Se puede decir que casi toda la energía ganada del flujo zonal o de las interacciones no lineales es cedida a la energía cinética. La disipación en la energía potencial disponible es solo un factor de importancia menor, como se puede ver en la Figura 13.

La conversión es máxima hacia la "derecha" del máximo observado en el espectro y en todos los números de onda es desde la energía potencial disponible hacia la energía cinética. Las figuras A_{22} , A_{23} otra vez confirman el mismo cuadro que el descrito para el caso WW.

La figura 14 muestra $CK(m/r, l)$. La energía ganada a expensas de la potencial disponible es cedida principalmente al flujo zonal. Las ondas 4, 5 y 6 pierden la mayor parte de la energía ganada a través de $C(A_m, K_m)$ y una cantidad más o menos igual es ganada por el flujo zonal. De acuerdo a las relativas cantidades en consideración, se puede concluir que hay algo así como un subrango inercial con flujo nulo de energía cinética para $m \geq 8$. Por otra parte hay también un relativo subrango inercial con flujo constante en las ondas 1, 2 y 3 puesto que las ganancias son significativamente pequeñas comparadas con el flujo hacia el modo zonal. Por otra parte $CK(m/r, l)$ es aún significativamente mayor que $C(A_m, K_m)$ en el rango $m \geq 20$.

La figura A_{24} confirma la impresión que el experimento reproduce bastante bien las predicciones de la teoría. Se puede decir que se presentan dos subrangos inerciales y que el flujo de energía cinética es hacia las ondas largas.

La disipación de la energía cinética, fig 15 y A_{25} , sigue la forma del espectro, principalmente en el caso de D (Km) puesto que es proporcional a la enstrofia tal como puede verse en 35.

Por lo expuesto se puede inferir porqué el máximo de C (A_m , Km) tiende a ubicarse a la "derecha" del máximo del espectro. Puesto que la mayor disipación coincide en el máximo del espectro de energía cinética y siendo la cascada de energía hacia las ondas largas según lo predicho por la teoría, luego la fuente de energía cinética debe hallarse hacia la derecha del máximo. Estos argumentos son confirmados por los experimentos con el modelo II. Hay, desde luego otra solución y es que la conversión C (A_m , Km) tenga lugar en la misma onda donde es disipada y que sólo la parte residual por decir así, sea cascada para ser disipada en las ondas largas.

Aparentemente en el modelo cuasigeostrófico la cascada de la energía cinética hacia las ondas largas es un mecanismo tan activo que no se ajusta a otros procesos sino que los condiciona.

Por ello, la segunda alternativa no se produce en ningún experimento.

Las figuras 16 y A₂₆ muestran $I(m/r, 1)$, la ganancia por interacciones entre ondas de enstrofia en la onda m . La enstrofia es producida en la onda número 5 y en un menor grado en las ondas 4, 6 y 7. La mayor parte de la enstrofia es cascada hacia la pequeña escala aunque también hay una ganancia en el flujo zonal. La cascada de enstrofia solo muestra un rango limitado, $m = 8, 9$ y 10 , donde puede ser considerada constante.

Si se comparan nuestros resultados con los estudios observacionales resumidos por Steimberg y otros (1971) se puede concluir que el modelo cuasigeostrófico de dos capas puede explicar las características más globales de cuanto es observado en la atmósfera en lo que hace a los flujos de energía y enstrofia. En efecto, las conclusiones de los estudios observacionales fueron resumidos por dichos autores así:

- "1. La energía potencial disponible es transferida desde la gran escala hacia la pequeña."
- "2. La energía cinética es transferida desde la escala media hacia la gran escala y la pequeña escala con la mayor parte yendo hacia la gran escala de movimiento."
- "3. La enstrofia y la enstrofia potencial son transferidas desde la gran escala hacia la pequeña escala de movimiento con muy pequeña acumulación en la escala intermedia."
- "4. La mayor parte del intercambio no lineal entre las ondas, en energía potencial disponible, energía cinética, enstrofia y enstrofia potencial es producido por las ondas transitorias".

Este último punto explica porque el modelo reproduce los resultados observacionales, puesto que el modelo solo considera los modos transitorios de oscilación.

Steimberg y otros continúan sus conclusiones así:

- "5. De la muestra observacional en este estudio resulta una ley potencial con exponente -1 para la enstrofia en el rango $8 \leq m \leq 15$ combinada con una ley potencial con exponente -3 para la energía cinética en el mismo rango.

"6. No ha sido posible establecer la existencia de un subrango inercial correspondiente a un flujo constante de enstrofia y uno nulo de energía cinética en el presente estudio observacional. Si tal subrango existe, debe estar en la región $8 \leq m \leq 11$. Es posible que el truncado en $m = 15$ prevenga una firme conclusión debido a la clausura artificial en ese número de onda."

Para mostrar un cuadro más claro con respecto a las conclusiones de Steimberg y otros (1971), se van a presentar aquí nuestros resultados, en la misma forma que ellos.

Se define

$$42. \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_A}{\partial m} = -CA(m/r, l) \\ \frac{\partial F_K}{\partial m} = -CK(m/r, l) \\ \frac{\partial F_E}{\partial m} = -I(m/r, l) \end{array} \right.$$

La integración de 42. permite evaluar F_A , F_K y F_E . Puesto que las integrales sobre todos los números de onda m de $CA(m/n, l)$, $CK(m/n, l)$ e $I(m/n, l)$ son cero, se puede suponer que

$$F(0) = F(m_{max})$$

$$\text{Se elige poner } F(0) = 0$$

Las Figuras 17, A27, A28 muestran el flujo de energía potencial disponible en función del número de onda. De ellas se desprende que la energía potencial disponible es cascada hacia altos números de onda y que las ondas $4 \leq m \leq 7$ reciben la mayor parte de la energía de acuerdo a lo indicado por la fuerte pendiente. El flujo se hace muy pequeño para $m > 12$.

Se puede concluir que hay un buen acuerdo con el punto 1 de las conclusiones de Steimberg y otros.

Las Figuras 18, A29 y A30 muestran que el flujo de energía cinética en función del número de onda. Ellas indican que el flujo es desde el medio del espectro hacia las ondas más largas y que hay un flujo pequeño hacia la pequeña

escala. Se ve que existe un completo acuerdo con lo puntualizado por Steimberg y otros en el punto 2. de sus conclusiones.

Las figuras 19. A_{31} y A_{32} muestran el flujo de enstrofia $F_E(m)$. Se nota que el flujo es casi constante para $6 \leq m \leq 10$. Para $m \geq 11$ un continuo decrecimiento del flujo es observado, Esto también coincide con lo descrito en los puntos 3 y 6 de las conclusiones mencionadas. Hay un desacuerdo parcial en las más grandes escalas donde como fué explicado ya, nuestro modelo tiene diferencias con la realidad.

Con respecto a las pendientes, se puede decir que el caso ZZ muestra el mejor ajuste a lo que es observado. Pero puesto que las pendientes en el rango $10 < m < 20$ parecen depender de la difusión lateral del modelo se reproducirá aquí el tratamiento de Barros y Wiin-Nielsen (1973) acerca de este aspecto.

De entre todos los procesos de disipación, se puede esperar que los procesos de difusión lateral dominen en la región de altos números de onda porque este término contiene el lapaciano de la vorticidad.

Como una primera aproximación, se puede escribir

$$43. \quad - \int (m/r, l) = \frac{\partial F_E}{\partial m} = -2 \int m^2 E(m)$$

De 43 se puede ver que puesto

$$[E(m)] = L T^{-2} \quad (\text{enstrofia por unidad de número de onda})$$

$$[m] = L^{-1}$$

$$[\int] = L^2 T^{-1}$$

luego F_E tiene la dimensión T^{-3}

Se puede esperar que F_E dependa de m y $E(m)$. Consideraciones dimensionales muestran que se puede escribir F como

$$44. \quad F_E = \frac{1}{\alpha} \frac{m E(m)}{\tau}$$

donde α es una constante adimensional y τ tiene la dimensión de tiempo.

Se puede pensar que el flujo F_E puede ser determinado por la cantidad de enstrofia cascada hacia las ondas más cortas. Esta relación de cascada \mathcal{N}_e ha sido determinada por Steimberg (1971).

Luego $\zeta = \mathcal{N}_e^{-1/3}$ porque \mathcal{N}_e tiene dimensión T^{-3} .

La integración de 43 usando 44 da

$$E = C z^{-1} e^{-\alpha z^2} \quad \text{donde } z = \frac{m}{m_0}$$

y m_0 está determinado por $m_0 = \frac{\mathcal{N}_e^{1/6}}{\sqrt{1/2}}$

Esto es diferente de lo que ha sido propuesto por Leith y otros autores porque ellos parten de un flujo constante de enstrofia.

El flujo de enstrofia puede ser evaluado después de determinar la constante C .

Poniendo $m = m_e$
 $z = z_e$ donde $F_E = \mathcal{N}_e$

e introduciendo la enstrofia adimensional por unidad de número de onda E_*

$$E = \mathcal{N}_e^{1/2} \sqrt{1/2} E_*$$

46.
$$E_* = \alpha z^{-1} e^{-\alpha(z^2 - z_e^2)}$$

y 47.
$$F_E = \mathcal{N}_e e^{-\alpha(z^2 - z_e^2)}$$

$\alpha = 4.5$ fué evaluada por Steimberg (1971).

Se puede en cada caso encontrar \mathcal{N}_e después de elegir adecuadamente m_e y de esta forma es posible evaluar.

$$m_0 = \left[\frac{\mathcal{N}_e}{\sqrt{3}} \right]^{1/6} \quad \text{y consecuentemente}$$

z_e .

La figura 20 muestra $F_E(z) / F_E(z_e)$ en función de Z en los casos WW y ZZ. La figura A₃₃ muestra las mismas variables para los

casos ZZ y RR los cuales se ajustan aún mejor a la curva teórica por cuanto ellos tienen un mayor valor de $\sqrt{\nu}$ y por ello 43 es más aproximadamente exacta. La curva llena representa los valores predichos por 47. Los cuadrados y círculos representan los resultados de los experimentos y se puede concluir que la cascada de enstrofia es descripta mejor por un decrecimiento exponencial que por un flujo constante para $m > 10$.

Las figuras 21 y A₃₄ muestran la relación 46 normalizada de forma que $E_{(Ze)} = 1$. También se ve la curva $C Z^{-1}$ normalizada en la misma forma para compararla con la solución propuesta en 46. Aunque el ajuste no es tan bueno como en la figura 20, hay mucho mayor acuerdo que en el caso de la curva basada en $C Z^{-1}$.

Es importante mencionar que para $m > 20$ la ley potencial ha mostrado no ser apropiada ni en nuestros experimentos ni en los realizados por Steimberg (1971) y por Lilly (1969). Esto puede ser explicable a la luz de la ecuación 46. En efecto $\log E_* = \log \alpha - Z - \alpha (Z^2 - Z_e^2)$, así en la región donde $(Z^2 - Z_e^2)$ es relativamente pequeño la falta de ajuste a la ley potencial puede ser disimulada eligiendo un exponente cerca de -1 ; pero para altos números de onda, $(Z^2 - Z_e^2)$ predomina produciendo bruscas diferencias respecto de la ley potencial tal como la que se muestran en las figuras respectivas.

Las figuras 22 y A₃₅ muestran la curva para la energía cinética.

$$48. \quad K_* = \beta Z^{-3} e^{-\alpha(Z^2 - Z_e^2)}$$

con la misma clase de normalización que en los otros casos. Otra vez los resultados experimentales se muestran en la figura e igualmente la distribución sugerida por Leith (1968 a).

De nuevo hay un mejor ajuste con la solución propuesta por 48. que corresponde a la distribución de enstrofia dada en 46, en el caso de un flujo homogéneo e isotrópico.

La principal conclusión es que de los experimentos numéricos, los cuales en una primera aproximación se ajustan a la ecuación 43. no debe esperarse que produzcan una ley potencial con exponente igual a -3 en el caso de la

energía cinética y -1 en el caso de la enstrofia a menos que se elija el valor adecuado de $\sqrt{}$ y aún en ese caso una brusca disminución de la energía se va a observar para un número de onda suficientemente grande.

Lo que permanece sin respuesta es si 43. es o no una caracterización adecuada para la escala $m > 10$. En caso afirmativo no se debe esperar que una ley potencial con exponente igual a -3 valga para la energía cinética y para $m > 20$ (donde no hay información observacional)

De cualquier modo, el modelo no produce una cascada de enstrofia con flujo constante y en este aspecto parece comportarse como el flujo atmosférico y por esta razón no se debe esperar que la ley potencial con el exponente igual a -3 se observe en la atmósfera para $m > 20$.

En los otros aspectos, ya descritos, el modelo cuasigeostrófico de dos capas se comporta como la atmósfera y en consecuencia se puede concluir que en la naturaleza cuasigeostrófica y baroclínica de la atmósfera reside la causa de este comportamiento.

CAPITULO IV

MODELO II

1. Descripción

Este modelo es casi el mismo que el usado por Steimberg (1971). La diferencia principal reside en los mecanismos de fricción. Es un modelo cuasigeostrófico de dos capas con condiciones de contorno cíclicas en ambas direcciones. La región horizontal de integración es una de infinito número de idénticos cuadrados contiguos. Esta clase de condiciones fueron usadas por Lilly (1969) para un flujo bidimensional.

A causa de estas condiciones de contorno y del ajuste geostrófico entre el campo de movimiento y de geopotencial, no puede existir un flujo zonal. Para prevenir la isotropía del modelo, el efecto de la variación del parámetro de coriolis no puede ser considerado. Por otra parte, ya se ha visto en el caso del modelo I que el término que contiene el parámetro β no produce ninguna contribución integral en la energética del modelo cuasigeostrófico, debido a la naturaleza no divergente del viento.

En consecuencia, las ecuaciones 13. y 14. toman la forma

$$49. \quad \frac{\partial q_1}{\partial t} = -\vec{V}_1 \cdot \nabla q_1 + \frac{d^2 R}{f_0 C_p} Q_H + \nu \nabla^2 q_1 + \tilde{A} (\xi_3 - \xi_1)$$

$$50. \quad \frac{\partial q_3}{\partial t} = -\vec{V}_3 \cdot \nabla q_3 - \frac{d^2 R}{f_0 C_p} Q_H + \nu \nabla^2 q_3 + (\tilde{A} + 0,3 \tilde{k}) \xi_1 - (\tilde{A} + 1,3 \tilde{k}) \xi_3$$

Se permite en este modelo, la misma clase de mecanismos friccionales que en el Modelo I, mientras que en el modelo de Sfeimberg (1971), solo se retenía los términos de disipación relacionados con ν , el coeficiente de viscosidad lateral.

Antes de describir la función de calentamiento, es conveniente definir qué es lo que se debe entender por número de onda en este modelo. Puesto que el flujo en cada nivel admite condiciones de contorno cíclicas en ambas direcciones, la descripción de cualquier variable puede ser hecha a través de los coeficientes de Fourier bidimensionales.

Para la función corriente, por ejemplo

$$\Psi = \sum_m \sum_n A_{m,n} e^{i \sigma (mx + ny)}$$

Para poder hacer una descripción en una dimensión en el dominio del número de onda, seguiremos la convención de Lilly (1969) y definiremos

$$\Psi_k = \sum_m \sum_n A_{m,n} e^{i \sigma (mx + ny)}$$

donde m y n son tales que siempre $\max(|m|, |n|) = k$

Entonces

$$\Psi = \sum_{k=1}^M \Psi_k$$

donde M es el máximo número para m y n permitido por las dimensiones de la región de integración y el tamaño de la grilla utilizada.

En nuestro caso $\Delta x = \Delta y = 475$ Km y el lado del cuadrado $L = 64 \Delta x$; por lo tanto $N = 32$.

Esta descripción difiere de la usual donde K está definido por $k^2 = m^2 + n^2$, pero es más conveniente cuando se trata como en este caso con un conjunto discreto de números m , n y k .

Para simplificar las ecuaciones se define H como

$$51. \quad Q_H = \frac{f_0 C_p}{\lambda^2 R} H$$

H es entonces la función a través de la cual se alimenta el sistema. En todos los casos se va a alimentar al sistema en un solo modo. Esto último debe entenderse en el dominio del número de onda de una dimensión.

Dado que la generación de energía depende de la covarianza entre H y T y puesto que el campo térmico depende del campo de calentamiento pasado, se requiere que haya cierta continuidad, en el tiempo, del campo de calentamiento. Por otra parte un cierto comportamiento estocástico es deseable para que el calentamiento sea independiente de cualquier estructura prescrita.

Por ello se relaciona el campo en el tiempo $t+1$ al campo previo por

$$52. \quad H^{t+1} = R H^t + [1 - R^2]^{1/2} \tilde{H}^{t+1}$$

R es un coeficiente que mide la continuidad del campo de calentamiento con el tiempo

$R = 1$ implica que H no cambia con el tiempo

$R = 0$ implica que H^{t+1} y H^t están completamente no correlacionados puesto que \tilde{H} es un valor elegido estocásticamente.

Aunque H y como consecuencia \tilde{H} debe ser nulo para los números de ondas diferentes de un cierto valor k_i . En una descripción bidimensional hay varias componentes de Fourier tales que $\max(|m|, |n|) = k_i$

$$\tilde{H}_{k_i} = \sum_m \sum_n \tilde{H}_{m,n} e^{i \mathcal{J}(mx+ny)}$$

donde $\max(|m|, |n|) = k_i$.

Luego se puede elegir $\tilde{H}_{m,n}$ estocásticamente a partir de una distribución gaussiana, excepto los conjugados complejos de tal forma que \tilde{H}_{k_i} sea siempre real. Puesto que se intenta mantener un campo de calentamiento constante, $\tilde{H}_{m,n}$ es normalizado con ese fin.

Un valor de $R \approx 0,7$ pesa igualmente el campo de calentamiento pasado y el elegido estocásticamente; por ello ese valor fue elegido para realizar los experimentos. Por otra parte, puesto que se debe partir de un estado de reposo solo perturbado por una muy pequeña perturbación, también elegida estocásticamente, para poder acelerar la generación de energía, se usa en las primeras cien horas de

cada experimento $R = 0.8$.

En los experimentos se usó $k_1=8$ excepto en un caso en el que $k_1 = 1$. Al usar $k_1=8$ se siguió a Lilly (1969) y Steimberg (1971). Puesto que en la atmósfera los estudios de Saltzman y Fleisher (1960, 1961) y Wiin Nielsen (1959) muestran un máximo de conversión de energía potencial a cinética en las ondas 6 y 7, usar $k_1 = 8$ tiene cierta correspondencia con las observaciones. Por otra parte es más realista alimentar al sistema en el más bajo modo de oscilación del sistema, tal como sucede en la atmósfera, donde la energía potencial disponible es alimentada en el flujo zonal. De cualquier forma, los experimentos se complementan entre sí, como se verá.

2. METODOS NUMERICOS

Se utilizan diferencias finitas para evaluar el segundo miembro de 49 y 50.

El método de integración en el tiempo es el mismo que el descrito para el Modelo I.

Para los jacobianos se utilizó el método de Arakawa de segundo orden (1969) descrito en el capítulo I. En este caso no surgen problemas con las condiciones de contorno para mantener la energía cinética y la enstrofia del sistema.

Una vez obtenido q_1 y q_3 en el tiempo $t+1$, ψ_1 y ψ_3 son calculadas de

$$53. \quad q_1 = \nabla^2 \psi_1 - \lambda^2 (\psi_1 - \psi_3)$$

$$q_3 = \nabla^2 \psi_3 + \lambda^2 (\psi_1 - \psi_3)$$

Siguiendo a Steimberg (1971) se puede escribir

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_3 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix} = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M \begin{bmatrix} F_1(m,n) \\ F_3(m,n) \\ A_2(m,n) \\ A_3(m,n) \end{bmatrix} e^{i(\sigma t + m x + n y)} \quad ; \quad \sigma = \frac{2\pi}{L}$$

luego 53. da

$$F_1(m,n) = - [\sigma^2 (m^2 + n^2) + \lambda^2] A_2(m,n) + \lambda^2 A_3(m,n)$$

$$F_3(m,n) = - [\sigma^2 (m^2 + n^2) + \lambda^2] A_3(m,n) + \lambda^2 A_2(m,n)$$

Sea

$$D = [\sigma^2 (m^2 + n^2) + \lambda^2]$$

$$F_1(m,n) = - D A_2(m,n) + \lambda^2 A_3(m,n)$$

$$F_3(m,n) = - D A_3(m,n) + \lambda^2 A_2(m,n)$$

y en consecuencia

$$A_1(m, m) = \frac{D F_1(m, m) + \lambda^2 F_3(m, m)}{\lambda^4 - D^2}$$

$$y \quad A_3(m, m) = \frac{D F_3(m, m) + \lambda^2 F_1(m, m)}{\lambda^4 - D^2}$$

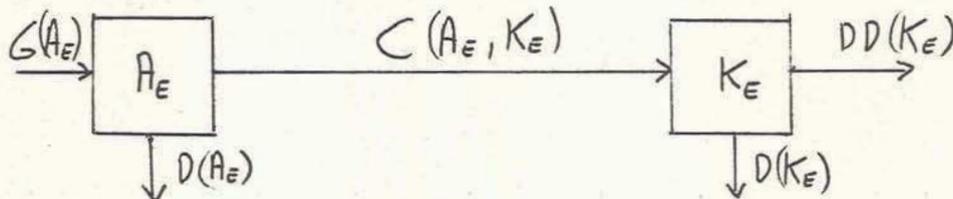
y de esta forma se puede obtener ψ_1 y ψ_3 .

3. ENERGETICA DEL MODELO

Puesto que la ecuación termodinámica 10 es válida para este modelo (entra implícitamente en 49 y 50), la ecuación 24 para la energía potencial disponible es formalmente válida para este modelo aunque en este caso, el calentamiento es esencialmente diferente. Lo mismo puede decirse acerca de la ecuación 25 que describe los procesos relacionados con la energía cinética.

Puesto que ahora no existe un flujo zonal, la descripción esquemática del gráfico 1 se reduce a la que se da en el gráfico 2.

GRAFICO 2



En este caso, el flujo de energía en cada proceso puede ser predicho por simples consideraciones físicas. Como la disipación tiene un signo determinado y en periodos de integración prolongados A_E y K_E deben permanecer casi constantes si un estado cuasiestacionario es alcanzado por el sistema, el signo de $C(A_E, K_E)$ y $G(A_E)$ está determinado.

4. DIAGNOSTICO ENERGETICO

El incremento en tiempo usado es una hora pero los diagnósticos energéticos fueron hechos cada 24 horas.

Siguiendo la notación utilizada por Steimberg (1971) se definen los coeficientes de Fourier como sigue

$$\Psi_l = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M A_l(m,n) e^{i\theta} J(mX+nY) \quad ; \quad l=1,3$$

$$T = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M B(m,n) e^{i\theta} J(mX+nY)$$

$$H = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M C(m,n) e^{i\theta} J(mX+nY)$$

$$\vec{V} \cdot \nabla T = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M D(m,n) e^{i\theta} J(mX+nY)$$

$$(\vec{V} \cdot \nabla \Psi)_l = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M E_l(m,n) e^{i\theta} J(mX+nY) \quad ; \quad l=1,3$$

$$\omega = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M \Omega(m,n) e^{i\theta} J(mX+nY)$$

$$\zeta_l = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M F_l(m,n) e^{i\theta} J(mX+nY) \quad ; \quad l=1,3$$

Las transformadas de Fourier realizadas cada 24 horas permiten evaluar $A_2(m,n)$, $A_3(m,n)$, $B(m,n)$, $C(m,n)$, $D(m,n)$, $E(m,n)$ y $F(m,n)$.

Puesto que no se evalúa el campo instantáneo de W , este se obtiene a partir de la ecuación 10 usando diferencias finitas centradas en el tiempo para T .

El campo de T es entonces necesario en $t+1$ y $t-1$ para evaluar W .

Luego las integrales de las cantidades involucradas en el balance energético pueden ser calculados.

$$54. \quad A_E = \frac{J^2}{2} \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M B(m,n) B^*(m,n)$$

$$55. \quad K_E = \frac{J^2}{2} \sum_l \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M (m^2+n^2) A_l(m,n) A_l^*(m,n) \quad ; \quad l=1,3$$

$$56. C(A_\epsilon, K_\epsilon) = \frac{f_0}{P_2} \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M B_{(m,n)} \mathcal{N}_{m,n}^*$$

$$57. D(K_\epsilon) = -\sqrt{J^4} \sum_{\ell} \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M (m^2+n^2)^2 A_{\ell}(m,n) A_{\ell}^*(m,n) \quad ; \ell=1,3$$

$$58. D(A_\epsilon) = -\lambda^2 J^2 V \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M (m^2+n^2) B_{(m,n)} B_{(m,n)}^*$$

$$59a. DD_1(K_\epsilon) = -\tilde{A} J^2 \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M (m^2+n^2) A_1(m,n) A_1^*(m,n) - \tilde{A} \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M F_3(m,n) A_1^*(m,n)$$

$$59b. DD_3(K_\epsilon) = -(\tilde{A} + 1,3\tilde{k}) J^2 \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M (m^2+n^2) A_3(m,n) A_3^*(m,n) - (\tilde{A} + 0,3\tilde{k}) \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M F_1(m,n) A_3^*(m,n)$$

$$59. DD(K_\epsilon) = DD_1(K_\epsilon) + DD_3(K_\epsilon)$$

$$60. CK = \sum_{\ell} \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M A_{\ell}(m,n) E_{\ell}^*(m,n) \quad ; \ell=1,3$$

$$61. CA = -\lambda^2 \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M B_{(m,n)} D_{(m,n)}^*$$

$$62. G(A_\epsilon) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M C_{(m,n)} B_{(m,n)}^*$$

$$63. E = \frac{1}{2} \sum_{\ell} \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M F_{\ell}(m,n) F_{\ell}^*(m,n) \quad ; \ell=1,3$$

$$64. I = \sum_{\ell} \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M E_{\ell}(m,n) \bar{F}_{\ell}^*(m,n) \quad ; \ell=1,3$$

CAPITULO VRESULTADOS DE LA INTEGRACION DEL MODELO II

Puesto que este modelo fue usado por Steimberg (1971) y las alteraciones que se han hecho son de menor significación, no se van a discutir aquí las pruebas del comportamiento correcto de la energética. Esto fue hecho por Steimberg (1971) para averiguar si las evaluaciones son representativas de la real energética del modelo. Como es de preveer nuestros resultados son más o menos los mismos.

La tabla IV muestra el valor de los coeficientes de fricción para los experimentos que se presentan aquí. El valor del calentamiento es también presentado. No ha sido necesario cambiar su valor por cuanto, cuando las ecuaciones 49 y 50 son escritas en forma dimensional se puede ver que dependen de números que involucran el cociente entre los coeficientes de fricción y la función de calentamiento. También se muestran la horas hasta las cuales se realizó el experimento.

TABLA IV

CASO	ν ($10^5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$)	\tilde{k} (10^{-6} s^{-1})	\tilde{H} (10^{-6} s^{-1})	Q_H ($10 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-3}$)	HORAS
E	0	4	0,5	77	1032
J	0	2	0,5	77	900
Q	1,7	4	0,5	77	1008
T	0	4	0,5	77	1032

Los casos E y T tienen los mismos coeficientes, pero en el caso E al igual que en S y Q la alimentación es hecha en $k_i = 8$, mientras que en el caso T $k_i = 1$ que es la onda más grande posible.

Las Figuras 23, 24, B1 y B2 muestran la energía potencial disponible y la energía cinética en función del número de onda.

Los casos E, J y Q presentan una evolución similar. En estos casos, K es mucho mayor que A (debe tenerse *en cuenta* que no está presente el flujo zonal). La cantidad de energía potencial disponible y cinética aunque difiere entre un caso y otro se mantiene en el mismo orden.

Después de 500 horas se puede apreciar que se presenta un espectro cuasiestacionario de acuerdo al comportamiento de la energía de las ondas 8, 12 y 16.

La Figura 24 (el caso T) muestra un comportamiento diferente. En primer lugar hay mucha más energía presente en el modelo. Mientras que el calentamiento es el mismo, la generación de energía es considerablemente mayor, produciendo un estado de equilibrio con la disipación en niveles más elevados de energía.

También lleva más tiempo alcanzar el espectro cuasiestacionario, alrededor de 800 horas. Pero la diferencia más interesante es que hasta la hora 800, K es menor que A y a la vez la energía en la onda número 1 predomina durante el mismo tiempo. Luego la energía tiende a ubicarse en números de onda mayores y finalmente $K_4 > K_1$.

Aunque no se puede apreciar de las figuras 23, B1 y B2, en estos casos el máximo de energía se da en la onda número 8 y A es un orden de magnitud menor que K.

En el próximo capítulo se realiza cierta discusión analítica que puede explicar este fenómeno, el cual recuerda en cierta forma lo que ocurre en la atmósfera, donde la energía potencial disponible es mayor que la cinética y al mismo tiempo, la mayor parte de la energía se halla en los modos de oscilación más bajos, particularmente en el flujo zonal.

Las Figuras 25 y 26 muestran a la energía cinética y potencial disponible y la 27 a la entropía, todas en función del número de onda, para el caso E. El caso T es presentado por las Figuras 28, 29 y 30 y en el apéndice B las Figuras B3 hasta B8 son las equivalentes para los casos J y Q.

Antes de discutir estas figuras, se debe mencionar que el uso de una disipación dependiente del número de onda, puede condicionar la forma del espectro, de tal forma que puede distorsionar el efecto de los mecanismos no lineales. Esto es una objeción a los experimentos de Lilly y Steimberg y se mostró en el capítulo III (y fue confirmado por nuestros experimentos y aún por los propios de Lilly y Steimberg) que conduce a un apartamiento de la ley potencial. La figura 31 fue tomada de uno de los experimentos de Steimberg. Se ve un brusco descenso en la energía para $k > 20$.

Un mejor ajuste a una ley potencial en el rango $10 \leq k \leq 20$ es observado en estos experimentos, tanto para la energía como para la enstrofia y solo el caso Q presenta una ligera desviación. La brusca disminución de energía y enstrofia para $k > 20$ no es observada y solo en el caso Q hay una tendencia hacia mayores pendientes para $k > 20$.

Desde luego, en los casos E, J y T se ha tomado $J = 0$. Pero un mejor argumento en favor de la ley potencial proviene de la tabla IV. La pendiente en el rango $10 \leq k \leq 80$ para la energía y la enstrofia es mostrada para todos los experimentos descritos en este trabajo.

TABLA V

Pendientes

	A	K	E
E	-4.7	-2.7	-0.7
J	-4.7	-2.8	-0.7
Q	-5.2	-4.1	-2.1
T	-4.0	-2.2	-0.2
WW	-5.4	-3.9	-2.0
ZZ	-5.0	-3.5	-1.2
RR	-5.9	-4.3	-2.7
AA	-5.7	-4.4	-2.6

Como la isotropía implica que la pendiente para la enstrofia debe ser mayor en 2 a la de la energía cinética, no importa si esta última no sigue exactamente una ley potencial. En este último caso si aún acepta una ley potencial aproximada en un cierto rango, la diferencia es prácticamente exacta.

La tabla confirma esta expectativa puesto que en el caso del Modelo II el flujo es casi isotrópico y la diferencia de 2 entre las pendientes es observada en todos los casos. Los experimentos del Modelo I muestran solo una diferencia aproximada a 2 entre ambas pendientes, puesto que la isotropía no es favorecida por el modelo.

En el caso de la energía potencial disponible, la diferencia de pendiente con respecto a la energía cinética es predicha (para el modelo de dos capas) igual a 2 por Merilees y Warn (1972). Esto se observa con bastante exactitud en aquellos casos en que $\mathcal{J}=0$

El caso Q, el único en el Modelo II donde $\mathcal{J} \neq 0$, muestra una fuerte desviación del valor predicho por Merilees y Warn (1972).

como para $\mathcal{J}=0$

$$K_* = \beta z^{-3} e^{-\alpha(z^2 - z_e^2)}$$

De acuerdo a lo argumentado por Merilees y Warn, la distribución en la energía potencial disponible a esperarse debe ser

$$A_* = \gamma z^{-5} e^{-\alpha(z^2 - z_e^2)}$$

En un gráfico log-log se tendrá

$$\log K_* = c + e_2 - 3z - \alpha(z^2 - z_e^2)$$

$$\log A_* = c + e_2 - 5z - \alpha(z^2 - z_e^2)$$

Se puede esperar entonces que el término $\alpha(z^2 - z_e^2)$ tenga mayor influencia en la pendiente final en el caso de la energía cinética, que en el caso de la energía potencial disponible. Esto se ve en la tabla V, donde se puede apreciar una mayor desviación de -3 en el caso de la energía cinética, que de -5 en el de la energía potencial disponible en los casos en que $\mathcal{J} \neq 0$.

Desde luego esta desviación es aún mayor en el caso de la entropía.

En aquellos casos en que $\mathcal{J}=0$, el ajuste a la ley potencial puede ser confirmado por la diferencia casi exacta de 2 entre las pendientes del espectro de energía cinética y potencial disponible.

Se puede fácilmente mostrar que si para k suficientemente grande vale

$$65. \quad \frac{\partial F_E}{\partial k} = \chi E_k$$

y suponiendo como en el capítulo III que

$$F_E = \frac{1}{\alpha} \frac{k E_k}{M_x^{-1/3}}$$

Entonces la solución de 65 es

$$\bar{E}(k) = C k \left[-1 + \frac{\alpha X}{\eta^{1/3}} \right]$$

La cual es una ley potencial. Los experimentos muestran en efecto este tipo de ley para de acuerdo a las pendientes $X > 0$. Esto significa que la generación de enstrofia supera a la disipación en este rango por lo que nos hallamos claramente alejados de las condiciones necesarias para la existencia de un subrango inercial.

Debe mencionarse que los estudios observacionales muestran un comportamiento similar a los experimentos, en este punto.

Cuando $k_i = 8$, un máximo secundario es observado en las ondas más largas. Si se hace abstracción de la energía de la onda excitada, se puede decir que el caso E presenta un máximo en la onda número 4, J en $k = 3$ ^{y Q en $k = 5$} . En el caso T donde $k_i = 1$, dos máximos son observados en $k = 3$ y 5. Parece que el sistema tiende a elegir el rango 3-5 para presentar el máximo en el espectro de energía. Curiosamente en el mismo rango se presenta el máximo del espectro energético para todos los casos del modelo I, cuando ^{no} se prescinde del flujo zonal.

En el caso T, la energía en las ondas 3 y 5 es aún mayor que la de la onda excitada $k_i = 1$.

Se debe mencionar que puesto que se tiene un mecanismo no dependiente del número de onda en todos los casos, el fenómeno de apilamiento observado por Steimberg y Lilly no se produce.

Las figuras 32 y 33 presentan CA $(k/r, 1)$ para los casos E y T mientras que B₉ y B₁₀ hacen lo mismo para los casos J y Q. En todos los casos, como se puede esperar, la onda alimentada pierde energía a través de las interacciones no lineales. La mayor parte de la energía es cedida hacia la "derecha" de la onda forzada. En otras palabras, la energía potencial disponible es cascada hacia escalas mayores

En los casos en que $k_i = 8$, la ganancia de energía potencial disponible es de significación hasta $k \leq 15$.

Otro hecho interesante (cuando $k_i = 8$) es que para $k < 5$ hay un flujo de energía potencial disponible hacia escalas menores. La única fuente para esta energía es la energía cinética.

Las ondas 6 y 7 ganan energía pero bastante menos que la ganada en conjunto por todas las ondas, tales que $k > k_i$.

El caso T muestra una ganancia significativa hasta $k = 10$ y desde luego un flujo hacia la pequeña escala.

La disipación de energía potencial disponible es de un orden de magnitud menor que los otros procesos y es presentada en las figuras 34 y 35 para los casos E y T.

Las figuras 36, 37, B₁₁ y B₁₂ muestran $C(A_E, K_E)$ el cual es casi similar a $CA(k/r, 1)$, excepto por el signo y en el caso de la onda excitada.

Es interesante mencionar que buena parte de la energía del modo excitado es cedida a través de interacciones no lineales. Esto es particularmente cierto en el caso T.

Alguna conversión a energía potencial disponible se observa en las ondas largas como se podía esperar de acuerdo al comportamiento de $CA(k/r, 1)$.

En el caso T, la conversión a energía cinética en la onda número 1 no es de ninguna manera significativa comparada con la generación total de energía potencial disponible en esa onda.

La conversión a energía cinética es muy activa hasta el número de onda $k = 15$. Por lo tanto, no se debe esperar un subrango inercial en un sentido estricto en el rango $10 \leq k \leq 15$.

Las figuras 38, 39, B₁₃ y B₁₄ presentan $CK(k/r, 1)$ en función del número de onda k .

En los casos en que $k_i = 8$, no hay casi flujo de energía hacia la pequeña escala, $k = 9$ es la única onda (para $k > 8$) que presenta alguna ganancia de significación. Prácticamente toda la energía cinética es cascada hacia las ondas largas.

El caso T presenta resultados interesantes, aunque la onda excitada está

alejada de $k = 8$, para $k > 10$ el comportamiento del sistema es bastante similar a los otros casos. La energía ^{cinética} es cascada desde la región del espectro $7 \leq k \leq 9$ hacia las escalas $2 \leq k \leq 5$. Esto debe ser señalado puesto que en este caso la energía es cedida al sistema en la onda más larga. A pesar de ello la energía cinética es cascada hacia la escala más grande.

$CK(k/r, 1)$ es considerablemente menor que $C(A_k, K_k)$ en el rango $k > 10$. Esto también es observado en los estudios observacionales basados en los datos de la atmósfera; Saltzman y Fleisher (1960), Wiin Nielsen (1959) y Yang (1967).

Las figuras 40 y 40' muestran la disipación de energía cinética la que aproximadamente sigue la forma del espectro de energía.

Las figuras 41, 42, B₁₅ y B₁₆ representan $I(k/r, 1)$. En los casos donde $k_1=8$ esta onda es la fuente de enstrofia, la que es principalmente cedida hacia la pequeña escala. En el caso T, la fuente está en la misma región del espectro donde la energía cinética está disponible para ser cedida al resto del espectro. En este caso, el flujo es claramente hacia la pequeña escala y la figura 43 muestra F_E , el cual muestra un flujo constante de enstrofia en el rango $8 \leq k \leq 17$. Aunque el flujo de enstrofia es casi constante y el flujo de energía cinética es casi nulo en esas escalas, la ley potencial que se podía esperar no presenta un exponente -3 en la energía cinética y -1 en la enstrofia, debido a que $C(A_k, K_k)$ es significativamente mayor que $CK(k/r, 1)$ y en general está equilibrado por $DD(K_k)$.

Los experimentos con el modelo II permiten las siguientes conclusiones. En todos los casos, la energía potencial disponible es cascada hacia la pequeña escala, aún en el caso donde la excitación es hecha en la onda número 8. En estos casos, las ondas más largas ganan energía potencial disponible a expensas de la energía cinética para poder transferirla hacia la pequeña escala.

Las mayores ganancias en energía potencial disponible a través de interacciones no lineales se dan a la "derecha" del máximo del espectro energético. Allí se da también el grueso de la conversión a energía cinética la cual es su vez cascada hacia las escalas mayores, aunque no con un flujo constante. El flujo de energía cinética hacia la pequeña escala no es en general de significación y puede suponerse casi nulo.

Los flujos de energía potencial disponible y cinética descriptos fueron también observados en los experimentos con el modelo I y concuerdan con las observaciones. Por lo tanto se los debe atribuir a la naturaleza baroclínica y cuasigeostrofica del flujo atmosférico.

El flujo de enstrofia es principalmente dirigido hacia las escalas menores tal como es observado a partir de datos atmosféricos. Sólo en un experimento un flujo casi constante de enstrofia es observado pero en este caso la conversión $C(A_k, K_k)$ es aún muy activa en esa región del espectro.

Una ley potencial se observa en la energía potencial disponible y cinética y en la enstrofia para todos los casos donde la disipación no depende del número de onda. Esta ley potencial es confirmada por las relaciones entre las pendientes de la energía cinética, potencial disponible y enstrofia.

La pendiente en la energía cinética no es exactamente igual a -3, la razón puede buscarse en el hecho de que $C(A_k, K_k)$ es aún significativo para $k > 10$.

En ambos modelos parece probable que el sistema tiende a producir un máximo en el rango $3 \leq k \leq 5$.

La disipación y el número de onda de la alimentación de energía puede alterar los valores de las pendientes del espectro, pero permanece inalterado, en todos los casos la dirección y relativa significación de los flujos de enstrofia y energía potencial disponible y cinética, los cuales parecen condicionar todos los otros parámetros.

CAPITULO VI

Discusión analítica del modelo de dos capas

Algunos de los resultados descriptos en el Capítulo V son explicados a través de una discusión analítica del modelo.

1. En un sistema no forzado y no viscoso las ecuaciones 24 y 25 conducen a

66.
$$\frac{\partial(A+K)}{\partial t} = 0$$

enstrofia

si la enstrofia ^{enstrofia} por unidad de masa se define

$$\xi_p = \frac{1}{M} \int_M \frac{1}{2} q^2 dM = \frac{1}{S p_0} \int_S \int_0^{p_0} \frac{1}{2} q^2 ds dp$$

en el modelo de dos capas

$$\xi_p = \frac{1}{2S} \int_S \frac{1}{2} [q_1^2 + q_3^2] dS$$

Puesto que no se considera ni la disipación ni la generación de energía

$$66a. \quad \frac{\partial q_1}{\partial t} = -\vec{V}_1 \cdot \nabla q_1$$

$$66b. \quad \frac{\partial q_3}{\partial t} = -\vec{V}_3 \cdot \nabla q_3$$

y como \vec{V} es un campo vectorial no divergente.

$$67. \quad \frac{\partial \xi_p}{\partial t} = \frac{1}{2S} \int_S \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} (q_1^2 + q_3^2) \right] dS = 0$$

Entonces el sistema está caracterizado por la conservación de dos parámetros

$K + P = S$ energía y ξ_p entropía potencial.

En el Capítulo IV se mostró que

$$K = \frac{J^2}{2} \sum_l \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M (m^2 + n^2) A_{l(m,n)} A_{l(m,n)}^* \quad ; \quad l = 1, 3$$

$$A = \frac{J^2}{2} \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M B_{(m,n)} B_{(m,n)}^*$$

puesto que

$$q_1 = \nabla^2 \psi_1 - \lambda^2 (\psi_1 - \psi_3)$$

$$q_3 = \nabla^2 \psi_3 + \lambda^2 (\psi_1 - \psi_3)$$

si

$$\psi_1 = \sum_m \sum_n A_{1(m,n)} e^{i\sigma J(mX+nY)}$$

$$\psi_3 = \sum_m \sum_n A_{3(m,n)} e^{i\sigma J(mX+nY)}$$

$$\nabla^2 \psi_1 = \sum_m \sum_n -J^2 (m^2 + n^2) A_{1(m,n)} e^{i\sigma J(mX+nY)}$$

$$\frac{1}{S} \int_S (\nabla^2 \psi_1)^2 ds = \sum_m \sum_n \mathcal{J}^4 (m^2 + n^2) A_{1(m,n)} A_{1(m,n)}^*$$

y si $(\psi_1 - \psi_3) = T = \sum_m \sum_n B_{(m,n)} e^{i\mathcal{J}(mx+ny)}$

$$\frac{1}{S} \int_S \Delta^4 T^2 ds = \Delta^4 \sum_m \sum_n B_{(m,n)} B_{(m,n)}^*$$

Luego

$$\frac{1}{S} \int_S q_1^2 ds = \sum_m \sum_n \left\{ \mathcal{J}^4 (m^2 + n^2) A_{1(m,n)} A_{1(m,n)}^* + \Delta^4 B_{(m,n)} B_{(m,n)}^* + \Delta^2 \mathcal{J}^2 (m^2 + n^2) [A_{1(m,n)} B_{(m,n)}^* + A_{1(m,n)}^* B_{(m,n)}] \right\}$$

igualmente

$$\frac{1}{S} \int_S \frac{1}{2} [q_1^2 + q_3^2] ds = \sum_m \sum_n \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{J}^4 (m^2 + n^2)^2 [A_{1(m,n)} A_{1(m,n)}^* + A_{3(m,n)} A_{3(m,n)}^*] + \Delta^4 B_{(m,n)} B_{(m,n)}^* + \Delta^2 \mathcal{J}^2 (m^2 + n^2) B_{(m,n)} B_{(m,n)}^* \right\}$$

porque

$$\frac{1}{S} \int_S q_3^2 ds = \sum_m \sum_n \left\{ \mathcal{J}^4 (m^2 + n^2)^2 A_{3(m,n)} A_{3(m,n)}^* + \Delta^4 B_{(m,n)} B_{(m,n)}^* - \Delta^2 \mathcal{J}^2 (m^2 + n^2) \times [A_{3(m,n)} B_{(m,n)}^* + A_{3(m,n)}^* B_{(m,n)}] \right\}$$

Luego

$$\xi_p = \sum_m \sum_n \mathcal{J}^2 (m^2 + n^2) K_{m,n} + [2\Delta^2 + 2\mathcal{J}^2 (m^2 + n^2)] P_{m,n}$$

siendo

$$K_{m,n} = \frac{\mathcal{J}^2}{2} \sum_{\ell=1,3} (m^2 + n^2) A_{\ell(m,n)} A_{\ell(m,n)}^*$$

$$P_{m,n} = \frac{\Delta^2}{2} B_{(m,n)} B_{(m,n)}^*$$

si se define

$$k^2 = m^2 + n^2$$

$$K_k = \sum_m \sum_n K_{m,n}$$

$$P_k = \sum_m \sum_n P_{m,n}$$

donde ambas sumatorias sobre m y n tales que $m^2 + n^2 = k^2$

entonces

$$\sum_k P = \sum_k J^2 k^2 K_k + \sum_k 2(\lambda^2 + J^2 k^2) P_k$$

Así, mientras el sistema permanezca bajo las hipótesis iniciales

$$68. \quad \sum_k \delta K_k + \sum_k \delta P_k = 0$$

$$69. \quad \sum_k \left\{ k^2 \delta K_k + 2 \left[\frac{\lambda^2}{J^2} + k^2 \right] \delta P_k \right\} = 0$$

o si $S_k = P_k + K_k$; $\delta S_k = \delta P_k + \delta K_k$

$$70. \quad \sum_k \delta S_k$$

$$71. \quad \sum_k k^2 \delta S_k = - \sum_k \left[\frac{2\lambda^2}{J^2} + k^2 \right] \delta P_k$$

Luego si se supone que se tiene un flujo de energía cinética K hacia los más bajos modos del espectro, ~~o~~ Y si el flujo de energía potencial disponible tiene la misma dirección.

$$\sum_k k^2 \delta S_k < 0$$

y así

$$\sum_k \left(\frac{2\lambda^2}{J^2} + k^2 \right) \delta P_k > 0$$

Esto es sólo posible con un flujo simultáneo de A hacia las escalas mayores si hay conversiones de K hacia A en la pequeña escala. Pero puesto que el flujo de energía cinética fué supuesto hacia las ondas largas esto es sólo posible si existe una fuente de energía cinética en las ondas cortas.

En un sistema como el atmosférico donde la generación de energía es hecha en A , un flujo de esta hacia la pequeña escala es la única posibilidad si debe existir una cascada de K hacia las escalas mayores.

Parece ser que el mecanismo de Kraichnan, el cual fuerza una cascada de energía cinética hacia las escalas mayores predomina en el modelo cuasigeostrofico de dos capas debido a la naturaleza cuasibidimensional del movimiento.

En la atmósfera tal como en nuestros experimentos esto parece ser cierto. El comportamiento de los flujos de energía potencial disponible son tales que son conducidos por la dinámica de la energía cinética. En efecto en los experimentos, tal como se vió en el Capítulo V, la energía es convertida de K en A en las ondas largas para permitir el flujo de esta hacia las pequeñas escalas.

Se puede predecir que un sistema forzado en el modo más alto posible va a tener de cualquier modo un flujo de energía potencial disponible hacia la pequeña escala.

Las ecuaciones 70. y 71. tienen otras derivaciones. Se puede ver que una conversión lineal de energía $C(A_k, K_k)$, no es posible sin una interacción no lineal en K ó en A. En efecto en tal caso δS_k es idénticamente sólo para todo K y así

$$\sum_k k^2 \delta S_k = 0 \quad \text{y} \quad \sum_k \left[\frac{2\lambda^2}{\sigma^2} + k^2 \right] \delta P_k = 0$$

de forma que δP_k debe seguir una muy peculiar distribución de ganancias y pérdidas con respecto a la energía cinética lo cual no es posible en un sistema que gana su energía en A y la pierde principalmente en K como ^{en} el caso de la atmósfera.

Así la conversión lineal no puede estar presente separadamente de interacciones no lineales en K y A.

Es bien conocido que el flujo atmosférico es altamente no lineal y parece posible relacionar ahora la naturaleza cuasigeostrofica de la atmósfera que implica conservación de energía y enstrofia potencial con la necesaria no linealidad que surge de las ecuaciones 70. y 71.

De esta forma, los parámetros externos que fijan la naturaleza del flujo tal como es descrito por las ecuaciones 66a y 66b condicionan la no linealidad característica del flujo atmosférico.

Se entiende aquí por proceso no lineal los intercambios de energía entre diferentes ondas, inclusive las componentes del flujo zonal por la forma en que fué definido k , $k^2 = m^2 + m^2$.

De acuerdo a 70. y 71. la conversión entre energía cinética y potencial disponible en una sola componente del flujo zonal no es posible si simultáneamente no hay alguna conversión $CA(k, r, l)$. Así se podría inferir, porque $C(A, K)$ no tiene lugar sólo en $C(A_z, K_z)$ sino que debe cumplirse también

en $C(A_E, K_E)$ y por lo tanto la necesidad de un flujo turbulento es una necesidad del flujo cuasigeostrófico.

2. Se considera ahora la generación y la disipación de energía en un sistema que alcanza un estado cuasiestacionario

Luego

$$72. \quad \frac{\partial q_1}{\partial t} = -\vec{V}_1 \cdot \nabla q_1 - H - \nu \nabla^2 q_1$$

$$73. \quad \frac{\partial q_3}{\partial t} = -\vec{V}_3 \cdot \nabla q_3 + H + \nu \nabla^2 q_3$$

es la ecuación de vorticidad en los niveles 1 y 3 y se considera sólo la difusión lateral.

En consecuencia

$$73. \quad \frac{\partial \frac{1}{2} [q_1^2 + q_3^2]}{\partial t} = - \left[\vec{V}_1 \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} q_1^2 \right) + \vec{V}_3 \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} q_3^2 \right) \right] - (q_1 - q_3) H + \nu (q_1 \nabla^2 q_1 + q_3 \nabla^2 q_3)$$

Cuando se integra sobre toda superficie

$$\frac{\partial \xi_p}{\partial t} = - \frac{1}{2S} \int_S (q_1 - q_3) H ds + \frac{1}{2S} \int_S \nu (q_1 \nabla^2 q_1 + q_3 \nabla^2 q_3) ds$$

Entonces la conservación de la vorticidad potencial implica

$$74. \quad \frac{1}{S} \int_S (q_1 - q_3) H ds = \frac{\nu}{S} \int_S (q_1 \nabla^2 q_1 + q_3 \nabla^2 q_3) ds$$

Condición que debe satisfacerse en términos estadísticos si es que se ha de alcanzar en estado cuasiestacionario en el modelo

$$(q_1 - q_3) H = (\nabla^2 T - 2\lambda^2 T) H$$

$$\text{luego} \quad \frac{1}{S} \int_S (\nabla^2 T - 2\lambda^2 T) H ds = \frac{\nu}{S} \int_S (q_1 \nabla^2 q_1 + q_3 \nabla^2 q_3) ds$$

Expendiendo ψ_1 y ψ_3 en serie de Fourier

$$\psi_l = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M A_l^{(m,n)} e^{i(m x + n y)} \quad ; \quad l=1,3$$

Usando la misma convención que antes se puede escribir

$$75. \quad \frac{\sqrt{v}}{S} \int_S (q_1 \nabla^2 q_1 + q_3 \nabla^2 q_3) ds = -\sqrt{v} \sum_k J^2 k^2 [2J^2 k^2 K_k + 4(\lambda^2 + J^2 k^2) P_k]$$

Si, como fué hecho en el modelo II, se supone una excitación en una sola onda

$$H = H^w e^{iJ\vec{w} \cdot \vec{x}}$$

Entonces

$$76. \quad \int_S (\nabla^2 T - 2\lambda^2 T) H ds = -B^w H^w [J^2 w^2 + 2\lambda^2]$$

74, 75 y 76 conducen a

$$77. \quad \sum_k k^4 K_k + \left[\frac{2\lambda^2 k^2}{J^2} + 2k^4 \right] P_k = \frac{H^w B^w}{2J^2 \sqrt{v}} \left[w^2 + \frac{2\lambda^2}{J^2} \right]$$

Se puede ver que en aquellos modelos en los que $\sqrt{v} \neq 0$ no puede ser que K_k siga una ley potencial con un exponente igual a -3 $K_k = ck^{-3}$, porque entonces la disipación de la enstrofia potencial de acuerdo con 75 va a crecer como k^1 y en consecuencia si la ley potencial es válida para números de onda grandes, la disipación de enstrofia potencial crecería sin límite lo que no estaría compensado por una generación equivalente.

Así si $K = ck^{-\alpha}$ y $\alpha < 4$ esto es sólo posible para un cierto rango, para números de onda muy altos α debe ser mayor que 4 y en efecto esto es lo observado en todos los experimentos donde $\sqrt{v} \neq 0$. (En realidad, ya fué explicado que no es una verdadera ley potencial).

Por otra parte la conservación de la energía en términos estadísticos implica

$$-\frac{\sqrt{v}}{S} \int_S \left\{ (\nabla^2 \psi_1)^2 + (\nabla^2 \psi_3)^2 \right\} ds - \frac{d^2 \sqrt{v}}{S} \int_S (\nabla^2 T) ds + \frac{1}{S} \int_S HT ds = 0$$

como puede ser verificado usando las ecuaciones de energía descriptas en el Capítulo I.

Siguiendo las mismas ideas ya usadas en este capítulo se halla

$$78 \quad \sum_k k^2 K_k + k^2 P_k = \frac{H^w B^w}{2J^2 \sqrt{v}}$$

Intraduciendo la siguiente notación

$$\eta_p^2 = \sum_k \frac{k^2 P_k}{\rho} \quad m_p^2 = \sum_k \frac{[2k^4 + \lambda k^2] P_k}{\rho}$$

$$\eta_k^4 = \sum_k \frac{k^4 K_k}{K}$$

$$\eta_k^2 = \sum_k \frac{k^2 K_k}{K}$$

donde $P \equiv A = \sum_k P_k$; $K = \sum_k K_k$; $A = \frac{2\lambda^2}{J^2}$

y así

$$79. \begin{cases} \eta_p^2 P + \eta_k^2 K = \frac{H^W B^W}{2J^2 J} \\ \eta_p^2 P + \eta_k^4 K = \frac{H^W B^W}{2J^2 J} [\Lambda + W^2] \end{cases}$$

79. puede ser considerado como un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas P y K.

Puesto que $\Lambda = \frac{2\lambda^2}{J^2}$, en el modelo II $\Lambda \approx 70$

Cuando se excita al sistema en los modos más bajos del sistema se puede despreciar W^2 en relación a Λ .

En este caso

$$\frac{P}{K} = \frac{\eta_k^4 - \eta_k^2 \Lambda}{\eta_p^2 \Lambda - \eta_p^2}$$

Según su definición $\eta_p^2 > \Lambda \eta_p^2$

y puesto que P y K son ambos positivos

entonces $\eta_k^2 \Lambda > \eta_k^4$. \square

$$80. \Lambda \sum_k k^2 K_k > \sum_k k^4 K_k$$

Esto es sólo posible si el espectro de K es tal que la mayor parte de la energía cinética se halla en los modos más bajos del espectro.

En efecto si se calcula $(\Lambda k^2 - k^4)$

k	$(\Lambda k^2 - k^4)$
1	69
2	264
3	549
4	864
5	1125
6	1224
7	1029
8	384
9	-391

Se ve que la desigualdad 10 es favorecida si el espectro presenta un máximo entre las ondas. 4 y 7.

Por otra parte, se puede escribir

$$\frac{P}{K} = \frac{\eta_K^2 \Lambda - \eta_K^4}{2 \eta_P^4}$$

donde

$$\eta_P^4 = \sum_k \frac{k^4 P_k}{P}$$

Entonces

$$\sum_k 2 k^4 P_k = \sum_k (\eta_K^2 \Lambda - \eta_K^2) K_k$$

$$\text{o} \quad \sum_k k^4 (P_k + K_k) = \sum_k k^2 \Lambda K_k - k^4 P_k$$

puesto que

$$\text{81.} \quad \sum_k k^4 (P_k + K_k) > 0$$

$$\sum_k \Lambda k^2 K_k > \sum_k k^4 P_k$$

y la misma consideración que para el caso anterior vale en el sentido de que la energía potencial disponible debe ser tal que esté concentrada en las ondas largas para que se cumpla 81.

Si para $P \gg K$, entonces la energía potencial disponible debe estar concentrada aún más en los modos más bajos del espectro. Esto no es tan necesario si $K > P$. Puesto que en general, la energía potencial disponible y la energía cinética en función del número de onda presentan una distribución similar, la última conclusión vale para la energía.

En el experimento realizado con condiciones similares a las aquí requeridas puesto que la alimentación del sistema es hecho en la onda número 1, se puede verificar las anteriores condiciones. Hasta la hora 800, la energía potencial disponible es mayor que la energía cinética y la energía se concentra en la onda más larga del modelo.

Luego K supera a A y lo mismo ocurre con la energía de la onda número 4 con respecto a la de la onda número 1.

En los otros experimentos, el máximo de energía está en $k = 8$ y todos ellos muestran a K un orden de magnitud mayor que A .

Infelizmente el primer caso no tiene precisamente la clase de disipación supuesta en la discusión, pero como ambos $D(K_E)$ y $DD(K_E)$ muestran en general la misma forma para $1 \leq k \leq 10$ excepto por un factor de amplitud, se puede suponer que la anterior discusión se aplica bastante bien a este caso.

CAPITULO VII

CONCLUSIONES

El modelo cuasigeostrófico de dos capas fué usado para tratar de ganar conocimiento acerca de los procesos no lineales y de la forma del espectro de energía y de enstrofia.

La integración numérica del modelo fué hecha usando la computadora CDC 6600 del NCAR, instalada en Boulder, Colorado. En uno de los modelos el flujo zonal fué suprimido y la región de integración se repetía cíclicamente en ambas direcciones.

Los resultados de los experimentos muestran que leyes aproximadamente potenciales son obtenidas en la energía cinética y potencial y en la enstrofia en el rango $10 \leq k \leq 20$, cualquiera sea la clase de disipación y de su intensidad, y del tipo de función de calentamiento.

De cualquier forma, el valor de la pendiente en una representación log-log cambia con la intensidad de la disipación. Una más prolija investigación muestra que cuando $\bar{V} \neq 0$ no se debe esperar una verdadera ley potencial. Por otra parte cuando $\bar{V} = 0$ se encuentra un ajuste casi exacto a la ley potencial aunque el exponente no es precisamente -3 como es predicho por los trabajos teóricos. Se debe reconocer, sin embargo, que los exponentes obtenidos por los experimentos con $\bar{V} = 0$ no son muy distintos de -3 .

Todos los experimentos muestran una cascada de energía cinética hacia las ondas largas desde una región en el medio del espectro. El flujo hacia la pequeña escala es casi nulo comparado con el que se da hacia las ondas más largas. Este comportamiento fué observado aún en el caso en que la excitación es hecha en los modos más bajos del sistema.

La cascada en energía potencial disponible es en general hacia la pequeña escala aún cuando la alimentación del sistema es hecha en el medio del espectro (Vg. $k_1 = 8$)

Ambas cascadas de energía con las direcciones correspondientes fueron observadas también en los estudios con los datos atmosféricos. La cascada en energía cinética es predicha en estudios teóricos de flujos bidimensionales. Se ha mostrado aquí que si esta cascada tiene esa dirección, en el modelo cuasigeostrofico de dos capas la energía potencial disponible debe fluir hacia la pequeña escala.

El hecho que los experimentos reproduzcan los flujos observados de energía conduce a concluir que ellos se deben a la naturaleza cuasigeostrofica y baroclinica de la atmósfera.

El flujo de enstrofia es también como el observado en la atmósfera y en ambos casos difiere de la hipótesis usual de que es constante a través del espacio del número de onda, en la zona en que es esperada una ley potencial.

La conversión de energía $C(A_k, K_k)$ es máxima a la "derecha" del máximo observado en el espectro de energía como debe esperarse de acuerdo a las cascadas en energía cinética y potencial disponible y a la dependencia de la disipación del espectro de energía.

La discusión analítica del modelo establece que la conversión $C(A_k, K_k)$ no puede tener lugar si no se da una simultánea conversión $CA(k/r, l)$.

Esto fué deducida a partir de la conservación de la energía y de la enstrofia potencial. Ambas propiedades pertenecen a un flujo cuasigeostrofico tridimensional sin generación ni disipación de energía.

Esa puede ser la razón de porqué la atmósfera no presenta una solución como la de la célula de Hadley convirtiendo energía potencial disponible en cinética en el flujo zonal. Por lo expuesto en el Capítulo VI esto es solo posible si hay una transferencia $CA(k/r, L)$ la cual dará lugar a la existencia de movimiento turbulento y no lineal tal como el observado.

Se puede concluir que el comportamiento cuasigeostrofico de la atmósfera es una limitación que no permite una solución de Hadley.

Se debe mencionar que la célula de Hadley es importante en la energética de la zona tropical donde precisamente el movimiento no es precisamente cuasigeostrofico.

Se considera que puede ser de interés continuar con simulaciones numéricas como las realizadas en el presente trabajo, especialmente para verificar las hipótesis y conclusiones del trabajo de Charney (1971). Aunque en muchos aspectos, algunos de los experimentos tienen algunos de los requerimientos del trabajo mencionado, no fué conocido por el autor en el momento de realizarse la integraciones numéricas del modelo.

Puede ser de interés, quizás sólo desde el punto de vista académico, cambiar la alimentación del sistema a la onda más corta del sistema y a otras ondas del espectro. Sería de interés observar si las cascadas de energía tal como se dieron en los experimentos permanecen con la misma dirección cuando la alimentación del sistema se hace directamente en la energía cinética, aunque conociendo a priori que esto no tiene relación con la física de la atmósfera.

BIBLIOGRAFIA

- ARAKAWA, - 1966 : Computational desing for long term numerical integrations of the equations of fluid motion;
Two - Dimensional Incompressible Flow. *J. Comp.Physics* 1. 119-143.
- BAER, F - 1972 : An alternate scale representation of atmospheric energy spectra;
J. of Atmos. Science. Vol.29, pp 649 -664.
- BARROS and WIIN-NIELSEN - 1973 : On quasi-geostrophic turbulence: a numerical experiment. The University of Michigan. Technical Report.
- CHARNEY, J.G. - 1948 : On the scale of atmospheric motions. *Geoph. Publ.*17, 1-1
- CHARNEY, J.G. - 1959 : On the general circulation of the atmosphere. Rossby Memorial Volume, The Rockefeller Institute Press.
New York, 178-193.
- CHARNEY, J.G. - 1960 : Integration of the primitive balance equations. Proceedings of the internacional symposium on numerical weather prediction, Tokio 7-13 , 131-152.
- CHARNEY, J.G. - 1971 : Geostrophic turbulence, *Journal of atmospheric Science* Vol. 28, pp 1087-1095.
- CHARNEY, J.G. and ELIASSEN - 1949: A numerical model for predicting the perturbations of the middle latitude westerlies. *Tellus* 1. 38-54.
- CHARNEY and STERN - 1961 : On the stability of internal baroclinic jets in a rotating atmosphere. *J.Atmos.Scu.* 19. 159-172.
- DEROME and AKSEL WIIN-NIELSEN ; The Maintenance of the time-averaged state of the atmosphere. The University of Michigan Technical Repo.
- FJØRTOFT, R. - 1953 : On the changes in the spectral distribution of kinetic energy for the two-dimensional, nondivergent flow.
Tellus. 5. 225-230.
- HALTINER, - 1968 : Numerical weather prediction. John Wiley and Sons. Inc.
- HORN and BRYSON - 1963 : An analysis of the geostrophic kinetic energy spectra of large-scale atmospheric turbulence. *J.Geophys. Res.*68, 1059-1064.
- JULIAN, P., W Washington; L. Hemlvee and C.Ridley 1970 : On the spectral distribution of large-scale atmospheric kinetic energy, *Journal of Atmospheric Science*, Vol. 27. pp 376-387.
- KAO, S.K. - 1968 : Governing equations and spectra for atmospheric motion and transports in frequency, wave-number space. *J. Atmospheric Science* 25, N° 1, 32-38.
- KRAICHNAN, R.H. - 1967 : Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids* 10. 1417-23.

- LEITH, C.E. - 1968a : Diffusion approximation for two-dimensional turbulence. *Physics of Fluids*, Vol. 11, pp 671-673.
- LEITH, C.E. - 1968b : Two-dimensional eddy viscosity coefficients. *Proceedings of the Symposium on Numerical Weather Prediction*, Tokyo, pp 41-44.
- LILLY, D.K. - 1965 : On the computational stability of numerical solutions to the time dependent nonlinear geophysical fluid dynamics problems. *Monthly Weather Review* 93, 11-26.
- LILLY, D.K. - 1969 : Numerical simulation of two-dimensional turbulence, *Physics of Fluids*, Supplement II, Vol. II-240-II-244.
- LORENZ, E.N. 1969 : The predictability of a flow which possesses many scales of motion. *Tellus* 21, 289-307.
- MANABE, S.J. SMAGORINSKY, J.L. HOLLOWAY Jr, and H.M. STONE 1970 : Simulated climatology of a general circulation model with a hydrological cycle. *Mon. Wea. Rev.* 98 No 3, 175-212
- MERILEES, PE and T. WARM - 1972 : The resolution implications of geostrophic turbulence, *Journal of Atmospheric Science*, Vol. 29 pp 900-991
- NECCO, G and MOREL P. : Scale dependence of the 200 mb divergence inferred from EOLE data. *J. of At. Sc.*, 1973
- OORT - 1964 : On estimates of the atmospheric energy cycle. *Mon. Wea. Rev.* 92, No 11, 483-493.
- OGURA, Y. - 1958 : On the isotropy of large-scale disturbances in the upper troposphere. *J. Meteor.* 15 375-382
- PHILLIPS, N.A. - 1954 : Energy transformations and meridional circulations associated with simple baroclinic waves in a two-level, quasi-geostrophic model. *Tellus*, Vol. 6 pp 273-286.
- PHILLIPS, N.A. - 1956 : The general circulation of the atmosphere: a numerical experiment. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, Vol 82, pp 123-164.
- PHILLIPS, - 1963 : Geostrophic Motion, *Rev. Geophys.* 1, 123-176.
- SALTZMAN - 1970 : Large scale atmospheric energetics in the wave number domain, *Reviews of Geophysics and Space Physics* Vol. 8, pp 289-302.
- SALTZMAN, B and A. FLEISHER - 1960 : The modes of release of available potential energy in the atmosphere. *J. Geophys. Res.* 65, 1215-1222.

- SALTZMAN B and TEWELES 1964 : Further statistics on the exchange of kinetic energy between harmonic components of the atmospheric flow. Tellus 16. 432-435.
- STEIMBERG, H.L. 1971 : On power laws and nonlinear cascades in large-scale atmospheric flow, Technical Report 002630-4-T, The University of Michigan.
- STEIMBERG, H.L. , A. WIIN-NIELSEN and C.H. YANG 1971 : On nonlinear cascades in large scale atmospheric flow, Journal of Geophysical Research. Vol. 76, pp 8629-8640.
- WIIN-NIELSEN, A. - 1959 : A Study of Energy Conversion and Meridional Circulation for the Large-Scale Motion in the Atmosphere. Mon. Wea. Rev. 87. 319-332.
- WIIN-NIELSEN, A. - 1967 : On the annual variation and spectral distribution of atmospheric energy. Vol. 19 pp 540-549.
- WIIN-NIELSEN A. - 1968 : On the intensity of the general circulation of the atmosphere, Reviews of Geophysics. Vol. 6. pp 559-579.
- WIIN-NIELSEN, A. - 1972a : A study of power laws in the atmospheric kinetic spectrum using spherical harmonic functions. Meteorologiske Annaler, Vol. 6 pp 107-124.
- WIIN-NIELSEN, A. - 1972b : Simulations of the annual variation of the zonally averaged state of the atmosphere. Geophysiske Publikasjoner. Geophysics, Norvegica. Vol. 28. No 6 pp 1-45.
- YANG. C.H. - 1967 : Nonlinear aspects of the large scale motion in the atmosphere. The University of Michigan. Technical Report 08759-1-T.