

Universidad de Buenos Aires  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

# Biblioteca Digital FCEN-UBA

## Estabilidad de la circulación termohalina bajo perturbaciones atmosféricas

Krepper, Carlos M.

1985

Tesis Doctoral

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Buenos Aires

[www.digital.bl.fcen.uba.ar](http://www.digital.bl.fcen.uba.ar)

Contacto: [digital@bl.fcen.uba.ar](mailto:digital@bl.fcen.uba.ar)

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Fuente / source:

Biblioteca Digital de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
DEPARTAMENTO DE METEOROLOGIA

ESTABILIDAD DE LA CIRCULACION TERMOHALINA  
BAJO PERTURBACIONES ATMOSFERICAS

TESIS SOBRE METEOROLOGIA

Elaborada por el Licenciado CARLOS M. KREPPER  
para acceder al título de Doctor en Ciencias Meteorológicas

Director de Tesis: Doctor CHESTER E. GROSCH, Eminent Professor  
and Samuel L. and Fay M. Slover Professor of Oceanography and  
Computer Science, Old Dominion University.

Codirector de Tesis: Doctor GUSTAVO V. NECCO, Profesor Titular,  
Departamento de Meteorología, Facultad de Ciencias Exactas y  
Naturales, Universidad de Buenos Aires.

- 1895 -  
g.2

Registro 1895

## INDICE

	Pág.
RECONOCIMIENTOS .....	IV
RESUMEN .....	V
LISTA DE LA NOTACION PRINCIPAL UTILIZADA EN EL TEXTO .....	VI
Capítulo	
I INTRODUCCION .....	1
I.1 La intervención de los océanos en los cambios climá- ticos .....	1
I.2 Procesos físicos en el océano .....	3
I.3 Participación relativa de la atmósfera y el océano en el balance global de calor .....	4
I.4 La circulación termohalina .....	5
I.5 Estabilidad en la atmósfera y los océanos .....	7
I.6 Objetivos de la investigación .....	7
II MODELOS TEORICOS DE LA CIRCULACION TERMOHALINA .....	9
II.1 Ecuaciones básicas de la circualción termohalina ....	9
II.2 La ecuación de la presión y las condiciones de con- torno .....	14
II.3 La transformación por similaridad .....	15
II.4 Solución de potencia inversa .....	16
II.5 La solución de Fofonoff .....	19
II.6 Solución exponencial .....	20
II.7 Generalización de la solución por similaridad .....	23
III LA IMPORTANCIA DE LA DIFUSION HORIZONTAL EN LA CIRCULACION TERMOHALINA .....	25
III.1 Dependencia del coeficiente de difusión horizontal turbillonario en el océano con respecto a la esca- la horizontal .....	25

III.2 Magnitud del término de difusión horizontal .....	26
III.3 Soluciones posibles de la circulación termo- halina .....	29
IV EL SISTEMA DE LA PERTURBACION .....	32
IV.1 El orden de magnitud de la perturbación .....	32
IV.2 Los términos de corrección del estado básico .....	45
V ESTABILIDAD DE UN OCEANO BAROTROPICO .....	49
V.1 Océano barotrópico .....	49
V.2 Océano en reposo .....	50
V.3 Océano barotrópico con velocidad zonal .....	53
V.4 Océano barotrópico con velocidad meridional .....	56
V.5 Océano barotrópico con velocidad arbitraria .....	57
V.6 Solución cerca del origen .....	78
V.7 Solución asintótica .....	78
V.8 Estabilidad de un océano barotrópico con flujo de empuje a través de la interface aire-mar .....	86
VI ESTABILIDAD DE UN OCEANO BAROCLINICO .....	90
VI.1 El océano baroclínico .....	90
VI.2 El océano puramente baroclínico .....	91
VI.3 Estabilidad de un océano puramente baroclínico sin flujo de empuje a través de la interface aire-mar.	103
VI.4 Estabilidad de un océano puramente baroclínico con flujo de empuje a través de la interface aire-mar.	104
VI.4.1 Océano puramente baroclínico con $M = M(y)$ .....	105
VI.4.2 Océano puramente baroclínico con $M = \text{cte.}$ .....	109
VI.5 Estabilidad de un océano baroclínico general .....	109
VII RESUMEN Y CONCLUSIONES .....	117
REFERENCIAS .....	126

## RECONOCIMIENTOS

El autor de esta Tesis quiere expresar su más profunda gratitud a varias personas que contribuyeron directa o indirectamente a la realización de este trabajo de investigación. En primer lugar al Dr. Chester E. Grosch no sólo por su dirección y asesoramiento, sino también por sus enseñanzas, consejos y ejemplo. Un especial reconocimiento al Dr. Ronald E. Johnson y Mrs. Roberta Johnson por la cálida amistad, colaboración y atenciones para con el doctorando y su familia. A los entrañables amigos Dr. John C. Ludwick y Mrs. Norah Ludwick por su compañía y asistencia durante estos años en el exterior. A todo el plantel de profesores y personal del Departamento de Oceanografía de Old Dominion University. Un especial agradecimiento al Dr. Rodolfo N. Panzarini, querido amigo y director de estudios del doctorando, quien desde la distancia siempre estuvo presto a solucionar todo tipo de problemas y nunca dejó de brindar consejos útiles y directivas precisas. Al Dr. Gustavo V. Necco, codirector de esta Tesis, por sus oportunos comentarios. Finalmente, es deseo del suscriptor el dedicar este trabajo a su esposa Beatriz, por su ternura, paciencia, sacrificios y estímulo. Sin ella nada de esto podría haberse logrado.

El doctorando.

## RESUMEN

El estudio de la estabilidad hidrodinámica de la circulación termohalina del océano revela que la atmósfera sólo puede perturbar las variables del flujo básico mediante un flujo de empuje a través de la interface aire-mar. Sin embargo tal condición es necesaria pero no suficiente, ya que ciertas restricciones adicionales sobre la forma de la dependencia horizontal de la fluctuación, de origen atmosférico, deben ser satisfechas para que las mismas puedan ser consideradas como perturbaciones. Dichas restricciones dependerán del tipo de flujo básico que está bajo estudio (barotrópico o baroclínico).

Aún cuando las variaciones atmosféricas puedan inducir perturbaciones en la circulación termohalina del océano, nunca podrán inestabilizar el sistema ya que siempre el factor temporal de las mismas representa una atenuación de forma exponencial.

LISTA DE LA NOTACION PRINCIPAL UTILIZADA  
EN EL TEXTO

$\phi$	= latitud
$\phi_0$	= latitud media
$\lambda$	= longitud
$\Omega$	= velocidad angular de la Tierra
$f$	= $2\Omega \sin\phi$ (Parámetro de Coriolis)
$f_0$	= $2\Omega \sin\phi_0$
$g$	= aceleración de la gravedad
$u^*$	= velocidad zonal
$u$	= velocidad zonal en forma adimensional
$v^*$	= velocidad meridional
$v$	= velocidad meridional en forma adimensional
$w^*$	= velocidad vertical
$w$	= velocidad vertical en forma adimensional
$\rho^*$	= densidad del agua de mar
$\rho$	= densidad del agua de mar en forma adimensional
$\alpha^*$	= volumen específico
$\alpha$	= volumen específico en forma adimensional
$p^*$	= presión
$p$	= presión en forma adimensional
$a_0$	= radio terrestre
$L$	= longitud horizontal característica
$\rho_0$	= valor medio de la densidad para el océano

$\rho_a$	= densidad de referencia
$p_a$	= presión de referencia
$\hat{\rho}$	= $\rho - \rho_a$
$\hat{p}$	= $p - p_a$
$\epsilon$	= número de Rossby
$F'$	= $(f_o^2 a_o^2 / gD)$
$\delta q$	= calor específico agregado
$c_p$	= calor específico a presión constante
$v$	= coeficiente de expansión térmica
$s$	= salinidad
$s_a$	= salinidad de referencia
$\hat{s}$	= $s - s_a$
$\beta$	= $(-1/\rho_a) (\partial\rho/\partial T)_{p,s}$
$k$	= $(1/\rho_a) (\partial\rho/\partial p)_{T,s}$
$\gamma$	= $(1/\rho_a) (\partial\rho/\partial s)_{p,T}$
$T$	= temperatura
$K_V$	= coeficiente de difusión vertical turbillionario
$K_H$	= coeficiente de difusión horizontal turbillionario
$K'$	= $(K_V a_o / UD^2)$
$K\#$	= $(K_V L / UD^2)$
$\$$	= entropía específica
$D$	= longitud vertical característica
$U$	= velocidad horizontal característica
$r^*$	= vector posición
$\vec{\tau}$	= esfuerzo del viento



- $\tau$  = escala temporal de la perturbación  
 $\vec{k}$  = vector unitario en la dirección z (0,0,1)  
 $O(\ )$  = orden de magnitud  
 $\mu$  = coeficiente de compresibilidad del agua de mar  
 $\sigma_T$  =  $10^3(\rho^*(s,T,0)-1)$   
 $\theta$  = temperatura potencial  
 $\Delta T_A$  = corrección adiabática de la temperatura  
 $\delta$  = (D/L)  
 $u, v, w, p$  = variables de la perturbación  
 $u_0, v_0, w_0$  = variables del flujo básico  
 $A(\phi, \lambda)$  o  $A(x, y)$  = modo barotrópico de la circulación termohalina  
 $M(\phi, \lambda)$  o  $M(x, y)$  = modo baroclínico de la circulación termohalina  
 $w^*, \xi, \Gamma, \Psi, E$  = variables auxiliares (Capítulo V)  
 $Z_\nu(x)$  = función cilíndrica  
 $J_\nu(x)$  = función de Bessel de primera clase y orden  $\nu$   
 $Y_\nu(x)$  = función de Bessel de segunda clase y orden  $\nu$   
 $c_1, c_2, C_1, C_2, \dots$  = constantes  
 $\gamma_1^2, \delta_1^*, \gamma_2^2, \gamma^2$   
 $\gamma^2$  = autovalores  
 $g(y), F(y), G(y)$  = funciones auxiliares (Capítulo V)  
 $m, j$  = modos normales  
 $\Delta T, \Delta s$  = desviaciones de la temperatura y la salinidad  
 $F_T$  = flujo térmico del empuje  
 $F_s$  = flujo halino del empuje

- $F_H = F_T + F_S =$  flujo total del empuje  
 $R_\rho =$  cociente másico del empuje  
 $A_i(x), B_i(x) =$  funciones de Airy  
 $\nabla_H =$  gradiente horizontal  $= [(\partial/\partial x), (\partial/\partial y), 0]$   
 $X_2(x), f(x),$   
 $Z(x), \dots =$  funciones auxiliares (Capítulo VI)  
 $\vec{e}_2 =$  vector unitario en la dirección  $y$   $(0, 1, 0)$   
 $a_1 = [(1 - 2\sin^2\phi_0) / (\sin\phi_0 \cos\phi_0)] (L/a_0)$   
 $b_1 = \cot\phi_0 (L/a_0)$   
 $c_1 = \tan\phi_0 (L/a_0)$   
 $a = -(c/\sin\phi_0)$   
 $b = -i\beta\epsilon^{-1}/K\#$   
 $\lambda^2 = [(c/\sin\phi_0)^2 + 4i\beta\epsilon^{-1}/K\#]$   
 $\alpha_1 = -(a/2) + \lambda^2$   
 $\alpha_2 = -(a/2) - \lambda^2$   
 $\beta =$  modo normal temporal
- } (Capítulo VI)

## Capítulo I

### INTRODUCCION

#### I.1 La intervención de los océanos en los cambios climáticos

Se ha podido apreciar que los océanos desarrollan un papel prominente en la determinación del clima mediante procesos a gran escala en la interface aire-mar que gobiernan los intercambios de calor, humedad y cantidad de movimiento, en adición con el transporte calórico. Mientras estas condiciones son determinadas mutuamente por la atmósfera y el océano, hay otras dominadas exclusivamente por este último al menos en las escalas climáticas de tiempo más prolongadas (US Committe for GARP, 1975).

Las altas inercias térmica y mecánica del océano requieren tomar en cuenta consideraciones especiales sobre la intervención de los océanos en los cambios climáticos. Pequeños cambios en la temperatura media oceánica sobre largas extensiones, podrían introducir severas modificaciones en el balance calórico de la atmósfera sobre el mar (Rasool and Hogan, 1969). Por ejemplo, las variaciones en la distribución global del hielo flotante poseen un efecto significativo sobre el calentamiento neto de la atmósfera (en virtud del control que ejerce el hielo sobre el balance calórico), y consecuentemente pueden cambiar los gradientes térmicos meridionales que inducen las circulaciones atmosféricas y oceánicas. Se ha visto que la variación en el comportamiento del hielo a flote en el hemisferio norte, que durante el invierno cubre alrededor de un 10% de la superficie oceánica, tiene algunas correlaciones con diferentes índices de cambios climáticos. La extensión de dicho pack varía notablemente no sólo a lo largo del período anual sino también de un año a otro. En particular cuando el pack se contrae, la trayectoria de las tormentas se desplazan hacia el norte y las isohietas en latitudes medias se corren hacia el este (Fletcher, 1968). En el hemisferio sur la variación anual del área cubierta por hielo es seis veces mayor que en el Artico. La magnitud relativa de las variaciones de un año a otro y las de largo período del pack Antártico pueden ser consecuentemente mayores, pero existe muy escasa información al respecto. El hecho más significativo de la variación mensual es que los mayores cambios en la extensión del hielo ocurren du-

rante diciembre, cuando la radiación solar es máxima (Ackley, 1979). Bajo la suposición que el pack de hielo absorbe únicamente un 45% de la radiación incidente, mientras que el océano libre de hielos absorbe un 90%, se puede prever que la influencia de anomalías estacionales en la extensión del hielo sobre el océano es enorme (Fletcher, 1968). Un cambio igualmente significativo puede ser introducido por la dispersión de variaciones en la salinidad, como consecuencia de la fusión del hielo.

La salinidad de las aguas superficiales está íntimamente relacionada con la formación de densas aguas de fondo, especialmente en el océano austral, las que se hunden y dispersan llenando el total de las cuencas oceánicas del mundo (Gordon, 1971a-b). Tal proceso puede actuar como control del sistema climático, con escalas temporales que van desde fracciones a miles de años.

El gran número de grados de libertad del sistema océano-atmósfera facilita la existencia de un sinnúmero de posible mecanismos de realimentación dentro del océano y de la atmósfera, como así también entre ambos. Algunos de los efectos de realimentación más prominentes operan en medio de procesos de cambios climáticos de corto período, especialmente aquellos relacionados con el balance de radiación sobre tierra y el balance energético sobre el océano. Bryan (1969), Wetherald y Manabe (1972), Manabe y otros (1975) y Bryan y otros (1975) han mostrado que con el acoplamiento de un modelo oceánico tridimensional y uno de circulación general para la atmósfera, se puede lograr una buena simulación del clima presente en nuestros días. En general el problema principal con estos modelos ha sido la gran disparidad de escalas temporales entre la respuesta de la atmósfera (un año) y la de la circulación abisal (500-100 años), lo que implica que será necesario un tiempo de computación adicional excesivo para lograr el equilibrio oceánico. Sin embargo, Gill y Niiler (1973) han mostrado que para escalas temporales que van desde días a un par de años y fuera de las aguas ecuatoriales, los cambios en la temperatura superficial están determinados primordialmente por variaciones locales del calor y la energía mecánica, más que por procesos advectivos. Como consecuencia de ello varios modelos han sido desarrollados dependiendo fundamentalmente de alguna simulación realista de la dinámica de la capa de mezcla oceánica sobre un ciclo estacional, utilizando para ello las ideas de Kraus y Turner (1967) sobre la termoclina estacional.

Al describir el ciclo anual de la temperatura superficial del mar estos modelos producen pobres resultados. Webster and Lau (1977) han mostrado que es necesario incluir una circulación termohalina simple para remover el exceso de calor de la capa de mezcla en las regiones tropicales y evitar temperaturas superficiales artificialmente elevadas. Estos autores han desarrollado un simple modelo fenomenológico, donde incluyen un acoplamiento exitoso entre un océano con una capa de mezcla advectiva y un modelo atmosférico en ecuaciones primitivas.

## I.2 Procesos físicos en el océano

Más de la mitad de la radiación solar que alcanza la superficie de la tierra es absorbida por el mar y convertida en energía interna. Esta radiación solar, conjuntamente con el esfuerzo del viento en superficie, es la fuente principal de energía para una variedad de procesos físicos en el océano, cuya importancia es esencialmente una función de sus escalas temporales. La atmósfera es parcialmente transparente a la radiación solar como consecuencia de procesos de absorción, dispersión y reflexión (Liou, 1980). La cantidad de radiación que alcanza al mar, especialmente en la banda del infrarrojo entre los 0.7 y 3.0  $\mu\text{m}$ , es suficiente para producir un calentamiento. La absorción de radiación solar es responsable de la existencia de una capa de mezcla superficial cálida de unos  $10^2$  m. de profundidad, que puede ser encontrada sobre la mayoría de los océanos del mundo. Esta capa superficial y cálida representa un gran reservorio de calor que actúa como un moderador termodinámico sobre la dinámica de la atmósfera. El coeficiente de absorción para el agua pura es una función de la longitud de onda, con valores bajos en la región visible del espectro y extremadamente altos en el infrarrojo (Irvine and Pollack, 1968). En consecuencia la radiación visible penetrará hasta profundidades del orden de los 100 m., mientras que la banda del infrarrojo es absorbida en los primeros 15 micrones (Grosch y otros, 1973).

Parte del calor que alcanza la superficie del mar es transformado en flujos de calor sensible y latente, emitido en forma de radiación de onda larga, almacenado en la capa superficial y trasladado horizontal y verticalmente mediante varios procesos dinámicos y termodinámicos.

### I.3 Participación relativa de la atmósfera y el océano en el balance global de calor

La forma en que el calor es distribuido por la atmósfera y el océano no es simple. Los trópicos, en general, son la región de suministro de energía para la circulación global. La ganancia neta de calor radiativo que se produce en la atmósfera debe ser redistribuida hacia latitudes más altas. Sobre los continentes el transporte de calor puede ser efectuado sólo por la atmósfera, mientras que en las vastas áreas oceánicas la atmósfera e hidrósfera cooperan en exportar calor a otras partes del globo.

La partición entre el calor transportado por la atmósfera versus el transportado por el océano tiene un interés fundamental en el balance energético global (Hastenrath, 1980). La interacción a gran escala entre aire y mar ha sido objeto de una larga serie de trabajos durante los últimos quince años (Vonder Haar y Oort, 1973; Oort y Vonder Haar, 1976; Hastenrath, 1977a,b; Stepanov y Gritsenko, 1980; Hastenrath, 1980; Bunker, 1980 y Lamb y Bunker, 1982 entre otros). Todos estos trabajos utilizan datos climatológicos para el cálculo de los flujos aire-mar, siendo éste un factor crítico sobre los océanos, en especial en el hemisferio sur. Desde un punto de vista estrictamente meteorológico, las extensas áreas oceánicas representan un factor moderador para el comportamiento de la atmósfera (Trenberth y van Loon, 1981; Necco, 1982). A partir de consideraciones cualitativas se había supuesto que el flujo de energía efectuado por los océanos hacia los polos era pequeño en comparación con el transporte de calor a través de la atmósfera (Sverdrup y otros, 1942). Jung (1952) utilizando un modelo hipotético y muy simple para la circulación oceánica, ha estimado que el transporte meridional de calor hacia el polo a una latitud de  $30^{\circ}\text{N}$  es de alrededor de  $10^{15}\text{g-cal sec}^{-1}$ , y sugirió que la importancia de tal circulación meridional no puede ser descartada en los cálculos del balance global de energía. Seller (1965) y Vonder Haar y Oort (1973) han estimado en forma indirecta el flujo meridional de calor medio anual en los océanos a partir de datos atmosféricos, como diferencia entre el calentamiento radiativo neto y el transporte de energía por la atmósfera. Estudios similares fueron realizados por otros autores (Bryan, 1962; Oort y Vonder Haar, 1976; Trenberth, 1979 y

Hastenrath, 1980), pero la pobre densidad de datos en algunas áreas oceánica, los cortos períodos de observación y la diversidad de fuentes de los registros y técnicas de análisis, conspiran en contra de la confiabilidad de los resultados. La consecuencia lógica de lo expuesto sería el utilizar modelos oceánicos, pero al presente sólo fueron publicados unos pocos trabajos en los que se utilizan grandes simplificaciones (Jung, 1952; Bennet, 1978; Georgi y Toole, 1981 y Szoeké y Levine, 1981) y en ninguno de los cuales se emplea una descripción física completa de la circulación termohalina.

#### I.4 La circulación termohalina

La circulación generada por procesos que afectan directamente la temperatura y salinidad en superficie es denominada la circulación termohalina. Los procesos térmicos, es decir el calentamiento y enfriamiento de las aguas oceánicas, son los principales responsables de tal circulación.

Generalmente hablando, las variaciones de salinidad en el agua de mar producen una contribución pequeña a la circulación termohalina en comparación con los procesos térmicos. Incrementos (disminuciones) en la densidad superficial por enfriamiento (calentamiento) y salinización (desalinización) generan fuerzas de empuje que causan un hundimiento (surgencia) de las aguas, creando en consecuencia el primer movimiento de la circulación termohalina

A diferencia de la atmósfera el mar es calentado desde arriba y su temperatura decrece con la profundidad. Por lo tanto su estratificación térmica es generalmente sumamente estable. Debido a la mezcla relativamente intensa, la capa superficial del mar, de unos 100 m. de espesor, resulta cuasi-homogénea.

Los océanos difieren muy levemente en los valores de su salinidad. En las regiones polares, la salinidad se incrementa con la profundidad como resultado de que las aguas con mayor contenido salino resultan más densas que las aguas superficiales más diluídas. Sin embargo, la densidad del agua es fundamentalmente controlada por la temperatura y la estabilidad permite la formación de capas locales de bajo contenido salino.

Utilizando la aproximación de Boussinesq, podemos escribir las ecuaciones para el océano en forma adimensional (Pedlosky, 1979) en términos de coordenadas esféricas  $\lambda$  (longitud),  $\phi$  (latitud) y  $z$  (vertical).

$$(I.4-1) \quad v(f/f_0) = (L/a_0 \cos\phi) (\partial p / \partial \lambda)$$

$$(I.4-2) \quad u(f/f_0) = -(L/a_0) (\partial p / \partial \phi)$$

$$(I.4-3) \quad (1/\cos\phi) \{ (\partial u / \partial \lambda) + (\partial (v \cos\phi) / \partial \phi) + (\partial w / \partial z) \} = 0$$

$$(I.4-4) \quad - (\partial p / \partial z) = \rho \quad \text{or} \quad g\alpha T = (\partial p / \partial z)$$

$$(I.4-5) \quad \begin{aligned} & (u/\cos\phi) (\partial \rho / \partial \lambda) + v (\partial \rho / \partial \phi) + w (\partial \rho / \partial z) \\ & = (K_v a_0 / D^2 U) (\partial^2 \rho / \partial z^2) \end{aligned}$$

$f = 2\Omega \sin\phi$	parámetro de Coriolis	$T$	temperatura
$f_0 = 2\Omega \sin\phi_0$		$p$	presión
$\phi$	latitud	$\rho$	densidad
$\phi_0$	latitud media	$\alpha$	volumen específico
$\phi$	velocidad angular de la Tierra	$K_v$	coeficiente de difusión vertical turbilionario
$g$	aceleración gravitatoria	$U$	velocidad horizontal característica
$L$	longitud horizontal característica	$u, v$	componentes zonal y meridional de la velocidad
$D$	profundidad característica		
$a_0$	radio terrestre		
$w$	componente vertical de la velocidad		

Hasta el momento no se ha podido encontrar una solución general para el sistema (I.4-1,5). Sin embargo, mediante la transformación por similitud propuesta por Robinson y Welander (1963) y posteriormente generalizada por Kozlov (1966) es posible obtener soluciones particulares. El problema está descrito en términos de un balance geostrófico e hidrostático con la difusión turbilionaria vertical incorporada dentro de la



ecuación para la densidad. No obstante no está aún muy claro el papel que desempeña la difusión turbillona horizontal en la circulación termohalina (Monin, 1973).

### I.5 Estabilidad en la atmósfera y los océanos

La existencia de fluctuaciones en la circulación atmosférica y oceánica pueden ser atribuidas a la inestabilidad de la dinámica del estado básico. Estas pequeñas perturbaciones están presentes inevitablemente en cualquier sistema real, pero sus efectos sobre los flujos estables son efímeros. Sin embargo, cuando el estado básico es inestable las fluctuaciones crecerán en amplitud en el espacio y en el tiempo. Las escalas temporales y espaciales están determinadas por la dinámica de la interacción entre la perturbación inicial y el estado original del fluido.

En general el problema de la estabilidad en la atmósfera ha sido desarrollado en profundidad para flujos cuasi-geostroficados a escala sinoptica (Charney y Stern, 1962; Pedlosky, 1964a-b, 1979). El primer trabajo sobre la estabilidad de flujos paralelos fue realizado por Helmholtz (1868). Luego que Rayleigh (1894) escribiera una serie de trabajos fundamentales sobre la estabilidad hidrodinámica, la teoría ya se encontraba perfectamente conformada en los comienzos del siglo. Una amplia gama de problemas ha sido resuelta desde entonces, pues la teoría ha sido extendida a fluidos viscosos y las aplicaciones de la misma son muy numerosas (Watson, 1960; Drazin y Howard, 1966; Lin, 1966; Killworth, 1980; Drazin y Reid, 1981 y Weinstein, 1981 entre otros). Algunos autores han extendido estos estudios al caso de la inestabilidad baroclínica en corrientes oceánicas y flujos turbulentos en mar abierto (Crlanski y Cox, 1973; Killworth, 1981). Sin embargo al presente el problema tridimensional de la estabilidad de la circulación termohalina permanece sin resolver.

### I.6 Objetivos de la investigación

Hemos mencionado la intervención prominente de la circulación termohalina en la descripción del comportamiento del océano bajo la influencia atmosférica, como así también en el acoplamiento océano-atmósfera en

los modelos de simulación climática. Es evidente que la posibilidad de utilizar expresiones analíticas para los campos de presión, velocidad y temperatura en el mar, como funciones de la latitud, longitud y profundidad, en lugar de un conjunto completo de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, representa una inmensa simplificación del problema cuando tratamos de estudiar el sistema océano-atmósfera mediante modelos matemáticos. Sin embargo, debemos enfatizar que cada una de las soluciones de la circulación termohalina es una solución exacta de las ecuaciones de movimiento para la aproximación geostrófica de un fluido estratificado sobre una esfera y que al presente parecería que no hay forma de probar cual de ellas, si es que existe realmente alguna, es realizable en la naturaleza. Una aproximación posible al problema consiste en estudiar la estabilidad de estos flujos bajo perturbaciones atmosféricas. Está fuera de los propósitos de la investigación el analizar la estabilidad hidrodinámica de las autoperturbaciones del fluido, ya que únicamente estamos interesados en aquellas perturbaciones cuyo origen es atmosférico.

## Capítulo II

## MODELOS TEORICOS DE LA CIRCULACION TERMOHALINA

II.1 Ecuaciones básicas de la circulación termohalina

Las ecuaciones de movimiento en coordenadas esféricas y sin fricción están dadas por

$$(II.1-1) \quad (du^*/dt^*) + (u^*w^*)/r^* - (u^*v^*/r^*) \operatorname{tg}\phi - 2\Omega \sin\phi v^* + 2\Omega \cos\phi w^* = -1/(\rho^*r^*\cos\phi) (\partial p^*/\partial \lambda)$$

$$(II.1-2) \quad (dv^*/dt^*) + (w^*v^*)/r^* + (u^{*2}/r^*) \operatorname{tg}\phi + 2\Omega \sin\phi u^* = -1/(\rho^*r^*) (\partial p^*/\partial \phi)$$

$$(II.1-3) \quad (dw^*/dt^*) - (u^{*2} + v^{*2})/r^* - 2\Omega \cos\phi u^* = -1/\rho^* (\partial p^*/\partial r^*) - g$$

La ecuación de conservación de la masa es

$$(II.1-4) \quad (d\rho^*/dt^*) + \rho^* \{ (\partial w^*/\partial r^*) + 2w^*/r^* + 1/r^* \cos\phi (\partial(v^* \cos\phi)/\partial \phi) + 1/r^* \cos\phi (\partial u^*/\partial \lambda) \} = 0$$

mientras que la ecuación termodinámica simplificada para el océano puede ser escrita como (Pedlosky, 1979)

$$(II.1-5) \quad (\partial \rho^*/\partial t^*) + (u^*/r^* \cos\phi) (\partial \rho^*/\partial \lambda) + (v^*/r^*) (\partial \rho^*/\partial \phi) + w^* (\partial \rho^*/\partial r^*) = K \nabla^2 \rho^*$$

Donde el asterisco (\*) indica las variables dimensionales,  $\phi$  es la latitud,  $\lambda$  la longitud y  $r^*$  el vector posición.

Introduciremos a continuación ciertas "escalas características" a los efectos de poder escribir las ecuaciones en forma adimensional, donde las nuevas variables carecerán del asterisco (Pedlosky, 1979).

$$\begin{aligned}
 u^* &= Uu & \text{Donde } U \text{ es la escala horizontal típica.} \\
 v^* &= Uv & D \text{ es la escala vertical del movimiento.} \\
 w^* &= U(D/a_0)w & a_0 \text{ es el radio terrestre.} \\
 t^* &= (a_0/U)t \\
 p^* &= -\rho_0 g D z + \rho_0^2 U a_0 p \\
 \rho^* &= \rho_0 + \rho_0 (2 U a_0 / g D) \\
 r^* &= a_0 (1 + (D/a_0) z)
 \end{aligned}$$

Las escalas  $U, t, D$ , etc., han sido elegidas bajo la suposición de que las variables adimensionales son del orden de la unidad y que cualquier producto de combinaciones de variables es mensurado por el producto de los factores de escala.

Definiremos el número de Rossby de acuerdo a:

$$(II.1-6) \quad \epsilon = (U / f_0 a_0)$$

y el número  $F'$  según:

$$(II.1-7) \quad F' = (f_0^2 a_0^2 / g D)$$

Los valores típicos de las distintas escalas para el océano son:

$$\begin{aligned}
 U &= O(1 \text{ cm. sec}^{-1}) & a_0 &= O(6 \times 10^8 \text{ cm.}) \\
 D &= O(6 \times 10^5 \text{ cm.}) & F' &= O(10) \\
 D/a_0 &= O(10^{-3}) \\
 \epsilon &= O(10^{-5})
 \end{aligned}$$

Si utilizamos las variables adimensionales, definidas anteriormente, para expresar el sistema (II.1-1,5), obtendremos

$$(II.1-8) \quad \epsilon \{ (du/dt) + (D/r^*) \operatorname{tg} \phi u w + (a_0/r^*) uv \} - \sin \phi v + (D/a_0) \cos \phi w = (-1/\cos \phi (1 + F' \epsilon \rho)) (a_0/r^*) (\partial p / \partial \lambda)$$

$$(II.1-9) \quad \epsilon \{ (dv/dt) + (D/r^*) w v + (a_0/r^*) \operatorname{tg} \phi u^2 \} + \sin \phi u = (-1/(1 + F' \epsilon \rho)) (a_0/r^*) (\partial p / \partial \phi)$$

$$(II.1-10) \quad (1+F'\epsilon\rho) \{ \epsilon (D/a_0)^2 (dw/dt) - (\epsilon D/r^*) (u^2+v^2) - (D/a_0) \cos\phi u = \\ -(\partial p/\partial z) - \rho$$

$$(II.1-11) \quad \epsilon F' (d\rho/dt) + (1+F'\epsilon\rho) \{ (\partial w/\partial z) + (2D/r^*) w + (a_0/r^* \cos\phi) \\ (\partial(v \cos\phi)/\partial\phi) + (a_0/r^* \cos\phi) (\partial u/\partial\lambda) = 0$$

$$(II.1-12) \quad (\partial\rho/\partial t) + (a_0/r^* \cos\phi) u (\partial\rho/\partial\lambda) + (a_0/r^*) v (\partial\rho/\partial\phi) + \\ w (\partial\rho/\partial z) = (K_v a_0/UD^2) (\partial^2\rho/\partial z^2)$$

Entonces tomando unicamente los términos de primer orden,  $O(1)$ , el sistema anterior se reduce a

$$(II.1-13) \quad \sin\phi v = (1/\cos\phi) (\partial p/\partial\lambda)$$

$$(II.1-14) \quad \sin\phi u = -(\partial p/\partial\phi)$$

$$(II.1-15) \quad \rho = -(\partial p/\partial z)$$

$$(II.1-16) \quad (\partial w/\partial z) + (1/\cos\phi) (\partial(v \cos\phi)/\partial\phi) + (1/\cos\phi) (\partial u/\partial\lambda) = 0$$

$$(II.1-17) \quad (\partial\rho/\partial t) + (u/\cos\phi) (\partial\rho/\partial\lambda) + v (\partial\rho/\partial\phi) + w (\partial\rho/\partial z) = \\ (K_v a_0/UD^2) (\partial^2\rho/\partial z^2)$$

Cuando la salinidad ( $s$ ) es una constante conocida, la densidad es unicamente función de la temperatura ( $T$ ) y de la presión ( $p$ ) (Veronis, 1973).

A partir de la primera ley de la termodinámica

$$(II.1-18) \quad \delta q = C_p dT + T \left( \frac{\partial \xi}{\partial p} \right)_T dp$$

donde  $\xi$  es la entropía específica,  $\delta q$  es el calor agregado por unidad de masa y  $C_p$  es el calor específico a presión constante. Si el proceso es adiabático, es decir  $\delta q = 0$ , entonces

$$(II.1-19) \quad \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_\xi = - \left( \frac{T}{C_p} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial p} \right)_T \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) = g \rho \left( \frac{T}{C_p} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial p} \right)_T$$

donde hemos utilizado la ecuación hidrostática (II.1-15). La relación de Maxwell (Batchelor, 1967)

$$(II.1-20) \quad - \left( \frac{\partial \xi}{\partial p} \right)_T = \left( \frac{\partial \alpha}{\partial T} \right)_p \quad (\alpha = \text{volumen específico})$$

puede ser utilizada para transformar la (II.1-19) en

$$(II.1-21) \quad \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_\xi = - \rho g \left( \frac{T}{C_p} \right) \left( \frac{\partial \alpha}{\partial T} \right)_p = -g \nu \left( \frac{T}{C_p} \right)$$

donde  $\nu = (1/\alpha) \left( \frac{\partial \alpha}{\partial T} \right)_p$  es el coeficiente de expansión térmica.

De acuerdo con la aproximación de Boussinesq (Veronis, 1973; Phillips, 1969)

$$(II.1-22) \quad (1/\rho_a) \left( \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial z} \right) = -g \left( \frac{\hat{\rho}}{\rho_a} \right)$$

donde  $\hat{\rho} = \rho - \rho_a$  y  $\hat{p} = p - p_a$ . El subíndice indica las variables del campo adiabático e hidrostático correspondiente a un estado de referencia. En el océano la diferencia entre el estado real y el de referencia es muy pequeña, por lo tanto

$$(II.1-23) \quad \left( \frac{\hat{\rho}}{\rho_a} \right) = (\rho - \rho_a) / \rho_a \ll 1$$

En consecuencia, podemos desarrollar el campo de densidad en serie de potencias

$$(II.1-24) \quad \rho = \rho_a + \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p, S} \hat{T} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T, S} \hat{p} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_{p, T} \hat{S} + \text{T.O.S.}$$

Por lo tanto podemos escribir

$$(II.1-25) \quad (\rho - \rho_a) / \rho_a \approx (\hat{\rho} / \rho_0) = (1 / \rho_a) (\partial \rho / \partial T)_{p, s} \hat{T} + (1 / \rho_a) (\partial \rho / \partial p)_{T, s} \hat{p} \\ + (1 / \rho_a) (\partial \rho / \partial S)_{p, T} \hat{S} + T.O.S.$$

donde  $\rho_0 \approx 1.035$  es el valor medio de la densidad para el océano.

Si definimos

$$\beta = - (1 / \rho_a) (\partial \rho / \partial T)_{p, s} \quad \kappa = (1 / \rho_a) (\partial \rho / \partial p)_{T, s}$$

$$\gamma = (1 / \rho_a) (\partial \rho / \partial S)_{p, T}$$

la (II.1-25) tomará la forma

$$(II.1-26) \quad (\hat{\rho} / \rho_0) = -\beta \hat{T} + \kappa \hat{p} + \gamma \hat{S}$$

Entonces la (II.1-22) puede ser escrita como

$$(II.1-27) \quad (1 / \rho_0) (\partial \hat{p} / \partial z) = \beta g \hat{T} - g \kappa \hat{p} - g \gamma \hat{S}$$

Haciendo un análisis de escala de los distintos términos de esta ecuación obtenemos

$$(\partial p / \partial z) \approx (|p| / D) \approx |p| / 10^{-5}$$

$$\rho_0 = O(1) \quad g = O(10^2)$$

entonces  $g \kappa \hat{p} \approx 10^{-9} |\hat{p}| \ll (|\hat{p}| / D)$  ya que  $\kappa = O(10^{-11})$  (Sverdrup et al., 1942). En consecuencia

$$(1 / \rho_0) (\partial \hat{p} / \partial z) \approx \beta g \hat{T} - g \gamma \hat{S}$$

sin embargo, si suponemos una salinidad constante ( $\hat{S} = 0$ ) (realmente en el océano las variaciones de salinidad son muy pequeñas) obtendremos

$$(II.1-28) \quad (1 / \rho_0) (\partial \hat{p} / \partial z) = \beta g \hat{T}$$

El nuevo sistema de ecuaciones tomará la forma

$$(II.1-29) \quad \sin\phi \ v = (1/\cos\phi) (\partial P/\partial\phi)$$

$$(II.1-30) \quad \sin\phi \ u = -(\partial P/\partial\lambda)$$

$$(II.1-31) \quad g\beta\hat{T} = (\partial P/\partial z)$$

$$(II.1-32) \quad (1/\cos\phi) (\partial u/\partial\lambda) + (1/\cos\phi) (\partial(v\cos\phi)/\partial\phi) + (\partial w/\partial z) = 0$$

$$(II.1-33) \quad (u/\cos\phi) (\partial\hat{T}/\partial\lambda) + v (\partial\hat{T}/\partial\phi) + w (\partial\hat{T}/\partial z) = K' (\partial^2\hat{T}/\partial z^2)$$

donde  $K' = (K_v a_o / UD^2)$ ,  $P = \hat{p} / \rho_o$  y  $g\beta\hat{T} = g\hat{\rho} / \rho_o$  es el término de empuje.

En (II.1-12) y (II.1-33) hemos supuesto que la difusión horizontal del calor es despreciable. Pese a que dicha suposición no es completamente válida, la misma representa una gran simplificación del problema como veremos más adelante.

## II.2 La ecuación de la presión y las condiciones de contorno

A partir de la ecuación (II.1-32) obtenemos

$$(II.2-1) \quad w = \{K' (\partial^2 T/\partial z^2) - (u/\cos\phi) (\partial T/\partial\lambda) - v (\partial T/\partial\phi)\} / (\partial T/\partial z)$$

Sustituyendo este valor de  $w$  dentro de la ecuación de difusión (II.1-33) y escribiendo  $u$ ,  $v$  y  $\hat{T}$  en función de  $P$ , de acuerdo a (II.1-29 hasta 31), luego de algunas sustituciones es posible obtener (Veronis, 1969)

$$(II.2-2) \quad K' \sin\phi \cos\phi \{ (\partial^4 P/\partial z^4) (\partial^2 P/\partial z^2) - (\partial^3 P/\partial z^3)^2 \} = \\ (\partial P/\partial\phi) \{ (\partial^3 P/\partial z^3) (\partial^2 P/\partial z^2) - (\partial^2 P/\partial z^2) (\partial^3 P/\partial z^3) \} \\ + (\partial P/\partial\lambda) \{ (\partial^2 P/\partial\phi\partial z) (\partial^3 P/\partial z^3) - (\partial^3 P/\partial\phi\partial z^2) + \\ \cot\phi (\partial^2 P/\partial z^2) \}$$



Esta es la ecuación que utilizara Needler (1967) en su modelo para la circulación termohalina que resulta algo más complicada que la ecuación-M empleada por Robinson y Welander (1963), donde M era definido por

$$M(\Phi, \lambda, z) = \int_{-\infty}^z dz' \int_{-\infty}^{z'} \rho(\Phi, \lambda, z'') dz'' + C(\Phi, \lambda)$$

La condiciones de contorno para algún nivel P o a lo largo de la superficie del mar serán útiles para fijar la velocidad barotrópica. Otras condiciones de contorno deberán incluir la estructura térmica del fluido o el flujo calórico en la superficie y la velocidad vertical en la base de la capa de Ekman. Esto último es esencialmente el efecto del esfuerzo del viento sobre la superficie del mar (Pedlosky, 1979)

$$(II.2-3) \quad w_e^* = \vec{k} \cdot \text{rotor}(\vec{\tau} / 2\rho_0 \Omega \sin\Phi)$$

donde  $\vec{k}$  es el vector unitario en la dirección z y  $\vec{\tau}$  el esfuerzo del viento.

### II.3 La transformación por similitud

Hasta el presente no ha sido posible obtener una solución general para la ecuación de la presión (II.2-2); sin embargo mediante la transformación por similitud propuesta por Robinson y Welander (1963) y que luego fuera generalizada por Kozlov (1966), es posible obtener soluciones especiales. A pesar de algunas arbitrariedades éstas soluciones pueden resultar muy útiles en la descripción de la circulación termohalina. Si suponemos que

$$(II.3-1) \quad P(\Phi, \lambda, z) = m(\Phi, \lambda) F(\underline{\delta})$$

donde  $\underline{\delta} = f(\Phi, \lambda) z$  y sustituimos la (II.3-1) dentro de la (II.2-2), po-

dremos concluir que solamente existirá solución si

$$(II.3-2) \quad \begin{cases} m(\phi, \lambda) = (\sin \phi)^{2q+2} \{\lambda + E(\phi)\}^{2n+1} \\ f(\phi, \lambda) = (\sin \phi)^q \{\lambda + E(\phi)\}^n \end{cases}$$

Bajo tales condiciones  $F(\delta)$  deberá satisfacer

$$(II.3-3) \quad K' (F^{IV} F^{II} - F^{III} F^{III}) = (2n-q) F F^I F^{III} (2q+1-2n) F F^{II} F^{II} \\ - \delta (2n-q) F^I F^I F^{III} + \delta (3n-q) F^I F^{II} F^{II}$$

donde  $F^{IV} = d^4 F / d\delta^4$ , etc.;  $q$  y  $n$  son números reales y  $E(\phi)$  es una función arbitraria. De esta forma la ecuación diferencial en derivadas parciales y no lineal ha sido reducida a una ecuación diferencial ordinaria.

De acuerdo con Robinson y Welander (1963) podemos escribir la (II.3-3) en la forma

$$(II.3-4) \quad \delta F^I \{ (3n-q) F^{II} F^{II} - (2n-q) F^I F^{III} \} = K' (F^{IV} F^{II} - F^{III} F^{III}) \\ - (2n-q) F F^I F^{III} - (2q+1-2n) F F^{II} F^{II}$$

#### II.4 Solución de potencia inversa

Supongamos que ambos lados de (II.3-4) son cero, entonces

$$(II.4-1) \quad \delta F^I \{ ((3n-q)/(2n-q)) F^{II} F^{II} - F^I F^{III} \} = 0$$

y

$$(II.4-2) \quad K' (F^{IV} F^{II} - F^{III} F^{III}) - (2n-q) F F^{III} - (2q+1-2n) F F^{II} F^{II} = 0$$

En general  $\delta \neq 0$  y una posible solución de (II.4-1) estará dada por  $F^I = 0$ , pero esto significa que  $F = F_0 = \text{constante}$ . En consecuencia

$$(II.4-3) \quad P = F_0^m(\phi, \lambda)$$

correspondiendo a un flujo netamente barotrópico. Si  $F^I \neq 0$ , el término entre llaves en (II.4-1) deberá ser nulo. Esto es

$$(II.4-4) \quad a = \{(3n-q)/(2n-q)\} \quad \text{y} \quad F^I = G$$

consecuentemente, (II.4-1) tomará la forma

$$(II.4-5) \quad a(G^I)^2 - GG^{II} = 0$$

o

$$(II.4-6) \quad d(\lg G^I)/d\delta = a d(\lg G)/d\delta$$

Por lo tanto

$$dG/d\delta = \exp(\xi) G^a \quad \text{con} \quad \xi = \text{constante}$$

o

$$(1/(1-a)) d(G^{1-a})/d\delta = \exp(\xi) d(\delta + \delta_0)/d\delta$$

Esto significa que

$$G = \left\{ \frac{1}{1-a} \exp(\xi) (\delta + \delta_0) \right\}^{1/(1-a)}$$

pero de acuerdo a (II.4-4)

$$\left\{ \frac{1}{1-a} \right\} = -2 + (q/n)$$

En consecuencia

$$G = dF/d\delta = \left\{ \frac{-n}{2n-q} \exp(\xi) \right\}^{(-2+(q/n))} (\delta + \delta_0)^{(-2+(q/n))}$$

o

$$(II.4-7) \quad F = \Psi(\delta + \delta_0)^{(-2+(q/n))} + \text{constante}$$

donde

$$\Psi = \text{constante} = \left\{ 1 / \left( \left( \frac{q}{n} \right) - 1 \right) \left( -n / (2n - q) \right) \exp(\xi) \right\}^{((q/n) - 2)}$$

Como la (II.4-2) debe ser satisfecha por la (II.4-7) podemos obtener las siguientes condiciones

$$(II.4-8) \quad q = n, \quad \Psi = 4K' \quad \text{y la constante en (II.4-7) igual a cero.}$$

Por lo tanto

$$(II.4-9) \quad F = 4K' / (\underline{\delta} + \underline{\delta}_C)^2$$

es una solución.

De acuerdo con la (II.3-2) cuando  $q = -n$

$$m(\Phi, \lambda) = (\sin \Phi)^{(2q+2)} (\lambda + E(\Phi))^{(1-2q)}$$

y la (II.3-1) tomará la forma

$$P(\Phi, \lambda, z) = \left( 4K' / (\underline{\delta} + \underline{\delta}_O)^2 \right) (\sin \Phi)^{(2q+2)} (\lambda + E(\Phi))^{(1-2q)}$$

pero  $\delta = f(\Phi, \lambda) z = z (\sin \Phi)^q (\lambda + E(\Phi))^{-q}$ . Consecuentemente

$$(II.4-10) \quad P(\Phi, \lambda, z) = \sin^2 \Phi (\lambda + E(\Phi)) \left( 4K' / (z + \underline{\delta}_O h^q)^2 \right)$$

donde

$$(II.4-11) \quad h(\Phi, \lambda) = (\lambda + E(\Phi)) / \sin \Phi$$

La (II.4-10) es denominada la solución de potencia inversa e introduciéndola dentro del sistema (II.1-29,33) podemos obtener u, v, w y T como:

$$(II.4-12) \quad u = - \left( 4K' \sin \Phi / (z + \underline{\delta}_O h^q)^3 \right) \left\{ 2h \cos \Phi (z + (q+1) \underline{\delta}_O h^q) + (z - (2q-1) \underline{\delta}_O h^q) dE/d\Phi \right\}$$

$$(II.4-13) \quad v = (4K' \tan \Phi / (z + \delta_0 h^q)^3) (z - (2q-1) \delta_0 h^q)$$

$$(II.4-14) \quad w = -4K' (z + (1-2q) \delta_0 h^q) / (z + \delta_0 h^q)^2$$

$$(II.4-15) \quad \hat{T} = -(8K' / g\alpha) \{ \sin^2 \Phi h / (z + \delta_0 h^q)^3 \} (\lambda + E(\Phi))$$

En particular podemos concluir de la expresión de la temperatura que  $\delta_0 h^q < 0$ , pues de otra forma el denominador en (II.4-15) podría ser nulo para cierta profundidad.

De acuerdo con (II.4-14) la velocidad en la base de la capa de Ekman es

$$(II.4-16) \quad w_e = -(4K' (1-q) / \delta_0 h^q)$$

Por otro lado hemos visto en (II.2-3) (Pedlosky, 1979) que

$$(II.4-17) \quad w_e^* = \vec{k} \cdot \text{rotor}(\vec{\tau} / 2\rho_0 \Omega \sin \Phi)$$

lo que significa que para regiones de anticiclones permanentes (latitudes subtropicales)  $w_e^*$  es negativa. En consecuencia podemos concluir de (II.4-16) que  $q < 1$ .

Las fluctuaciones de la temperatura superficial en el océano,  $T(z=0)$ , decrecen a medida que se incrementa la latitud, motivo por el cual  $q$  debe ser elegido de forma tal que  $q < -2/3$ .

## II.5 La solución de Fofonoff (1962)

Esta solución es un caso particular de la anterior, cuando  $E(\Phi) =$  a una constante y  $\delta_0 = 0$ . Por lo tanto

$$(II.5-1) \quad p = \sin^2 \Phi (4K' / z^2) (\lambda + E)$$

$$(II.5-2) \quad u = -(4K'/z^2) \cos \phi (\lambda + E)$$

$$(II.5-3) \quad v = (4K'/z^2) \tan \phi$$

$$(II.5-4) \quad w = -(4K'/z)$$

$$(II.5-5) \quad \hat{T} = -(4K'/g\alpha) h (\sin^3 \phi / z^3)$$

Del sistema (II.5-1,5) se puede ver que  $P$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  y  $\hat{T}$  divergen en superficie, por lo cual esta solución no resulta muy útil en nuestro problema.

## II.6 Solución exponencial

Supongamos en (II.4-1) y (II.4-2) que  $(3n-q)/(2n-q)=1$ , esto es  $n=0$ . En consecuencia

$$(II.6-1) \quad \delta F^I (F^{II} F^{II} - F^I F^{III}) = 0$$

$$(II.6-2) \quad K' (F^{IV} F^{II} - F^{III} F^{III}) - (2n-q) F F^I F^{III} - (2q+1-2n) F F^{II} F^{II} = 0$$

Suponiendo que  $\delta \neq 0$  y  $F^I \neq 0$ , lo cual implica en (II.6-1)

$$F^{II} F^{II} - F^{III} = 0$$

y en la misma forma que en la Sección II.2 podemos obtener

$$(II.6-3) \quad F = b + d \exp(c\delta)$$

Sin embargo esta solución debe satisfacer la (II.6-2) y esto implica que  $q = -1$ , en consecuencia

$$(II.6-4) \quad F = b + d \exp(cz/\sin \phi)$$

Esta solución es similar a la de Blandford (1965) y el campo de

presión puede ser escrito como

$$(II.6-5) \quad P = (\lambda + E(\phi)) (b + d \exp(cz/\sin\phi))$$

La temperatura puede ser obtenida a partir de P mediante la relación hidrostática (II.1-31)

$$(II.6-6) \quad \hat{T} = \{cd/g\alpha \sin\phi\} (\lambda + E(\phi)) \exp(cz/\sin\phi)$$

Supongamos que T es conocida a  $z = 0$ , esto es

$$(II.6-7) \quad \hat{T}_s = (cd/g\alpha \sin\phi) (\lambda + E(\phi))$$

lo que implica que la (II.1-6) puede ser escrita como

$$(II.6-6') \quad \hat{T} = \hat{T}_s \exp(cz/\sin\phi)$$

Es necesario hacer notar que el término  $(\lambda + E(\phi))/\sin\phi$  es divergente en  $\phi = 0^\circ$ .

Si c es conocida, d puede ser obtenida a partir de la magnitud de  $T_s$ . Utilizando la (II.1-29) obtendremos que

$$(II.6-8) \quad v = \{E(\phi)/\sin\phi \cos\phi\} (b + d \exp(cz/\sin\phi))$$

Esto significa que si conocemos v en la superficie y a cualquier latitud, podemos obtener el valor de b, donde b representa la amplitud del modo barotrópico.

Por otro lado

$$(II.6-9) \quad u = -(1/\sin\phi) \{ (dE/d\phi) (b + d \exp(cz/\sin\phi)) - z (cd/\sin\phi \cos\phi) (\lambda + E(\phi)) \exp(cz/\sin\phi) \}$$

y

$$(II.6-10) \quad w = (K\#c/\sin\phi) + (1/\sin\phi) \{ b(1 + (cz/\sin\phi)) + d \exp(cz/\sin\phi) \}$$

La expresión de la velocidad vertical contiene dos términos, uno de ellos independiente y el otro directamente proporcional a  $K'$ ; lo cual significa que existe solución no nula aún en ausencia de difusión.

En la base de la capa de Ekman, donde la velocidad vertical está especificada como  $w_e$ , podemos obtener a partir de (II.6-10) que:

$$w_e = (K'c/\sin\phi) + (1/\sin\phi)(b+d)$$

Si el bombeo o succión en la capa de Ekman son conocidos, podremos entonces fijar  $K'c$ . La (II.6-10) con  $b=0$  es idéntica a la solución de Blandford (1965). Es importante observar que aún persiste cierta arbitrariedad en el campo de presión como consecuencia de que la función  $E(\phi)$  no ha sido especificada todavía. Este término permite que las componentes meridional y zonal de la velocidad posean cierto grado de libertad como consecuencia de la dependencia de  $u$  y  $v$  con  $E(\phi)$ .

Para grandes profundidades ( $z=-h$ ) el término exponencial será despreciable y la velocidad vertical estará dada por

$$(II.6-11) \quad w_h = (cK'/\sin\phi)$$

donde hemos supuesto que la parte barotrópica del campo de presión es nula ( $b=0$ ).

En general  $w_h$  y  $K'$  no son cantidades observables y por tal motivo la relación (II.6-11) es algunas veces utilizada para determinar  $w_h/K'$  a partir de los datos (Munk, 1966).

Otra forma a partir de la cual  $c$  puede ser encontrada es mediante el flujo de calor a través de la superficie ( $z=0$ ), donde

$$(II.6-12) \quad K'(\partial T/\partial z) \Big|_{z=0} = H$$

De acuerdo a (II.6-6)

$$(\delta T/\delta z) = (c^2 d/g\alpha) \{(\lambda + E(\phi))/\sin^2\} \exp(cz/\sin\phi)$$

de forma tal que



$$(II.6-13) \quad (K'c^2d/g\alpha) \{(\lambda+E(\Phi))/\sin^2\Phi\}=H$$

Ahora  $c$  está determinada por  $K'$ ,  $H$ ,  $d$  y una función arbitraria  $E(\Phi)$  (cuando esta última ha sido especificada).

A partir de la (II.6-11) es fácil ver que el simple efecto del proceso difusivo sobre la solución exponencial es el de requerir una velocidad vertical positiva a grandes profundidades (Veronis, 1969). Más aún la solución presente incluye la de Welander (1959) como un caso especial en procesos no difusivos.

### II.7 Generalización de la solución por similaridad

De acuerdo con Needler (1967) es posible obtener una solución por similaridad más generalizada si

$$(II.1-7) \quad P(\Phi, \lambda, z) = A(\Phi, \lambda) + M(\Phi, \lambda) \exp(z\underline{k}(\Phi, \lambda))$$

Sustituyendo (II.7-1) dentro de (II.2-2) obtenemos que las condiciones para que exista solución no trivial son

$$(II.7-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{\partial k} / \partial \lambda = 0 \\ (\partial A / \partial \lambda) \{(\underline{\partial k} / \partial \Phi) + \underline{k} \cot \Phi\} = 0 \\ (\partial M / \partial \Phi) \{(\underline{\partial k} / \partial \Phi) + \underline{k} \cot \Phi\} = 0 \end{array} \right.$$

Las condiciones (II.7-2) son satisfechas si  $\underline{k}$ ,  $A$  y  $M$  son independientes de  $\Phi$ . Sin embargo en tal caso,  $v=0$  ( $\partial P / \partial \Phi = 0$ ),  $u \neq 0$  pero  $\partial u / \partial \lambda = 0$  y por lo tanto  $\partial w / \partial z = 0$  o  $w = w(\Phi)$ . Esta solución tiene una utilidad muy restringida debido no solamente a las restricciones impuestas sobre las componentes horizontal y vertical de la velocidad, sino también al hecho de no aceptar condiciones de contorno a lo largo de costas meridionales.

Podemos no obstante obtener una solución más útil si las ecuacio-

nes (II.7-2) son satisfechas con  $\underline{k}=c/\sin\phi$  (como en la solución exponencial previa).

Ahora las funciones A y M pueden ser elegidas de forma tal que satisfagan las condiciones de contorno, es decir cierta temperatura superficial o el flujo de calor y la distribución de la velocidad vertical.

En consecuencia la (II.7-1) tomará la forma

$$(II.7-3) \quad P=A(\phi, \lambda)+M(\phi, \lambda) \exp(cz/\sin\phi)$$

A partir de (II.1-29 hasta 33) podemos obtener

$$(II.7-4) \quad u=(-1/\sin\phi) \{ (\partial A/\partial\phi) + ((\partial M/\partial\phi) - M(cz \cot\phi/\sin\phi) \exp(cz/\sin\phi) \}$$

$$(II.7-5) \quad v=(1/\sin\phi \cos\phi) \{ (\partial A/\partial\lambda) + (\partial M/\partial\lambda) \exp(cz/\sin\phi) \}$$

$$(II.7-6) \quad T=(cM/g\sin\phi) \exp(cz/\sin\phi)$$

y

$$(II.7-7) \quad w=(cK'/\sin\phi) + \{ (\partial A/\partial\phi) (\partial M/\partial\lambda) - (\partial A/\partial\lambda) (\partial M/\partial\phi) / cz \cos\phi \} + (1/c \cos\phi) (\partial M/\partial\lambda) \exp(cz/\sin\phi)$$

### Capítulo III

#### LA IMPORTANCIA DE LA DIFUSION HORIZONTAL EN LA CIRCULACION TERMOHALINA

##### III.1 Dependencia del coeficiente de difusión horizontal turbillionario en el océano con respecto a la escala horizontal

El océano puede ser dividido en tres capas de acuerdo a las propiedades de la turbulencia: (1) La capa de mezcla superior, cuyo espesor es de alrededor de 100 m. y la cual se halla en un estado turbillionario como consecuencia de la turbulencia constantemente creada por efectos atmosféricos. (2) La capa interna, que abarca casi la totalidad de la masa oceánica y dentro de la cual sólo existe mezcla turbulenta en regiones aisladas como resultado de la inestabilidad hidrodinámica de las ondas internas. (3) La capa de fondo, con un espesor de aproximadamente 10 m. y características similares a la capa superior de mezcla en lo que respecta al estado turbulento.

La difusión vertical en el océano está caracterizada por un coeficiente turbillionario  $K_v$  que cambia con la profundidad y depende sustancialmente de la estratificación del campo de densidad ( $\partial\rho/\partial z$ ). El orden de magnitud de  $K_v$  es de  $10 \text{ cm}^2 \text{ seg}^{-1}$  en la capa superior de mezcla y de  $1 \text{ cm}^2 \text{ seg}^{-1}$  en las profundidades oceánicas (capa interna) (Veronis, 1969).

El mecanismo de la turbulencia en el mar no ha sido lo suficientemente estudiado y la misma es usualmente representada como el resultado del decaimiento de grandes vórtices en otros más pequeños (Ozmidov, 1959). En este caso se supone que los vórtices en cuestión no son perturbados por cualquier clase de energía de origen externo, mientras que la disipación energética por efectos viscosos se considera despreciable. Sin embargo en los flujos turbillionarios reales existe frecuentemente una influencia directa de energía sobre las áreas oceánicas investigadas; por ejemplo originada por tormentas, fuerzas de marea u olas creadas por el viento. Los vórtices adquirirán esta energía adicional que naturalmente no será gobernada por las leyes aplicables dentro del rango inercial del espectro de la turbulencia (Okubo y Ozmidov, 1970). No obstante es posible suponer que en el océano, a pesar de esta influencia externa de energía, pueden existir regiones aisladas, a escala inercial, separadas por zonas

con una afluencia energética significativa.

Si la difusión horizontal de una mancha de alguna impureza en el océano (una sustancia trazadora) es causada por vórtices dentro del rango inercial, la dependencia del coeficiente de difusión horizontal turbillonario con respecto a la escala  $L$  del fenómeno en cuestión, será descrita por "la ley de la potencia a los  $4/3$  de Richardson" (1926). La ley para la difusión turbillonaria fue descubierta empíricamente por Richardson para la atmósfera, comprobándose que resultaba ser bastante más dificultoso el establecer la dependencia de  $K_H$  con  $L$  para las condiciones oceánicas. Actualmente existe la posibilidad de comprobar la dependencia propuesta para el coeficiente de difusión horizontal con datos obtenidos de experiencias que involucraban la dispersión de manchas de colorantes y otros trazadores en el mar (Okubo, 1962; 1968). Estos experimentos abarcan una amplia gama de rangos de escala, desde aproximadamente los 10 m. hasta valores que exceden los 1000 Km.

De acuerdo con Monin (1973) a partir de una comprobación experimental directa de la "ley de la potencia a los  $4/3$ ",  $K_H \sim \epsilon^{1/3} L^{4/3}$ , y como consecuencia de los datos acumulados en pruebas de difusión hechas en el océano (Okubo y Ozmidov, 1970) fue posible estimar el valor para  $\epsilon^*$  en  $10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ seg}^{-1}$  para las escalas de  $10$ - $10^3$  m. y de  $10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ seg}^{-1}$  en las escalas de  $10$  a  $10^3$  Km. (Ver Figura 1).

### III.2 Magnitud del término de difusión horizontal

Hemos mencionado en la Sección I.3 que el sistema termohalino unicamente considera efectos de difusión vertical; sin embargo debido a que el coeficiente de difusión horizontal turbillonario crece con " $L$ ", de acuerdo a "la ley de la potencia de los  $4/3$ ", no está claro que la suposición anterior sea válida siempre.

La ecuación termodinámica simplificada para el océano está dada por (Pedlosky, 1979):

$$(III.2-1) \quad d\rho^*/dt^* = \kappa \nabla^2 \rho^*$$

( $\kappa$ =difusividad térmica)

donde hemos supuesto que el calentamiento interno ( $Q_i$ ) es despreciable.

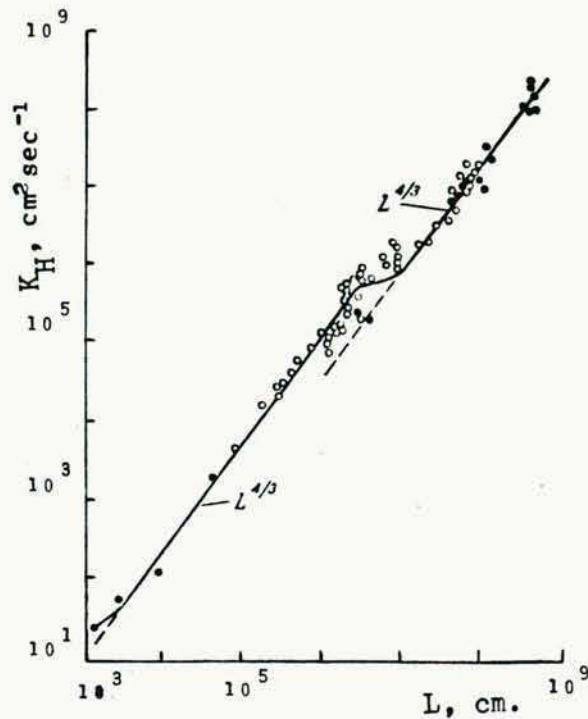


Figura 1. Dependencia del coeficiente de difusión horizontal turbillionario con la escala del fenómeno (Monin, 1973).

Definiremos a continuación variables adimensionales como en la Sección II.1, pero en este caso "L" será utilizada como la escala de la longitud horizontal.

$$\rho^* = \rho_0 (1 + (2\Omega UL/gD) \rho)$$

$$x^* = Lx$$

$$y^* = Ly$$

$$t^* = (L/U) t$$

$$z^* = Dz$$

$$u^* = Uu$$

$$v^* = Uv$$

$$w^* = (D/L) Uw$$

Por lo tanto la (III.2-1) podrá ser escrita como

$$(III.2-2) \quad (U/L) (d\rho/dt) = (K_V/D^2) (\partial^2 \rho / \partial z^2) + K_H \nabla_H^2$$

donde

$$(III.2-3) \quad \nabla_H^2 = (a_O^2 / r^* \cos^2 \Phi) \{ (-\sin \Phi / \cos \Phi) (\partial / \partial \Phi) + (\partial^2 / \partial \Phi^2) + (1 / \cos^2 \Phi) (\partial^2 / \partial \lambda^2) \} = (a_O^2 / r^* \cos^2 \Phi) \nabla_h^2$$

En consecuencia la (III.2-2) tomará la forma

$$(III.2-4) \quad (d\rho/dt) = (K_V L / U D^2) (\partial^2 \rho / \partial z^2) + (K_H L / a_O^2 U) \nabla_h^2$$

El orden de magnitud de  $(K_V L / U D^2)$  es de  $10^{-10} L$ , mientras que  $(K_H L / a_O^2 U) \approx 10^{-18} \epsilon^{1/3} L^{7/3}$ ; donde hemos supuesto que  $K_V \approx 1 \text{ cm}^2 \text{ seg}^{-1}$ . De donde se desprende que

$$(III.2-5) \quad \{ (K_H L / a_O^2 U) / (K_V L / U D^2) \} = O(10^{-8} \epsilon^{1/3} L^{4/3})$$

La ecuación (III.2-5) nos permite definir tres regiones específicas, de acuerdo al orden de magnitud de "L".

Región I: Que corresponde a una escala horizontal  $10^3 \text{ cm} < L < 3 \times 10^7 \text{ cm}$ ., donde  $(K_H L / a_O^2 U) \ll (K_V L / U D^2)$ . En consecuencia el sistema termohalino (II.1-13,17) puede ser utilizado perfectamente en esta región

Región II: Correspondiente a escalas horizontales  $3 \times 10^7 \text{ cm} \leq L < 10^8 \text{ cm}$ ., donde  $(K_H L / a_O^2 U)$  y  $(K_V L / U D^2)$  tienen el mismo orden de magnitud. Por lo tanto la difusión vertical y la horizontal deben estar presentes en la ecuación (II.1-17).

Región III: Correspondiente a escalas horizontales  $L > 10^8 \text{ cm}$ ., donde

$(K_H L / a_O^2 U) \ll (K_V L / U D^2)$ . En consecuencia únicamente el término de difusión horizontal debe estar presente en la ecuación (II.1-17).

### III.3 Soluciones posibles de la circulación termohalina

Supongamos que  $L \approx 0(a_0)$  (escala planetaria), esto significa que estamos trabajando dentro de la Región III. En consecuencia el sistema (II.1-13,17) tomará la forma

$$(III.3-1) \quad \sin\phi \ v = (1/\cos\phi) (\partial p/\partial \lambda)$$

$$(III.3-2) \quad \sin\phi \ u = -(\partial p/\partial \phi)$$

$$(III.3-3) \quad \rho = -(\partial p/\partial z) \quad \text{o} \quad T = (1/g\alpha) (\partial p/\partial z)$$

$$(III.3-4) \quad (\partial w/\partial z) + (1/\cos\phi) (\partial(v \cos\phi)/\partial \phi) + (1/\cos\phi) (\partial u/\partial \lambda) = 0$$

$$(III.3-5) \quad (u/\cos\phi) (\partial \rho/\partial \lambda) + v (\partial \rho/\partial \phi) + w (\partial \rho/\partial z) = \\ (K_H/Ua_0) \{ (\partial^2 \rho/\partial \phi^2) - (\sin\phi/\cos\phi) (\partial \rho/\partial \phi) + \\ + (1/\cos^2\phi) (\partial^2 \rho/\partial \lambda^2) \}$$

Utilizando (III.3-2) y (III.3-1) podremos escribir la (III.3-4) en la forma siguiente

$$(III.3-6) \quad (\partial w/\partial z) - (1/\sin^2\phi) (\partial p/\partial \lambda) = 0$$

Mientras que a partir de (III.3-5) tenemos que

$$(III.3-7) \quad w = [ (K_H/Ua_0) [ (\partial^2 \rho/\partial \phi^2) - (\sin\phi/\cos\phi) (\partial \rho/\partial \phi) + (1/\cos^2\phi) \\ (\partial^2 \rho/\partial \lambda^2) ] - (u/\cos\phi) (\partial \rho/\partial \lambda) - v (\partial \rho/\partial \phi) ] / (\partial \rho/\partial z)$$

Por lo tanto la (III.3-6) tomará la forma

$$(III.3-8)$$

$$K \# \sin\phi \cos\phi [ (\partial^4 p/\partial \phi^2 \partial z^2) (\partial^2 p/\partial z^2) - (\partial^3 p/\partial \phi^2 \partial z) (\partial^3 p/\partial z^3) \\ + (\sin\phi/\cos\phi) [ (\partial^2 p/\partial z \partial \phi) (\partial^3 p/\partial z^3) - (\partial^3 p/\partial z^2 \partial \phi) (\partial^2 p/\partial z^2) ] \\ + (1/\cos^2\phi) [ (\partial^4 p/\partial z^2 \partial \lambda^2) (\partial^2 p/\partial z^2) - (\partial^3 p/\partial z \partial \lambda^2) (\partial^3 p/\partial z^3) ] ]$$

$$\begin{aligned}
&= (\partial p / \partial \Phi) [(\partial^2 p / \partial z \partial \lambda) (\partial^3 p / \partial z^3) - (\partial^3 p / \partial z^2 \partial \lambda) (\partial^2 p / \partial z^2)] + \\
&(\partial p / \partial \lambda) [(\partial^3 p / \partial z^2 \partial \Phi) (\partial^2 p / \partial z^2) - (\partial^2 p / \partial z \partial \Phi) (\partial^3 p / \partial z^3)] + \\
&\cot \Phi (\partial^2 p / \partial z^2) (\partial p / \partial \lambda)
\end{aligned}$$

donde  $K'' = (K_H / U_{a_0})$

Suponiendo que  $v \equiv 0$  (esto significa  $(\partial p / \partial \lambda) = 0$ ) la (III.3-8) adquirirá la forma

(III.3-9)

$$\begin{aligned}
K'' \sin \Phi \cos \Phi [(\partial^4 p / \partial \Phi^2 \partial z^2) (\partial^2 p / \partial z^2) - (\partial^3 p / \partial \Phi^2 \partial z) (\partial^3 p / \partial z^3)] + \\
(\sin \Phi / \cos \Phi) [(\partial^2 p / \partial z \partial \Phi) (\partial^3 p / \partial z^3) - (\partial^3 p / \partial z^2 \partial \Phi) (\partial^2 p / \partial z^2)] = 0
\end{aligned}$$

Estableciendo que

$$(III.3-10) \quad p(\Phi, z) = Z(z) f(\Phi)$$

la (III.3-9) podrá ser escrita como

(III.3-11)

$$\begin{aligned}
(d^2 Z / dz^2)^2 - (dZ / dz) (d^3 Z / dz^3) + (\sin \Phi / \cos \Phi) [(df / d\Phi) / (d^2 f / d\Phi^2)] \\
[(dZ / dz) (d^3 Z / dz^3) - (d^2 Z / dz^2)^2] = 0
\end{aligned}$$

Si la función  $f$  satisface la ecuación

$$(III.3-12) \quad (d^2 f / d\Phi^2) - \tan \Phi (df / d\Phi) = 0$$

la (III.3-11) tendrá la siguiente solución

$$(III.3-13) \quad p(\Phi, z) = a Z(z) \sin \Phi$$

sin restricciones sobre la forma de  $Z(z)$ . En particular si suponemos una forma exponencial para  $Z(z)$ , la solución anterior se convertirá en

$$(III.3-14) \quad p(\Phi, z) = a \exp(bz) \sin \Phi \quad (b > 0)$$

donde  $a$  y  $b$  deberán ser determinados a partir de las condiciones de contor-



no. Otras soluciones de la (III.3-8) podrán ser obtenidas en la misma forma pero bajo diferentes suposiciones.

Si el término de difusión horizontal  $(K_V L/a_O^2 U) \nabla_h^2$  es agregado en el lado derecho de la ecuación (II.1-12) tal como ocurre en la (III.2-2), es decir cuando  $(K_H L/a_O^2 U)$  y  $(K_V L/UD^2)$  tienen el mismo orden de magnitud, el problema se torna intratable mediante el método utilizado. Sin embargo Veronis (1969) ha presentado una solución simple cuando la variación latitudinal ha sido despreciada. De acuerdo con la (III.2-3) esta suposición implica que

$$(III.3-15) \quad (1/\cos^2 \phi) (\partial^2 \rho / \partial \lambda^2) \gg (\partial^2 \rho / \partial \phi^2) - (\sin \phi / \cos \phi) (\partial \rho / \partial \phi)$$

pero esto no es cierto para los campos oceánicos de temperatura, salinidad y densidad (Gordon y Molinelli, 1982). En consecuencia será necesario encontrar otros métodos para resolver el sistema de ecuaciones termohalino dentro de la Región II, definida en la Sección III.2.

## Capítulo IV

## EL SISTEMA DE LA PERTURBACION

IV.1 El orden de magnitud de la perturbación

Como hemos visto en el Capítulo II (Sección II.1) nuestro sistema de ecuaciones en coordenadas esféricas es:

$$(II.1-1) \quad (du^*/dt^*) + (u^*w^*/r^*) - (u^*v^*/r^*) \tan\phi + 2\Omega \cos\phi w^* - 2\Omega \sin\phi v^* = -(1/\rho^* r^* \cos\phi) (\partial p^*/\partial \lambda)$$

$$(II.1-2) \quad (dv^*/dt^*) + (w^*v^*/r^*) + (u^{*2}/r^*) \tan\phi + 2\Omega \sin\phi u^* = (1/\rho^* r^*) (\partial p^*/\partial \phi)$$

$$(II.1-3) \quad (dw^*/dt^*) - (u^{*2} + v^{*2})/r^* - 2\Omega \cos\phi u^* = -(1/\rho^*) (\partial p^*/\partial r^*) - g$$

$$(II.1-4) \quad (d\rho^*/dt^*) + \rho^* [(\partial w^*/\partial r^*) + (2w^*/r^*) + (1/r^* \cos\phi) (\partial(v^* \cos\phi)/\partial \phi) + (1/r^* \cos\phi) (\partial u^*/\partial \lambda)] = 0$$

$$(II.1-5) \quad (d\rho^*/dt^*) = K_{\nabla} \nabla_{\nabla}^2$$

donde el operador  $(d/dt^*)$  tiene la forma (Pedlosky, 1979)

$$(IV.1-1) \quad (d/dt^*) = (\partial/\partial t^*) + (u^*/r^* \cos\phi) (\partial/\partial \lambda) + (v^*/r^*) (\partial/\partial \phi) + w^* (\partial/\partial r^*)$$

Supondremos que el movimiento ocurre en latitudes medias, alrededor de una latitud central  $\phi_0$ , y donde definiremos "x" e "y" mediante

$$(IV.1-2) \quad \begin{cases} x^* = a_0 \cos \phi \\ y^* = (\phi - \phi_0) a_0 \end{cases}$$

En consecuencia

$$(IV.1-3) \quad \begin{cases} (\partial/\partial \lambda) = a_0 \cos \phi (\partial/\partial x^*) \\ (\partial/\partial \phi) = a_0 (\partial/\partial y^*) \end{cases}$$

Resulta también conveniente el introducir

$$(IV.1-4) \quad z^* = r^* - a_0 \quad \text{tal que} \quad (\partial/\partial r^*) = (\partial/\partial z^*)$$

La existencia de escalas características, como fuera mencionado en el Capítulo III, nos permite introducir las correspondientes variables adimensionales, es decir

$$(IV.1-5) \quad \begin{cases} x^* = Lx \\ y^* = Ly \\ z^* = Dz \end{cases}$$

y

$$(IV.1-6) \quad t^* = (L/U)t$$

De la misma forma tendremos para las componentes horizontales de la velocidad

$$(IV.1-6') \quad \begin{cases} u^* = Uu \\ v^* = Uv \end{cases}$$

Ciertas consideraciones geométricas implican que si la escala vertical de movimiento es  $D$  mientras que la horizontal es  $L$ , la pendiente correspondiente a la trayectoria de un elemento del fluido no excederá el valor  $(D/L)$ , de forma tal que la escala para  $w^*$  será

$$(IV.1-7) \quad w^* = (D/L)Uw$$

En realidad la verdadera escala para  $w^*$  podría ser menor que  $(DU/L)$  si se toman en cuenta algunas restricciones dinámicas sobre el movimiento vertical. Por lo tanto, la escala (IV.1-7) debe ser considerada como un límite superior de  $w^*$ .

Las correspondientes escalas para los campos de presión y densidad fueron utilizadas en el Capítulo anterior, pero en ningún momento se hizo referencia a la forma en que las mismas fueron obtenidas. Si las velocidades relativas son pequeñas, los campos de presión se apartarán levemente de los valores correspondientes al estado en reposo y a partir de la (II.1-3) obtendremos que

$$(IV.1-8) \quad -(\partial p_s^* / \partial r^*) = g \rho_s^*$$

y

$$(IV.1-9) \quad \begin{cases} p^* = p_s^* + \hat{p}^*(\Phi, \lambda, z, t) \\ \rho^* = \rho_s^* + \hat{\rho}^*(\Phi, \lambda, z, t) \end{cases}$$

donde el subíndice "s" implica el estado en reposo.

De acuerdo con las ecuaciones (II.1-1) y (II.1-2),  $(\partial p_s^* / \partial \Phi) = 0 = (\partial p_s^* / \partial \lambda)$  y  $(\partial \rho_s^* / \partial \Phi) = (\partial \rho_s^* / \partial \lambda) = 0$ . Entonces  $\rho_s^*$  será una función de  $z$  o constante, lo mismo que  $p_s^*$ . La densidad ha sido dividida entre un valor  $\rho_s^*$  y un término residual  $\hat{\rho}^*(\Phi, \lambda, z, t)$  que describe la variación completa del campo de densidad en el espacio y en el tiempo.

En este punto de la discusión podríamos preguntarnos: Cuál es el significado de  $\rho_s^*$ ? Este valor corresponde a la densidad en equilibrio termodinámico (en ausencia de movimiento y difusión).

Ahora es necesario hacer ciertas consideraciones acerca de  $\rho_s^*$ . Supongamos un océano isotérmico e isohalino en equilibrio dinámico. La densidad (o el volumen específico) del agua de mar es una función de la temperatura, salinidad y presión; pudiéndose escribir la ecuación de estado en una forma general como sigue:

$$(IV.1-10a) \quad f(\rho, s, T, p) = 0$$

o

$$(IV.1-10b) \quad f(\alpha, s, T, p) = 0$$

A partir de la ecuación (IV.1-10b) podemos escribir (Knudsen, 1901)

$$(IV.1-11) \quad \rho^*(s, T, 0) = 1 + 10^{-3} \sigma_T$$

donde

$$\sigma_T = \Sigma_T + (\sigma_O + 0.1324) (1 - A_T + B_T (\sigma_O - 0.1324))$$

$$\Sigma_T = -[(T - 3.98)^2 / 503.57] [(T + 283^\circ) / (T + 67.26^\circ)]$$

$$A_T = T(4.7867 - 0.098185T + 0.0010843T^2) 10^{-3}$$

$$B_T = T(18.03 - 0.8164T + 0.01667T^2) 10^{-6}$$

$$\sigma_O = -0.069 + 1.470 C_1 - 0.00157 C_1^2 + 0.0000039 C_1^3$$

$$s = 0.030 + 1.805 C_1$$

Para obtener la ecuación de estado del agua de mar in situ, la información sobre la relación entre el volumen específico, temperatura y salinidad debe ser completada con una relación con la presión

$$(IV.1-12) \quad \alpha_{s, T, p} = \alpha_{s, T, 0} (1 - \mu p)$$

donde  $\mu$  es el coeficiente de compresibilidad del agua de mar. Estamos interesados en obtener el orden de magnitud de la dependencia de la densidad con la presión. El coeficiente medio de compresibilidad ( $\mu$ ) entre 0 y  $p$  decibares de profundidad está determinado por la fórmula empírica de Ekman (1908)

$$(IV.1-13) \quad 10^9 \mu = m' = [4886 / (1 + 1.83 \cdot 10^{-5} p)] - (227 + 28.33T -$$

$$\begin{aligned}
& 0.551T^2 + 0.004T^3 + 10^{-4}p(105.5 + 9.5T - \\
& 0.158T^2 - 1.5 \cdot 10^{-3}Tp) - (\sigma_0 - 28) [147.3 - 2.72T \\
& - 0.04T^2 - 10^{-4}p(32.4 - 0.87T + 0.02T^2)] / 10 + \\
& 10^{-2}(\sigma_0 - 28)^2 [4.5 - 0.1T - 10^{-4}p(1.8 - 0.06T)]
\end{aligned}$$

Entonces  $\mu = m' 10^{-9} = [(0.4886 \cdot 10^{-5}) / (1 + 1.83 \cdot 10^{-5}p)] + 10^{-9}f(T, p)$

Esto significa que

$$\mu \approx 0(0.4 \cdot 10^{-5} \text{db}^{-1})$$

y

$$(IV.1-14) \quad \alpha_{s, T, 0} = \alpha_{s, T, 0} (1 - \mu p) \approx \alpha_{s, T, 0} (1 - 0(0.4 \cdot 10^{-5} \text{db}^{-1})p)$$

Consideremos el diferencial de la densidad (Mamayev, 1975)

$$(IV.1-15) \quad d\rho^* = (\partial\rho^*/\partial s^*) ds^* + (\partial\rho^*/\partial T^*) dT^* + (\partial\rho^*/\partial p^*) dp^*$$

En el caso de un océano homogéneo y compresible, en el cual tanto la salinidad como la temperatura in situ no cambian con la profundidad; y donde  $T = \theta + \Delta T_A$  es la temperatura,  $\theta$  la temperatura potencial y  $\Delta T_A$  la corrección adiabática de temperatura, la ecuación (IV.1-15) tomará la forma.

$$(IV.1-16) \quad (d\rho^*/dp^*) = (\partial\rho^*/\partial s^*) (ds^*/dp^*) + (\partial\rho^*/\partial T^*) [d(\theta + \Delta T_A)^*/dp^*] + (\partial\rho^*/\partial p^*)$$

Para nuestras condiciones particulares  $(dT^*/dp^*) = (ds^*/dp^*) = 0$ , de donde

$$(IV.1-17) \quad (d\rho^*/dp^*)_{s, T} = (\partial\rho^*/\partial p^*)$$

Este es el gradiente de densidad básico in situ y representa el cambio en la densidad causado unicamente por la compresibilidad del agua de mar; numericamente caracteriza al gradiente de densidad en aquellos procesos en los cuales la temperatura y salinidad no cambian con la profundidad. El valor del gradiente básico de la densidad (Volumen específico) para 1 db. varía entre los límites de  $350 \cdot 10^{-8}$  y  $450 \cdot 10^{-8}$   $\text{gr.cm}^{-3}\text{db}^{-1}$  (es decir  $0(0.4 \cdot 10^{-5})$ ). Nosotros podríamos haber arribado a la misma conclusión a partir de la (IV.1-13) y (IV.1-14). Esto significa que el cambio bórico de la densidad crece con la profundidad y llega a ser importante,  $0(10^{-2})$ , para aguas abisales.

En la ecuación (IV.1-9) hemos incluido los cambios bóricos dentro del término  $\rho^*(\phi, \lambda, z, t)$ .

Llegado a este punto cabe preguntarnos: Cómo podrán ser escaladas  $p^*$  y  $\rho^*$ ? Para los movimientos de nuestro interés el gradiente horizontal de presión será del mismo orden de magnitud que la aceleración de Coriolis, el que para  $\phi_0$  (latitud media) estará dado por

$$\rho^* 2\Omega u^* \sin\phi = 0(2\Omega \sin\phi_0 U \rho_S^*)$$

mientras que la magnitud del gradiente de presión es  $p^*/L$ , entonces

$$p^* = 0(\rho_S^* U L f_0)$$

Estas consideraciones implican que la presión y la densidad pueden ser escritas como

$$(IV.1-18) \quad \begin{cases} p^* = \rho_S^* g D z + \rho_S^* U L f_0 p \\ \rho^* = \rho_S^* (1 + \epsilon F' \rho) \end{cases}$$

donde  $\epsilon = U/(f_0 L)$  es el número de Rossby y  $F' = f_0^2 L^2 / (gD)$ .

En consecuencia el sistema (II.1-1,5) tomará la forma

$$(IV.1-19) \quad \begin{aligned} \epsilon [ (du/dt) + (L/r^*) (\delta u w - u v \tan\phi) ] - (f/f_0) v + \\ \delta (\cos\phi / \sin\phi_0) w = - (1/[r^* \cos\phi (1 + \epsilon F' \rho)]) (\partial p / \partial \lambda) \end{aligned}$$

$$(IV.1-20) \quad \epsilon [ (dv/dt) + (L/r^*) (\delta u w + u^2 \tan\phi) ] + (f/f_0) u =$$

:

$$-(1/r^* [1+\epsilon F' \rho]) (\partial p / \partial \phi)$$

$$(IV.1-21) \quad (1+\epsilon F' \rho) [\epsilon (\delta^2 (dw/dt) - (D/r^*) (u^2+v^2))] - \\ \delta (\cos \phi / \sin \phi) u = -(\partial p / \partial z) - \rho$$

$$(IV.1-22) \quad \epsilon F' (d\rho/dt) [1+\epsilon F' \rho] ((L/r^*) [(1/\cos \phi) (\partial u / \partial \lambda) + \\ (1/\cos \phi) (\partial (\cos \phi v) / \partial \phi) + 2\delta w] + (\partial w / \partial z)) = 0$$

$$(IV.1-23) \quad (\partial \rho / \partial t) + (L/r^*) (u/\cos \phi) (\partial \rho / \partial \lambda) + (L/r^*) v (\partial \rho / \partial \phi) \\ + (L/a_0) w (\partial \rho / \partial z) = (K_v L / UD^2) (\partial^2 \rho / \partial z^2)$$

donde  $\delta = (D/L) \approx 0(6 \cdot 10^{-3})$

En forma adimensional y a  $O(1)$ , el sistema (IV.1-19,23) estará dado por

$$(IV.1-24) \quad (f/f_0) v_0 = (L/a_0 \cos \phi) (\partial p_0 / \partial \lambda)$$

$$(IV.1-25) \quad (f/f_0) u_0 = -(L/a_0) (\partial p_0 / \partial \phi)$$

$$(IV.1-26) \quad (\partial p_0 / \partial z) = -\rho_0$$

$$(IV.1-27) \quad (L/a_0) (1/\cos \phi) [(\partial u_0 / \partial \lambda) + (\partial (\cos \phi v_0) / \partial \phi) + (\partial w_0 / \partial z)] = 0$$

$$(IV.1-28) \quad u_0 (L/a_0 \cos \phi) (\partial \rho_0 / \partial \lambda) + v_0 (L/a_0) (\partial \rho_0 / \partial \phi) + w_0 (\partial \rho_0 / \partial z) = \\ (K_v L / UD^2) (\partial^2 \rho_0 / \partial z^2)$$

Si analizamos detenidamente la ecuación de continuidad (IV.1-27)



podremos concluir que un cambio en la velocidad vertical de  $O(1)$  nunca podrá ser compensado por los otros términos, debido a que  $(L/a_0) \approx O(10^{-1})$ . Cuál es el problema? Evidentemente la escala vertical  $(DU/L)$  no es la más adecuada y deberíamos sustituirla por  $10^{-1}(DU/L)$  o  $(L/a_0)(DU/L)$ .

En consecuencia, el operador  $(d/dt)$  (en forma adimensional) estará dado por

$$(IV.1-29) \quad (d/dt) = (\partial/\partial t) + (L/r^*) [(u/\cos\phi) (\partial/\partial \lambda) + v (\partial/\partial \phi)] + \\ + (L/a_0)w (\partial/\partial z)$$

El sistema (IV.1-19,23) tomará la forma

$$(IV.1-30) \quad \epsilon [(du/dt) + (L/r^*) (\delta (L/a_0)uw - uv \tan\phi)] - (f/f_0)v + \delta (L/a_0) \\ (\cos\phi/\sin\phi_0)w = - [L/(r^* \cos\phi (1 + \epsilon F' \rho))] (\partial p/\partial \lambda)$$

$$(IV.1-31) \quad \epsilon [(dv/dt) + (L/r^*) (\delta (L/a_0)uw + u^2 \tan\phi)] + (f/f_0)u = \\ - [L/(r^* (1 + \epsilon F' \rho))] (\partial p/\partial \phi)$$

$$(IV.1-32) \quad (1 + \epsilon F' \rho) [\epsilon (\delta^2 (L/a_0) (dw/dt) - (D/r^*) (u^2 + v^2)) \\ - \delta (\cos\phi/\sin\phi_0)] = - (\partial p/\partial z) - \rho$$

$$(IV.1-33) \quad \epsilon F' (d\rho/dt) + (1 + \epsilon F' \rho) [(L/r^*) [(1/\cos\phi) (\partial u/\partial \lambda) + (1/\cos\phi) \\ (\partial (\cos\phi v)/\partial \phi) + 2\delta (L/a_0)w] + (L/a_0) (\partial w/\partial z)] = 0$$

$$(IV.1-34) \quad (\partial \rho/\partial t) + (L/r^*) (u/\cos\phi) (\partial \rho/\partial \lambda) + (L/r^*) v (\partial \rho/\partial \phi) + (L/a_0)w \\ (\partial \rho/\partial z) = (K_V L/UD^2) (\partial^2 \rho/\partial z^2)$$

El correspondiente sistema termohalino estará dado por:

$$(IV.1-35) \quad (f/f_0)v_0 = (L/a_0 \cos\phi) (\partial p_0/\partial \lambda)$$

$$(IV.1-36) \quad (f/f_0) u_0 = -(L/a_0) (\partial p_0 / \partial \Phi)$$

$$(IV.1-37) \quad (\partial p_0 / \partial z) = -\rho_0$$

$$(IV.1-38) \quad (1/\cos\Phi) [(\partial u_0 / \partial \lambda) + (\partial (\cos\Phi v_0) / \partial \Phi)] + (\partial w_0 / \partial z) = 0$$

$$(IV.1-39) \quad (L/a_0) (u_0 / \cos\Phi) (\partial \rho_0 / \partial \lambda) + (L/a_0) v_0 (\partial \rho_0 / \partial \Phi) + (L/a_0) w_0 (\partial \rho_0 / \partial z) = (K_V L / UD^2) (\partial^2 \rho_0 / \partial z^2)$$

Supongamos que

$$(IV.1-40) \quad \begin{cases} u = u_0 + \gamma \tilde{u} & p = p_0 + \gamma \tilde{p} \\ v = v_0 + \gamma \tilde{v} & \rho = \rho_0 + \gamma \tilde{\rho} \\ w = w_0 + \gamma \tilde{w} \end{cases}$$

De forma tal que  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p$  y  $\rho$  son soluciones del sistema general (IV.1-30,34); mientras que  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ ,  $p_0$  y  $\rho_0$  lo son del sistema termohalino (IV.1-35,39) (estado básico). El parámetro  $\gamma$  y las variables  $\tilde{u}(\Phi, \lambda, z, t)$ ,  $\tilde{v}(\Phi, \lambda, z, t)$ ,  $\tilde{w}(\Phi, \lambda, z, t)$ ,  $\tilde{p}(\Phi, \lambda, z, t)$  y  $\tilde{\rho}(\Phi, \lambda, z, t)$  son completamente desconocidas.

Previamente a continuar con el problema, es necesario hacer ciertas suposiciones acerca de la escala temporal. Para el flujo básico  $t^* = (a_0/U)t = T_0 t$ , donde  $T_0$  es la escala advectiva de tiempo ( $T_0 \approx 6 \cdot 10^8$  seg.) Supondremos que la perturbación tendrá una escala temporal más corta que la advectiva, es decir  $t = \epsilon \tau$  o  $\tau = (t/\epsilon)$ .

De acuerdo con el sistema (IV.1-35,36) supondremos que las soluciones  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ ,  $p_0$  y  $\rho_0$  son estacionarias. Ahora bien, si sustituimos (IV.1-40) dentro del sistema (IV.1-30,34) obtendremos que a  $O(\epsilon)$ :

$$(IV.1-41) \quad (\partial \tilde{u} / \partial \tau) + (L/a_0) [(u_0 / \cos\Phi) (\partial \tilde{u} / \partial \lambda) + \gamma (\tilde{u} / \cos\Phi) (\partial u_0 / \partial \lambda) +$$

$$\begin{aligned}
& (u_0/\cos\Phi) (\partial\tilde{u}/\partial\lambda) + v_0 (\partial u_0/\partial\Phi) + \gamma (v_0 (\partial\tilde{u}/\partial\Phi) + \tilde{v} (\partial u_0/\partial\Phi)) + \\
& (L/a_0) [w_0 (\partial u_0/\partial z) + \gamma (\tilde{w} (\partial u_0/\partial z) + w_0 (\partial\tilde{u}/\partial z))] - (L/a_0) \tan\Phi \\
& (u_0 v_0 + \gamma u_0 \tilde{v} + \gamma \tilde{u} v_0) - (\gamma/\epsilon) (\sin\Phi/\sin\Phi_0) \tilde{v} - [F' (\rho_0 + \gamma\tilde{\rho}) + z] \\
& (\sin\Phi/\sin\Phi_0) (v_0 + \gamma\tilde{v}) + (\cos\Phi/\sin\Phi_0) (w_0 + \gamma\tilde{w}) = -(\gamma/\epsilon) (L/a_0 \cos\Phi) \\
& (\partial\tilde{p}/\partial\lambda)
\end{aligned}$$

(IV.1-42)

$$\begin{aligned}
& (\partial\tilde{v}/\partial\tau) + (L/a_0) [(u_0/\cos\Phi) (\partial v_0/\partial\lambda) + v_0 (\partial v_0/\partial\Phi) + \gamma [(\tilde{u}/\cos\Phi) \\
& (\partial v_0/\partial\lambda) + (u_0/\cos\Phi) (\partial\tilde{v}/\partial\lambda) + v_0 (\partial\tilde{v}/\partial\Phi) + \tilde{v} (\partial v_0/\partial\Phi)]] + (L/a_0) \\
& [w_0 (\partial v_0/\partial z) + \gamma [w_0 (\partial v_0/\partial z) + \tilde{w} (\partial v_0/\partial z)]] + (L/a_0) \tan\Phi [u_0^2 + \\
& 2 \tilde{u} u_0] + (\gamma/\epsilon) (f/f_0) \tilde{u} + [F' (\rho_0 + \gamma\tilde{\rho}) + z] (f/f_0) (u_0 + \gamma\tilde{u}) = \\
& -(L/a_0) (\gamma/\epsilon) (\partial\tilde{p}/\partial\Phi)
\end{aligned}$$

$$(IV.1-43) \quad \gamma [(\partial p/\partial z) + \rho] = \delta (\cos\Phi/\sin\Phi_0) [u_0 + \gamma u]$$

$$\begin{aligned}
& (IV.1-44) \quad (\partial\tilde{\rho}/\partial\tau) + (L/a_0) [(u_0/\cos\Phi) (\partial\rho_0/\partial\lambda) + v_0 (\partial\rho_0/\partial\Phi)] + \gamma (L/a_0) \\
& [(u_0/\cos\Phi) (\partial\tilde{\rho}/\partial\lambda) + v_0 (\partial\tilde{\rho}/\partial\Phi)] + \gamma (L/a_0) [(\tilde{u}/\cos\Phi) (\partial\rho_0/\partial\lambda) \\
& + v (\partial\rho_0/\partial\Phi)] + \gamma^2 (L/a_0) [(\tilde{u}/\cos\Phi) (\partial\tilde{\rho}/\partial\lambda) + \tilde{v} (\partial\tilde{\rho}/\partial\Phi)] + (L/a_0) \\
& w_0 (\partial\rho_0/\partial z) + \gamma (L/a_0) w_0 (\partial\tilde{\rho}/\partial z) + (L/a_0) \tilde{w} (\partial\rho_0/\partial z) + \gamma^2 (L/a_0) \\
& (\partial\tilde{\rho}/\partial z) + (L/a_0) [\rho_0 + \gamma\tilde{\rho}] (1/\cos\Phi) [(\partial u_0/\partial\lambda) + (\partial(\cos\Phi v_0)/\partial\Phi)] \\
& + (\gamma/\epsilon) (1/\cos\Phi) [(\partial\tilde{u}/\partial\lambda) + (\partial(\cos\Phi\tilde{v})/\partial\Phi)] + (\rho_0 + \gamma\tilde{\rho}) (L/a_0) \\
& (\gamma/\cos\Phi) [(\partial\tilde{u}/\partial\lambda) + (\partial(\cos\Phi\tilde{v})/\partial\Phi)] + 2(w_0 + \gamma\tilde{w}) + [z + (L/a_0) [1 + \\
& (L/a_0) (\rho_0 + \gamma\tilde{\rho})]] (\partial(\rho_0 + \gamma\tilde{\rho})/\partial z) + (\gamma/\epsilon) (\partial\tilde{w}/\partial z) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (IV.1-45) \quad (a_0/L) (1 + \delta (L/a_0) z) (\partial\tilde{\rho}/\partial\tau) + \gamma (u_0/\cos\Phi) (\partial\tilde{\rho}/\partial\lambda) + \gamma (\tilde{u}/\cos\Phi) \\
& (\partial(\rho_0 + \gamma\tilde{\rho})/\partial\lambda) + \gamma v_0 (\partial\tilde{\rho}/\partial\Phi) + \gamma\tilde{v} (\partial(\rho_0 + \gamma\tilde{\rho})/\partial\Phi) + \delta (L/a_0) z w_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (\partial \rho_0 / \partial z) + \gamma (1 + \delta (L/a_0) z) [w_0 (\partial \tilde{\rho} / \partial z) + \tilde{w} (\partial (\rho_0 + \gamma \tilde{\rho}) / \partial z)] = \\
 & (\delta (L/a_0) z) (K_V a_0 / UD^2) (\partial^2 \rho_0 / \partial z^2) + \gamma (K_V a_0 / UD^2) [1 + \delta (L/a_0) z] \\
 & (\partial^2 \tilde{\rho} / \partial z^2)
 \end{aligned}$$

Hasta el momento  $\gamma$  permanece indeterminado, solamente hemos supuesto que  $\epsilon \leq \gamma < 1$ . Si asumimos que  $\epsilon < \gamma < 1$ , obtendremos a partir de la

(IV.1-41)

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{O(1)}_{(\partial \tilde{u} / \partial \tau) - z (\sin \Phi / \cos \Phi_0) v_0} - \underbrace{O(\gamma/\epsilon)}_{(\gamma/\epsilon) (\sin \Phi / \sin \Phi_0) \tilde{v} + (\gamma/\epsilon) (L/a_0)} \\
 & (1/\cos \Phi) (\partial \tilde{p} / \partial \lambda) + O(10^{-1}) + O(10^1) + \dots = 0 \\
 & \underbrace{O(10^{-1} (\gamma/\epsilon))}
 \end{aligned}$$

pero  $v(f/f_0) = O(1)$  y  $[(1/a_0 \cos \Phi) (\partial p / \partial \lambda)] < O(1)$ . Por lo tanto  $O(\gamma/\epsilon) > O(1)$  y esto significa que la suposición  $\epsilon < \gamma < 1$  no es correcta. En consecuencia  $\gamma = \epsilon$ . Bajo tal suposición el sistema (IV.1-41) tomará la forma (a  $O(\delta)$ )

$$\begin{aligned}
 \text{(IV.1-46)} \quad & (\partial \tilde{u} / \partial \tau) + (L/a_0) [(u_0 / \cos \Phi) (\partial u_0 / \partial \lambda) + v_0 (\partial u_0 / \partial \Phi)] + (L/a_0) w_0 \\
 & (\partial u_0 / \partial z) - (L/a_0) u_0 v_0 \tan \Phi - (\sin \Phi / \sin \Phi_0) \tilde{v} - (F' \rho_0 + z) \\
 & (\sin \Phi / \sin \Phi_0) v_0 + (\cos \Phi / \sin \Phi_0) w_0 = - (L/a_0 \cos \Phi) (\partial \tilde{p} / \partial \lambda)
 \end{aligned}$$

(IV.1-47)

$$\begin{aligned}
 & (\partial \tilde{v} / \partial \tau) + (L/a_0) [(u_0 / \cos \Phi) (\partial v_0 / \partial \lambda) + v_0 (\partial v_0 / \partial \Phi) + w_0 (\partial v_0 / \partial z)] \\
 & + (L/a_0) u_0^2 \tan \Phi + (F' \rho_0 + z) (f/f_0) u_0 + (f/f_0) \tilde{u} = - (L/a_0) (\partial \tilde{p} / \partial \Phi)
 \end{aligned}$$

$$\text{(IV.1-48)} \quad (\partial \tilde{p} / \partial z) - \delta (\cos \Phi / \sin \Phi_0) \tilde{u} = (\delta/\epsilon) (\cos \Phi / \sin \Phi_0) u_0$$

$$\text{(IV.1-49)} \quad (\partial \tilde{\rho} / \partial \tau) + (L/a_0) [(u_0 / \cos \Phi) (\partial \rho_0 / \partial \lambda) + v_0 (\partial \rho_0 / \partial \Phi)] +$$

$$\begin{aligned} & (L/a_0) w_0 (\partial \rho_0 / \partial z) + (1/\cos \Phi) [(\partial u / \partial \lambda) + (\partial (\cos \Phi v) / \partial \Phi)] + \\ & (L/a_0) (\rho_0 / \cos \Phi) [(\partial u_0 / \partial \lambda) + (\partial (\cos \Phi v_0) / \partial \Phi)] + 2w_0 + \\ & (z + (L/a_0) \rho_0) (\partial \rho_0 / \partial z) + (\partial w / \partial z) = 0 \end{aligned}$$

(IV.1-50)

$$\begin{aligned} & (1/\epsilon) [1 + \delta (L/a_0) z] (\partial \rho / \partial \tau) + (L/a_0) (1/\cos \Phi) [u_0 (\partial \rho / \partial \lambda) + \\ & u (\partial \rho_0 / \partial \lambda)] + (L/a_0) [v_0 (\partial \rho / \partial \Phi) + v (\partial \rho_0 / \partial \Phi)] + (L/a_0) [w (\partial \rho_0 / \partial z) \\ & + w_0 (\partial \rho / \partial z)] + (L/a_0) z w_0 (\partial \rho_0 / \partial z) = (K_V L / U D^2) [(\partial^2 \rho / \partial z^2) + \\ & z (\partial^2 \rho_0 / \partial z^2)] \end{aligned}$$

Habiendo llegado a este punto podemos hacer las siguientes observaciones

1) La escala temporal de la perturbación,  $t = \epsilon \tau$ , significa que  $t^* = \epsilon (L/U) \tau$ , donde  $\epsilon (L/U) = 10^4$  seg.

2) La ecuación (IV.1-49) sugiere que la perturbación del campo del fluido no es hidrostática a orden  $\delta$ .

$$\text{De acuerdo con la (IV.1-2)} \begin{cases} x^* = \lambda a_0 \cos \Phi_0 \\ y^* = (\Phi - \Phi_0) a_0 \end{cases} \text{ entonces } (\partial / \partial \lambda) =$$

$a_0 \cos \Phi_0 (\partial / \partial x^*)$ ;  $(\partial / \partial \Phi) = a_0 (\partial / \partial y^*)$ ; o en forma adimensional

$$(IV.1-51) \begin{cases} (\partial / \partial \lambda) = (a_0 / L) \cos \Phi_0 (\partial / \partial x) \\ (\partial / \partial \Phi) = (a_0 / L) (\partial / \partial y) \end{cases}$$

Las funciones trigonométricas pueden ser desarrolladas en series de potencia, alrededor de una latitud media  $\Phi_0$ , en la forma

$$(IV.1-52) \begin{cases} \sin \Phi = \sin \Phi_0 + \cos \Phi_0 (L/a_0) y - \sin \Phi_0 (L/a_0)^2 y^2 / 2 + \dots \\ \cos \Phi = \cos \Phi_0 - \sin \Phi_0 (L/a_0) y - \cos \Phi_0 (L/a_0)^2 y^2 / 2 + \dots \\ \tan \Phi = \tan \Phi_0 + \cos^{-2} \Phi_0 (L/a_0) y + \tan \Phi_0 \cos^{-2} \Phi_0 (L/a_0)^2 y^2 + \dots \end{cases}$$

De acuerdo con la aproximación del plano  $\beta$  (Pedlosky, 1979; Holton, 1979)

$$(IV.1-53) \quad (f/f_0) = \sin\phi/\sin\phi_0 \approx 1 + (\beta_0/f_0)(L/a_0)y = 1 + [\cos\phi_0/\sin\phi_0](L/a_0)y$$

En consecuencia en (IV.1-52), podemos despreciar los términos menores que  $(L/a_0)y$ , de forma tal que el sistema (IV.1-46,50) podrá ser escrito como

(IV.1-54)

$$\begin{aligned} & (\partial\tilde{u}/\partial\tau) [\cos\phi_0 - \sin\phi_0(L/a_0)y] + \cos\phi_0(\partial\tilde{p}/\partial x) - [\cos\phi_0 + \\ & ((1-2\sin^2\phi_0)/\sin\phi_0)(L/a_0)y]\tilde{v} = -\cos\phi_0[u_0(\partial u_0/\partial x) + (L/a_0) \\ & w_0(\partial u_0/\partial z)] + \sin\phi_0(L/a_0)u_0v_0 + (F'\rho_0 + z)[\cos\phi_0 + ((1-2\sin^2\phi_0)/ \\ & \sin\phi_0)(L/a_0)y]v_0 - w_0[(\cos^2\phi_0/\sin\phi_0) - 2\cos\phi_0(L/a_0)y] - v_0[ \\ & \cos\phi_0 - \sin\phi_0(L/a_0)y](\partial u_0/\partial y) \end{aligned}$$

(IV.1-55)

$$\begin{aligned} & [(\partial\tilde{v}/\partial\tau) + (\partial\tilde{p}/\partial y)](\cos\phi_0 - \sin\phi_0(L/a_0)y) + \tilde{u}(\cos\phi_0 - ((1-2\sin^2\phi_0)/ \\ & \sin\phi_0)(L/a_0)y) = -u_0\cos\phi_0(\partial v_0/\partial x) - v_0[\cos\phi_0 - \sin\phi_0(L/a_0)y](\partial v_0/ \\ & \partial y) - \sin\phi_0(L/a_0)u_0^2 - (F'\rho_0 + z)[\cos\phi_0 + ((1-2\sin^2\phi_0)/\sin\phi_0)(L/a_0)y] \\ & - \cos\phi_0(L/a_0)w_0(\partial v_0/\partial z) \end{aligned}$$

$$(IV.1-56) \quad (\partial\tilde{p}/\partial z) + \tilde{\rho} = (\delta/\epsilon)u_0(\cot\phi_0 - (L/a_0)y)$$

(IV.1-57)

$$\begin{aligned} & [(\partial\tilde{p}/\partial\tau) + (a_0/L)(\partial\tilde{v}/\partial y) + (\partial\tilde{w}/\partial z)][\cos\phi_0 - \sin\phi_0(L/a_0)y] + (a_0/L) \\ & (\partial\tilde{u}/\partial x)\cos\phi_0 - \tilde{v}[\sin\phi_0 + \cos\phi_0(L/a_0)y] = -[v_0(\partial\rho_0/\partial y) + \rho_0(\partial v_0/\partial y) \\ & + (L/a_0)w_0(\partial\rho_0/\partial z) + 2w_0 + (z + (L/a_0)\rho_0)(\partial\rho_0/\partial z)][\cos\phi_0 - \sin\phi_0(L/a_0) \\ & y] - \rho_0\cos\phi_0(\partial u_0/\partial x) + (L/a_0)\rho_0(\sin\phi_0 + \cos\phi_0(L/a_0)y)v_0 \end{aligned}$$

(IV.1-58)

$$\begin{aligned}
 & [ (1/\epsilon) (1+\delta (L/a_0) z) (\partial \tilde{\rho} / \partial \tau) + v_0 (\partial \tilde{\rho} / \partial y) + \tilde{v} (\partial \rho_0 / \partial y) ] (\cos \phi_0 - \sin \phi_0 \\
 & (L/a_0) y) + \cos \phi_0 [ u_0 (\partial \tilde{\rho} / \partial x) + \tilde{u} (\partial \rho_0 / \partial x) + (L/a_0) \tilde{w} (\partial \rho_0 / \partial z) + (L/a_0) w_0 \\
 & (\partial \tilde{\rho} / \partial z) + (L/a_0) z w_0 (\partial \rho_0 / \partial z) ] = (K_V L / U D^2) [ (\partial^2 \tilde{\rho} / \partial z^2) + z (\partial^2 \rho_0 / \partial z^2) ] \\
 & (\cos \phi_0 - \sin \phi_0 (L/a_0) y)
 \end{aligned}$$

Es necesario hacer notar que en el sistema del campo de fluido perturbado, unicamente la ecuación (IV.1-58) contiene términos que incluyen variables correspondientes al estado básico y al perturbado ("ecuación acoplada"). No es, en consecuencia, prematuro el suponer que esta ecuación desarrollará un papel esencial en el problema de la inestabilidad de la circulación termohalina.

#### IV.2 Los términos de corrección del estado básico

Supongamos el caso ideal en que no existe perturbación ( $\tilde{u}=\tilde{v}=\tilde{w}=\tilde{\rho}=\tilde{p}=0$ ), lo cual implica que los términos de la izquierda en las ecuaciones (IV.1-54,58) serán nulos, mientras que los de la derecha unicamente dependerán de las variables correspondientes al flujo básico. Estos términos sobrevivirán como consecuencia de la incapacidad del sistema (IV.1-24,28) de describir completamente el flujo básico de la circulación termohalina. En otras palabras la (IV.1-40) no es correcta y por lo tanto será necesario incluir algunos términos de corrección, tales como:

$$(IV.2-1) \left\{ \begin{array}{l} u(\tau, x, y, z) = u_0(x, y, z) + \epsilon u_1(x, y, z) + \epsilon \tilde{u}(\tau, x, y, z) \\ v(\tau, x, y, z) = v_0(x, y, z) + \epsilon v_1(x, y, z) + \epsilon \tilde{v}(\tau, x, y, z) \\ w(\tau, x, y, z) = w_0(x, y, z) + \epsilon w_1(x, y, z) + \epsilon \tilde{w}(\tau, x, y, z) \\ \rho(\tau, x, y, z) = \rho_0(x, y, z) + \epsilon \rho_1(x, y, z) + \epsilon \tilde{\rho}(\tau, x, y, z) \\ p(\tau, x, y, z) = p_0(x, y, z) + \epsilon p_1(x, y, z) + \epsilon \tilde{p}(\tau, x, y, z) \end{array} \right.$$

donde  $u_0, v_0, w_0, \rho_0$  y  $p_0$  son soluciones del sistema termohalino (IV.1-

24,28);  $u_1, v_1, w_1, \rho_1$  y  $P_1$  son las correcciones correspondientes al flujo básico; mientras que  $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{\rho}$  y  $\tilde{p}$  son las componentes de la perturbación.

Sustituyendo (IV.2-1) dentro del sistema (IV.1-30,34) obtendremos las siguientes ecuaciones:

A  $O(\epsilon^0)$

$$(IV.1-35) \quad (f/f_0) = (L/a_0 \cos \phi) (\partial p_0 / \partial \lambda)$$

$$(IV.1-36) \quad (f/f_0) u_0 = -(L/a_0) (\partial p_0 / \partial \phi)$$

$$(IV.1-37) \quad (\partial p_0 / \partial z) = -\rho_0$$

$$(IV.1-38) \quad (1/\cos \phi) [(\partial u_0 / \partial \lambda) + (\partial (\cos \phi v_0) / \partial \phi)] + (\partial w_0 / \partial z) = 0$$

(IV.1-39)

$$(L/a_0) (u_0 / \cos \phi) (\partial \rho_0 / \partial \lambda) + (L/a_0) v_0 (\partial \rho_0 / \partial \phi) + (L/a_0) w_0 (\partial \rho_0 / \partial z) = (K_V L / UD^2) (\partial^2 \rho / \partial z^2)$$

A  $O(\epsilon^1)$

(IV.2-2)

$$(f/f_0) v_1 - (L/a_0 \cos \phi) (\partial p_1 / \partial \lambda) = (L/a_0) [u_0 (\partial u_0 / \partial \lambda) + v_0 (\partial v_0 / \partial \phi) - u_0 v_0 \tan \phi] + (L/a_0) w_0 (\partial u_0 / \partial z) - [z + F' \rho_0] v_0 (f/f_0) - w_0 (\cos \phi / \sin \phi_0)$$

(IV.2-3)

$$(f/f_0) u_1 + (L/a_0) (\partial p_1 / \partial \phi) = -(L/a_0) [(u_0 / \cos \phi) (\partial v_0 / \partial \phi) + v_0 (\partial v_0 / \partial \phi) + u_0^2 \tan \phi + w_0 (\partial v_0 / \partial z)] - [z + F' \rho_0] (f/f_0) u_0$$



$$(IV.2-4) \quad u_0 (\cos\phi / \sin\phi_0) - (L/a_0) [(\partial p_1 / \partial z) + 1] = 0$$

(IV.2-5)

$$(1/\cos\phi) [(\partial u_1 / \partial \lambda) + (\partial (\cos\phi v_1) / \partial \phi)] + (\partial w_1 / \partial z) = (L/a_0) [(u_0 / \cos\phi) (\partial \rho_0 / \partial \lambda) + v_0 (\partial \rho_0 / \partial \phi) + w_0 (\partial \rho_0 / \partial z) + (\rho_0 / \cos\phi) (\partial u_0 / \partial \lambda)] + 2w_0 + (L/a_0) (\rho_0 / \cos\phi) (\partial (\cos\phi v_0) / \partial \phi) + (\rho_0 + z) (L/a_0) (\partial w_0 / \partial z)$$

$$(IV.2-6) \quad (L/a_0) [(1/\cos\phi) [u_0 (\partial \rho_1 / \partial \lambda) + u_1 (\partial \rho_0 / \partial \lambda)] + v_0 (\partial \rho_1 / \partial \phi) + v_1 (\partial \rho_0 / \partial \phi)] + (L/a_0) [w_0 (\partial \rho_1 / \partial z) + w_1 (\partial \rho_0 / \partial z)] - (K_V L / UD^2) (\partial^2 \rho_0 / \partial z^2) - (L/a_0) z w_0 (\partial \rho_0 / \partial z)$$

y

$$(IV.2-7) \quad (\partial \tilde{u} / \partial \tau) - \tilde{v} (f/f_0) + (L/a_0 \cos\phi) (\partial \tilde{p} / \partial \lambda) = 0$$

$$(IV.2-8) \quad (\partial \tilde{v} / \partial \tau) + (f/f_0) \tilde{u} + (L/a_0) (\partial \tilde{p} / \partial \phi) = 0$$

$$(IV.2-9) \quad (\partial \tilde{p} / \partial z) + \tilde{\rho} = 0$$

$$(IV.2-10) \quad (\partial \tilde{\rho} / \partial \tau) + (1/\cos\phi) [(\partial \tilde{u} / \partial \lambda) + (\partial (\cos\phi v) / \partial \phi) + (\partial \tilde{w} / \partial z)] = 0$$

(IV.2-11)

$$\epsilon^{-1} (1 + \delta (L/a_0) z) (\partial \tilde{\rho} / \partial \tau) + (L/a_0) (1/\cos\phi) [u_0 (\partial \tilde{\rho} / \partial \lambda) + \tilde{u} (\partial \rho_0 / \partial \lambda)] + (L/a_0) [v_0 (\partial \tilde{\rho} / \partial \phi) + \tilde{v} (\partial \rho_0 / \partial \phi)] + (L/a_0) [w_0 (\partial \tilde{\rho} / \partial z) + \tilde{w} (\partial \rho_0 / \partial z)] = (K_V L / UD^2) (\partial^2 \tilde{\rho} / \partial z^2)$$

Utilizando las (IV.1-51), (IV.1-52) y (IV.1-53), el sistema

(IV.2-2,6) tomará la forma:

(IV.2-12)

$$(1 + a_1 y) v_1 - (\partial p_1 / \partial x) = (1 - c_1 y) [\cos\phi_0 u_0 (\partial u_0 / \partial x) + v_0 (\partial v_0 / \partial y)] + (L/a_0) w_0 (\partial u_0 / \partial z) - (1 + a_1 y) v_0 (1 + F' \rho_0) - \cot\phi_0 (1 - 2c_1 y) w_0$$

$$(IV.2-13) \quad (1+a_1y)u_1 + (1-c_1y) \left( \frac{\partial p_1}{\partial y} \right) = -u_0 \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - v_0 (1-c_1y) \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - c_1 u_0 - (L/a_0) w_0 \left( \frac{\partial v_0}{\partial z} \right) - (F' \rho_0 + z) (1+a_1y) u_0$$

$$(IV.2-14) \quad (L/a_0) \left[ \left( \frac{\partial p_1}{\partial z} \right) + \rho_1 \right] = \tan \phi_0 (1-b_1y) u_0$$

$$(IV.2-15) \quad \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + (1-c_1y) \left( \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) - c_1 v_1 + (L/a_0) \left( \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) = (L/a_0) \left[ u_0 \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial x} \right) + v_0 \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial y} \right) + 2w_0 + \rho_0 \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \rho_0 \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \right]$$

$$(IV.2-16) \quad u_0 \left( \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \right) + u_1 \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial x} \right) + (1-c_1y) \left[ v_0 \left( \frac{\partial \rho_1}{\partial y} \right) + v_1 \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial y} \right) \right] + (L/a_0) w_0 \left( \frac{\partial \rho_1}{\partial z} \right) + (L/a_0) w_1 \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right) + (L/a_0) z w_0 \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right) = (K_V L / UD^2) \left[ \left( \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial z^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} \right) \right]$$

Los términos de corrección serán soluciones de este último sistema, sin embargo nos abstendremos de resolver el mismo en este trabajo ya que carece de significación para el problema de la estabilidad hidrodinámica. En (IV.2-12,16) hemos utilizado la siguiente notación:

$$(IV.2-17) \quad \begin{cases} a_1 = [(1-2\sin^2 \phi_0) / \sin \phi_0 \cos \phi_0] (L/a_0) \\ b_1 = \cot \phi_0 (L/a_0) \\ c_1 = \tan \phi_0 (L/a_0) \end{cases}$$

## Capítulo V

## ESTABILIDAD DE UN OCEANO BAROTROPICO

V.1 Océano barotrópico

A partir de la solución de Needler (Needler, 1967; Veronis, 1969) para la circulación termohalina

$$(II.5-3) \quad p_o(\phi, \lambda, z) = A(\phi, \lambda) + M(\phi, \lambda) \exp(cz/\sin\phi)$$

podemos concluir que el campo barotrópico está representado por

$$(V.1-1) \quad p_o(\phi, \lambda) = A(\phi, \lambda)$$

Por lo tanto, el sistema termohalino correspondiente será:

$$(V.1-2) \quad \begin{cases} (f/f_o) v_o = (L/a_o \cos\phi) (\partial A/\partial \lambda) \\ (f/f_o) u_o = -(L/a_o) (\partial A/\partial \phi) \\ w_o = \rho_o = 0 \end{cases}$$

o de acuerdo con (IV.1-3)

$$\begin{cases} v_o = (f/f_o) [\cos\phi_o/\cos\phi] (\partial A/\partial x) \\ u_o = -(f/f_o) (\partial A/\partial y) \\ w_o = \rho_o = 0 \end{cases}$$

Sin embargo en la aproximación del plano  $\beta$  debemos desarrollar estas ecuaciones utilizando (IV.1-52) y (IV.1-53). En las siguientes secciones analizaremos la estabilidad de diferentes casos correspondientes a un océano

barotrópico.

## V.2 Océano en reposo

En este caso  $u_0 = v_0 = w_0 = \rho_0 = 0$  y el sistema (IV.2-7,11) se transformará en

$$(V.2-1) \quad (\partial \check{u} / \partial \tau) [\cos \phi_0 - \sin \phi_0 (L/a_0) y] - \check{v} [\cos \phi_0 + [(1-2\sin^2 \phi_0) / \sin \phi_0] (L/a_0) y] + (\partial \check{p} / \partial x) \cos \phi_0 = 0$$

$$(V.2-2) \quad \sin \phi_0 [(\partial \check{v} / \partial \tau) + (\partial \check{p} / \partial y)] + \check{u} [\sin \phi_0 + \cos \phi_0 (L/a_0) y] = 0$$

$$(V.2-3) \quad (\partial \check{p} / \partial z) + \check{\rho} = 0$$

$$(V.2-4) \quad (\cos \phi_0 - \sin \phi_0 (L/a_0) y) [(\partial \check{\rho} / \partial \tau) + (a_0/L) (\partial \check{v} / \partial y) + (\partial \check{w} / \partial z)] + (a_0/L) (\partial \check{u} / \partial x) \cos \phi_0 - \check{v} (\sin \phi_0 + \cos \phi_0 (L/a_0) y) = 0$$

$$(V.2-5) \quad (a_0/\epsilon L) (\partial \check{\rho} / \partial \tau) [1 + \delta (L/a_0) z] [\cos \phi_0 - \sin \phi_0 (L/a_0) y] = (K_V a_0 / UD^2) (\partial^2 \check{\rho} / \partial z^2) [\cos \phi_0 - \sin \phi_0 (L/a_0) y]$$

En la ecuación (V.2-5) la función  $[1 + \delta (L/a_0) z]$  nunca será nula, porque esto implicaría que  $z$  es mayor que la unidad. En consecuencia estamos en condiciones de resolver la ecuación

$$(V.2-6) \quad (\partial \check{\rho} / \partial \tau) = \epsilon [(K_V L / UD^2) / (1 + \delta (L/a_0) z)] (\partial^2 \check{\rho} / \partial z^2)$$

El significado de (V.2-6) es que los cambios locales en el campo de densidad de la perturbación son compensados por procesos difusivos exclusivamente. Esta ecuación es del tipo parabólico, como la correspondiente a los problemas de transferencia de calor con difusividad que es función de "z" (Koshlyakov, 1964). Generalizaremos el método de separación de variables, comunmente utilizado para difusividades constantes (Miller, 1941; Petrovsky, 1954; Ford, 1955; Kamke, 1959), para resolver la mencionada (V.2-6). Supongamos que:

$$(V.2-7) \quad \tilde{\rho}(x, y, z, \tau) = X(x, y, z) Y(\tau)$$

entonces

$$(V.2-8) \quad \begin{cases} a) & (1/Y) (\partial Y / \partial \tau) = -\beta_1^2 \\ b) & (1/X) [\epsilon K\# / (1 + \delta(L/a_0)z)] (\partial^2 X / \partial z^2) = -\beta_1^2 \end{cases}$$

donde  $K\# = [K_V L / UD^2]$ . La solución de (V.2-8a) será

$$(V.2-9) \quad Y(\tau) = \exp(-\beta_1^2 \tau)$$

Por otra parte la (V.2-8) puede ser escrita como

$$(V.2-10) \quad (\partial^2 X / \partial z^2) + \beta_1^2 [(1 + \delta(L/a_0)z) / \epsilon K\#] X = 0$$

o

$$(V.2-11) \quad (\partial^2 X / \partial z^2) + (mz + n) X = 0$$

donde

$$(V.2-12) \quad m = [\beta_1^2 \delta / \epsilon K\#] (L/a_0) \quad \text{y} \quad n = (\beta_1^2 / \epsilon K\#)$$

Con un cambio de variables en la forma (Kamke, 1959)

$$(V.2-13) \quad \xi = mz + n$$

tendremos que  $\eta(\xi) = X(z)$  y la (V.2-11) tomará la forma

$$(V.2-14) \quad (\partial^2 \eta / \partial \xi^2) + m^{-2} \xi \eta = 0$$

Esta ecuación acepta como solución

$$(V.2-15) \quad \eta = \xi z_{1/3} [i(i) (m^{-2})^{1/2} \xi^{3/2} (2/3)]$$

donde  $Z_\nu$  es una función cilíndrica (Zylinderfunktionen) definida por

$$(V.2-16) \quad Z_\nu(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)$$

con  $C_1$  y  $C_2$  constantes (#).  $J_\nu(x)$  y  $Y_\nu(x)$  son funciones de Bessel de primera clase y orden  $\nu$  y de segunda clase y orden  $\nu$ , respectivamente. (Antosiewicz, 1964; Barcion, 1974)

De acuerdo con la (V.2-12) y (V.2-13), tendremos que

$$X(z) = [mz+n]^{1/2} Z_{1/3}[-(2/3)m^{-1}(mz+n)^{3/2}]$$

o

$$(V.2-17) \quad X(z) = (\beta_1/[\epsilon K\#])^{1/2} [\delta(L/a_0)z+1]^{1/2} Z_{1/3}[-(2/3)(a_0/\delta L) (\beta_1/(\epsilon K\#))^{1/2} [\delta(L/a_0)z+1]^{3/2}]$$

En consecuencia, a partir de la (V.2-7), (V.2-9) y (V.2-17) podemos obtener

$$(V.2-18) \quad \tilde{\rho}(x, y, z, \tau) = \exp(-\beta_1^2) [(\beta_1/(\epsilon K\#))^{1/2} (\delta(L/a_0)z+1)^{1/2} Z_{1/3}[-(2/3)(a_0/\delta L) [\beta_1/(\epsilon K\#)]^{1/2} (\delta(L/a_0)z+1)^{3/2}] \tilde{\rho}_1 \tilde{\rho}_2$$

---

(#) Las funciones cilíndricas definidas por (V.2-16) son un caso especial de las funciones de Nielsen (Watson, 1958)

$$Z_\nu(x) = a_\nu J_\nu(x) + b_\nu Y_\nu(x)$$

donde  $a_\nu$  y  $b_\nu$  deben ser funciones arbitrarias y periódicas de  $\nu$ , con período unitario. Esto significa que

$$a_\nu = a_{\nu-1}, \quad b_\nu = b_{\nu-1}$$

En nuestro caso particular  $a_{4/3} = a_{1/3} = a_{-2/3} = C_1$  y  $b_{4/3} = b_{1/3} = b_{-1/3} = C_2$ .

donde  $\tilde{\rho}_1(x)$  y  $\tilde{\rho}_2(y)$  son dos funciones arbitrarias de "x" e "y" respectivamente. A partir de (V.2-18) podemos ver que si  $\beta_1$  es un número real o complejo con el valor absoluto de la parte real mayor que el de la imaginaria, el sistema será estable.

### V.3 Océano barotrópico con velocidad zonal

En este caso estamos suponiendo que

$$u_0 = u_0(x, y) \text{ y } v_0 = \rho_0 = 0$$

En consecuencia el sistema (IV.2-7,11) tomará la forma

$$(V.3-1) \quad (\partial \tilde{u} / \partial \tau) [\cos \phi_0 - \sin \phi_0 (L/a_0) y] - \tilde{v} [\cos \phi_0 + ((1 - 2 \sin^2 \phi_0) / \sin \phi_0) (L/a_0) y] + (\partial \tilde{\rho} / \partial x) \cos \phi_0 = 0$$

$$(V.3-2) \quad (\partial \tilde{v} / \partial \tau) + (1 - \cot \phi_0 (L/a_0) y) \tilde{u} + (\partial \tilde{\rho} / \partial y) = 0$$

$$(V.3-3) \quad (\partial \tilde{\rho} / \partial z) + \tilde{\rho} = 0$$

$$(V.3-4) \quad [(\partial \tilde{\rho} / \partial \tau) (L/a_0) + (\partial \tilde{u} / \partial x) + (L/a_0) (\partial \tilde{w} / \partial z)] \cos \phi_0 - \sin \phi_0 (L/a_0) y \tilde{v} + (\partial \tilde{v} / \partial y) [\cos \phi_0 - \sin \phi_0 (L/a_0) y] = 0$$

$$(V.3-5) \quad (1/\epsilon) (\partial \tilde{\rho} / \partial \tau) [1 + \delta (L/a_0) z] + u_0 (\partial \tilde{\rho} / \partial x) [\cos \phi_0 / (\cos \phi_0 - \sin \phi_0 (L/a_0) y)] = K\# (\partial^2 \tilde{\rho} / \partial z^2) (\cos \phi_0 - \sin \phi_0 (L/a_0) y)$$

La (V.3-5) podrá ser escrita en la forma

$$(V.3-6) \quad (1/\epsilon) (\partial \tilde{\rho} / \partial \tau) [1 + \delta (L/a_0) z] [\cos \phi_0 - \sin \phi_0 (L/a_0) y] + u_0 (\partial \tilde{\rho} / \partial x) \cos \phi_0 = (K_V L / UD^2) (\partial^2 \tilde{\rho} / \partial z^2) [\cos \phi_0 - \sin \phi_0 (L/a_0) y]$$

donde  $K\# = (K_V L / UD^2)$

Suponiendo que

$$(V.3-7) \quad \tilde{\rho}(x, y, z, \tau) = X(x, y, z) Y(\tau)$$

obtendremos

$$(V.3-8a) \quad (1/Y) (\partial Y / \partial \tau) = -\beta_1^2$$

y

$$(V.3-8b) \quad [\epsilon K \# / (1 + \delta (L/a_0) z)] (\partial^2 X / \partial z^2) - [\epsilon u_0 (1 + \delta (L/a_0) z)^{-1} / (1 - \tan \phi_0 (L/a_0) y)] (\partial X / \partial x) = -\beta_1^2 X$$

En consecuencia la solución de la ecuación (V.3-8a) está dada por

$$(V.3-9) \quad Y(\tau) = \exp(-\beta_1^2 \tau)$$

Por su parte la ecuación (V.3-8b) puede ser escrita en la forma

$$(V.3-10) \quad (\partial^2 X / \partial z^2) - (1/\epsilon K \#) [u_0 / (1 - \tan \phi_0 (L/a_0) y)] (\partial X / \partial x) + (\beta_1^2 / \epsilon K \#) [1 + \delta (L/a_0) z] X = 0$$

y suponiendo que

$$(V.3-11) \quad X(x, y, z) = X_1(z) X_2(x, y)$$

luego de la sustitución dentro de (V.3-10) podemos obtener

$$(V.3-12) \quad (1/X_1) (d^2 X_1 / dz^2) + (\beta_1^2 / \epsilon K \#) [1 + \delta (L/a_0) z] - (1/\epsilon K \#) [u_0 / (1 - \tan \phi_0 (L/a_0) y)] (1/X_2) (\partial X_2 / \partial x) = 0$$

Esto implica que

$$(V.3-13a) \quad (d^2 X_1 / dz^2) + [(\beta_1^2 / \epsilon K \#) (1 + \delta (L/a_0) z) + \gamma_1^2] X_1 = 0$$

y

$$(V.3-13b) \quad (1/\epsilon K \#) [u_0 / (1 - \tan \phi_0 (L/a_0) y)] (\partial X_2 / \partial x) + \gamma_1^2 X_2 = 0$$

La ecuación (V.3-13a) puede ser escrita en la forma

$$(V.3-14) \quad (d^2 X_1 / dz^2) + (mz + n) X_1 = 0$$



similar a la (V.2-11) donde ahora

$$(V.3-15) \quad m = (\beta_1^2 / \epsilon K\#) \delta (L/a_0) \quad \text{y} \quad n = (\beta_1^2 / K\#) + \gamma_1^2$$

con un cambio de variables como el (V.2-13)

$$(V.2-13) \quad \xi = mz + n$$

obtenemos que  $\eta(\xi) = X(z)$  y la (V.3-14) se transformará en

$$(V.3-16) \quad (d^2 \eta / d\xi^2) + m^{-2} \eta \xi = 0$$

cuya solución es

$$(V.3-17) \quad \eta = (\xi)^{1/2} Z_{1/3} [-(2/3)(m^{-2})^{1/2} \xi^{3/2}]$$

De acuerdo con la (V.3-15) y (V.2-13)

$$X_1(z) = (mz+n)^{1/2} Z_{1/3} [-(2/3)m^{-1}(mz+n)^{3/2}]$$

o

$$(V.3-18) \quad X_1(z) = (\beta_1 / (\epsilon K\#))^{1/2} [\delta (L/a_0) z + (1 + (\gamma_1^2 / \beta_1^2) \epsilon K\#)]^{1/3} \\ Z_{1/3} [-(2/3)(a_0 / \delta L) (\beta_1 / (\epsilon K\#))^{1/2} [\delta (L/a_0) z + \\ (1 + (\gamma_1^2 / \beta_1^2) \epsilon K\#)]^{3/2}]$$

La ecuación (V.3-13b) podrá ser escrita en la forma

$$(V.3-19) \quad [u_0(x,y) / (1 - \tan \phi_0 (L/a_0) y)] (\partial X_2 / \partial x) + \frac{2}{1} K\# X_2 = 0$$

donde hemos supuesto que  $u_0(x,y) \neq 0$ . En consecuencia es posible hacer un cambio de variables en la forma

$$t = (1 - \tan \phi_0 (L/a_0) y) \int (dx / u_0)$$

y

$$X_2(x,y) = \xi(t)$$

por lo tanto la ecuación (V.3-13b) tomará la forma

$$(V.3-20) \quad (d\xi/dt) + \gamma_1^2 K\# = 0$$

con solución

$$\xi = \exp(-\gamma_1^2 K\# t)$$

o

$$(V.3-21) \quad X_2(x, y) = \exp[-\gamma_1^2 K\# (1 - \tan\phi_0 (L/a_0) y) \int (dx/u_0)]$$

A partir de la (V.3-7), (V.3-9), (V.3-11), (V.3-18) y (V.3-21) obtendremos que:

$$(V.3-22) \quad \tilde{\rho}(x, y, z, \tau) = \exp(-\beta_1^2 \tau) \left\{ (\beta_1 / (\epsilon K\#))^{1/2} [\delta (L/a_0) z + (1 + (\gamma_1^2 / \beta_1^2) \epsilon K\#)]^{1/2} z_{1/3} \left[ -(2/3) (a_0 / \delta L) (\beta_1 / (\epsilon K\#))^{1/2} [\delta (L/a_0) z + (1 + (\gamma_1^2 / \beta_1^2) \epsilon K\#)]^{3/2} \right] \right\} \exp[-\gamma_1^2 K\# (1 - \tan\phi_0 (L/a_0) y) \int (dx/u_0)] \tilde{\rho}_2$$

donde  $\tilde{\rho}_2$  es una función arbitraria de "y".

#### V.4 Océano barotrópico con velocidad meridional

En este caso tendremos que:

$$u_0 = w_0 = \rho_0 = 0 \quad \text{y} \quad v_0 = v_0(x, y) \neq 0$$

En consecuencia el nuevo sistema de ecuaciones diferenciales estará dado por

$$(V.4-1) \quad (\partial \tilde{u} / \partial \tau) (\cos\phi_0 - \sin\phi_0 (L/a_0) y) - \tilde{v} [\cos\phi_0 + ((1 - 2\sin^2\phi_0) / \sin\phi_0) (L/a_0) y] + (\partial \tilde{p} / \partial x) \cos\phi_0 = 0$$

$$(V.4-2) \quad (\partial \tilde{v} / \partial \tau) + (1 + \cot\phi_0 (L/a_0) y) \tilde{u} + (\partial \tilde{p} / \partial y) = 0$$

$$(V.4-3) \quad (\partial \tilde{p} / \partial z) + \tilde{\rho} = 0$$

$$(V.4-4) \quad [(\partial \tilde{\rho} / \partial \tau) + (\partial \tilde{w} / \partial z)] (L/a_0) \cos\phi_0 + (\partial \tilde{v} / \partial y) [\cos\phi_0 - \sin\phi_0 (L/a_0) y] - \tilde{v} (L/a_0) \sin\phi_0 + \cos\phi_0 (\partial \tilde{u} / \partial x) = 0$$

$$(V.4-5) \quad (1/\epsilon) (\partial \tilde{\rho} / \partial \tau) [1 + \delta (L/a_0) z] + v_0 (\partial \tilde{\rho} / \partial y) = K\# (\partial^2 \tilde{\rho} / \partial z^2)$$

A partir de la (V.4-5) tenemos que

$$(V.4-6) \quad (\partial \tilde{\rho} / \partial \tau) + [\epsilon v_0 / (1 + \delta (L/a_0) z)] (\partial \tilde{\rho} / \partial y) = [\epsilon K\# / (1 + \delta (L/a_0) z)] (\partial^2 \tilde{\rho} / \partial z^2)$$

Por analogía con lo realizado en la Sección V.3, la solución de (V.4-6) será

$$(V.4-7) \quad \tilde{\rho}(x, y, z, \tau) = \exp(-\beta_1^2 \tau) (1/(\epsilon K\#))^{1/2} [\delta (L/a_0) z + (1 + (\gamma_2^2 / \beta_1^2) K\#)]^{1/2} z_{1/3} \left[ -(2/3) (a_0 / (\epsilon K\#))^{1/2} [\delta (L/a_0) z + (1 + (\gamma_2^2 / \beta_1^2) K\#)^{3/2}] \right] \exp[-\gamma_2^2 K\# \int (dy/v_0)] \tilde{\xi}_1$$

#### V.5 Océano barotrópico con velocidad arbitraria

$$u_0 = u_0(x, y), \quad v_0 = v_0(x, y) \quad \text{y} \quad w_0 = \rho_0 = 0$$

El sistema perturbado será

$$(V.5-1) \quad (\partial \tilde{u} / \partial \tau) [\cos \phi_0 - \sin \phi_0 (L/a_0) y] - \tilde{v} (\cos \phi_0 + [(1 - 2 \sin^2 \phi_0) / \sin \phi_0] (L/a_0) y) + (\partial \tilde{p} / \partial x) \cos \phi_0 = 0$$

$$(V.5-2) \quad (\partial \tilde{v} / \partial \tau) + [1 + \cot \phi_0 (L/a_0) y] \tilde{u} + (\partial \tilde{p} / \partial y) = 0$$

$$(V.5-3) \quad (\partial \tilde{p} / \partial z) + \tilde{\rho} = 0$$

$$(V.5-4) \quad [(\partial \tilde{\rho} / \partial \tau) + (\partial \tilde{w} / \partial z)] (L/a_0) \cos \phi_0 + (\partial \tilde{v} / \partial y) [\cos \phi_0 - \sin \phi_0 (L/a_0) y] - \tilde{v} (L/a_0) \sin \phi_0 + \cos \phi_0 (\partial \tilde{u} / \partial x) = 0$$

$$(V.5-5) \quad (1/\epsilon) (\partial \tilde{\rho} / \partial \tau) [1 + (L/a_0) \delta z] + v_0 (\partial \tilde{\rho} / \partial y) + [(u_0 (\partial \tilde{\rho} / \partial x) \cos \phi_0) / (\cos \phi_0 - \sin \phi_0 (L/a_0) y)] = K\# (\partial^2 \tilde{\rho} / \partial z^2)$$

La ecuación (V.5-5) podrá ser escrita en la forma

$$(1/\epsilon) (\partial \tilde{\rho} / \partial \tau) [1 + \delta (L/a_0) z] + v_0 (\partial \tilde{\rho} / \partial y) + [u_0 / (1 - \tan \Phi_0 (L/a_0) y)] (\partial \tilde{\rho} / \partial x) = K\# (\partial^2 \tilde{\rho} / \partial z^2)$$

Estableciendo que

$$(V.5-6) \quad \tilde{\rho}(x, y, z, \tau) = X(x, y, z) Y(\tau)$$

tendremos

$$(V.5-7a) \quad (1/Y) (dY/d\tau) = -\beta_1^2$$

y

$$(V.5-7b) \quad (1/X) [\epsilon K\# / (1 + \delta (L/a_0) z)] (\partial^2 X / \partial z^2) - [\epsilon / X (1 + \delta (L/a_0) z)] [v_0 (\partial X / \partial y) + [u_0 / (1 - \tan \Phi_0 (L/a_0) y)] (\partial X / \partial x)] = -\beta_1^2$$

Por lo tanto la solución de la ecuación (V.5-7a) será

$$(V.5-8) \quad Y(\tau) = \exp(-\beta_1^2 \tau)$$

La ecuación (V.5-7b) puede ser escrita en la forma

$$(V.5-9) \quad (\partial^2 X / \partial z^2) + (\beta_1^2 / \epsilon K\#) [1 + \delta (L/a_0) z] X - (v_0 / K\#) (\partial X / \partial y) - [u_0 / (K\# (1 - \tan \Phi_0 (L/a_0) y))] (\partial X / \partial x) = 0$$

y suponiendo que

$$(V.5-10) \quad X(x, y, z) = X_1(z) X_2(x, y)$$

tendremos

$$(V.5-11a) \quad (1/X_1) (d^2 X_1 / dz^2) + [(\beta_1^2 / \epsilon K\#) (1 + \delta (L/a_0) z)] = -\gamma_*^2$$

y

$$(V.5-11b) \quad (1/X_2) [(v_0 / K\#) (\partial X_2 / \partial y) + [u_0 / (K\# (1 - \tan \Phi_0 (L/a_0) y))] (\partial X_2 / \partial x)] = -\gamma_*^2$$

En consecuencia la solución de la ecuación (V.5-11a) será

$$(V.5-12) \quad X_1 = (\beta_1 / (\epsilon K \#)^{1/2}) [\delta (L/a_0) z + (1 + (\gamma_*^2 / \beta_1^2) \epsilon K \#)]^{1/2} \\ z_{1/3} [-(2/3) (\beta_1 / (\epsilon K \#)^{1/2}) (a_0 / \delta L) [\delta (L/a_0) z + \\ (1 + (\gamma_*^2 / \beta_1^2) \epsilon K \#)]^{3/2}]$$

La (V.5-11b) es una ecuación diferencial lineal a primer orden que puede ser escrita como

$$(V.5-13) \quad v_0 (\partial X_2 / \partial y) + [u_0 / (1 - \tan \phi_0 (L/a_0) y)] (\partial X_2 / \partial x) = \\ -K \# \gamma_*^2 X_2$$

Si suponemos una solución de la forma

$$(V.5-14) \quad X_2 = F(x, y)$$

tendremos a partir de (V.5-7), (V.5-9), (V.5-11a,b) y (V.5-12) que

$$(V.5-15) \quad \tilde{\rho}(x, y, z, \tau) = \exp(-\beta_1^2 \tau) \left[ (\beta_1 / (\epsilon K \#)^{1/2}) [\delta (L/a_0) z + \\ (1 + (\gamma_*^2 / \beta_1^2) \epsilon K \#)]^{1/2} z_{1/3} [-(2/3) (a_0 / \delta L) \\ (\beta_1 / (\epsilon K \#)^{1/2}) [\delta (L/a_0) z + (1 + (\gamma_*^2 / \beta_1^2) \\ \epsilon K \#)]^{3/2}] F(x, y) \right]$$

Deberemos discutir a continuación que tipo de funciones corresponden a  $F(x, y)$ . Al presente el único requerimiento que hemos fijado sobre  $X_2 = F(x, y)$  es el de satisfacer la ecuación (V.5-13), lo que sin lugar a dudas implica una severa limitación sobre las formas de las perturbaciones superficiales. Supongamos que a  $\tau = 0$  existe una perturbación en el campo de densidad descripta por

$$(V.5-16) \quad \tilde{\rho}_0(x, y, 0, 0) = f(x, y)$$

A partir de la (V.5-15) tendremos que

$$\tilde{\rho}_0(x, y, 0, 0) = \tilde{\rho}(x, y, 0, 0) = (\beta_1 / (\epsilon K \#)^{1/2}) [1 + (\gamma_*^2 / \beta_1^2)]$$

$$\epsilon K\#]^{1/2} z_{1/3}^{1/3} [-(2/3) (a_0/\delta L) (\beta_1/(\epsilon K\#)^{1/2} [1+(\gamma_*^2/\beta_1^2)\epsilon K\#]^{3/2})] F(x,y)$$

por lo tanto

$$(V.5-17) \quad f(x,y) = G(\beta_1, \gamma_*) F(x,y)$$

donde

$$G(\beta_1, \gamma_*) = (\beta_1/(\epsilon K\#)^{1/2}) [1+(\gamma_*^2/\beta_1^2)\epsilon K\#]^{1/2} z_{1/3}^{1/3} [-(2/3) (a_0/\delta L) (\beta_1/(\epsilon K\#)^{1/2}) [1+(\gamma_*^2/\beta_1^2)\epsilon K\#]^{3/2}]$$

Esto significa que

$$(V.5-18) \quad F(x,y) = [f(x,y)/G(\beta_1, \gamma_*)]$$

En consecuencia  $f(x,y)$  deberá ser solución de la ecuación (V.5-13). En otras palabras la perturbación inicial en superficie deberá satisfacer ciertas condiciones de acuerdo al campo de velocidades horizontales ( $u_0(x,y)$  y  $v_0(x,y)$ ).

Las ecuaciones (V.3-19) y (V.5-19) son casos particulares de la más general (V.5-13)

$$(V.5-13) \quad v_0 (\partial X_2 / \partial y) + [u_0 / (1 - \tan \Phi_0 (L/a_0) y)] (\partial X_2 / \partial x) = -K\# \gamma_*^2 X_2$$

Esta es una típica ecuación diferencial lineal a primer orden, también llamada "ecuación de Lagrange" (Miller, 1941; Petrovsky, 1945).

Como hemos visto en la Sección V.1, el campo de presión en un océano barotrópico puede ser representado mediante

$$(V.1-1) \quad p_0(\Phi, \lambda) = A(\Phi, \lambda)$$

mientras que los campos de velocidades correspondientes estarán dados por:

$$(V.1-2) \quad \begin{cases} v_o = (f_o/f) (\cos\phi_o/\cos\phi) (\partial A/\partial x) = (f_o/f) (L/a_o \cos\phi) (\partial A/\partial \lambda) \\ u_o = -(f_o/f) (\partial A/\partial y) = -(f_o/f) (L/a_o) (\partial A/\partial \phi) \\ w_o = \rho_o = 0 \end{cases}$$

En la aproximación del plano  $\beta$ .

$$\begin{aligned} (1/\sin\phi) &\approx (1/\sin\phi_o) - [\cos\phi_o/\sin^2\phi_o] (L/a_o) y + \dots \\ [1/(\sin\phi\cos\phi)] &\approx [1/(\sin\phi_o\cos\phi_o) - [(1-2\sin^2\phi_o)/(\sin^2\phi_o\cos^2\phi_o)] \\ &\quad (L/a_o) y + \dots \end{aligned}$$

Por lo tanto, las (V.1-2) tomarán la forma

$$(V.5-19) \quad \begin{cases} v_o = [1 - [(1-2\sin^2\phi_o)/(\sin\phi_o\cos\phi_o)] (L/a_o) y] (\partial A/\partial x) \\ u_o = -[1 - (\cos\phi_o/\sin\phi_o) (L/a_o) y] (\partial A/\partial y) \\ w_o = \rho_o = 0 \end{cases}$$

En consecuencia podremos escribir la (V.5-13) en la forma

$$(V.5-20) \quad \begin{aligned} &[1 - [(1-2\sin^2\phi_o)/(\sin\phi_o\cos\phi_o)] (L/a_o) y] (\partial A/\partial x) \\ &(\partial X_2/\partial y) - [(1-\cot\phi_o) (L/a_o) y] / (1-\tan\phi_o) (L/a_o) y] \\ &(\partial A/\partial y) (\partial X_2/\partial x) = -K\# \gamma_*^2 X_2 \end{aligned}$$

con ecuaciones subsidiarias dadas por

$$(V.5-21) \quad \begin{aligned} &- \left[ [(1-\cot\phi_o) (L/a_o) y] / (1-\tan\phi_o) (L/a_o) y \right] (\partial A/\partial y) \right]^{-1} dx = \\ &\left[ [1 - [(1-2\sin^2\phi_o)/(\sin\phi_o\cos\phi_o)] (L/a_o) y] (\partial A/\partial x) \right]^{-1} dy \\ &= (K\# \gamma_*^2 X_2)^{-1} (-dX_2) \end{aligned}$$

En teoría es posible encontrar una solución general o integral completa de (V.5-20) (Petrovsky, 1945; Garabedian, 1964) a partir de dos

soluciones independientes de las ecuaciones diferenciales ordinarias (V.5-21). Utilizando la (IV.2-17) podremos escribir (V.5-21) en la forma

$$\begin{aligned} & [(1-a_1y)(1-c_1y)/(1-b_1y)] (\partial A/\partial x) (\partial X_2/\partial y) - (\partial A/\partial y) \\ & (\partial X_2/\partial x) = -K\#\gamma_*^2 [(1-c_1y)/(1-b_1y)] X_2 \end{aligned}$$

Supongamos que  $(\partial A/\partial y) = f(x)$  y  $(\partial A/\partial x) = h(y)$ , esto implica (V.5-22)

$$A = mxy + n$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} (V.5-23) \quad & [(1-a_1y)(1-c_1y)/(1-b_1y)] my (\partial X_2/\partial y) - nx (\partial X_2/\partial x) = \\ & -K\#\gamma_*^2 [(1-c_1y)/(1-b_1y)] X_2 \end{aligned}$$

Ahora es posible intentar una nueva separación de variables

$$(V.5-24) \quad X_2(x, y) = X_{21}(x) X_{22}(y)$$

obteniendo

$$\begin{aligned} (V.5-25) \quad & [(1-a_1y)(1-c_1y)/(1-b_1y)] (dX_{22}/dy) (my/X_{22}) - \\ & (dX_{21}/dx) (mx/X_{21}) = -K\#\gamma_*^2 [(1-c_1y)/(1-b_1y)] \end{aligned}$$

Esto implica

$$(V.5-26a) \quad (1-a_1y) my (dX_{22}/dy) + (K\#\gamma_*^2 - \lambda) X_{22} = 0$$

y

$$(V.5-26b) \quad mx (dX_{21}/dx) - \lambda X_{21} = 0$$

Para poder resolver la ecuación (V.5-26a) introduciremos un cambio de variables

$$(V.5-27) \quad \Gamma = (-1/m) \ln[(1-a_1y)/y] \quad y \quad \psi(\Gamma) = X_{22}(y)$$

Por lo tanto

$$(V.5-28) \quad (d\psi/d\Gamma) + (K\#\gamma_*^2 - \lambda) \psi = 0$$

con solución



$$\psi(\Gamma) = \exp[(\lambda - K\gamma_*^2)\Gamma]$$

o

$$(V.5-29) \quad X_{22} = \exp\left[\frac{(K\gamma_*^2 - \lambda)}{m} \ln\left[\frac{(1 - a_1 y)}{y}\right]\right]$$

Por otra parte la solución de (V.5-26b) es (Kamke, 1959)

$$(V.5-30) \quad X_{21} = C[x^{(\lambda/m)}]$$

A partir de (V.5-25), (V.5-29) y (V.5-30) tendremos que

$$(V.5-31) \quad X_2(x, y) = C[x^{(\lambda/m)}] \left[\frac{(1 - a_1 y)}{y}\right]^{\frac{(K\gamma_*^2 - \lambda)}{m}}$$

pero dicha solución tiene una singularidad en  $y=0$ , para cualquier valor de  $\phi_0$ . Recordando de (V.5-17) que

$$\tilde{\rho}(x, y, 0, 0) = G(\beta_1, \gamma_*) X_2(x, y)$$

podemos concluir que cerca de  $y=0$  la perturbación puede ser mayor que 1. En consecuencia no es posible encontrar una solución apropiada al problema de la perturbación que satisfaga la (V.5-20), cuando

$$p_0 = A(x, y) = mxy + n$$

La relación (V.5-17) introduce una restricción sobre cualquier posible solución de (V.5-20), ya que implica que  $X_2$  debe estar acotada para  $-1 \leq y \leq 1$  y  $10^\circ \leq \phi_0 \leq 80^\circ$ . Resulta en consecuencia un problema bastante difícil el encontrar una solución analítica de la ecuación (V.5-21) cuando  $A=A(x, y)$ , aún para los casos más simples. En general los factores

$[(1 - \cot\phi_0(L/a_0)y)/(1 - \tan\phi_0(L/a_0)y)]$  y  $[(1 - [(1 - 2\sin^2\phi_0)/(\sin\phi_0 \cos\phi_0)](L/a_0)y)]$  introducen severas limitaciones para resolver las ecuaciones por separación de variables, sustitución o aplicando multiplicadores. Por lo tanto podemos intentar otra aproximación al problema en sentido inverso: "Dada una perturbación específica, es decir una determinada dependencia horizontal para la perturbación, deberemos encontrar las formas de  $u_0(x, y)$  y  $v_0(x, y)$  de manera tal que la ecuación (V.5-13) se satisfaga".

Supongamos que

$$(V.5-32) \quad X_2(x, y) = \sum_{j, m} b'_{j, m} \exp[i(jx + my)] \quad \text{con} \quad \sum_{j, m} |b'_{j, m}| < 1$$

si sustituimos (V.5-32) en (V.5-13), obtenemos

$$(1-a_1y) (\partial A/\partial x) \sum_{j,m} i m b_{j,m}^! \exp[i(jx+my)] - [(1-b_1y)/(1-c_1y)] (\partial A/\partial y) \sum_{j,m} i j b_{j,m}^! \exp[i(jx+my)] = -K\# \gamma_*^2 \sum_{j,m} b_{j,m}^! \exp[i(jx+my)]$$

En particular para un par de modos normales (j,m)

$$(1-a_1y) (\partial A/\partial x) i m - [(1-b_1y)/(1-c_1y)] (\partial A/\partial y) i j = -K\# \gamma_*^2$$

o

$$(V.5-33) \quad \gamma_*^2 = (i/K\#) [j [(1-b_1y)/(1-c_1y)] (\partial A/\partial y) - m(1-a_1y) (\partial A/\partial x)]$$

Esto significa que la ecuación (V.5-13) o su equivalente, (V.5-33), funcionan como un filtro con respecto a los modos normales de la perturbación.

Analizaremos diferentes casos:

A<sub>1</sub>) Supongamos que el océano barotrópico solamente tenga velocidad zonal.

Esto significa que  $(\partial A/\partial x) = 0$  y la ecuación (V.5-33) tomará la forma

$$(dA/dy) = -i(K\#/j) \gamma_*^2 [(1-c_1y)/(1-b_1y)]$$

por lo tanto,

$$A(y) = -iK\# (\gamma_*^2/j) [(c_1/b_1)y + ((c_1-b_1)/b_1^2) \ln(1-b_1y)] + \text{cte.}$$

Como  $p_0(y) = A(y)$  es una función real, es necesario que  $\gamma_*^2 = ib$ . En consecuencia,

$$(V.5-34) \quad p_0(y) = A(y) = (bK\#/j) [(c_1/b_1)y + ((c_1-b_1)/b_1^2) \ln(1-b_1y)] + \text{cte.}$$

La función entre corchetes depende de la latitud media  $\phi_0$  y de la coordenada  $y$ . En particular, en el dominio  $10^\circ \leq \phi_0 \leq 80^\circ$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ , para una determinada latitud media, el máximo de la función entre corchetes se da en  $y = 1$  y el mínimo en  $y = -1$ . (Ver Tabla I). En consecuencia si tomamos la constante igual a cero en la ecuación (V.5-34)

TABLA I

LATITUD MEDIA $\theta_0$ (Grados)	(Y=1)	P(Y)		G(Y)	
	(Y=-1)	MAXIMO	MINIMO	MAXIMO	MINIMO
10°	Y=+1	1.4616		-0.9824	
	Y=-1		-0.7986		-1.0176
15°	Y=+1	1.2336		-0.9732	
	Y=-1		-0.8606		-1.0268
20°	Y=+1	1.1468		-0.9636	
	Y=-1		-0.8990		-1.0364
25°	Y=+1	1.0982		-0.9534	
	Y=-1		-0.9264		-1.0466
30°	Y=+1	1.0654		-0.9423	
	Y=-1		-0.9482		-1.0577
35°	Y=+1	1.0403		-0.9300	
	Y=-1		-0.9667		-1.0700
40°	Y=+1	1.0192		-0.9161	
	Y=-1		-0.9837		-1.0839
45°	Y=+1	1.0000		-0.9000	
	Y=-1		-1.0000		-1.1000
50°	Y=+1	0.9813		-0.8808	
	Y=-1		-1.0167		-1.1192
55°	Y=+1	0.9618		-0.8572	
	Y=-1		-1.0348		-1.1428
60°	Y=+1	0.9399		-0.8268	
	Y=-1		-1.0556		-1.1732
65°	Y=+1	0.9134		-0.7855	
	Y=-1		-1.0814		-1.2145
70°	Y=+1	0.8779		-0.7253	
	Y=-1		-1.1164		-1.2747
75°	Y=+1	0.8236		-0.6268	
	Y=-1		-1.1702		-1.3732
80°	Y=+1	0.7220		-0.4329	
	Y=-1		-1.2715		-1.5671

Donde:

$$F(Y) = \frac{c_1}{b_1} Y + \frac{c_1 - b_1}{b_1^2} \log(1 - b_1 Y)$$

$$G(Y) = \frac{c_1}{b_1} (1 - b_1 Y) - \frac{c_1 - b_1}{b_1}$$

y  $a_1, b_1, c_1$  están dados por (IV.2-17)

$$(V.5-35) \quad |j| \geq |K \# b| \left| \left( \frac{c_1}{b_1} \right) + \left[ \frac{c_1 - b_1}{b_1^2} \right] \ln(1 - b_1 Y) \right|$$

y esto satisface la desigualdad  $|p_0(y)| \leq 1$ 

Por otra parte, la velocidad zonal debe satisfacer

$$u_0 = -(1 - b_1 Y) (dA/dy)$$

lo que implica

$$(V.5-36) \quad u_0(y) = -(bK\#/j) \left[ (c_1/b_1)(1-b_1y) - [(c_1-b_1)/b_1] \right]$$

Pero ahora la función entre corchetes tiene un máximo en  $y = 1$  y un mínimo en  $y = -1$ , para cada  $\phi_0$ . En todo el dominio la función será negativa y el valor absoluto de los mínimos será mayor que el correspondiente valor absoluto de los máximos. Si elegimos

$$(V.5-37) \quad |j| \geq |K\#b| \left| [(c_1-b_1)/b_1] - (c_1/b_1)(1+b_1) \right|$$

obtenemos  $|u_0(y)| \leq 1$ .

Los valores correspondientes a los términos a la derecha de la desigualdad en la ecuación (V.5-37) son mayores que los correspondientes a la (V.5-35) cuando  $10^\circ \leq \phi_0 < 31^\circ$ , mientras que para  $31^\circ \leq \phi_0 \leq 80^\circ$  ocurre lo contrario. Esto significa que de acuerdo a la latitud media debemos elegir un  $j$ -límite como el valor mayor entre (V.5-34) y (V.5-36). Ambas ecuaciones implican que la (V.5-32), para  $(\partial A/\partial x) = 0$ , trabaja como un filtro selectivo sobre los modos normales zonales de la perturbación pero no existe ninguna restricción sobre los modos meridionales. En otras palabras: "Un océano barotrópico sin velocidad meridional solamente puede aceptar modos zonales fuera del intervalo abierto  $-(N(\phi_0), N(\phi_0))$  o  $(-M(\phi_0), M(\phi_0))$  si  $10^\circ \leq \phi_0 < 31^\circ$  o  $31^\circ \leq \phi_0 \leq 80^\circ$  respectivamente." Donde:

$$N(\phi_0) = \left[ (c_1/b_1) + [(c_1-b_1)/b_1^2] \ln(1-b_1) \right] |bK\#|$$

y

$$M(\phi_0) = \left[ (c_1/b_1)(1-b_1y) - [(c_1-b_1)/b_1] \right] |bK\#|$$

Hemos usado la expresión "intervalo abierto" de acuerdo a su significado en análisis matemático (Watson, 1961; Scott and Tims, 1966), es decir:

$$(a, b) = [x \in \mathbb{R} / a < x < b]$$

A<sub>2</sub>) Supongamos un océano barotrópico que tiene únicamente velocidad meridional. Esto significa  $(\partial A/\partial y) = 0$  y en consecuencia la (V.5-32) tomará la forma

$$(V.5-38) \quad m(1-a_1y) (dA/dx) = iK\# \gamma_*^2$$

pero la solución de dicha ecuación implica que  $A = A(x, y)$  y este hecho con tradice nuestra hipótesis. En consecuencia  $m$  debe ser cero y esto signifi- ca que el sistema unicamente acepta perturbaciones con modos zonales. "Un océano barotrópico con velocidad zonal unicamente podrá aceptar perturba- ciones con modos zonales".

$A_3$ ) Sea el caso de un océano barotrópico con velocidad arbitraria. Estu- diaremos tres casos diferentes:

$A_{3a}$ )  $j = 0$ . Esto significa una perturbación con dependencia horizontal en la forma

$$(V.5-39) \quad x_2(y) = \sum_m b'_m \exp[i(my)] \quad \text{con} \quad \sum_m |b'_m| < 1$$

En tal caso la (V.5-33) podrá ser escrita como

$$(V.5-40) \quad m(1-a_1y) (\partial A / \partial y) = iK\# \gamma_*^2$$

con solución

$$A(x, y) = [iK\#\gamma_*^2 / (m(1-a_1y))] x + f(y)$$

En consecuencia  $A(x, y)$  será una función real si y solamente si  $\gamma_*^2 = ib$

$$(V.5-41) \quad A(x, y) = -(K\#b/m) [x / (1-a_1y)] + f(y)$$

Sabemos que

$$(V.5-42) \quad v_0 = [1 - [(1 - 2\sin^2\phi_0) / \sin\phi_0 \cos\phi_0] (L/a_0)y] (\partial A / \partial x) = -(K\#b/m)$$

y

$$(V.5-43) \quad u_0 = -(1-b_1y) (\partial A / \partial y) = -(1-b_1y) [(df/dy) - (K\#ba_1/m) [x / (1-a_1y)^2]]$$

Por lo tanto a partir de (V.5-42)

$$|(bK\#) / m| \leq 1$$

lo cual implica que

$$(V.5-44) \quad |bK\#| \leq |m|$$

Esto significa que los modos meridionales de la perturbación que son per- mitidos deben estar fuera del intervalo abierto  $(-bK\#, bK\#)$ .

A partir de (V.5-42)

$$|(1-b_1y)| \left| \frac{df}{dy} - (bk\#/m)a_1 \left[ \frac{x}{(1-a_1y)^2} \right] \right| \leq 1$$

sin embargo  $(1-b_1y) > 0$  para  $10^\circ \leq \phi_0 \leq 80^\circ$  y  $-1 \leq y \leq 1$ , en consecuencia

$$(V.5-45) \quad \left[ -\frac{1}{(1-b_1y)} - v_0 a_1 \left[ \frac{x}{(1-a_1y)^2} \right] \right] \leq \frac{df}{dy} \leq \left[ \frac{1}{(1-b_1y)} - v_0 a_1 \left[ \frac{x}{(1-a_1y)^2} \right] \right]$$

La Figura 1 muestra la forma de la función  $g(y) = (a_1/(1-a_1y)^2)$  para diferentes valores de  $\phi_0$ .

De la ecuación (V.5-41) tenemos que

$$(V.5-46) \quad -(1+v_0x(1-a_1y)^{-1}) \leq f(y) \leq (1-v_0x(1-a_1y)^{-1})$$

donde  $(1-a_1y)$  es una función positiva para  $-1 \leq y \leq 1$  y  $10^\circ \leq \phi_0 \leq 80^\circ$ .

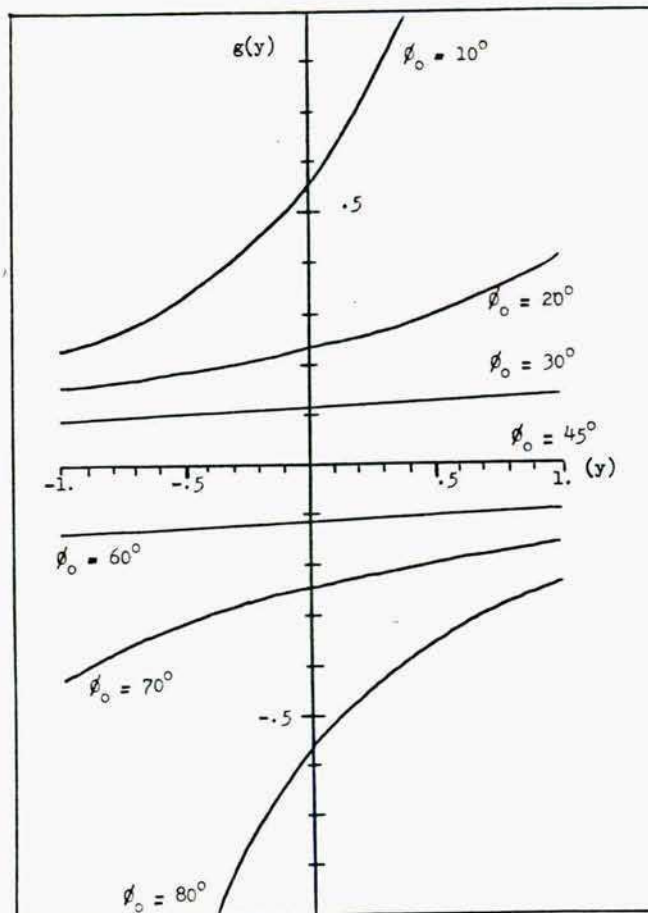


Figura 1:  $g(y) = \left[ \frac{a_1}{(1-a_1y)^2} \right]$  para distintos valores de  $\phi_0$ .  $a_1$  esta definida de acuerdo a (IV.2-16).

$A_{3b}) m = 0$ . Esto significa que estamos frente a una perturbación con dependencia horizontal en la forma

$$(V.5-47) \quad X_2(x) = \sum_j b'_j \exp[i(jx)] \quad \text{con} \quad \sum_j |b'_j| < 1$$

Por lo tanto la (V.5-33) estará dada por

$$(V.5-48) \quad [(1-b_1 y)/(1-c_1 y)] (\partial A/\partial y) = -i(K\#\gamma_*^2/j)$$

con solución

$$(V.5-49) \quad A(x,y) = -i(K\#\gamma_*^2/j) [(c_1/b_1)y + ((c_1-b_1)/b_1^2) \ln(1-b_1 y)] + f(x)$$

Sin embargo  $A(x,y) = p_0(x,y)$  deberá ser una función real, en consecuencia  $\gamma_*^2 = ib$  y

$$(V.5-50) \quad v_0(x,y) = (1-a_1 y) (df/dx)$$

$$(V.5-51) \quad u_0(x,y) = (bK\#/j) \left[ [(c_1-b_1)/b_1] - (c_1/b_1)(1-b_1 y) \right]$$

(Debemos notar que la (V.5-51) es exactamente la ecuación (V.5-36)). A partir de (V.5-50) obtendremos que

$$(V.5-52) \quad |j| \geq |bK\#| \left| (c_1/b_1)y + [(c_1-b_1)/b_1^2] \ln(1-b_1 y) + f(x) \right|$$

donde la (V.5-35) es un caso particular cuando  $f(x) = 0$ . Utilizando la (V.5-50) tendremos la desigualdad

$$(V.5-53) \quad |(df/dy)| \leq (1-a_1 y)^{-1}$$

y similarmente a partir de la (V.5-51)

$$(V.5-37) \quad |j| \geq |K\#b| \left| [(c_1-b_1)/b_1] - (c_1/b_1)(1-b_1 y) \right|$$

En (V.5-53) la función  $(1-a_1 y)$  es positiva para  $-l \leq y \leq 1$  y  $10^\circ \leq \phi_0 \leq 80^\circ$  pero su pendiente cambia de signo en  $\phi_0 = 45^\circ$ . En particular  $1/(1-a_1 y)$  está limitada entre los valores .6454 y 2.2197.

La elección de los límites para  $j$ , entre (V.5-52) y (V.5-37), resulta más compleja que en el caso  $A_1$ , pues ahora la función  $f(x)$  desem-

peña un importante papel. Esta función retiene un alto grado de libertad ya que la desigualdad (V.5-53) implica una restricción sobre la pendiente de  $f(x)$ , pero no sobre la función en si misma. Tal como en el caso  $A_1$  los modos normales deben estar fuera de cierto intervalo real, pero para este caso antes de fijar los límites debemos conocer la forma de  $f(x)$ .  $A_{3c}$ )  $j \neq 0$  y  $m \neq 0$ . Esto implica una perturbación general con dependencia horizontal en la forma

$$(V.5-54) \quad X_2(x,y) = \sum_{j,m} b_{jm} \exp[i(jx+my)]$$

Para obtener la solución general de la ecuación (V.5-33) podremos utilizar la (V.5-34) como solución particular, mientras que la ecuación homogénea tomará la forma

$$(V.5-55) \quad m(1-a_1y)(1-c_1y)(\partial A/\partial x) - j(1-b_1y)(\partial A/\partial y) = 0$$

Utilizando el método de separación de variables, podemos suponer que

$$(V.5-56) \quad A_h(x,y) = A_1(x)A_2(y)$$

por lo tanto

$$(V.5-57) \quad (m/j)A_1^{-1}(dA_1/dx) = [(1-b_1y)/[(1-a_1y)(1-c_1y)]]A_2^{-1}(dA_2/dy)$$

Esto significa que

$$(V.5-58a) \quad (m/j)A_1^{-1}(dA_1/dx) = \delta_*^2$$

y

$$(V.5-58b) \quad [(1-b_1y)/[(1-a_1y)(1-c_1y)]]A_2^{-1}(dA_2/dy) = \delta_*^2$$

Ambas relaciones tendrán soluciones en forma exponencial

$$(V.5-59a) \quad A_1(x) = D \exp[(j/m)\delta_*^2 x]$$

y

$$(V.5-59b) \quad X_2(y) = F \exp\left[\delta_*^2 \left[ \left( \frac{(c_1 - b_1)}{b_1^2} + \frac{a_1 c_1}{b_1^3} + \frac{a_1}{b_1^2} \right) \ln(1 - b_1 y) - \left( \frac{(a_1 + c_1)}{b_1} - 2 \frac{a_1 c_1}{b_1^3} \right) y - \frac{a_1 c_1}{2 b_1^3} (1 - b_1 y)^2 + \frac{c_1 a_1}{2 b_1^3} \right] \right]$$



TABLE II

$\tilde{p}(x, y, z, \tau) = \tilde{p}(z) X_2(x, y)$ $\exp(-\beta^2 \tau)$	$P_0(x, y)$	$u_0(x, y)$	$v_0(x, y)$
$X_2(x) = \sum_j b_j \exp(i j x)$	$P_0(x) = f(x)$ $ f(x)  \leq 1$ $ df/dx  \leq (1-a_1 y)^{-1}$	$0$	$v_0(x, y) = (1-a_1 y)  df(x)/dx $
$X_2(y) = \sum_m b_m \exp(i m y)$ $ k \# b  \leq  m $	$P_0(x, y) = -(k \# b/m)  x/(1-a_1 y) $ $+ f(y)$ $ f(y) + v_0(x/(1-a_1 y))  \leq 1$ $ df/dy + v_0(a_1 x/(1-a_1 y)^2)  \leq (1-b_1 y)^{-1}$	$u_0(x, y) = \pm (1-b_1 y) [(df/dy) - (k \# b/m)  a_1 x/(1-a_1 y)^2 ]$	$v_0 = -(k \# b/m)$
$X_2(x, y) = \sum_{j,m} b_{j,m} \exp[i(jx + my)]$ $ j  \geq  k \# b  \quad  c_1 - b_1 /b_1 - (c_1/b_1)  b_1  (1+b_1) $ if $31^\circ \leq \phi_0 \leq 80^\circ$ $ j  \geq  k \# b  \quad  c_1/b_1  + (c_1 - b_1)/b_1^2  \ln(1-b_1 y) $ if $10^\circ \leq \phi_0 < 31^\circ$	$P_0(y) = (k \# b/j) [(c_1/b_1) y + (c_1 - b_1)/b_1^2  \ln(1-b_1 y) ] + cte$	$u_0(y) = -(k \# b/j) [(c_1/b_1) (1-b_1 y) - (c_1 - b_1)/b_1]$	$0$

Por lo tanto

$$(V.5-60) \quad A(x,y) = A_h(x,y) + A_p(x,y) = E \exp[\delta_*^2 \left[ (j/m)x + \left( (c_1 - b_1)/b_1^2 \right) + \right. \\ \left. (a_1 c_1 / b_1^3) + (a_1 / b_1^2) \right] \ln(1 - b_1 y) - \left[ (a_1 + c_1)/b_1 - 2(a_1 c_1 / b_1^3) \right] y - (a_1 c_1 / 2b_1^3) (1 - b_1 y)^2 + (c_1 a_1 / 2b_1^3) \left. \right] + (bK\#/j) \left[ (c_1 / b_1) y + \left( (c_1 - b_1)/b_1^2 \right) \ln(1 - b_1 y) \right]$$

pero  $A(x,y) = p_o(x,y)$  debe ser una función real y  $|A(x,y)| < 1$ . Esto implica que  $A_h(x,y)$  no es apropiada para nuestro problema. Luego la solución (V.5-60) tomará la forma

$$(V.5-61) \quad A(x,y) = A_p(x,y) \quad (E=0)$$

y esto es simplemente el caso  $A_1$ .

La Tabla II resume las posibles dependencias horizontales de la perturbación con respecto al flujo básico. Cualquier fluctuación de orden  $\epsilon$  en el campo de densidad puede ser una perturbación sólo si su dependencia horizontal y el flujo básico satisfacen cualquiera de los tres casos de la Tabla II.

Ahora nos corresponde estudiar bajo que condiciones una perturbación puede inestabilizar al flujo barotrópico. De acuerdo a la forma general del sistema de ecuaciones (V.5-1,5) esperamos que la dependencia temporal de  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{w}$  y  $\tilde{p}$  sea de la forma  $\exp(-\beta_1^2 \tau)$ . Esto significa que la estabilidad de las diferentes soluciones está directamente relacionada a la naturaleza del autovalor  $\beta_1^2$ .

Fijaremos como condición de contorno en el campo de la densidad perturbada las siguientes relaciones:

$$(V.5-62a) \quad \tilde{\rho} = 0 \quad \text{para} \quad z = -1$$

$$(V.5-62b) \quad (\partial \tilde{\rho} / \partial z) = 0 \quad \text{para} \quad z = 0$$

En el caso más simple de un océano en reposo la perturbación de la densidad es

$$(V.2-18) \quad \tilde{\rho}(x,y,z,\tau) = \exp(-\beta_1^2 \tau) \left[ |\beta_1 / (\epsilon K\#)|^{1/2} (\delta(L/a_o) z + 1)^{1/2} \right. \\ \left. z_{1/3}^{[-(2/3)(a_o/\delta L)(\epsilon K\#)^{-1/2} \beta_1 (\delta(L/a_o) z + 1)^{3/2}] \right] \tilde{\rho}_1 \tilde{\rho}_2$$

Si introducimos el cambio de variables

$$(V.5-63) \quad \Xi = (2/3) (a_0/\delta L) [\beta_1^2/(\epsilon K\#)]^{1/2} (\delta(L/a_0)z+1)^{3/2}$$

la solución (V.2-18) podrá ser escrita como

$$(V.5-64) \quad \tilde{\rho}(x,y,z,\tau) = A \exp(-\beta_1^2 \tau) \left[ [\beta_1/(\epsilon K\#)]^{1/2} [(2/3) (a_0/\delta L) (\beta_1/(\epsilon K\#))^{1/2}]^{-1/3} \Xi^{1/3} z_{1/3}(-\Xi) \right] \tilde{\rho}_1 \tilde{\rho}_2$$

y las condiciones de contorno tomarán la forma

$$(V.5-65a) \quad \tilde{\rho}(\Xi_1) = 0 \quad \text{para} \quad \Xi_1 = (2/3) (a_0/\delta L) (\beta_1/(\epsilon K\#))^{1/2} (1 - \delta(L/a_0))^{3/2} = b^{3/2} \Xi_2$$

$$(V.5-65b) \quad (\partial \tilde{\rho} / \partial \Xi) (\partial \Xi / \partial z) = 0 \quad \text{para} \quad \Xi_2 = (2/3) (a_0/\delta L) (\beta_1/(\epsilon K\#))^{1/2}$$

En consecuencia las ecuaciones anteriores implicarán

$$(V.5-66) \quad z_{1/3}(-\Xi_1) = 0$$

(porque  $\Xi=0$  implica que  $\beta_1=0$  y esto significa  $\tilde{\rho}=0$ )

y

$$(V.5-67) \quad (\beta_1/(\epsilon K\#))^{1/2} (\partial \rho / \partial \Xi) \Big|_{\Xi_2} = 0$$

A partir de la (V.2-16) y utilizando las fórmulas de recurrencia siguientes (Antosiewicz, 1964; Watson, 1958)

$$(V.5-68) \quad 2\nu Z'_\nu(x) = x[Z_{\nu-1}(x) + Z_{\nu+1}(x)]$$

$$(V.5-69) \quad 2Y'_\nu(x) = Y_{\nu-1}(x) - Y_{\nu+1}(x)$$

$$(V.5-70) \quad 2J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)$$

luego de algún trabajo algebraico es posible obtener

$$(V.5-71) \quad (d[x^\nu Z_\nu(-x)]/dx) = -x^\nu Z_{\nu-1}(-x)$$

y utilizando (V.5-67) y (V.5-64) obtendremos que

$$(V.5-72) \quad \left. (\partial \tilde{\rho} / \partial z) \right|_{z=0} = 0 \quad \circ \quad Z_{-2/3}(-\Xi_2) = 0$$

En consecuencia las condiciones de contorno (V.5-67) y (V.5-72) tomarán la forma

$$(V.5-73a) \quad Z_{1/3}(-\Xi_1) = 0$$

$$(V.5-73b) \quad Z_{-2/3}(-\Xi_2) = 0$$

A partir de la definición de funciones cilíndricas (V.2-16) podemos escribir

$$(V.5-74) \quad Z_{1/3}(-\Xi_2) = c'_1 J_{1/3}(-\Xi_2) + c'_2 Y_{1/3}(-\Xi_2)$$

y de acuerdo con la fórmula de recurrencia (V.5-67), la (V.5-72b) tomará la forma

$$(V.5-75) \quad Z_{-2/3}(-\Xi_2) = c'_1 [(2/3)(-\Xi_2)^{-1} J_{1/3}(-\Xi_2) - J_{4/3}(-\Xi_2)] + c'_2 [(2/3)(-\Xi_2)^{-1} Y_{1/3}(-\Xi_2) - Y_{4/3}(-\Xi_2)]$$

A partir de la definición de las funciones de Weber (Watson, 1958; Olver 1964)

$$(V.5-76) \quad Y_\nu(-x) = [J_\nu(-x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(-x)] / \sin(\nu\pi)$$

es posible escribir el sistema (V.5-72a,b) como sigue

$$(V.5-77) \quad \left\{ \begin{array}{l} c'_1 J_{1/3}(-\Xi_1) + c'_2 \cot(\pi/3) J_{1/3}(-\Xi_1) - [J_{-1/3}(-\Xi_1) / \sin(\pi/3)] = 0 \\ -c'_1 [(2/3)(\Xi_2)^{-1} J_{1/3}(-\Xi_2) + J_{4/3}(-\Xi_2)] - c'_2 [(2/3) [J_{1/3}(-\Xi_2) \cot(\pi/3) - (J_{-1/3}(-\Xi_2) / \sin(\pi/3))] + J_{4/3}(-\Xi_2) \cot(4\pi/3) - (J_{-4/3}(-\Xi_2) / \sin(4\pi/3))] = 0 \end{array} \right.$$

Una condición necesaria y suficiente para que el sistema (V.5-77) tenga solución no trivial es

$$\begin{aligned} \text{Det } M = & -[J_{1/3}(-\varepsilon_1)/\sin(\pi/3)] \left[ (2/3)(-\varepsilon_2)^{-1} \left[ (1/2)(-\varepsilon_2) - J_{-1/3}(-\varepsilon_2) \right] \right. \\ & \left. + (1/2)J_{4/3}(-\varepsilon_2) + J_{-4/3}(-\varepsilon_2) \right] + (1/\sin(\pi/3)) \left[ (1/2)J_{1/3}(-\varepsilon_1) - \right. \\ & \left. J_{-1/3}(-\varepsilon_1) \right] \left[ (2/3)(\varepsilon_2)^{-1} J_{1/3}(-\varepsilon_2) + J_{4/3}(-\varepsilon_2) \right] = 0 \end{aligned}$$

pero

$$\cos(4\pi/3) = -\cos(\pi/3) = -.5$$

$$\sin(4\pi/3) = -\sin(\pi/3) = -.8660254$$

en consecuencia

$$\begin{aligned} \text{(V.5-78)} \quad \text{Det } M = & -(\sin(\pi/3))^{-1} [J_{1/3}(-\varepsilon_1)J_{-4/3}(-\varepsilon_2) + J_{-1/3}(-\varepsilon_1) \\ & J_{4/3}(-\varepsilon_2)] = 0 \end{aligned}$$

La ecuación (V.5-78) representa una relación lineal entre funciones de Bessel de orden fraccionario, las que pueden ser representadas en términos de funciones de Airy (Antosiewicz, 1964)

$$\text{(V.5-79)} \quad \begin{cases} J_{\pm 1/3}(\Gamma^*) = (1/2)(3/w^*)^{1/2} [3^{1/2} A_1(-w^*) - B_1(-w^*)] \\ J_{\pm 2/3}(\Gamma^*) = (1/2)(3^{1/2}/w^*) [\pm 3^{1/2} A_1(-w^*) + B_1(-w^*)] \end{cases}$$

donde  $\Gamma^* = (2/3)(w^*)^{3/2}$

Las funciones de Airy están definidas en la forma

$$A_1(w^*) = c_1^* f(w^*) - c_2^* g(w^*)$$

$$B_1(w^*) = 3^{1/2} [c_1^* f(w^*) + c_2^* g(w^*)]$$

donde

$$\begin{aligned} f(w^*) &= 1 + (w^{*3}/3!) + 4(w^{*6}/6!) + 28(w^{*9}/9!) + \dots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 3^k (1/3)_k [w^{*3k}/3k] \end{aligned}$$

$$g(w^*) = w^* + 2(w^{*4}/4!) + 10(w^{*7}/7!) + 80(w^{*10}/10!) + \dots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 3^k (2/3)_k [w^{*3k+1}/(3k+1)]$$

y

$$[x + (1/3)]_0 = 1 ; 3k[x + (1/3)]_k = (3x+1)(3x+4)\dots(3x+3k-2)$$

$$c_1^* = A_1(0) = [B_1(0)/3^{1/2}] = [3^{-2/3}/\Gamma^*(2/3)] = .35502805$$

$$c_2^* = A_1'(0) = [B_1'(0)/3^{1/2}] = [3^{-1/3}/\Gamma^*(1/3)] = .25881940$$

Para aplicar la (V.5-79), podemos introducir una nueva variable

$$(V.5-80) \quad \left\{ \begin{array}{l} w^* = [ (a_0 \beta_1 / \delta L (\epsilon K \#))^{1/2} ]^{2/3} [ \delta (L/a_0) z + 1 ] \\ w^*_1 = [ a_0 \beta_1 / \delta L (\epsilon K \#) ]^{1/2} ]^{2/3} [ 1 - (L/a_0) ] = b w_2 \\ w^*_2 = [ a_0 \beta_1 / \delta L (\epsilon K \#) ]^{1/2} ]^{2/3} \end{array} \right.$$

y de acuerdo con las relaciones para las funciones de Bessel con argumentos  $(-z)$  y  $(z \exp[i\pi])$ , podremos escribir las siguientes relaciones (Watson, 1958)

$$(V.5-81) \quad J_\nu(z \exp[i\pi]) = \exp[im\nu\pi] J_\nu(z)$$

y

$$(V.5-82) \quad J_{-\nu}(z \exp[i\pi]) = \exp(-im\nu\pi) J_{-\nu}(z)$$

En consecuencia, a partir de la (V.5-79) obtendremos para  $J_{\pm 1/3}(-\Xi)$

$$(V.5-83) \quad J_{\pm 1/3}(-\Xi) = (1/2) \exp[-i(\pi/3)] (3/w^*)^{1/2}$$

$$[ 3^{1/2} A_i(-w^*) \mp B_i(-w^*) ]$$

Por otra parte la relación entre las funciones de Airy y  $J_{\pm 4/3}(z)$  no es simple. Utilizando la fórmula de recurrencia

$$J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = (2\nu/z) J_\nu(z)$$

y la (V.5-83) tendremos

$$J_{\pm 4/3}(-\Xi_2) = \exp[i(4/3)\pi] [\pm(2/3)(\Xi_2)]^{-1} J_{\pm 1/3}(\Xi_2) \\ - J_{\mp 2/3}(\Xi_2)]$$

Ahora es posible aplicar la (V.5-79) para obtener

$$(V.5-84) \quad J_{\pm 4/3}(-\Xi_2) = \exp[i(4/3)\pi] [\pm(3/2w_2^{*2})A_i(-w_2^*) \mp \\ (3^{1/2}/2w_2^{*2})B_i(-w_2^*) \pm (3/2w_2^*)A_i'(-w_2^*) \\ - (3^{1/2}/2w_2^*)B_i'(-w_2^*)]$$

Por lo tanto

$$J_{1/3}(-\Xi_1)J_{-4/3}(-\Xi_2) = -(3^{1/2}/2w_1^{*1/2}) [3^{1/2}A_i(-w_1^*) - \\ B_i(-w_1^*)] [-(3/2w_2^{*2})A_i(-w_2^*) + (3^{1/2}/2w_2^{*2})B_i(-w_2^*) - \\ (3/2w_2^*)A_i'(-w_2^*) - (3^{1/2}/2w_2^*)B_i'(-w_2^*)]$$

y

$$J_{-1/3}(-\Xi_1)J_{4/3}(-\Xi_2) = -(1/2)(3/w_1^*)^{1/2} [3^{1/2}A_i(-w_1^*) + B_i(-w_1^*)] \\ [(3/2)(1/w_1^{*2})A_i(-w_1^*) - (3^{1/2}/2w_2^{*2})B_i(-w_2^*) + \\ (3/2w_2^*)A_i'(-w_2^*) - (3^{1/2}/2w_2^*)B_i'(-w_2^*)]$$

En consecuencia, la ecuación (V.5-78) tomará la forma

$$(V.5-85) \quad -3A_i(-w_1^*)B_i(-w_2^*)(3/w_2^*)A_i(-w_2^*)B_i(-w_1^*) - (3^{1/2}/w_2^*)B_i(-w_1^*)B_i(-w_2^*) \\ 3A_i(-w_2^*)B_i(-w_1^*) = 0$$

En general no es fácil trabajar en forma numérica con las funciones de Airy o las de Bessel de orden fraccionario, pues esto implicaría la utilización de subrutinas muy especiales. En consecuencia, intentaremos

otra aproximación al problema, que consiste en estudiar la solución de la ecuación cerca del origen y para grandes valores de  $|w_2^*|$  (solución asintótica).

### V.6 Solución cerca del origen

Supongamos que  $|w_2^*| \ll 1$ . Bajo tal condición podremos escribir la (V.5-85) en la forma

$$(V.6-1) \quad -3w_2^* A_i(-w_1^*) B_i(-w_2^*) + 3A_i(-w_2^*) B_i(-w_1^*) - 3^{1/2} B_i(-w_1^*) B_i(-w_2^*) \\ 3w_2^* A_i(-w_2^*) B_i(-w_1^*) = 0$$

y utilizando las expresiones para  $f(w^*)$  y  $g(w^*)$  a primer orden obtendremos

$$(V.6-2) \quad c_1^* c_2^* = 0$$

pero esto es imposible, debido a que  $c_1^* = A_1(0) \neq 0$  y  $c_2^* = A_2(0) \neq 0$ . En consecuencia podemos concluir que el sistema (V.5-77) tiene únicamente solución trivial ( $c_1^* = c_2^* = 0$ ) cerca del origen.

### V.7 Solución asintótica

Estudiaremos a continuación el caso en que  $|\varepsilon_2| \gg 1$ . Hemos visto que la condición necesaria y suficiente para la existencia de solución no trivial del sistema (V.5-77) era:

$$(V.7-1) \quad \text{Det } M = -(1/\sin(\pi/3)) [J_{1/3}(-\varepsilon_1) J_{-4/3}(-\varepsilon_2) + J_{-1/3}(-\varepsilon_1) J_{4/3}(-\varepsilon_2)] = 0$$

De aquí en más deberemos considerar los desarrollos asintóticos de  $J_{\pm 1/3}(-z)$  y  $J_{\pm 4/3}(-z)$  sin olvidar el fenómeno de Stokes, es decir la discontinuidad de las constantes involucradas en las expresiones asintóticas de  $J_{\pm \nu}(z)$  de acuerdo al dominio asignado para el  $\arg(z)$  (Stokes, 1902). Para evitar tales problemas Watson (Watson, 1958) ha sugerido el desarrollo asintótico siguiente

$$(V.7-2) \quad J_{\pm \nu}(z) \sim C_{1(\pm)} (2/\pi z)^{1/2} \exp[i(z \mp (\nu\pi/2) - (\pi/4))] \sum_{m=0}^{\infty} [(-)^m (\nu, m) /$$



$$(2iz)^m] + C_{2(\pm)} (2/\pi z)^{1/2} \exp[-i(z_{\pm}(\nu\pi/2) - (\pi/4))] \sum_{m=0}^{\infty} [(\nu, m) / (2iz)^m]$$

donde

$$a) \quad C_{1(\pm)} = (1/2) \exp[i2p(\pm\nu + (1/2))\pi] \quad , \quad C_{2(\pm)} = (1/2) \exp[i2p(\pm\nu + (1/2))\pi]$$

$$\text{cuando} \quad (2p-1)\pi < \arg(z) < (2p+1)\pi$$

$$b) \quad C_{1(\pm)} = (1/2) \exp[i2(p+1)(\pm\nu + (1/2))\pi], \quad C_{2(\pm)} = (1/2) \exp[i2p(\pm\nu + (1/2))\pi]$$

$$\text{cuando} \quad 2p\pi < \arg(z) < (2p+2)\pi$$

y  $p$  es cualquier entero positivo o negativo. Utilizando las relaciones (V.5-81) y (V.5-82) podremos obtener

$$(V.7-3) \quad J_{\pm\nu}(-z) = J_{\pm\nu}(z \exp[i\pi]) = \exp[\pm i\nu\pi] J_{\pm\nu}(z)$$

En consecuencia resulta posible extender la (V.7-2) para argumentos negativos

$$(V.7-2') \quad J_{\pm\nu}(-z) = J_{\pm\nu}(z) \exp[\pm i\nu\pi] + C_{1(\pm)} (2/\pi z)^{1/2} \exp[i(z_{\pm}(\nu\pi/2) - (\pi/4))] \sum_{m=0}^{\infty} [(-)^m (\nu, m) / (2iz)^m] + C_{2(\pm)} (2/\pi z)^{1/2} \exp[-i(z_{\pm}(3/2)\nu\pi - (\pi/4))] \sum_{m=0}^{\infty} [(\nu, m) / (2iz)^m]$$

donde

$$a) \quad C_{1(\pm)} = (1/2) \exp[i2p(\pm\nu + (1/2))\pi], \quad C_{2(\pm)} = (1/2) \exp[i2p(\pm\nu + (1/2))\pi]$$

$$\text{cuando} \quad (2p-1)\pi < \arg(z) < (2p+1)\pi$$

$$o \quad 2p\pi < \arg(z \exp[i\pi]) < 2(p+1)\pi$$

$$b) \quad C_{1(\pm)} = (1/2) \exp[i2(p+1)(\pm v + (1/2))\pi], \quad C_{2(\pm)} = (1/2) \exp[i2p(\pm v + (1/2))\pi]$$

$$\text{cuando } 2p\pi < \arg(z) < (2p+2)\pi$$

$$\text{o } (2p+1)\pi < \arg(z \exp[i\pi]) < (2p+3)\pi$$

En nuestro caso, cuando  $|z|$  es grande (en realidad cuando  $\lim|z| \rightarrow \infty$ )

$$(V.7-4) \quad \sum_{m=0}^{\infty} [(-)^m (v, m) / (2iz)^m] \approx \sum_{m=0}^{\infty} [(v, m) / (2iz)^m] \approx 1$$

Por lo tanto, si

$$\Xi_2 = (2/3) (a_0 / \delta L) (\beta_1 / (\epsilon K \#))^{1/2} \quad \text{y} \quad \Xi_1 = b^* {}^{3/2} \Xi_2$$

donde  $b^* = [1 - \delta(L/a_0)]$ . Previendo que  $0 < \arg(-z) < 2\pi$  obtendremos

$$J_{1/3}(-z) \approx [1/(2z\pi)^{1/2}] \left[ \exp[i(z - (\pi/12))] + \exp[-i(z - (3\pi/4))] \right]$$

$$J_{-1/3}(-z) \approx [1/(2z\pi)^{1/2}] \left[ \exp[i(z - (5\pi/12))] + \exp[-i(z + (\pi/4))] \right]$$

$$J_{4/3}(-z) \approx [1/(2z\pi)^{1/2}] \left[ \exp[i(z + (5\pi/12))] + \exp[-i(z - (\pi/4))] \right]$$

$$J_{-4/3}(-z) \approx [1/(2z\pi)^{1/2}] \left[ \exp[i(z - (11\pi/12))] + \exp[-i(z - (\pi/4))] \right]$$

En consecuencia

$$\text{Det } M = 0 \approx \cos(\pi/6) \cos(\Xi_2 - \Xi_1)$$

y la única posibilidad será

$$\cos(\Xi_2 - \Xi_1) = 0$$

Sin embargo  $\Xi_1 = [1 - \delta(L/a_0)]^{3/2} \Xi_2$ , donde

$$[1 - \delta(L/a_0)]^{3/2} = 1 - (3/2)(\delta L/a_0) + (3/4)(\delta L/a_0)^2 + \dots = 1 - (3/2)O(\epsilon) + \dots \approx 1$$

y esto significa que:

$$\Xi_2 \approx \Xi_1 \quad \circ \quad \cos(\Xi_2 - \Xi_1) \approx 1$$

En consecuencia la única solución posible para el sistema (V.5-76) es la "trivial" ( $c_1 = c_2 = 0$ ). El problema surge con las condiciones de contorno (V.5-62a,b)

$$(V.5-62a) \quad \tilde{\rho} = 0 \quad \text{en} \quad z = -1$$

$$(V.5-62b) \quad (\partial \tilde{\rho} / \partial z) = 0 \quad \text{en} \quad z = 0$$

De acuerdo con la solución trivial del sistema (V.5-76), estas condiciones de contorno implican que  $Z_{1/3}(-\Xi_1) = 0$ ; en otras palabras,  $\tilde{\rho}(x, y, z, \tau) = \tilde{\rho}(x, y, \Xi, \tau) = 0$  lo que significa que no existe perturbación en ninguna parte ni existirá con el tiempo.

La ecuación de estado correspondiente al agua de mar puede ser escrita como

$$(V.7-5) \quad \rho = \rho(s, T, p) \quad \circ \quad \alpha = \alpha(s, T, p)$$

donde  $\rho$  depende de la temperatura, salinidad y presión en una forma compleja. Hemos mencionado como un caso particular la fórmula empírica de Knudsen (Knudsen, 1901), sin embargo ahora presentaremos la ecuación de estado en una forma lineal y simple (Fedorov, 1978)

$$(V.7-6) \quad \rho = \rho_0 - a_T \Delta T + b_s \Delta s$$

donde  $\Delta T$  y  $\Delta s$  son las respectivas desviaciones de la temperatura y la salinidad con respecto a los valores  $T_0$  y  $s_0$ , correspondientes a una densidad media  $\rho_0$ ; mientras que  $a_T = -(\partial \rho / \partial T)_{s, p}$  y  $b_s = (\partial \rho / \partial s)_{T, p}$ . Si adoptamos la notación

$$(V.7-7) \quad \left\{ \begin{array}{l} T = T_0 + \epsilon \hat{T} \\ \Delta T = \epsilon \hat{T} \end{array} \right. \quad \circ \quad \Delta T = \epsilon \hat{T}$$

$$s = s_0 + \epsilon \hat{s} \quad \text{o} \quad \Delta s = \epsilon \hat{s}$$

podremos escribir

$$(V.7-8) \quad \tilde{\rho} = -a_T \hat{T} + b_S \hat{s}$$

Los valores de  $a_T$  y  $b_S$  pueden ser tomados como constantes dentro de los límites  $\Delta T = \epsilon \hat{T}$  y  $\Delta s = \epsilon \hat{s}$ . A partir de la (V.7-8) podremos definir el flujo de empuje perturbado ( $F_H$ ) como la suma de los flujos térmico ( $F_T$ ) y halino ( $F_S$ ).

$$(V.7-9) \quad F_H = K \left( \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} \right) = -a_T K_T \left( \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \right) + b_S K_S \left( \frac{\partial \hat{s}}{\partial z} \right) = F_T + F_S$$

A continuación extenderemos la idea del cociente de las fuerzas de empuje ( $R_\rho$ ) (Fedorov, 1978; Turner, 1965; 1967) al campo de densidad de la perturbación, de acuerdo a las siguientes relaciones

$$(V.7-10) \quad R_F = (K_S/K_T) R_\rho \quad \text{donde} \quad R_\rho = [b_S \Delta s / a_T \Delta T] = \\ = - (K_S/K_T) (F_S/F_T)$$

La condición de contorno (V.5-61b) implica que no existe flujo de empuje a través de la interface aire-mar. Esto significa

$$(V.7-11a) \quad F_T = F_S = 0 \quad \text{o} \quad \left( \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial \hat{s}}{\partial z} \right) = 0$$

$$(V.7-11b) \quad F_T = -F_S \quad \text{o} \quad [a_T K_T / b_S K_S] \left( \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \right) = 1$$

La (V.7-11a) tiene un significado trivial, mientras que la (V.7-11b) implica que T y s están relacionadas, al menos dentro de una delgada película superficial en contacto con la atmósfera. Para extender nuestro estudio a un océano barotrópico con velocidad arbitraria haremos uso de la ecuación (V.5-15), donde  $F(x,y) = X_2(x,y)$  satisface (V.5-13) (o alguno de los casos mostrados en la Tabla II). Análogamente a lo hecho en (V.5-62) definiremos

$$(V.7-12) \quad \Xi^* = (2/3) (a_0 / \delta L) [\beta_1 / (\epsilon K \#)]^{1/2} [\delta (L/a_0) z + 1 + (\gamma_*^2 / \beta_1^2) K \#]^{3/2}$$

por lo tanto

$$(V.7-13) \quad \check{\rho}(x, y, \Xi^*, \tau) = D \exp[-\beta_1^2 \tau] \left[ (2/3) (a_0/\delta L) (\beta_1/(\epsilon K\#))^{1/2} \right]^{-1/3} \Xi^{*1/3} z_{1/3}(-\Xi^*) X_2(x, y)$$

Es necesario destacar que si la solución (V.7-13) satisface la ecuación (V.5-13), la relación entre  $X_2(x, y)$  y  $p_0$  será muy estricta. De acuerdo con la Tabla II únicamente existen tres posibilidades generales.

Supongamos que utilizamos las mismas condiciones de contorno dadas en (V.5-62a) y (V.5-62b). En otras palabras,

$$(V.7-14a) \quad \check{\rho} = 0 \quad \text{en} \quad \Xi_1^* = (2/3) (a_0/\delta L) (\beta_1/(\epsilon K\#))^{1/2} [1 - (\delta L/a_0) + (\gamma_*^2/\beta_1^2) \epsilon K\#]^{3/2}$$

$$(V.7-14b) \quad (\partial \check{\rho} / \partial z) = 0 \quad \text{en} \quad \Xi_2^* = (2/3) (a_0/\delta L) (\beta_1/(\epsilon K\#))^{1/2} [1 + (\gamma_*^2/\beta_1^2) \epsilon K\#]^{3/2}$$

La (V.7-14a) implica que

$$(V.7-15) \quad \Xi_1^{*1/3} z_{1/3}(-\Xi_1^*) = 0$$

Mientras que

$$\begin{aligned} (\partial \check{\rho} / \partial z) &= (\partial \check{\rho} / \partial \Xi^*) (\partial \Xi^* / \partial z) = (\beta_1/(\epsilon K\#))^{1/2} [1 + (\delta L/a_0) + (\gamma_*^2/\beta_1^2) \epsilon K\#]^{1/2} (\partial \rho / \partial \Xi^*) = \\ &= (\beta_1/(\epsilon K\#))^{1/2} \left[ (2/3) (a_0/\delta L) (\beta_1/(\epsilon K\#))^{1/2} \right]^{-1/3} (\partial \rho / \partial \Xi^*) \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} (\partial \check{\rho} / \partial \Xi^*) &= D \sum_{m,n} \exp[-\beta_1^2 \tau] \left[ (2/3) (a_0/\delta L) (\beta_1/(\epsilon K\#))^{1/2} \right]^{-1/3} \exp[i(mx+ny)] \\ &\quad \Xi^{*1/3} z_{-2/3}(-\Xi^*) \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} (V.7-15') \quad (\partial \check{\rho} / \partial z) &= -D \sum_{m,n} \exp[-\beta_1^2 \tau] (\epsilon K\#)^{-1/2} \left[ (2/3) (a_0/\delta L) \right]^{-2/3} \Xi^{*2/3} \\ &\quad z_{-2/3}(-\Xi^*) \exp[i(mx+ny)] \end{aligned}$$

en particular, la (V.7-14b) tomará la forma

$$(V.7-16) \quad z_{-2/3}^{(-\Xi_2^*)} = 0$$

Hemos supuesto que  $\Xi_2^* \neq 0$ , ya que de otra forma la (V.7-13) implicaría que  $\tilde{\rho}(z=0) = 0$ , lo cual significa que no existe perturbación en la superficie del mar.

A partir de la definición de las funciones cilíndricas (V.2-16) y (V.5-73) (Kamke, 1959; Watson, 1958; Olver, 1964), obtendremos un sistema similar al (V.5-77)

$$(V.7-17) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_1' J_{1/3}^{(-\Xi_1^*)} + c_2' [\cot(\pi/3) J_{1/3}^{(-\Xi_1^*)} - (J_{-1/3}^{(-\Xi_1^*)} / \sin(\pi/3))] = 0 \\ -c_1' [(2/3) (\Xi_2^*)^{-1/2} J_{1/3}^{(-\Xi_2^*)} + J_{4/3}^{(-\Xi_2^*)}] - c_2' [(2/3) (\Xi_2^*)^{-1} \\ [J_{1/3}^{(-\Xi_2^*)} \cot(\pi/3) - (J_{-1/3}^{(-\Xi_2^*)} / \sin(\pi/3))] + J_{4/3}^{(-\Xi_2^*)} \\ \cot(4\pi/3) - (J_{-4/3}^{(-\Xi_2^*)} / \sin(4\pi/3))] = 0 \end{array} \right.$$

donde  $\Xi_1^*$  y  $\Xi_2^*$  están definidas por (V.7-14a) y (V.7-14b) respectivamente.

Una condición necesaria y suficiente para la existencia de solución no trivial del sistema (V.7-11) estará dada por (V.5-77)

$$(V.7-18) \quad J_{1/3}^{(-\Xi_1^*)} J_{-4/3}^{(-\Xi_2^*)} + J_{-1/3}^{(-\Xi_1^*)} J_{4/3}^{(-\Xi_2^*)} = 0$$

En términos de las funciones de Airy (Antosiewicz, 1964) y definiendo

$$(V.7-19) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_0 = [(a_0/\delta L) (\beta_1/(\epsilon K\#))^{1/2}]^{2/3} [1 + (\gamma_*^2/\beta_1^2) \epsilon K\# + \delta (L/a_0) z] \\ w_1 = [(a_0/\delta L) (\beta_1/(\epsilon K\#))^{1/2}]^{2/3} [1 + (\gamma_*^2/\beta_1^2) \epsilon K\# - \delta (L/a_0) z] \\ w_2 = [(a_0/\delta L) (\beta_1/(\epsilon K\#))^{1/2}]^{2/3} [1 + (\gamma_*^2/\beta_1^2) \epsilon K\#] \end{array} \right.$$

donde  $w_1^0 = w_2^0 - b^*$  con  $b^* = \delta(L/a_0) [(2/3)(a_0 \beta_1 / \delta L) (\epsilon K \#)^{-1/2}]^{2/3}$

En consecuencia, la ecuación (V.7-18) tomará la forma

$$(V.7-20) \quad -3w_2^0 A_1 (-w_1^0) B_1 (-w_2^0) + 3A_1 (-w_2^0) B_1 (-w_1^0) - 3^{1/2} B_1 (-w_1^0) B_1 (-w_2^0) + 3w_2^0 A_1 (-w_1^0) B_1 (-w_2^0) = 0$$

Utilizando las definiciones de  $f(w)$  y  $g(w)$  obtendremos cerca del origen

$$c_1^* c_2^* w_2^0 = 0$$

pero  $c_1^* = A_1(0) = [B_1(0)/3^{1/2}] \neq 0$  y  $c_2^* = A_1'(0) \neq 0$ . Por lo tanto, cerca del origen, el sistema (V.7-17) puede aceptar únicamente una solución trivial ( $c_1^* = c_2^* = 0$ ). A continuación deberemos estudiar la relación (V.7-18) cuando  $|\Xi_1^*|$  y  $|\Xi_2^*|$  son grandes. Esto significa

$$(V.7-21) \quad \exp[i(\Xi_1^* - (\pi/12))] + \exp[-i(\Xi_1^* - (3\pi/4))] \exp[i(\Xi_2^* - (11\pi/12))] + \exp[-i(\Xi_2^* - (\pi/4))] + \exp[i(\Xi_1^* - (5\pi/12))] + \exp[-i(\Xi_1^* + (\pi/4))] \exp[i(\Xi_2^* + (5\pi/12))] + \exp[-i(\Xi_2^* - (\pi/4))] = 0$$

por lo tanto,

$$(V.7-22) \quad \cos(\pi/6) \cos(\Xi_1^* - \Xi_2^*) = 0$$

De acuerdo con la (V.7-14a) y (V.7-14b)

$$\Xi_1^* = \Xi_2^* [1 - [(\delta L/a_0) / (1 + (\gamma_*^2 / \beta_1^2) \epsilon K \#)]]^{3/2} = \Xi_2^* [1 - (3/2) (1 + (\gamma_*^2 / \beta_1^2) \epsilon K \#)^{-1} O(\epsilon) + \dots] \approx \Xi_2^*$$

en consecuencia,

$$\cos(\Xi_1^* - \Xi_2^*) \approx 1$$

Debemos concluir que el sistema (V.7-17) tiene solución trivial en todas partes ( $c_1^* = c_2^* = 0$ ). En otras palabras: "En un océano barotrópico no puede existir perturbación sin un flujo de empuje a través de la inter-

face." Es necesario destacar que  $\Xi_1^* = 0$  no es una solución (V.7-15) porque

$$\lim_{\Xi_1^* \rightarrow 0} [(\Xi_1^*)^{1/3} z^{1/3} (-\Xi_1^*)] \neq 0$$

excepto si  $c_2' = 0$ , y en la caso la (V.7-16) implicaría que  $c_1' = 0$ .

### V.8 Estabilidad de un océano barotrópico con flujo de empuje a través de la interface aire-mar.

Supongamos un océano, en reposo por el momento, conectado diabáticamente con la atmósfera (a través de la interface aire-mar) pero aislado adiabáticamente del fondo (Ver Figura 2). Utilizaremos como condiciones iniciales

$$(V.8-1a) \quad (\partial \tilde{\rho} / \partial z) \Big|_{z=0} = B X_2(x, y) \quad a \quad \tau = 0$$

$$(V.8-1b) \quad \tilde{\rho} \Big|_{z=-1/h} = 0 \quad a \quad \tau = 0 \quad \text{con } h > 1$$

Esto significa que existe inicialmente un flujo de empuje en  $z = 0$ , pero la perturbación en el campo de densidad no alcanza el nivel  $z = -1/h$ .

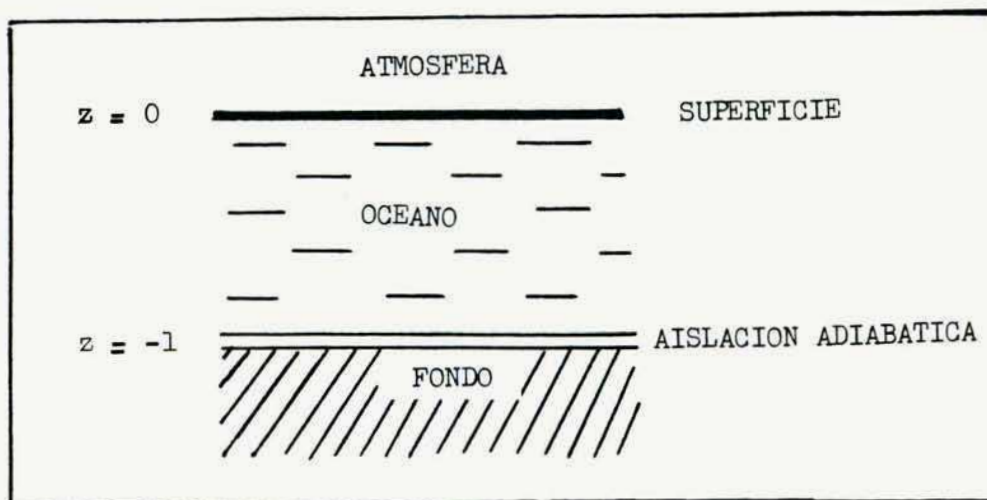


Figura 2: Modelo Físico.



Luego de cierto tiempo

$$(V.8-2a) \quad \left. \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} \right|_{z=0} = B \exp[iw'\tau] X_2(x,y) \quad a \quad \tau \neq 0$$

$$(V.8-2b) \quad \left. \tilde{\rho} \right|_{z=-1/h} = 0 \quad a \quad \tau \neq 0$$

En otras palabras, hemos supuesto un flujo de empuje perturbado en la forma

$$(V.8-3) \quad \left. \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} \right|_{z=0} = B \exp[iw'\tau] X_2(x,y)$$

donde

$$(V.8-4) \quad w' = w_R + iw_I$$

En el caso general de un océano barotrópico con velocidad arbitraria (V.7-13), obtendremos

$$\left( \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \Xi^*} \right) \left( \frac{\partial \Xi^*}{\partial z} \right) = (\beta_1 / (\epsilon K \#))^{1/2} [1 + (\gamma_*^2 / \beta_1^2) \epsilon K \# + (\delta L / a_0) z]^{1/2} \left( \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \Xi^*} \right)$$

y a partir de la (V.7-15')

$$(V.8-5) \quad \left( \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} \right) = -A' (1 / \epsilon K \#) \exp(-\beta_1^2 \tau) \left[ (2/3) (a_0 / \delta L) (\beta_1 / (\epsilon K \#))^{1/2} \right]^{-2/3} X_2(x,y) (\Xi^*)^{2/3} z_{-2/3}^{(-\Xi^*)}$$

donde

$$\Xi^* = (2/3) (a_0 / \delta L) (\beta_1 / (\epsilon K \#))^{1/2} [1 + (\delta L / a_0) z + (\gamma_*^2 / \beta_1^2) \epsilon K \#]^{3/2}$$

De las condiciones iniciales (V.8-1a) y (V.8-1b), obtendremos

a  $\tau=0$

$$(V.8-6a) \quad z_{-2/3}^{(-\Xi^*)} = - (B/A') (\epsilon K \# / \beta_1^2) [1 + (\gamma_*^2 / \beta_1^2) \epsilon K \#]^{-1}$$

y

$$(V.8-6b) \quad z_{1/3}^{(-\Xi^*)} = 0$$

Utilizando las definiciones de las funciones cilíndricas y las de Weber (Kamke, 1959; Watson, 1958; Olver, 1974) podemos obtener

$$(V.8-7) \quad M^* \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -(B/A') (\epsilon K\#) (\beta_1^2)^{-1} [1 + (\gamma_*^2/\beta_1^2) \epsilon K\#]^{-1} \end{bmatrix}$$

en  $\tau=0$

donde

$$(V.8-8) \quad M^* = \begin{bmatrix} J_{1/3}^{(-\epsilon_1^*)} & [\cot(\pi/3) J_{1/3}^{(-\epsilon_1^*)} - [J_{-1/3}^{(-\epsilon_1^*)} / \sin(\pi/3)]] \\ -[(2/3) (\epsilon_2^*)^{-1} J_{1/3}^{(-\epsilon_2^*)} + J_{4/3}^{(-\epsilon_2^*)}] & -[(2/3) (\epsilon_2^*)^{-1} [J_{1/3}^{(-\epsilon_2^*)} \cot(\pi/3) - J_{-1/3}^{(-\epsilon_2^*)} / \sin(\pi/3)] + J_{4/3}^{(-\epsilon_2^*)} \cot(\pi/3) - [J_{-4/3}^{(-\epsilon_2^*)} / \sin(4\pi/3)]] \end{bmatrix}$$

A partir de la denominada regla de Cramer (Conte y Boor, 1965)

$$(V.8-9) \quad c_1 = \left[ (B/A') (\epsilon K\# / \beta_1^2) [1 + (\gamma_*^2 / \beta_1^2) \epsilon K\#]^{-1} / \text{Det } M^* \right] \left[ \cot(\pi/3) J_{1/3}^{(-\epsilon_1^*)} - [J_{-1/3}^{(-\epsilon_1^*)} / \sin(\pi/3)] \right]$$

$$(V.8-10) \quad c_2 = \left[ (B/A') (\epsilon K\# / \beta_1^2) [1 + (\gamma_*^2 / \beta_1^2) \epsilon K\#]^{-1} / \text{Det } M^* \right] J_{1/3}^{(-\epsilon_1^*)}$$

En la misma forma, haciendo uso de la (V.8-2a) y (V.8-2b), obtendremos

a  $\tau \neq 0$

$$(V.8-11) \quad c_1 = \left[ (B/A) (\epsilon K\# / \beta_1^2) [1 + (\gamma_*^2 / \beta_1^2) \epsilon K\#]^{-1} / \text{Det } M^* \right] \exp[(\beta_1^2 + iw') \tau] \left[ \cot(\pi/3) J_{1/3}^{(-\epsilon_1^*)} - [J_{-1/3}^{(-\epsilon_1^*)} / \sin(\pi/3)] \right]$$

$$(V.8-12) \quad c_2 = \left[ (B/A') (\epsilon K \# / \beta_1^2) [1 + (\gamma_*^2 / \beta_1^2) \epsilon K \#]^{-1} \right] \exp[(\beta_1^2 + iw') \tau] J_{1/3}(-\Xi_1^*)$$

Mediante las (V.8-9), (V.8-10), (V.8-11) y (V.8-12) es posible concluir que:

$$\beta_1^2 + iw' = 0$$

o

$$(V.8-13) \quad \beta_1^2 = -i(w_R + iw_I) = w_I - iw_R$$

La solución será estable si y solamente si, la parte real de  $\beta_1^2$  es positiva, esto significa  $w_I > 0$ . En consecuencia,

$$(V.8-14) \quad \begin{cases} \text{a) Estable si } w_I > 0 \\ \text{b) Inestable si } w_I < 0 \end{cases}$$

Sin embargo la (V.8-14b) no es posible. A partir de la ecuación (V.8-3) podremos escribir el flujo de empuje perturbado en  $z = 0$  como:

$$(V.8-15) \quad (\partial \rho / \partial z) \Big|_{z=0} = B \exp[-w_I \tau] \exp[i(kx + jy + w_R \tau)]$$

En consecuencia, si  $w_I$  es negativo, el flujo de empuje perturbado crecería indefinidamente con el tiempo haciendo que la perturbación alcanzara y excediera el máximo de su escala, como resultado de la compulsión externa. Si  $w_I = 0$ , la solución tendría una oscilación en fase con el flujo de empuje perturbado. Por lo tanto podemos concluir que el flujo básico nunca se tornará inestable.

## Capítulo VI

## ESTABILIDAD DE UN OCEANO BAROCLINICO

VI.1 El océano baroclínico

De acuerdo con la solución por similaridad generalizada, el océano baroclínico puede ser descripto mediante el campo de presión, en la forma

$$(II.7-2) \quad p_o(\lambda, \phi, z) = A(\lambda, \phi) + M(\lambda, \phi) \exp[cz/\sin\phi_o]$$

o utilizando la aproximación en el plano  $\beta$  (Pedlosky, 1979; Holton, 1979

$$(VI.1-1) \quad p_o(x, y, z) \approx A(x, y) + M(x, y) [1 - (cz/\sin\phi_o) b_1 y] \exp[cz/\sin\phi_o]$$

mientras que el resto de las variables correspondientes al flujo básico estarán dadas por

$$(VI.1-2) \quad u_o(x, y, z) \approx -(1 - b_1 y) (\partial A/\partial y) - [1 - (1 + (cz/\sin\phi_o)) b_1 y] (\partial M/\partial y) \exp[cz/\sin\phi_o] + (cz/\sin\phi_o) b_1 M \exp[cz/\sin\phi_o]$$

$$(VI.1-3) \quad v_o(x, y, z) \approx (\partial A/\partial x) (1 - a_1 y) + (\partial M/\partial x) [1 - a_1 y - (cz/\sin\phi_o) b_1 y] \exp[cz/\sin\phi_o]$$

$$(VI.1-4) \quad \rho_o(x, y, z) \approx -(c/\sin\phi_o) M [1 - (1 + (cz/\sin\phi_o)) b_1 y] \exp[cz/\sin\phi_o]$$

y

$$(VI.1-5) \quad (L/a_o) w_o \approx K \# (c/\sin\phi_o) (1 - b_1 y) + (\sin\phi_o/c) M^{-1} [(\partial M/\partial x) (\partial A/\partial y) - (\partial M/\partial y) (\partial A/\partial x)] (1 + c_1 y) + (\cos\phi_o/c) (L/a_o) (1 + (cz/\sin\phi_o)) (\partial A/\partial x) + (\cos\phi_o L/ca_o) (\partial M/\partial x) \exp[cz/\sin\phi_o]$$

donde  $a_1$ ,  $b_1$  y  $c_1$  fueron definidas en (VI.2-16)

El sistema perturbado (VI.2-7, 11) en función de las variables  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , en la aproximación del plano  $\beta$ , puede ser escrito en la forma

siguiente:

$$(VI.1-6) \quad (\partial \tilde{u} / \partial \tau) - \tilde{v}(1+b_1 y) + (\partial \tilde{p} / \partial x)(1+c_1 y) = 0$$

$$(VI.1-7) \quad (\partial \tilde{v} / \partial \tau) + \tilde{u}(1+b_1 y) + (\partial \tilde{p} / \partial y) = 0$$

$$(VI.1-8) \quad (\partial \tilde{p} / \partial z) + \tilde{p} = 0$$

$$(VI.1-9) \quad (L/a_0) (\partial \tilde{p} / \partial \tau) + (\partial \tilde{u} / \partial x)(1+c_1 y) + (\partial \tilde{v} / \partial y) - c_1 \tilde{v} + (L/a_0) (\partial \tilde{w} / \partial z) = 0$$

$$(VI.1-10) \quad (\epsilon^{-1} + z) (\partial \tilde{\rho} / \partial \tau) + u_0 (\partial \tilde{\rho} / \partial x)(1+c_1 y) + \tilde{u} (\partial \rho_0 / \partial x)(1+c_1 y) + v_0 (\partial \tilde{\rho} / \partial y) + \tilde{v} (\partial \rho_0 / \partial y) + (L/a_0) w_0 (\partial \tilde{\rho} / \partial z) + (L/a_0) \tilde{w} (\partial \rho_0 / \partial z) = K \# (\partial^2 \tilde{\rho} / \partial z^2)$$

## VI.2 El océano puramente baroclínico

En este caso la ecuación (II.7-2) tomará la forma

$$(VI.2-1) \quad p_0(\lambda, \phi, z) = M(\lambda, \phi) \exp[cz/\sin\phi]$$

Dentro de la aproximación del plano  $\beta$  podremos utilizar las fórmulas (VI.1-2) a (VI.1-5) con  $A(x, y) = 0$ . En consecuencia el sistema perturbado estará dado por:

$$(VI.2-2) \quad (\partial \tilde{u} / \partial \tau) - v(1+b_1 y) + (\partial \tilde{p} / \partial x)(1+c_1 y) = 0$$

$$(VI.2-3) \quad (\partial \tilde{v} / \partial \tau) + \tilde{u}(1+b_1 y) + (\partial \tilde{p} / \partial y) = 0$$

$$(VI.2-4) \quad (\partial \tilde{p} / \partial z) + \tilde{p} = 0$$

$$(VI.2-5) \quad (\partial \tilde{p} / \partial \tau) (L/a_0) + (\partial \tilde{u} / \partial x)(1+c_1 y) + (\partial \tilde{v} / \partial y) - c_1 \tilde{v} + (L/a_0) (\partial \tilde{w} / \partial z) = 0$$

$$(VI.2-6) \quad (\partial \tilde{\rho} / \partial \tau) (\epsilon^{-1} + z) + [b_1 (cz/\sin\phi_0) M - [1 - (1 + (cz/\sin\phi_0)) b_1 y + c_1 y] (\partial M / \partial y)] \exp[cz/\sin\phi_0] (\partial \tilde{\rho} / \partial x) - \tilde{u} (c/\sin\phi_0) (\partial M / \partial x) [1 - (1 + (cz/\sin\phi_0)) b_1 y +$$

$$\begin{aligned}
& c_1 y] \exp[cz/\sin\phi_0] + [1 - a_1 y - (cz/\sin\phi_0) b_1 y] (\partial M/\partial x) \exp[cz/\sin\phi_0] \\
& (\partial \tilde{\rho}/\partial y) + \tilde{v} [(c/\sin\phi_0) M [1 + (cz/\sin\phi_0)] b_1 - (c/\sin\phi_0) (\partial M/\partial y) [1 - (1 + \\
& (cz/\sin\phi_0) b_1 y]] \exp[cz/\sin\phi_0] + (\partial \tilde{\rho}/\partial z) [K\# (c/\sin\phi_0) (1 - b_1 y) + \\
& (\cos\phi_0/c) (L/a_0) (\partial M/\partial x) \exp[cz/\sin\phi_0]] - \tilde{w} (c^2/\sin^2\phi_0) M (L/a_0) \\
& \exp[cz/\sin\phi_0] = K\# (\partial^2 \tilde{\rho}/\partial z^2)
\end{aligned}$$

De acuerdo a la estructura del sistema (VI.2-2) a (VI.2-6), podremos suponer que la solución tendrá la forma

$$(VI.2-7) \quad \begin{cases} \hat{p}(x, y, z, \tau) \\ \hat{u}(x, y, z, \tau) \\ \hat{v}(x, y, z, \tau) \\ \hat{w}(x, y, z, \tau) \\ \hat{\rho}(x, y, z, \tau) \end{cases} = \exp[i\beta\tau] \begin{cases} \hat{p}(x, y, z) \\ \hat{u}(x, y, z) \\ \hat{v}(x, y, z) \\ \hat{w}(x, y, z) \\ \hat{\rho}(x, y, z) \end{cases}$$

Por lo tanto, nuestro sistema de ecuaciones estará dado por

$$(VI.2-8a) \quad i\beta \hat{u} - \hat{v} (1 + b_1 y) + (\partial \hat{p}/\partial x) (1 + c_1 y) = 0$$

$$(VI.2-8b) \quad i\beta \hat{v} + \hat{u} (1 + b_1 y) + (\partial \hat{p}/\partial y) = 0$$

$$(VI.2-8c) \quad (\partial \hat{p}/\partial z) + \hat{\rho} = 0$$

$$(VI.2-8d) \quad i\beta (L/a_0) \hat{\rho} + (1 + c_1 y) (\partial \hat{u}/\partial x) + (\partial \hat{v}/\partial y) - c_1 \hat{v} + (\partial \hat{w}/\partial z) (L/a_0) = 0$$

$$\begin{aligned}
(VI.2-8e) \quad & i\beta (\epsilon^{-1} + z) \hat{\rho} + [b_1 (cz/\sin\phi_0) M - [1 - (1 + (cz/\sin\phi_0) b_1 y) + c_1 y] (\partial M/\partial y)] \\
& \exp[cz/\sin\phi_0] (\partial \hat{\rho}/\partial x) - (c/\sin\phi_0) (\partial M/\partial x) [1 - (1 + (cz/\sin\phi_0) b_1 y) + \\
& c_1 y] \exp[cz/\sin\phi_0] \hat{u} + [1 - a_1 y - (cz/\sin\phi_0) b_1 y] (\partial M/\partial x) \exp[cz/\sin\phi_0] \\
& (\partial \hat{\rho}/\partial y) + [cz/\sin\phi_0] M [1 + (cz/\sin\phi_0)] b_1 - (c/\sin\phi_0) (\partial M/\partial y) [1 - (1 + \\
& (cz/\sin\phi_0) b_1 y] \exp[cz/\sin\phi_0] \hat{v} + [K\# (c/\sin\phi_0) (1 - b_1 y) + (\cos\phi_0/c)
\end{aligned}$$

$$(L/a_0) (\partial M/\partial x) \exp[cz/\sin\phi_0] (\partial \hat{\rho}/\partial z) - (c^2/\sin^2\phi_0) M(L/a_0) \exp[cz/\sin\phi_0] \hat{w} = K\# (\partial^2 \hat{\rho}/\partial z^2)$$

Si consideramos, en la ecuación (VI.2-8e), los términos con orden de magnitud mayor que la unidad; concluiremos que

$$(VI.2-9) \quad O(\beta) \ll \epsilon$$

este hecho es extremadamente importante, debido a que en tal caso el sistema (VI.2-8a,b) adquirirá la forma

$$(VI.2-10a) \quad -\hat{v}(1+b_1y) + (1+c_1y) (\partial \hat{p}/\partial y) = 0$$

$$(VI.2-10b) \quad \hat{u}(1+b_1y) + (\partial \hat{p}/\partial y) = 0$$

$$(VI.2-10c) \quad (\partial \hat{p}/\partial z) + \hat{p} = 0$$

$$(VI.2-10d) \quad (\partial \hat{u}/\partial x) (1+c_1y) + (\partial \hat{v}/\partial y) - c_1y + (L/a_0) (\partial \hat{w}/\partial z) = 0$$

$$(VI.2-10e) \quad i\beta\epsilon^{-1} \hat{\rho} + [b_1 (cz/\sin\phi_0) M - [1 - (1 + (cz/\sin\phi_0)) b_1y + c_1y] (\partial M/\partial y)] \exp[cz/\sin\phi_0] (\partial \hat{\rho}/\partial x) - (c/\sin\phi_0) (\partial M/\partial x) [1 - (1 + (cz/\sin\phi_0)) b_1y + c_1y] \exp[cz/\sin\phi_0] \hat{u} + (1 - a_1y - (cz/\sin\phi_0) b_1y) (\partial M/\partial x) \exp[cz/\sin\phi_0] (\partial \hat{\rho}/\partial y) + [M(1 + (cz/\sin\phi_0) b_1 - (\partial M/\partial y))] [1 - (1 + (cz/\sin\phi_0)) b_1y] (cz/\sin\phi_0) \exp[cz/\sin\phi_0] \hat{v} + [K\# (c/\sin\phi_0) (1 - b_1y) + (\cos\phi_0/c) (L/a_0) (\partial M/\partial x) \exp[cz/\sin\phi_0]] (\partial \hat{\rho}/\partial z) - (c^2/\sin^2\phi_0) M(L/a_0) \exp[cz/\sin\phi_0] \hat{w} = K\# (\partial^2 \hat{\rho}/\partial z^2)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (VI.2-10a,e) utilizaremos un método *suigeneris*, el cual consiste en extender la idea de desarrollar en serie las posibles soluciones, utilizando como parámetro del desarrollo el factor  $(L/a_0)$  que surge en la aproximación del plano  $\beta$  (Nayfeh, 1973).

Supondremos que las soluciones del sistema perturbado pueden ser

escritas en la forma

$$(VI.2-11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{v} = \hat{v}_1 + (L/a_0) \hat{v}_2 + \dots \\ \hat{u} = \hat{u}_1 + (L/a_0) \hat{u}_2 + \dots \\ \hat{w} = \hat{w}_1 + (L/a_0) \hat{w}_2 + \dots \\ \hat{\rho} = \hat{\rho}_1 + (L/a_0) \hat{\rho}_2 + \dots \\ \hat{p} = \hat{p}_1 + (L/a_0) \hat{p}_2 + \dots \end{array} \right.$$

Si sustituimos la (VI.2-11) dentro del sistema (VI.2-10a,e), podremos obtener a primer orden

$$(VI.2-12a) \quad -\hat{v}_1 + (\partial \hat{p}_1 / \partial x) = 0$$

$$(VI.2-12b) \quad \hat{u}_1 + (\partial \hat{p}_1 / \partial y) = 0$$

$$(VI.2-12c) \quad \hat{\rho}_1 + (\partial \hat{p}_1 / \partial z) = 0$$

$$(VI.2-12d) \quad i\beta \varepsilon^{-1} \hat{\rho}_1 - (\partial M / \partial y) \exp[cz / \sin \phi_0] (\partial \hat{\rho}_1 / \partial x) - (c / \sin \phi_0) (\partial M / \partial x) \exp[cz / \sin \phi_0] \hat{u}_1 + (\partial M / \partial x) \exp[cz / \sin \phi_0] (\partial \hat{\rho}_1 / \partial y) - (\partial M / \partial y) (cz / \sin \phi_0) \hat{v}_1 + K \# (c / \sin \phi_0) (\partial \hat{\rho}_1 / \partial z) = K \# (\partial^2 \hat{\rho}_1 / \partial z^2)$$

Mientras que el sistema correspondiente a un orden  $10^{-1}$  ( $O(L/a_0)$ ), estará dado por

$$(VI.2-13a) \quad -b_1 y v_1 - (L/a_0) v_2 + c_1 y (\partial p_1 / \partial x) + (L/a_0) (\partial p_2 / \partial x) = 0$$

$$(VI.2-13b) \quad b_1 y u_1 + (L/a_0) u_2 + (L/a_0) (\partial p_2 / \partial y) = 0$$

$$(VI.2-13c) \quad \rho_2 + (\partial p_2 / \partial z) = 0$$

$$(VI.2-13d) \quad (L/a_0) (\partial u_2 / \partial x) + c_1 y (\partial u_1 / \partial x) + (L/a_0) (\partial v_2 / \partial y) - c_1 v_1 + (L/a_0) (\partial w_1 / \partial z) = 0$$



$$(VI.2-16) \quad (1/K\#) \exp[cz/\sin\phi_0] [(\partial M/\partial y) (\partial \ln X_2/\partial x) - (\partial M/\partial x) (\partial \ln X_2/\partial y)] (dp_{01}/dz) + (c/\sin\phi_0) (K\#)^{-1} \exp[cz/\sin\phi_0] [(\partial M/\partial x) (\partial \ln X_2/\partial y) - (\partial M/\partial y) (\partial \ln X_2/\partial x)] p_{01} + (d^3 p_{01}/dz^3) - (c/\sin\phi_0) (d^2 p_{01}/dz^2) - i\beta\epsilon^{-1} (dp_{01}/dz) = 0$$

La (VI.2-16) tendrá solución si,

$$(VI.2-17a) \quad (K\#)^{-1} \exp[cz/\sin\phi_0] [(\partial M/\partial y) (\partial \ln X_2/\partial x) - (\partial M/\partial x) (\partial \ln X_2/\partial y)] [(dp_{01}/dz) - (c/\sin\phi_0) p_{01}] = -g(z)$$

y

$$(VI.2-17b) \quad (d^3 p_{01}/dz^3) - (c/\sin\phi_0) (d^2 p_{01}/dz^2) - i\beta\epsilon^{-1} (K\#)^{-1} (dp_{01}/dz) = g(z)$$

La (VI.2-17a) implica

$$(VI.2-18) \quad (\partial M/\partial y) (\partial \ln X_2/\partial x) - (\partial M/\partial x) (\partial \ln X_2/\partial y) = L = \text{cte.}$$

Por lo tanto podremos escribir tal ecuación en la forma

$$(VI.2-19) \quad (dp_{01}/dz) - (c/\sin\phi_0) p_{01} = -(K\#/L) \exp[cz/\sin\phi_0] g(z)$$

La (VI.2-19) es una ecuación diferencial lineal y de primer orden (Boyce y DiPrima, 1965) y su solución estará dada por

$$(VI.2-20) \quad p_{01} = C \exp[cz/\sin\phi_0] - (K\#/L) \exp[cz/\sin\phi_0] \int_0^z \exp[-2cz/\sin\phi_0] g(z) dz$$

Mientras que la solución de la (VI.2-17b) será (Kamke, 1959)

$$(VI.2-21) \quad \xi = D_1 \exp[\alpha_1 z] + D_2 \exp[\alpha_2 z] + (1/\lambda) \int_0^z g(z) \exp[a(t-z)/2] [\exp[\lambda(z-t)/2] - \exp[-\lambda(z-t)/2]] dt$$

donde

$$(VI.2-22) \quad \xi = (dp_{01}/dz)$$

y

$$(VI.2-23) \quad \begin{cases} a = -(c/\sin\phi_0) & \alpha_1 = -(a/2) + (\lambda/2) \\ b = -i\beta\epsilon^{-1}/(K\#) & \alpha_2 = -(a/2) - (\lambda/2) \\ \lambda^2 = [(c^2/\sin^2\phi_0) + 4i\beta\epsilon^{-1}/(K\#)] \end{cases}$$

En consecuencia,

$$(VI.2-24) \quad p_{01} = (D_1/\alpha_1) [\exp[\alpha_1 z] - 1] + (D_2/\alpha_2) [\exp[\alpha_2 z] - 1] + (1/\lambda) \int_0^z dz \int_0^z g(t) \exp[a(t-z)/2] [\exp[\lambda(z-t)/2] - \exp[-\lambda(z-t)/2]] dt$$

A partir de las ecuaciones (VI.2-20) y (VI.2-24) se puede observar inmediatamente que ambas soluciones son diferentes, siendo por lo tan to necesario que se satisfaga

$$(VI.2-25) \quad (\partial M/\partial y) (\partial \ln X_2/\partial x) = (\partial M/\partial x) (\partial \ln X_2/\partial y)$$

Como consecuencia de lo anterior, la (VI.2-16) tomará la forma

$$(VI.2-26) \quad p_{01} = (D_1/\alpha_1) [\exp[\alpha_1 z] - 1] + (D_2/\alpha_2) [\exp[\alpha_2 z] - 1]$$

Por otra parte el sistema (VI.2-13a,b) puede ser reducido a una única ecuación en  $\hat{p}_2$

$$(VI.2-27) \quad K\# (\partial^3 \hat{p}_2 / \partial z^3) - K\# (c/\sin\phi_0) (\partial^2 \hat{p}_2 / \partial z^2) + (\partial M/\partial y) \exp[cz/\sin\phi_0] (\partial [(\partial \hat{p}_2 / \partial z) - (c/\sin\phi_0) \hat{p}_2] / \partial x) - (\partial M/\partial x) \exp[cz/\sin\phi_0] (\partial [(\partial \hat{p}_2 / \partial z) - (c/\sin\phi_0) \hat{p}_2] / \partial y) - i\beta\epsilon^{-1} (\partial \hat{p}_2 / \partial z) = F(x, y, z)$$

donde  $F(x, y, z)$  está dado por

$$\begin{aligned}
\text{(VI.2-28)} \quad F(x,y,z) = & (c/\sin\phi_0) \exp[cz/\sin\phi_0] y (\partial M/\partial y) [\tan\phi_0 - \cot\phi_0] (\partial p_1/\partial x) \\
& + (c/\sin\phi_0) \exp[cz/\sin\phi_0] y \cot\phi_0 (\partial M/\partial x) (\partial p_1/\partial y) + \\
& (c^2/\sin^2\phi_0) \exp[cz/\sin\phi_0] \cot\phi_0 \int_0^z (\partial p_1/\partial x) dz + \\
& [\cot\phi_0 (cz/\sin\phi_0) M + (1 + (cz/\sin\phi_0)) \cot\phi_0 y - \tan\phi_0] (\partial M/\partial y) ] \\
& \exp(cz/\sin\phi_0) (\partial^2 p_1/\partial x \partial z) + (c/\sin\phi_0) \exp[cz/\sin\phi_0] (\partial M/\partial x) \\
& [(1 + (cz/\sin\phi_0)) \cot\phi_0 y - \tan\phi_0 y] (\partial p_1/\partial y) - [(\cot\phi_0 - \tan\phi_0) y \\
& + (cz/\sin\phi_0) \cot\phi_0 y] \exp[cz/\sin\phi_0] (\partial M/\partial x) (\partial^2 p_1/\partial x \partial z) - \\
& [M(1 + (cz/\sin\phi_0) \cot\phi_0 + (\partial M/\partial y) [1 + (cz/\sin\phi_0) \cot\phi_0 y] \\
& (c/\sin\phi_0) \exp[cz/\sin\phi_0] (\partial p_1/\partial x) - [K\#(c/\sin\phi_0) \cot\phi_0 y - \\
& (\cos\phi_0/c) (\partial M/\partial x) \exp[cz/\sin\phi_0]] (\partial^2 p_1/\partial z^2)
\end{aligned}$$

La (VI.2-27) podrá ser escrita como:

$$\begin{aligned}
\text{(VI.2-29)} \quad (\partial^3 \hat{p}_2/\partial z^3) - (c/\sin\phi_0) (\partial^2 \hat{p}_2/\partial z^2) + K\#^{-1} \exp[cz/\sin\phi_0] [\nabla M \times \nabla_H [ \\
(\partial \hat{p}_2/\partial z) - (c/\sin\phi_0) \hat{p}_2]] - i\beta\epsilon^{-1} K\#^{-1} (\partial \hat{p}_2/\partial z) = K\#^{-1} F(x,y,z)
\end{aligned}$$

Mientras que, la ecuación diferencial homogénea será

$$\begin{aligned}
\text{(VI.2-29')} \quad (\partial^3 \hat{p}_2/\partial z^3) - (c/\sin\phi_0) (\partial^2 \hat{p}_2/\partial z^2) - i\beta\epsilon^{-1} K\#^{-1} (\partial \hat{p}_2/\partial z) + K\#^{-1} \\
[\nabla M \times \nabla_H [(\partial \hat{p}_2/\partial z) - (c/\sin\phi_0) \hat{p}_2]] \exp[cz/\sin\phi_0] = 0
\end{aligned}$$

donde  $\nabla_H$  representa el gradiente horizontal.

La solución homogénea puede ser encontrada bajo la suposición que

$$\text{(VI.2-30)} \quad \hat{p}_{2h}(x,y,z) = f(x,y) Z(z)$$

Si sustituimos la (VI.2-30) dentro de la (VI.2-29') obtendremos

$$\begin{aligned}
\text{(VI.2-31)} \quad (d^3 Z/dz^3) - (c/\sin\phi_0) (d^2 Z/dz^2) - i\beta\epsilon^{-1} K\#^{-1} (dZ/dz) \exp[cz/\sin\phi_0] \\
[\nabla M \times \nabla \ln(f)] [(dZ/dz) - (c/\sin\phi_0) Z] = 0
\end{aligned}$$

Sin embargo, la (VI.2-31) implica

$$(VI.2-32a) \quad K\#^{-1} \exp[cz/\sin\phi_0] [\nabla M \times \nabla \ln(f)] [(dZ/dz) - (c/\sin\phi_0)Z] = -g(z)$$

y

$$(VI.2-32b) \quad (d^3Z/dz^3) - (c/\sin\phi_0)(d^2Z/dz^2) - i\beta\epsilon^{-1}K\#^{-1}(dZ/dz) = g(z)$$

La solución de la (VI.2-32a) es (Kamke, 1959):

$$(VI.2-33) \quad Z = (E_1/\alpha_1) [\exp[\alpha_1 z] - 1] + (E_2/\alpha_2) [\exp[\alpha_2 z] - 1] + (1/\lambda) \int_0^z dz \int_0^z g(t) \exp[a(t-z)/2] [\exp[\lambda(z-t)/2] - \exp[-\lambda(z-t)/2]] dt$$

donde  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $\lambda$ , fueron definidas en (VI.2-23)

La ecuación (VI.2-32b) podrá ser resuelta si se satisface alguna de las siguientes posibilidades:

$$(VI.2-34a) \quad \nabla M \times \nabla \ln(f) = L = \text{cte.}$$

o

$$(VI.2-34b) \quad (dZ/dz) - (c/\sin\phi_0)Z = 0 \quad \text{y} \quad g(z) = 0$$

Bajo la suposición de que la (VI.2-34a) es cierta, la solución correspondiente a (VI.2-32b) estará dada por:

$$(VI.2-35) \quad Z = D \exp[cz/\sin\phi_0] - K\#^{-1} L^{-1} \int_0^z \exp[-cz/\sin\phi_0] g(z) dz$$

Mientras que, en el caso de cumplirse la (VI.2-34b), la solución correspondiente a la misma ecuación será:

$$(VI.2-36) \quad Z = D \exp[cz/\sin\phi_0]$$

Al comparar la (VI.2-34) con la (VI.2-35) o la (VI.2-36) vemos que las mismas son diferentes. Sin embargo, si hacemos  $L = 0$ , esto es

$$(VI.2-34a') \quad \nabla M \times \nabla \ln(f) = 0 \quad \text{y} \quad g(z) = 0$$

la solución de la ecuación (VI.2-32a) sería

$$(VI.2-37) \quad \hat{p}_{2h}(x, y, z) = f(x, y) (D_1^*/\alpha_1) [\exp[\alpha_1 z] - 1] + (D_2^*/\alpha_2) [\exp[\alpha_2 z] - 1]$$

De las ecuaciones (VI.2-25) y (VI.2-15) podemos concluir que

$$(VI.2-38) \quad (\partial M/\partial y) (\partial p_1/\partial x) = (\partial M/\partial x) (\partial p_1/\partial y)$$

y la (VI.2-28) tomará la forma

$$(VI.2-39) \quad F(x,y,z) = \cot\phi_0 (cz/\sin\phi_0) \exp[cz/\sin\phi_0] M(\partial X_2/\partial x) [(dp_{01}/dz) - (c/\sin\phi_0)p_{01}] + (c/\sin\phi_0) \exp[cz/\sin\phi_0] \cot\phi_0 (\partial X_2/\partial x) [(c/\sin\phi_0) \int_0^z p_{01} dz - M p_{01}] - X_2 [K\#y \cot\phi_0 (c/\sin\phi_0) - (\cos\phi_0/c) (\partial M/\partial x) \exp[cz/\sin\phi_0]] (d^2 p_{01}/dz^2)$$

La ecuación inhomogénea podrá ser escrita como

$$(VI.2-40) \quad (\partial^3 \hat{p}_2/\partial z^3) - (c/\sin\phi_0) (\partial^2 \hat{p}_2/\partial z^2) + K\#^{-1} \exp[cz/\sin\phi_0] [(\partial M/\partial y) (\partial/\partial x) - (\partial M/\partial x) (\partial/\partial y)] [(\partial \hat{p}_2/\partial z) - (c/\sin\phi_0) \hat{p}_2] - i\beta\epsilon^{-1} K\#^{-1} (\partial \hat{p}_2/\partial z) = F(x,y,z)$$

Podemos suponer que la solución particular satisface

$$(VI.2-41) \quad \nabla M \times \nabla_H [(\partial \hat{p}_{2p}/\partial z) - (c/\sin\phi_0) \hat{p}_{2p}] = 0$$

(Probaremos más adelante que la (VI.2-41) es una condición necesaria para cualquier tipo de solución). Por lo tanto, la (VI.2-40) será

$$(VI.2-42) \quad (\partial/\partial z) [(\partial^2 \hat{p}_{2p}/\partial z^2) - (c/\sin\phi_0) (\partial \hat{p}_{2p}/\partial z) - i\beta\epsilon^{-1} K\#^{-1} \hat{p}_{2p}] = F(x,y,z)$$

o utilizando la (VI.2-13c)

$$(VI.2-43) \quad (\partial^2 \hat{p}_{2p}/\partial z^2) - (c/\sin\phi_0) (\partial \hat{p}_{2p}/\partial z) - i\beta\epsilon^{-1} K\#^{-1} \hat{p}_{2p} = -F(x,y,z)$$

Determinaremos la solución particular de la ecuación diferencial inhomogénea (VI.2-43) utilizando el método de los coeficientes indeterminados, o el más general denominado "de la variación de parámetros" (Boyce y DiPrima, 1965). Sin embargo, hemos resuelto una ecuación similar con an-

terioridad (la (VI.2-17b)), en consecuencia

$$(VI.2-44) \quad \hat{\rho}_{2p} = -(1/\lambda) \int_0^z F(x,y,z) \exp[a(t-z)/2] [\exp[\lambda(z-t)/2] \\ - \exp[-\lambda(z-t)/2]] dt$$

donde  $a$  y  $\lambda$  fueron definidos en (VI.2-23).

Si sustituimos la expresión de  $F(x,y,z)$ , dada por la (VI.2-39), dentro de la (VI.2-44) obtendremos

$$(VI.2-45) \quad \hat{\rho}_{2p} = -(\lambda)^{-1} \left[ \cot\phi_0 (c/\sin\phi_0) M(\partial X_2/\partial x) \int_0^z [z(d\rho_{01}/dz) - \rho_{01} - (cz/\sin\phi_0) \rho_{01}] \Big|_t \exp[-at] [\exp[\lambda(z-t)/2] - \exp[-\lambda(z-t)/2]] dt + (c^2/\sin^2\phi_0) \cot\phi_0 (\partial X_2/\partial x) \int_0^z \left[ \int_0^z \rho_{01} dz \right] \Big|_t \exp[-at] \exp[a(t-z)/2] [\exp[\lambda(z-t)/2] - \exp[-\lambda(z-t)/2]] dt - K \cot\phi_0 (c/\sin\phi_0) X_2 \int_0^z (d^2\rho_{01}/dz^2) \Big|_t \exp[a(t-z)/2] [\exp[\lambda(z-t)/2] - \exp[-\lambda(z-t)/2]] dt + (\cos\phi_0/c) X_2 (\partial M/\partial x) \int_0^z (d^2\rho_{01}/dz^2) \Big|_t \exp[a(t-z)] \exp[-at] [\exp[\lambda(z-t)/2] - \exp[-\lambda(z-t)/2]] dt \right]$$

En consecuencia, la (VI.2-41) implicará

$$(VI.2-46a) \quad \nabla M \times \nabla [M(\partial X_2/\partial x)] = 0$$

$$(VI.2-46b) \quad \nabla M \times \nabla [\partial X_2/\partial x] = 0$$

$$(VI.2-46c) \quad \nabla M \times \nabla [X_2 y] = 0$$

$$(VI.2-46d) \quad \nabla M \times \nabla [X_2 (\partial M / \partial x)] = 0$$

Sin embargo, utilizando la (VI.2-25) podremos reducir el sistema de ecuaciones (VI.2-46a,d) a solamente dos relaciones

$$(VI.2-47a) \quad \nabla M \times \vec{e}_2 = 0$$

y

$$(VI.2-47b) \quad (\partial M / \partial y) (\partial X_2 / \partial x) = 0$$

donde  $\vec{e}_2$  es el vector unitario (0,1,0)

Las ecuaciones (VI.2-47a,b) son una consecuencia directa de la suposición (VI.2-41), la cual perdura como una condición muy conveniente pero arbitraria. Sin embargo, como veremos inmediatamente, la elección de la (VI.2-41) carece en realidad de dicha arbitrariedad. Como es bien conocido, la solución general de cualquier ecuación diferencial lineal e inhomogénea puede expresarse como la suma de la solución complementaria más una particular (Boyce y DiPrima, 1965; Birkoff y Rota, 1959). En otras palabras: La diferencia entre un par de soluciones de la ecuación diferencial (VI.2-40) será una solución de la ecuación diferencial homogénea correspondiente (VI.2-29;). Hemos comprobado que la solución de (VI.2-29') existe si la (VI.2-34a') es satisfecha. Sin embargo esta relación es equivalente a la (VI.2-41), la que en consecuencia será una condición necesaria para resolver la (VI.2-40).

Regresemos a las ecuaciones (VI.2-47a) y (VI.2-47b) para analizar las diferentes implicaciones de tales relaciones. De acuerdo con la (VI.2-47a), es posible perturbar un océano baroclínico unicamente cuando  $M = M(y)$ , pero aún en tal caso la forma horizontal de la perturbación (para las soluciones a primero y segundo orden) debe depender unicamente de "y". Esto último es una consecuencia directa de las relaciones (VI.2-34a') y (VI.2-47b). No obstante, cuando  $M = \text{cte.}$  desaparecen todas las restricciones sobre  $X_2$  y  $f$ .

A partir de las ecuaciones (VI.2-7), (VI.2-11), (VI.2-13c), (VI.2-15) y (VI.2-26) podremos reconstruir las siguientes soluciones

$$(VI.2-48a) \quad \tilde{\rho}_1 = -[D_1 \exp[\alpha_1 z] + D_2 \exp[\alpha_2 z]] X_2(y) \exp[i\beta \tau] \quad \text{si } M=M(y)$$

o

$$(VI.2-48b) \quad \tilde{\rho}_1 = -[D_1 \exp[\alpha_1 z] + D_2 \exp[\alpha_2 z]] X_2(x, y) \exp[i\beta\tau] \quad \text{si } M = \text{cte.}$$

Mientras que a partir de (VI.2-7), (VI.2-11), (VI.2-13c), (VI.2-36) y (VI.2-45) obtendríamos

$$(VI.2-49a) \quad \tilde{\rho}_2 = -\exp[i\beta\tau] \left[ [D_1^* \exp[\alpha_1 z] + D_2^* \exp[\alpha_2 z]] f(y) + \lambda^{-1} [K \# \cot\phi_0 \right. \\ \left. (c/\sin\phi_0) X_2(y) y \int_0^z (d^2 p_{01}/dz^2) \Big|_t \exp[a(t-z)/2] \right. \\ \left. [\exp[\lambda(z-t)/2] - \exp[-\lambda(z-t)/2]] dt \right]$$

Si  $M = M(y)$

o

$$(VI.2-49b) \quad \tilde{\rho}_2 = -\exp[i\beta\tau] \left[ [D_1^* \exp[\alpha_1 z] + D_2^* \exp[\alpha_2 z]] f(x, y) - \lambda^{-1} [\cot\phi_0 \right. \\ \left. (c/\sin\phi_0) M(\partial X_2/\partial x) \int_0^z [z (dp_{01}/dz) - p_{01} - (cz/\sin\phi_0) p_{01}] \Big|_t \right. \\ \left. \exp[-at] \exp[a(t-z)/2] [\exp[\lambda(z-t)/2] - \exp[-\lambda(z-t)/2]] dt \right. \\ \left. + (c^2/\sin^2\phi_0) \cot\phi_0 (\partial X_2/\partial x) \int_0^z \left[ \int_0^z p_{01} dz \right] \Big|_t \exp[-at] \right. \\ \left. \exp[a(t-z)/2] [\exp[\lambda(z-t)/2] - \exp[-\lambda(z-t)/2]] dt - K \# \cot\phi_0 \right. \\ \left. (c/\sin\phi_0) X_2(x, y) y \int_0^z [d^2 p_{01}/dz^2] \Big|_t \exp[a(t-z)/2] \right. \\ \left. [\exp[\lambda(z-t)/2] - \exp[-\lambda(z-t)/2]] dt \right]$$

Si  $M = \text{cte.}$



La solución general del sistema perturbado será

$$(VI.2-50) \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}_1(y, z, \tau) + (L/a_0) \tilde{\rho}_2(y, z, \tau) \quad \text{Si } M=M(y)$$

(utilizando (VI.2-48a) y (VI.2-49a))

o

$$(VI.2-51) \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}_1(x, y, z, \tau) + (L/a_0) \tilde{\rho}_2(x, y, z, \tau) \quad \text{Si } M=cte.$$

(utilizando (VI.2-48b) y (VI.2-49b))

Debemos destacar la relación existente entre  $f(y)$  (o  $f(x,y)$ ) y  $X_2(y)$  (o  $X_2(x,y)$ ) cuando  $M = M(y)$  (o  $M = cte.$ ), donde ambas funciones han aparecido como consecuencia de la separación de variables cuando resolvimos la (VI.2-14) y la correspondiente ecuación homogénea (VI.2-29). Resultados similares podrían haber sido obtenidos aplicando el método de separación de variables a la ecuación homogénea previamente desarrollada en serie de potencias. En efecto la (VI.2-11) es únicamente un desarrollo en serie de la variable  $z$ , pero no de  $x$  e  $y$ . En consecuencia,  $f(y) = X_2(y)$  ( $f(x,y) = X_2(x,y)$ ) cuando  $M = M(y)$  ( $M = cte.$ ).

### VI.3 Estabilidad de un océano puramente baroclínico sin flujo de empuje a través de la interface aire-mar.

De acuerdo con el modelo físico del océano, que fuera descrito en Capítulo V, utilizaremos las siguientes condiciones de contorno:

$$(VI.3-1a) \quad \left. (\partial \tilde{\rho}_1 / \partial z) \right|_{z=0} = 0 \quad \text{y} \quad \left. (\partial \tilde{\rho}_2 / \partial z) \right|_{z=0} = 0$$

$$VI.3-1b) \quad \left. \tilde{\rho}_1 \right|_{z=(-1/h)} = 0 \quad \text{y} \quad \left. \tilde{\rho}_2 \right|_{z=(-1/h)} = 0$$

Las condiciones de contorno (VI.3-1a) y (VI.3-1b) aplicadas a (VI.2-48a) o (VI.2-48b) implican que

$$(VI.3-2) \quad \begin{cases} D_1 \alpha_1 + D_2 \alpha_2 = 0 \\ D_1 \exp[-\alpha_1/h] + D_2 \exp[-\alpha_2/h] = 0 \end{cases}$$

Esto significa que

$$\begin{aligned} \circ \quad & \alpha_1 = \alpha_2 \quad \text{y} \quad D_1 = -D_2 \\ \text{(VI.3-3)} \quad & \tilde{\rho}_1 = 0 \quad \text{y} \quad (\partial \tilde{\rho}_1 / \partial z) = 0 \end{aligned}$$

Utilizando la (VI.3-2) y las mismas condiciones de contorno para las soluciones (VI.2-49a) y (VI.2-49b), es sencillo comprobar que

$$\text{(VI.3-4)} \quad \tilde{\rho}_2 = 0$$

En consecuencia, podremos concluir que: "En un océano puramente baroclínico es imposible perturbar el sistema desde la atmosfera sin el flujo de empuje perturbado a través de la interface aire-mar."

#### VI.4 Estabilidad de un océano puramente baroclínico con flujo de empuje a través de la interface aire-mar.

Tal como en la Sección V.8, utilizaremos las siguientes condiciones iniciales

$$\text{(VI.4-1a)} \quad (\partial \tilde{\rho}_1 / \partial z) \Big|_{z=0} = X_2'(x, y) \quad \text{y} \quad (\partial \tilde{\rho}_2 / \partial z) \Big|_{z=0} = 0 \quad (\text{a } \tau = 0)$$

$$\text{(VI.4-1b)} \quad \tilde{\rho}_1 \Big|_{z=-1/h} = 0 \quad \text{y} \quad \tilde{\rho}_2 \Big|_{z=-1/h} = 0 \quad (\text{a } \tau = 0)$$

Esto significa que en el instante inicial existe un flujo de empuje efectivo a través de la superficie, pero la perturbación en el campo de densidad no alcanza cierto nivel  $z = -1/h$ .

Luego de un tiempo

$$\text{(VI.4-2a)} \quad (\partial \tilde{\rho}_1 / \partial z) \Big|_{z=0} = X_2'(x, y) \exp[iw'\tau] \quad \text{y} \quad (\partial \tilde{\rho}_2 / \partial z) \Big|_{z=0} = 0 \quad (\text{a } \tau \neq 0)$$

$$\text{(VI.4-2b)} \quad \tilde{\rho}_1 \Big|_{z=-1/h} = 0 \quad \text{y} \quad \tilde{\rho}_2 \Big|_{z=-1/h} = 0 \quad (\text{a } \tau \neq 0)$$

donde

$$\text{(VI.4-3)} \quad w' = w_R + i w_I$$

A  $\tau = 0$ , podemos obtener a partir de (VI.2-48a) y (VI.2-48b)

$$(VI.4-4) \quad \begin{cases} D_1 \alpha_1 + D_2 \alpha_2 = -1 \\ D_1 \exp[-\alpha_1/h] + D_2 \exp[-\alpha_2/h] = 0 \end{cases}$$

y

$$(VI.4-5) \quad \begin{cases} X_2(x,y) = X_2'(x,y) & \text{Si } M = \text{cte.} \\ X_2(y) = X_2'(y) & \text{Si } M = M(y) \end{cases}$$

A partir de las relaciones (VI.4-4) podemos determinar que

$$(VI.4-6) \quad \begin{cases} D_1 = -[\alpha_1 - \alpha_2 \exp[(\alpha_2 - \alpha_1)/h]]^{-1} \\ D_2 = \exp[(\alpha_2 - \alpha_1)/h] [\alpha_1 - \alpha_2 \exp[(\alpha_2 - \alpha_1)/h]]^{-1} \end{cases}$$

Las condiciones de contorno a  $\tau \neq 0$  implican

$$(VI.4-7) \quad \beta = w_R + i w_I$$

En consecuencia, la (VI.2-47a) o (VI.2-47b) se transformarán en:

$$(VI.4-8) \quad \tilde{\rho}_1(x,y,z,\tau) = -\exp[i(w_R + i w_I)\tau] [\alpha_1 - \alpha_2 \exp[(\alpha_2 - \alpha_1)/h]]^{-1} \\ \times \left\{ \begin{array}{l} \exp[\alpha_1 z] - \exp[(\alpha_2 - \alpha_1)/h] \exp[\alpha_2 z] \\ X_2(y) \text{ Si } M = M(y) \\ X_2'(x,y) \text{ Si } M = \text{cte.} \end{array} \right.$$

Para poder aplicar las condiciones de contorno a (VI.2-49a) y (VI.2-49b), deberemos estudiar los casos para  $M = \text{cte.}$  y  $M = M(y)$  separadamente.

#### VI.4.1 Océano puramente baroclínico con $M = M(y)$

Cuando  $M = M(y)$  debemos aplicar las condiciones de contorno (VI.4-1a,b) y (VI.4-2a,b) a la solución (VI.2-49a).

A  $\tau = 0$ , la (VI.4-1a) implica que

$$(VI.4-9) \quad \left. \left( \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} \right) \right|_{z=0} = D_1^* \alpha_1 + D_2^* \alpha_2 = 0$$

Mientras que, utilizando la bien conocida propiedad de las derivadas

(Beyer, 1974)

$$(VI.4-10) \quad (d/dz) \int_0^z g(x,z) dx = \int_0^z (\partial/\partial z) [g(x,z)] dx + g(x=z,z)$$

es sencillo obtener

$$(VI.4-11) \quad (\partial \tilde{\rho}_{2p} / \partial z) \Big|_{z=0} = 0 \quad (\text{para todo } y)$$

Por otro lado, la condición (VI.4-1b) implica

$$X_2(y) [D_1^* \exp[-\alpha_1/h] + D_2^* \exp[\alpha_2/h]] - K \# (\alpha_2 - \alpha_1)^{-1} \cot \Phi_0 (c/\sin \Phi_0) X_2(y) \text{ y}$$

$$\int_0^{-1/h} (d\tilde{\rho}_{01} / dz) \Big|_t [\exp[-\alpha_1(t+(1/h))] - \exp[-\alpha_2(t+(1/h))]] dt = 0$$

Utilizando las (VI.4-4) y (VI.4-9), luego de cierto algebrao, es posible obtener

$$(VI.4-12) \quad \begin{cases} D_1^* [1 - (\alpha_1/\alpha_2) \exp[-(\alpha_2 - \alpha_1)/h]] = 0 \\ \int_0^{-1/h} (d\rho_{01} / dz) \Big|_t [\exp[-\alpha_1(t+(1/h))] - \exp[-\alpha_2(t+(1/h))]] dt = 0 \end{cases}$$

Si  $D_1^* \neq 0$ , la primera ecuación implica

$$\exp[-(\alpha_2 - \alpha_1)/h] = (\alpha_1/\alpha_2)$$

y de acuerdo con la (VI.4-6) esto significa que

$$D_1, D_2 \longrightarrow \infty$$

En consecuencia, supondremos que  $D_1^* = 0$ , pero esto implica dos posibilidades de acuerdo con (VI.4-9):  $\alpha_2 = 0$  o  $D_2^* = 0$ . Sin embargo,  $\alpha_2 = 0$  significa (de acuerdo con la (VI.2-23)) que  $\beta = 0$ , o sea ausencia de perturbación.

Por lo tanto, tomaremos únicamente en consideración el caso  $D_1^* = D_2^* = 0$ ,

con lo cual

$$(VI.4-13) \quad \tilde{\rho}_{O2} = -\lambda^{-1} K \cot \phi_0 (c / \sin \phi_0) \int_0^z (d\tilde{\rho}_{O1} / dz) \Big|_t [\exp[\alpha_1(z-t)] - \exp[\alpha_2(z-t)]] dt$$

A partir de la expresión (VI.4-8) obtendremos

$$(VI.4-14) \quad (d\tilde{\rho}_{O1} / dz) \Big|_t = - [\alpha_1 - \alpha_2 \exp[-\lambda/h]]^{-1} [\alpha_1 \exp[\alpha_1 t] - \alpha_2 \exp[-\lambda/h] \exp[\alpha_2 t]]$$

por lo tanto

$$(VI.4-15) \quad \hat{\rho}_{O2} = K \lambda^{-1} (c \cot \phi_0 / \sin \phi_0) \exp[(-a+\lambda)(z/2)] \left[ (1/2) [(-a+\lambda) - (a+\lambda) \exp[-\lambda/h]] \left[ (1/2) (-a+\lambda) [z - \lambda^{-1} \exp[-\lambda z] (\exp[\lambda z] - 1)] + (1/2) (a+\lambda) \exp[-\lambda/h] [-\lambda^{-1} (\exp[-\lambda z] - 1) - \exp[-\lambda z] z] \right] \right]$$

donde hemos hecho uso de la (VI.2-23).

En el caso particular cuando  $z = -1/h$ , la ecuación anterior tomará la forma

$$(VI.4-16) \quad \hat{\rho}_{O2}(z=-1/h) = K \lambda^{-1} (2c \cot \phi_0 / \sin \phi_0) \exp[-(\lambda-a)/2h] \left[ (\lambda-a) - (\lambda+a) \exp[-\lambda/h] \right]^{-1} \left[ a \left[ (1/h) - \lambda^{-1} \sinh(\lambda/h) \right] - 1 + \cosh(\lambda/h) \right]$$

Para satisfacer las condiciones (VI.4-1b) y (VI.4-2b) será necesario que

$$(VI.4-17) \quad [(1/h) - (1/a)] = [(\sinh(\lambda/h)/\lambda) - (\cosh(\lambda/h)/a)]$$

Sin embargo no existe solución para tal ecuación. En otras palabras, podemos afirmar que no existe perturbación bajo las condiciones de contorno (VI.4-1a, b).

Intentaremos resolver nuestro problema bajo las siguientes condiciones de contorno:

$$(VI.4-18) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\partial \hat{\rho}_1 / \partial z) \Big|_{z=0} + a_2 \hat{\rho}_1 \Big|_{z=0} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} (\hat{\rho}_1 / \partial z) \Big|_{z=-1} + b_2 \hat{\rho}_2 \Big|_{z=-1} = 0 \end{aligned} \right\}$$

Utilizando la expresión (VI.2-48a) podremos escribir las dos ecuaciones anteriores en la forma

$$(VI.4-19) \quad \begin{cases} D_1 (\alpha_1 + a_2) + D_2 (\alpha_2 + a_2) = 0 \\ D_1 (\alpha_1 \exp[-\alpha_1] + b_2 \exp[-\alpha_1]) + D_2 (\alpha_2 \exp[-\alpha_2] + b_2 \exp[-\alpha_2]) = 0 \end{cases}$$

Este conjunto de ecuaciones lineales y homogéneas tendrá solución (diferente a  $D_1 = D_2 = 0$ ) si y solamente si el determinante es nulo; esto es si y sólo si

$$(VI.4-20) \quad (\alpha_1 + a_2) (\alpha_2 + b_2) \exp[-\alpha_2] - (\alpha_2 + a_2) (\alpha_1 + b_2) \exp[-\alpha_1] = 0$$

Suponiendo que  $b_2 = 0$ , esto significa  $(\hat{\rho}_1 / \partial z) = 0$  a  $z = -1$  (es decir que no existe flujo de empuje perturbado a través del fondo), la (VI.4-20) se transformará en

$$\alpha_2 (\alpha_1 + a_2) \exp[-\alpha_2] - \alpha_1 (\alpha_2 + a_2) \exp[-\alpha_1] = 0$$

o utilizando la (VI.2-23)

$$(VI.4-21) \quad [2a_2 + (c/\sin\phi_0) + \lambda] [(c/\sin\phi_0) - \lambda] \exp[\lambda] = [2a_2 + (c/\sin\phi_0) - \lambda] [(c/\sin\phi_0) + \lambda]$$

Las soluciones posibles para esta ecuación son

$$(VI.4-22) \quad \begin{cases} \operatorname{Re}(\lambda) = \lambda_R = 0 \\ \operatorname{Im}(\lambda) = \begin{cases} \lambda_I = \pm 2n\pi \\ \lambda_I = \pm (n + 1/2)\pi \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

y los autovalores temporales correspondientes serán:

$$(VI.4-23) \quad \begin{cases} \beta^1 = iK\epsilon [(c/2\sin\phi_0)^2 + (2n\pi)^2] \\ \beta^2 = iK\epsilon [(c/2\sin\phi_0)^2 + (n+(1/2))^2\pi^2] \end{cases} \quad (n= 0,1,2,3,\dots)$$

En ambos casos el flujo básico permanece estable. Es necesario destacar que la condición de contorno  $(\partial \hat{\rho}_1 / \partial z) = 0$  en  $z = -1$ , inhibe cualquier tipo de intercambio térmico con el lecho marino. Este hecho es muy importante debido a que en este trabajo estamos unicamente interesados en aquellas perturbaciones cuyo origen es atmosférico.

#### VI.4-2) Océano puramente baroclínico con $M = \text{cte.}$

Este es un caso particular para un flujo baroclínico y todos los resultados vistos en la Sección anterior son aplicables. A pesar de que  $M = \text{cte.}$  implica que han sido removidas todas las restricciones sobre la forma de la dependencia horizontal, la arbitrariedad en la elección de  $X_2(x,y)$  no tiene influencia alguna sobre la estabilidad, bajo las condiciones de contorno (VI.4-18).

#### VI.5 Estabilidad de un océano baroclínico general

El sistema de ecuaciones para la perturbación en el caso de un océano baroclínico general fue mostrado en la Sección VI.1 (ecuaciones (VI.1-6) a (VI.1-10)), donde  $p_0$ ,  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$  y  $\rho_0$  están dadas por las (VI.1-1) a (VI.1-5). Tal como en la Sección VI.2, podemos suponer que

$$(VI.5-1) \quad \begin{cases} \check{p}(x,y,z,\tau) \\ \check{u}(x,y,z,\tau) \\ \check{v}(x,y,z,\tau) \\ \check{w}(x,y,z,\tau) \\ \check{\rho}(x,y,z,\tau) \end{cases} = \exp[i\beta\tau] \begin{cases} \hat{p}(x,y,z) \\ \hat{u}(x,y,z) \\ \hat{v}(x,y,z) \\ \hat{w}(x,y,z) \\ \hat{\rho}(x,y,z) \end{cases}$$

En consecuencia, nuestro sistema se podrá escribir como

$$(VI.5-2) \quad i\beta \hat{u} - \hat{v} (1 + b_1 y) + (\partial \hat{p} / \partial x) (1 + c_1 y) = 0$$

$$(VI.5-3) \quad i\beta \hat{v} + \hat{u} (1 + b_1 y) + (\partial \hat{p} / \partial y) = 0$$

$$(VI.5-4) \quad (\partial \hat{p} / \partial z) + \rho = 0$$

$$(VI.5-5) \quad i\beta (L/a_0) \hat{\rho} + (\partial \hat{u} / \partial x) (1 + c_1 y) + (\partial \hat{v} / \partial y) - c_1 \hat{v} + (L/a_0) (\partial \hat{w} / \partial z) = 0$$

$$(VI.5-6) \quad i\beta (\epsilon^{-1} + z) \hat{\rho} + u_0 (\partial \hat{\rho} / \partial x) (1 + c_1 y) + \hat{u} (\partial \rho_0 / \partial x) (1 + c_1 y) + v_0 (\partial \hat{\rho} / \partial y) \\ + \hat{v} (\partial \rho_0 / \partial y) + (L/a_0) w_0 (\partial \hat{\rho} / \partial z) + (L/a_0) \hat{w} (\partial \rho_0 / \partial z) = K \# (\partial^2 \hat{\rho} / \partial z^2)$$

Para resolver el sistema (VI.5-2,6) aplicaremos el mismo método que usaremos en la Sección VI.2; es decir que supondremos que las soluciones tienen la forma

$$(VI.5-7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{u} = \hat{u}_1 + (L/a_0) \hat{u}_2 \\ \hat{v} = \hat{v}_1 + (L/a_0) \hat{v}_2 \\ \hat{w} = \hat{w}_1 + (L/a_0) \hat{w}_2 \\ \hat{p} = \hat{p}_1 + (L/a_0) \hat{p}_2 \\ \hat{\rho} = \hat{\rho}_1 + (L/a_0) \hat{\rho}_2 \end{array} \right.$$

Por lo tanto el sistema de las perturbaciones a  $O(1)$  será (recordando que  $O(\beta) \ll O(\epsilon)$ )

$$(VI.5-8a) \quad -\hat{v}_1 + (\partial \hat{p}_1 / \partial x) = 0$$

$$(VI.5-8b) \quad \hat{u}_1 + (\partial \hat{p}_1 / \partial y) = 0$$

$$(VI.5-8c) \quad (\partial \hat{p}_1 / \partial z) + \hat{\rho}_1 = 0$$

$$(VI.5-8d) \quad (\partial \hat{u}_1 / \partial x) + (\partial \hat{v}_1 / \partial y) = 0$$



$$\begin{aligned}
 \text{(VI. 5-8e)} \quad & i\beta\epsilon^{-1}\hat{\rho}_1 - [(\partial A/\partial y) + (\partial M/\partial y) \exp[cz/\sin\phi_0]] (\partial \hat{\rho}_1/\partial x) - \hat{u}_1 (c/\sin\phi_0) \\
 & (\partial M/\partial x) \exp[cz/\sin\phi_0] + (\partial \hat{\rho}_1/\partial y) [(\partial A/\partial x) + (\partial M/\partial x) \exp[cz/\sin\phi_0]] \\
 & - (c/\sin\phi_0) (\partial M/\partial y) \exp[cz/\sin\phi_0] \hat{v}_1 + [K\# (c/\sin\phi_0) + M^{-1} (\sin\phi_0/c)] \\
 & [(\partial M/\partial x) (\partial A/\partial y) - (\partial M/\partial y) (\partial A/\partial x)] (\partial \hat{\rho}_1/\partial z) = K\# (\partial^2 \hat{\rho}_1/\partial z^2)
 \end{aligned}$$

Mientras que a  $O(10^{-1})$  el sistema de ecuaciones correspondiente será

$$\text{(VI. 5-9a)} \quad -\hat{v}_1 b_1 y - (L/a_0) \hat{v}_2 + (\partial \hat{\rho}_1/\partial x) c_1 y + (L/a_0) (\partial \hat{\rho}_2/\partial x) = 0$$

$$\text{(VI. 5-9b)} \quad \hat{u}_1 b_1 y + (L/a_0) \hat{u}_2 + (L/a_0) (\partial \hat{\rho}_2/\partial y) = 0$$

$$\text{(VI. 5-9c)} \quad (\partial \hat{\rho}_2/\partial z) + \hat{\rho}_2 = 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{(VI. 5-9d)} \quad & (L/a_0) (\partial \hat{u}_2/\partial x) + c_1 y (\partial \hat{u}_1/\partial x) + (L/a_0) (\partial \hat{v}_2/\partial y) - c_1 \hat{v}_1 + (L/a_0) \\
 & (\partial \hat{w}_1/\partial z) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(VI. 5-9e)} \quad & i\beta\epsilon^{-1}\hat{\rho}_2 (L/a_0) - [c_1 y (\partial \hat{\rho}_1/\partial x) + (L/a_0) (\partial \hat{\rho}_2/\partial x)] [(\partial A/\partial y) + (\partial M/\partial y) \\
 & \exp[cz/\sin\phi_0]] + [b_1 y (\partial A/\partial y) + (1 + (cz/\sin\phi_0)) b_1 y (\partial M/\partial y) \\
 & \exp[cz/\sin\phi_0] + (cz/\sin\phi_0) b_1 M \exp[cz/\sin\phi_0]] (\partial \hat{\rho}_1/\partial x) - (c/\sin\phi_0) \\
 & (\partial M/\partial x) \exp[cz/\sin\phi_0] [(L/a_0) \hat{u}_2 + \hat{u}_1 c_1 y] + [(c/\sin\phi_0) (\partial M/\partial x) (1 + \\
 & (cz/\sin\phi_0)) b_1 y \exp[cz/\sin\phi_0] \hat{u}_1] + [(\partial A/\partial x) + (\partial M/\partial x) \exp[cz/\sin\phi_0]] \\
 & (L/a_0) (\partial \hat{\rho}_2/\partial y) - [a_1 y (\partial A/\partial y) + (a_1 y + (cz/\sin\phi_0) b_1 y) \exp[cz/\sin\phi_0]] \\
 & (\partial \hat{\rho}_1/\partial y) - (cz/\sin\phi_0) (\partial M/\partial y) \exp[cz/\sin\phi_0] (L/a_0) \hat{v}_2 + [(c/\sin\phi_0) \\
 & (\partial M/\partial y) (1 + (cz/\sin\phi_0)) b_1 y + (c/\sin\phi_0) M (1 + (cz/\sin\phi_0)) b_1] \\
 & \exp[cz/\sin\phi_0] \hat{v}_1 + [K\# (cz/\sin\phi_0) + (\sin\phi_0/c) M^{-1}] [(\partial M/\partial x) (\partial A/\partial y) \\
 & - (\partial M/\partial y) (\partial A/\partial x)] (L/a_0) (\partial \hat{\rho}_2/\partial z) + [-K\# (c/\sin\phi_0) b_1 y + (\sin\phi_0/c) M^{-1} \\
 & [(\partial M/\partial x) (\partial A/\partial y) - (\partial M/\partial y) (\partial A/\partial x) c_1 y + (\cos\phi_0/c) (L/a_0) (1 + (cz/\sin\phi_0)) \\
 & (\partial A/\partial x) + (\cos\phi_0/c) (L/a_0) (\partial M/\partial x) \exp[cz/\sin\phi_0]] (\partial \hat{\rho}_1/\partial z) - (L/a_0) \\
 & (c/\sin\phi_0)^2 M \exp[cz/\sin\phi_0] \hat{w}_1 = K\# (L/a_0) (\partial^2 \hat{\rho}_2/\partial z^2)
 \end{aligned}$$

Podemos reducir el sistema (VI.5-8a,b) a una sola ecuación diferencial en  $\hat{p}_1$

$$(VI.5-10) \quad -i\beta\epsilon^{-1}(\partial p_1/\partial z) + [(\partial A/\partial y) + (\partial M/\partial y)\exp[cz/\sin\phi_0]](\partial^2 p_1/\partial x\partial z) + \\ (c/\sin\phi_0)(\partial M/\partial x)\exp[cz/\sin\phi_0](\partial p_1/\partial y) - [(\partial A/\partial x) + (\partial M/\partial x) \\ \exp[cz/\sin\phi_0]](\partial^2 p_1/\partial z\partial y) - (c/\sin\phi_0)(\partial M/\partial y)\exp[cz/\sin\phi_0](\partial p_1/\partial x) \\ - [K\#(c/\sin\phi_0) + (\sin\phi_0/c)M^{-1}[(\partial M/\partial x)(\partial A/\partial y) - (\partial M/\partial y)(\partial A/\partial x)]](\partial^2 p_1/\partial z^2) + K\#(\partial^3 p_1/\partial z^3) = 0$$

Suponiendo que

$$(VI.5-11) \quad \hat{p}_1 = X_2(x,y)p_{01}(z)$$

y sustituyendo dentro de la (VI.5-10) obtendremos

$$(VI.5-12) \quad (d^3 p_{01}/dz^3) - (c/\sin\phi_0)(d^2 p_{01}/dz^2) - i\beta(\epsilon K\#)^{-1}(dp_{01}/dz) + K\#^{-1} \\ (\sin\phi_0/c)M^{-1}[(\partial M/\partial x)(\partial A/\partial y) - (\partial M/\partial y)(\partial A/\partial x)](d^2 p_{01}/dz^2) + \\ [(\partial A/\partial y)(\partial \ln X_2/\partial x) - (\partial A/\partial x)(\partial \ln X_2/\partial y)]K\#^{-1}(dp_{01}/dz) + \\ K\#^{-1}\exp[cz/\sin\phi_0][(\partial M/\partial y)(\partial \ln X_2/\partial x) - (\partial M/\partial x)(\partial \ln X_2/\partial y)] \\ (dp_{01}/dz) + (c/\sin\phi_0)K\#^{-1}\exp[cz/\sin\phi_0][(\partial M/\partial x)(\partial \ln X_2/\partial y) - \\ (\partial M/\partial y)(\partial \ln X_2/\partial x)]p_{01} = 0$$

La ecuación anterior implica que

$$(VI.5-13a) \quad (d^3 p_{01}/dz^3) - (c/\sin\phi_0)(d^2 p_{01}/dz^2) - i\beta(\epsilon K\#)^{-1}(dp_{01}/dz) = g(z)$$

y

$$(VI.5-13b) \quad K\#^{-1}(\sin\phi_0/c)[(\partial M/\partial x)(\partial A/\partial y) - (\partial M/\partial y)(\partial A/\partial x)](d^2 p_{01}/dz^2) + \\ K\#^{-1}[(\partial A/\partial y)(\partial \ln X_2/\partial x) - (\partial A/\partial x)(\partial \ln X_2/\partial y) + \exp[cz/\sin\phi_0] \\ [(\partial M/\partial y)(\partial \ln X_2/\partial x) - (\partial M/\partial x)(\partial \ln X_2/\partial y)]](dp_{01}/dz) + K\#^{-1} \\ (c/\sin\phi_0)\exp[cz/\sin\phi_0][(\partial M/\partial x)(\partial \ln X_2/\partial y) - (\partial M/\partial y)(\partial \ln X_2/\partial x)] \\ p_{01} = -g(z)$$

donde  $p_{01} = p_{01}(z)$ , mientras que  $X_2 = X_2(x,y)$ ,  $M = M(x,y)$  y  $g = g(z)$ .  
La solución correspondiente a (VI.5-13a) es (Kamke, 1940)

$$(VI.5-14) \quad p_{01} = (D_1/\alpha_1) [\exp[\alpha_1 z] - 1] + (D_2/\alpha_2) [\exp[\alpha_2 z] - 1] + (\lambda)^{-1} \int_0^z dz \\ \int_0^z g(t) \exp[a(t-z)/2] [\exp[\lambda(z-t)/2] - \exp[-\lambda(z-t)/2]] dt$$

donde  $a$ ,  $\lambda$ ,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  fueron definidas en (VI.2-23).

Para resolver la (VI.5-13b) definiremos

$$(VI.5-15) \quad \left\{ \begin{array}{l} M^{-1} [(\partial M/\partial x) (\partial A/\partial y) - (\partial M/\partial y) (\partial A/\partial x)] = \nabla_H (\ln M) \times \nabla_H A = S = \text{cte.} \\ \nabla_H (\ln X_2) \times \nabla_H M = N = \text{cte.} \\ \nabla_H (\ln X_2) \times \nabla_H A = R = \text{cte.} \end{array} \right.$$

En consecuencia, la (VI.5-13b) podrá escribirse en la forma

$$(VI.5-16) \quad (\sin \phi_0 / c) (S/K\#) (d^2 p_{01} / dz^2) + K\#^{-1} [R + N \exp[cz/\sin \phi_0]] (dp_{01} / dz) \\ - (c/\sin \phi_0) (N/K\#) \exp[cz/\sin \phi_0] p_{01} = -g(z)$$

a) Supongamos que  $S = 0$ ,  $N \neq 0$  y  $R \neq 0$ ; esto significa de acuerdo a la (VI.5-15)

$$(VI.5-17) \quad (\partial M/\partial x) (\partial A/\partial y) = (\partial M/\partial y) (\partial A/\partial x)$$

Mientras que la (VI.5-16) tomará la forma

$$(VI.5-18) \quad (dp_{01} / dz) - (c/\sin \phi_0) N \exp[cz/\sin \phi_0] [R + N \exp[cz/\sin \phi_0]]^{-1} p_{01} = \\ -K\# [R + N \exp[cz/\sin \phi_0]]^{-1} g(z)$$

La anterior es una ecuación diferencial lineal a primer orden (Miller, 1941) cuya solución es:

$$(VI.5-19) \quad p_{01} = [R+N \exp[cz/\sin\phi_0]] [C - \int K\# [R+N \exp[cz/\sin\phi_0]]^{-1} g(z) dz]$$

Sin embargo esta solución es completamente diferente a la (VI.5-14), por lo cual podemos concluir que la suposición (VI.5-17) no es correcta.

b) Supongamos que  $N = 0$ , esto significa, de acuerdo a la (VI.5-15), que

$$(VI.5-20) \quad \nabla_H (\ln X_2) X_V^M = 0$$

En consecuencia la (VI.5-16) estará dada por

$$(VI.5-21) \quad (\sin\phi_0/c) (S/K\#) (d^2 p_{01}/dz^2) + (R/K\#) (dp_{01}/dz) = -g(z)$$

con solución (Miller, 1941)

$$(VI.5-22) \quad p_{01} = -C [(R/S) (c/\sin\phi_0)]^{-1} [\exp[cz/\sin\phi_0] - 1] - \int_0^z \exp[(R/S) (cz/\sin\phi_0)] dz \int_0^z (K\#/S) (c/\sin\phi_0) g(t) \exp[-(R/S) (ct/\sin\phi_0)] dt$$

La (VI.5-22) será igual a la (VI.5-14) si y solamente si

$$(VI.5-23) \quad \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = (c/\sin\phi_0) \\ S + 2R = 0 \\ g(z) = 0 \\ D_1 = D_2 = -C \end{cases}$$

Sin embargo, la condición  $\alpha_1 = \alpha_2$  o  $(\lambda/2) = 0$  implica, de acuerdo con la (VI.2-23), que

$$(VI.5-24) \quad \beta = i(\epsilon K\#/4) (\sin\phi_0/c)^2$$

Esto significa que solamente puede existir un único modo temporal para la perturbación.

Bajo la condición de que

$$(VI.5-25a) \quad \nabla_H X_2(x,y) \times \nabla_H M(x,y) = 0$$

y

$$(VI.5-23b) \quad 2[\nabla_H(\ln X_2(x,y)) \times \nabla_H A(x,y)] = \nabla_H A(x,y) \times \nabla_H[\ln M(x,y)] = \\ = \text{cte.}$$

la solución para la perturbación del campo de presión, de acuerdo con el sistema (VI.5-8a,b), será

$$(VI.5-26) \quad \hat{p}_1(x,y,z) = -(CS/R) (\sin\phi_0/c) [\exp[cz/2\sin\phi_0] - 1] X_2(x,y)$$

Cuando la (VI.5-25b) es idénticamente nula, la solución  $p_1$  será la trivial.

c) Supongamos que  $R = 0$ . De acuerdo con la (VI.5-15) esto significa:

$$(VI.5-27) \quad \nabla_H(\ln X_2(x,y)) \times \nabla_H A(x,y) = 0$$

En consecuencia la (VI.5-18) tomará la forma

$$(VI.5-28) \quad (d^2 p_{01}/dz^2) + (Nc/S \sin\phi_0) \exp[cz/\sin\phi_0] (dp_{01}/dz) - \\ (c/\sin\phi_0)^2 (N/S) \exp[cz/\sin\phi_0] p_{01} = -K\# (c/S \sin\phi_0) g(z)$$

y la ecuación homogénea correspondiente estará dada por

$$(VI.5-29) \quad (d^2 p_{01}/dz^2) + (N/S) (c/\sin\phi_0) [(dp_{01}/dz) - (c/\sin\phi_0) p_{01}] = 0$$

La (VI.5-29) tiene únicamente solución trivial, mientras que la (VI.5-28) acepta como solución particular

$$(VI.5-30) \quad p_{01} = D = \text{cte.}$$

siempre y cuando

$$(VI.5-31) \quad g(z) = - (DN/K\#) (cz/\sin\phi_0) \exp[cz/\sin\phi_0]$$

Sin embargo, esta solución es completamente diferente a la (VI.5-14). En

consecuencia, la (VI.5-12), o el sistema (VI.5-9a,e), unicamente acepta la solución

$$(VI.5-32) \quad p_1(x,y,z) = 2C (\sin\phi_0/c) [\exp[cz/2\sin\phi_0]-1]X_2(x,y)$$

bajo las condiciones

$$(VI.5-25a) \quad \nabla_H X_2(x,y) \times \nabla_H M(x,y) = 0$$

y

$$(VI.5-25b) \quad [\nabla_H (\ln M(x,y)) + 2\nabla_H (\ln X_2(x,y))] \times \nabla_H A(x,y) = 0$$

Mientras que el autovalor temporal estará dado por

$$(VI.5-24) \quad \beta = i(K\#/4)\epsilon (\sin\phi_0/c)^2$$

Esto significa que, de acuerdo con la (VI.5-1) y (VI.5-7), la perturbación tendrá la forma

$$(VI.5-33) \quad p(x,y,z,\tau) = \exp[-(\epsilon K\#/4) (\sin\phi_0/c)^2 \tau] [2C (\sin\phi_0/c) [\exp[cz/\sin\phi_0] - 1]X_2(x,y) + (L/a_0)p_2(x,y,z)]$$

donde  $p_2(x,y,z)$  será la solución correspondiente al sistema (VI.5-9a,e). Es necesario destacar que independientemente de la forma de  $p_2(x,y,z)$ , si es que existe, la solución (VI.5-33) será incondicionalmente estable, ya que el término temporal decae exponencialmente con el tiempo.

## Capítulo VII

## RESUMEN Y CONCLUSIONES

La circulación termohalina está descripta por medio del sistema de ecuaciones diferenciales siguiente

$$(I.4-1) \quad v(f/f_0) = (L/a_0 \cos\phi) (\partial p / \partial \lambda)$$

$$(I.4-2) \quad u(f/f_0) = -(L/a_0) (\partial p / \partial \phi)$$

$$(I.4-3) \quad (1/\cos\phi) \{ (\partial u / \partial \lambda) + (\partial(v \cos\phi) / \partial \phi) + (\partial w / \partial z) \} = 0$$

$$(I.4-4) \quad - (\partial p / \partial z) = \rho \quad \text{or} \quad g\alpha T = (\partial p / \partial z)$$

$$(I.4-5) \quad (u/\cos\phi) (\partial \rho / \partial \lambda) + v (\partial \rho / \partial \phi) + w (\partial \rho / \partial z) \\ = (K_v a_0 / D^2 U) (\partial^2 \rho / \partial z^2)$$

que representa una herramienta bastante poderosa cuando se desea estudiar la circulación oceánica. El problema ha sido formulado a través de los balances geostrófico e hidrostático de un fluido estratificado sobre una esfera, con la difusión turbillónaria vertical incorporada dentro de la ecuación (I.4-4). Además del problema de la estabilidad hidrodinámica para tal flujo, existen distintas limitaciones sobre la aplicabilidad del sistema (I.4-1,5) a un océano real. En primer término, la falta de una solución general nos obliga a utilizar una serie de modelos especiales (Veronis, 1969); cada uno de los cuales es el resultado de diferentes simplificaciones cuando se aplica la transformación por similaridad a la ecuación de la presión (Robinson and Welander, 1963; Needler, 1967; Kozlov, 1966).

De acuerdo con Needler (Needler, 1967), la generalización de la solución por similaridad está dada por

$$(II.7-1) \quad P(\phi, \lambda, z) = A(\phi, \lambda) + M(\phi, \lambda) \exp(zk(\phi, \lambda))$$

donde  $A(\phi, \lambda)$  y  $M(\phi, \lambda)$  son los modos barotrópico y baroclínico respectivamente y los diferentes modelos teóricos (Robinson and Welander, 1963; Fofonoff, 1962; Blandford, 1965; Veronis, 1969) pueden ser obtenidos como casos particulares de la relación anterior.

La magnitud del coeficiente de difusión horizontal y su dependencia con la escala horizontal (Ozmidov, 1959; Okubo, 1962, 1968; Okubo and Ozmidov, 1970; Monin, 1973) de acuerdo con la ley de los "4/3" de Richardson (Richardson, 1926) implican que la ecuación (I.4-4) puede ser aplicada unicamente en el dominio correspondiente a  $10^3 \text{ cm} < L < 3 \cdot 10^7 \text{ cm}$  (donde  $L$  es la escala horizontal característica). Esto significa que el sistema termohalino (I.4-1,5) es inadecuado para describir la circulación oceánica a escalas sinóptica y planetaria. En tales casos será necesario encontrar una nueva solución que incluya los efectos de la difusión horizontal, sin embargo hasta el momento el problema no ha sido resuelto.

Como consecuencia de un apropiado análisis de escala de los diferentes términos de las ecuaciones, es posible obtener el orden de magnitud de la perturbación,  $\dot{\gamma} = \epsilon$  (numero de Rossby)  $= 10^4$ , mientras que la correspondiente escala temporal es,  $\tau = \epsilon (L/U) = 10^4 \text{ seg.}$

El sistema de ecuaciones termohalino parecería ser una buena descripción del flujo básico no sólo a orden 1, sino también a  $O(10^{-2})$ . Sin embargo, cuando intentamos describir el flujo básico a  $O(\epsilon)$ , es necesario introducir una serie de términos de corrección. Dichos términos serán soluciones del sistema (VI.2-2,6), el cual no fue resuelto en el presente trabajo por carecer de significado en el problema de la estabilidad hidrodinámica.

El sistema de ecuaciones correspondiente a la perturbación de la circulación termohalina de un océano barotrópico, en la aproximación del plano- $\beta$ , está dado por:

$$(V.5-1) \quad (\partial \tilde{u} / \partial \tau) [\cos \phi_0 - \sin \phi_0 (L/a_0) y] - \tilde{v} (\cos \phi_0 + [(1-2\sin^2 \phi_0) / \sin \phi_0] (L/a_0) y) + (\partial \tilde{p} / \partial x) \cos \phi_0 = 0$$

$$(V.5-2) \quad (\partial \tilde{v} / \partial \tau) + [1 + \cot \phi_0 (L/a_0) y] \tilde{u} + (\partial \tilde{p} / \partial y) = 0$$

$$(V.5-3) \quad (\partial \tilde{p} / \partial z) + \tilde{\rho} = 0$$



$$(V.5-4) \quad [(\partial\tilde{\rho}/\partial\tau) + (\partial\tilde{w}/\partial z)] (L/a_0) \cos\phi_0 + (\partial\tilde{v}/\partial y) [\cos\phi_0 - \sin\phi_0 (L/a_0)y] - \tilde{v} (L/a_0) \sin\phi_0 + \cos\phi_0 (\partial\tilde{u}/\partial x) = 0$$

$$(V.5-5) \quad (1/\epsilon) (\partial\tilde{\rho}/\partial\tau) [1 + (L/a_0)\delta z] + v_0 (\partial\tilde{\rho}/\partial y) + [(u_0 (\partial\tilde{\rho}/\partial x) \cos\phi_0) / (\cos\phi_0 - \sin\phi_0 (L/a_0)y)] = K\# (\partial^2\tilde{\rho}/\partial z^2)$$

donde la única ecuación que incluye variables del estado básico es la (V.5-5); por tal motivo, tal ecuación desarrollará un papel prominente en la solución de nuestro problema.

Debemos destacar que aún cuando la atmósfera pudiera inducir un cambio en las variables del mar de orden  $\epsilon$ , tal fluctuación debería satisfacer condiciones muy estrictas sobre la dependencia horizontal para poder convertirse en una "perturbación". La Tabla II nos muestra los tres casos generales para las perturbaciones con distintas formas de dependencia sobre las variables horizontales. En cada caso las relaciones entre autovalores espaciales y temporales, coeficiente de difusión vertical, latitud y coordenadas horizontales, no es nada simple. Si la fluctuación no puede satisfacer estas condiciones, ella aparecerá simplemente como "ruido" muy débil.

Sin embargo, cuando las fluctuaciones de origen atmosférico satisfacen alguno de los casos de la Tabla II, la misma será una "perturbación", si y sólo si produce un flujo de empuje a través de la interfase aire-mar. Este hecho es una limitación muy severa sobre la forma en que los distintos parámetros atmosféricos pueden perturbar la circulación oceánica. Es bastante evidente que un cambio en la radiación solar, la variación en el intercambio de calor sensible o la evaporación, actúan directamente sobre la estratificación del campo de densidad en la capa superficial del mar induciendo flujos de empuje. Los flujos de calor radiativo, sensible y latente son parametrizados a gran escala por medio de seis variables: Temperaturas de la atmósfera y la superficie oceánica, contenido de humedad, velocidad del viento a cierto nivel de referencia y la cantidad y tipos de nubes. En consecuencia las fluctua-

ciones en los flujos de calor pueden ser estimadas a partir de las variaciones de las variables mencionadas (Malkus, 1962).

El viento puede inducir una perturbación en el mar únicamente a través de sus efectos sobre los intercambios de calores sensible y latente, ya que el esfuerzo del viento produce sólo fluctuaciones sobre el campo de presión hidrostático pero nunca un flujo de empuje.

La precipitación causa una reducción en la salinidad y temperatura superficiales, produciendo en consecuencia un cambio en la estratificación de la densidad (flujo de empuje). Sin embargo existe otro efecto que acompaña a la precipitación; que puede ser necesario considerarlo porque induce también un flujo de empuje (Katsaros, 1969). Las gotas al caer tienden a evaporarse en el aire subyacente a las nubes y dicha evaporación aumenta la humedad relativa y producen un enfriamiento en las capas más bajas de la atmósfera. Por lo tanto, este doble efecto actuará sobre los flujos de calor sensible y latente desde el mar.

Aún cuando la atmósfera pueda perturbar la circulación termohalina de un océano barotrópico, la solución del sistema de ecuaciones nunca se inestabilizará.

El sistema termohalino para la perturbación de un océano puramente baroclínico, en la aproximación del plano- $\beta$ , está dado por

$$(VI.2-2) \quad (\partial \tilde{u} / \partial \tau) - v(1 + b_1 y) + (\partial \tilde{p} / \partial x)(1 + c_1 y) = 0$$

$$(VI.2-3) \quad (\partial \tilde{v} / \partial \tau) + \tilde{u}(1 + b_1 y) + (\partial \tilde{p} / \partial y) = 0$$

$$(VI.2-4) \quad (\partial \tilde{p} / \partial z) + \tilde{p} = 0$$

$$(VI.2-5) \quad (\partial \tilde{p} / \partial \tau)(L/a_0) + (\partial \tilde{u} / \partial x)(1 + c_1 y) + (\partial \tilde{v} / \partial y) - c_1 \tilde{v} + (L/a_0)(\partial \tilde{w} / \partial z) = 0$$

$$(VI.2-6) \quad (\partial \tilde{p} / \partial \tau)(\epsilon^{-1} + z) + [b_1 (cz / \sin \phi_0) M - [1 - (1 + (cz / \sin \phi_0)) b_1 y + c_1 y] (\partial M / \partial y)] \\ \exp[cz / \sin \phi_0] (\partial \tilde{p} / \partial x) - \tilde{u}(c / \sin \phi_0) (\partial M / \partial x) [1 - (1 + (cz / \sin \phi_0)) b_1 y +$$

$$\begin{aligned}
& c_1 y] \exp[cz/\sin\phi_0] + [1 - a_1 y - (cz/\sin\phi_0) b_1 y] (\partial M/\partial x) \exp[cz/\sin\phi_0] \\
& (\partial \tilde{\rho}/\partial y) + \tilde{v} [(c/\sin\phi_0) M [1 + (cz/\sin\phi_0) b_1 - (c/\sin\phi_0) (\partial M/\partial y) [1 - (1 + \\
& (cz/\sin\phi_0) b_1 y]] \exp[cz/\sin\phi_0] + (\partial \tilde{\rho}/\partial z) [K\# (c/\sin\phi_0) (1 - b_1 y) + \\
& (\cos\phi_0/c) (L/a_0) (\partial M/\partial x) \exp[cz/\sin\phi_0]] - \tilde{w} (c^2/\sin^2\phi_0) M (L/a_0) \\
& \exp[cz/\sin\phi_0] = K\# (\partial^2 \tilde{\rho}/\partial z^2)
\end{aligned}$$

Para resolver tal sistema fue necesario desarrollar cada ecuación bajo la hipótesis de que las soluciones podían ser escritas en la forma

$$(VII.1-1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{p}(x, y, z, \tau) \\ \tilde{\rho}(x, y, z, \tau) \\ \tilde{u}(x, y, z, \tau) = \exp[i\beta\tau] \\ \tilde{v}(x, y, z, \tau) \\ \tilde{w}(x, y, z, \tau) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} [\hat{p}_1(x, y, z) + (L/a_0) \hat{p}_2(x, y, z)] \\ [\hat{\rho}_1(x, y, z) + (L/a_0) \hat{\rho}_2(x, y, z)] \\ [\hat{u}_1(x, y, z) + (L/a_0) \hat{u}_2(x, y, z)] \\ [\hat{v}_1(x, y, z) + (L/a_0) \hat{v}_2(x, y, z)] \\ [\hat{w}_1(x, y, z) + (L/a_0) \hat{w}_2(x, y, z)] \end{array} \right.$$

Tal como en el caso del océano barotrópico, la producción de un flujo de empuje a través de la interface aire-mar será una condición necesaria (pero no suficiente) para la existencia de "perturbación". Sin embargo existen dos restricciones adicionales sobre el modo baroclínico y la dependencia horizontal de la posible perturbación ( $X_2(x, y)$ )

$$(VI.2-46a) \quad \nabla_H M \times \vec{e}_2 = 0 \quad \text{donde} \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 0)$$

$$\text{y} \quad \nabla_H = [(\partial/\partial x), (\partial/\partial y), 0]$$

y

$$(VI.2-46b) \quad (\partial M/\partial y) (\partial X_2/\partial x) = 0$$

Estas dos condiciones implican que es imposible perturbar un flujo puramente baroclínico cuyo modo dependa únicamente de "x" y/o que la relación entre el mismo y la forma horizontal de la perturbación no satisfagan la (VI.2-46b).

La solución correspondiente al sistema (VI.2-2,6), en el campo de la densidad perturbada, está dada por

$$(VII.1-2) \quad \tilde{\rho}(x, y, z, \tau) = -\exp[i\beta\tau] \left[ [\alpha_1 - \alpha_2 \exp[(\alpha_2 - \alpha_1)/h]]^{-1} \right. \\ \left. \exp[\alpha_1 z] - \exp[(\alpha_2 - \alpha_1)/h] \exp[\alpha_2 z] \right] (L/a_0) \\ (K \# \cot \phi_0 / \lambda) (c / \sin \phi_0) [\alpha_1 - \alpha_2 \exp[-\lambda/h]]^{-1} \\ \exp[\alpha_1 z] \int_0^z [\alpha_1 - \alpha_2 \exp[-\lambda(t + (1/h))]]^{-1} (1 - \\ \exp[-\lambda(z-t)]) dt \left. \right\} \begin{cases} X_2(y) & \text{si } M(y) \\ X_2(x, y) & \text{si } M = \text{cte.} \end{cases}$$

Utilizando las siguientes condiciones de contorno

$$(VII.1-3) \quad \begin{cases} (\partial \tilde{\rho}_1 / \partial z) \Big|_{z=0} + a_2 \tilde{\rho}_1 \Big|_{z=0} = 0 \\ (\partial \tilde{\rho}_1 / \partial z) \Big|_{z=-1} = 0 \end{cases}$$

encontramos que los autovalores temporales correspondientes están dados por

$$(VI.4-23) \quad \begin{cases} 1 \quad \beta = iK \# \epsilon [(c/2 \sin \phi_0)^2 + (2n\pi)^2] \\ 2 \quad \beta = iK \# \epsilon [(c/2 \sin \phi_0)^2 + (n + (1/2))^2 \pi^2] \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

La (VI.4-23) implica que el flujo básico permanecerá incondicionalmente estable bajo cualquier clase de perturbación que produzca un flujo de empuje a través de la interface (perturbación de origen atmosférico).

En el caso más general de un flujo básico en el cual  $A \neq 0$  y

$M \neq 0$ , la perturbación estará descrita por el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales (a orden 1)

$$(VI. 5-8a) \quad -\hat{v}_1 + (\partial \hat{p}_1 / \partial x) = 0$$

$$(VI. 5-8b) \quad \hat{u}_1 + (\partial \hat{p}_1 / \partial y) = 0$$

$$(VI. 5-8c) \quad (\partial \hat{p}_1 / \partial z) + \hat{p}_1 = 0$$

$$(VI. 5-8d) \quad (\partial \hat{u}_1 / \partial x) + (\partial \hat{v}_1 / \partial y) = 0$$

$$(VI. 5-8e) \quad i\beta\epsilon^{-1} \hat{\rho}_1^{-1} - [(\partial A / \partial y) + (\partial M / \partial y) \exp[cz / \sin\phi_0]] (\partial \hat{\rho}_1 / \partial x) - \hat{u}_1 (c / \sin\phi_0) \\ (\partial M / \partial x) \exp[cz / \sin\phi_0] + (\partial \hat{p}_1 / \partial y) [(\partial A / \partial x) + (\partial M / \partial x) \exp[cz / \sin\phi_0]] \\ - (c / \sin\phi_0) (\partial M / \partial y) \exp[cz / \sin\phi_0] \hat{v}_1 + [K\# (c / \sin\phi_0) + M^{-1} (\sin\phi_0 / c) \\ [(\partial M / \partial x) (\partial A / \partial y) - (\partial M / \partial y) (\partial A / \partial x)]] (\partial \hat{\rho}_1 / \partial z) = K\# (\partial^2 \hat{\rho}_1 / \partial z^2)$$

Mientras que a  $O(10^{-1})$  el sistema de ecuaciones correspondiente será

$$(VI. 5-9a) \quad -\hat{v}_1 b_1 y - (L/a_0) \hat{v}_2 + (\partial \hat{p}_1 / \partial x) c_1 y + (L/a_0) (\partial \hat{p}_2 / \partial x) = 0$$

$$(VI. 5-9b) \quad \hat{u}_1 b_1 y + (L/a_0) \hat{u}_2 + (L/a_0) (\partial \hat{p}_2 / \partial y) = 0$$

$$(VI. 5-9c) \quad (\partial \hat{p}_2 / \partial z) + \hat{p}_2 = 0$$

$$(VI. 5-9d) \quad (L/a_0) (\partial \hat{u}_2 / \partial x) + c_1 y (\partial \hat{u}_1 / \partial x) + (L/a_0) (\partial \hat{v}_2 / \partial y) - c_1 \hat{v}_1 + (L/a_0) \\ (\partial \hat{w}_1 / \partial z) = 0$$

$$(VI. 5-9e) \quad i\beta\epsilon^{-1} \hat{\rho}_2^{-1} (L/a_0) - [c_1 y (\partial \hat{\rho}_1 / \partial x) + (L/a_0) (\partial \hat{\rho}_2 / \partial x)] [(\partial A / \partial y) + (\partial M / \partial y) \\ \exp[cz / \sin\phi_0]] + [b_1 y (\partial A / \partial y) + (1 + (cz / \sin\phi_0)) b_1 y (\partial M / \partial y) \\ \exp[cz / \sin\phi_0] + (cz / \sin\phi_0) b_1 M \exp[cz / \sin\phi_0]] (\partial \hat{\rho}_1 / \partial x) - (c / \sin\phi_0) \\ (\partial M / \partial x) \exp[cz / \sin\phi_0] [(L/a_0) \hat{u}_2 + \hat{u}_1 c_1 y] + [(c / \sin\phi_0) (\partial M / \partial x) (1 + \\ (cz / \sin\phi_0)) b_1 y \exp[cz / \sin\phi_0] \hat{u}_1] + [(\partial A / \partial x) + (\partial M / \partial x) \exp[cz / \sin\phi_0]]$$

$$\begin{aligned}
& (L/a_0) (\partial \hat{\rho}_2 / \partial y) - [a_1 y (\partial A / \partial y) + (a_1 y + (cz / \sin \phi_0) b_1 y) \exp [cz / \sin \phi_0]] \\
& (\partial \hat{\rho}_1 / \partial y) - (cz / \sin \phi_0) (\partial M / \partial y) \exp [cz / \sin \phi_0] (L/a_0) \hat{v}_2 + [(c / \sin \phi_0) \\
& (\partial M / \partial y) (1 + (cz / \sin \phi_0)) b_1 y + (c / \sin \phi_0) M (1 + (cz / \sin \phi_0)) b_1] \\
& \exp [cz / \sin \phi_0] \hat{v}_1 + [K\# (cz / \sin \phi_0) + (\sin \phi_0 / cz) M^{-1} [(\partial M / \partial x) (\partial A / \partial y) \\
& - (\partial M / \partial y) (\partial A / \partial x)] (L/a_0) (\partial \hat{\rho}_2 / \partial z) + [-K\# (c / \sin \phi_0) b_1 y + (\sin \phi_0 / c) M^{-1} \\
& [(\partial M / \partial x) (\partial A / \partial y) - (\partial M / \partial y) (\partial A / \partial x) c_1 y + (\cos \phi_0 / c) (L/a_0) (1 + (cz / \sin \phi_0)) \\
& (\partial A / \partial x) + (\cos \phi_0 / c) (L/a_0) (\partial M / \partial x) \exp [cz / \sin \phi_0]] (\partial \hat{\rho}_1 / \partial z) - (L/a_0) \\
& (c / \sin \phi_0)^2 M \exp [cz / \sin \phi_0] \hat{w}_1 = K\# (L/a_0) (\partial^2 \hat{\rho}_2 / \partial z^2)
\end{aligned}$$

donde hemos supuesto que las soluciones son de la forma (VII.1-1)

El sistema (VI.5-8a,b) puede ser resuelto si

$$(VI.5-25a) \quad \nabla_H X_2(x,y) \times \nabla_H M(x,y) = 0$$

y

$$(VI.5-25b) \quad [\nabla_H (\ln M(x,y)) + 2 \nabla_H (\ln X_2(x,y))] \times \nabla_H A(x,y) = 0$$

Mientras que el autovalor temporal estará dado por

$$(VI.5-24) \quad \beta = i(K\#/4) \epsilon (\sin \phi_0 / c)^2$$

La solución correspondiente al campo de presión perturbado es

$$\begin{aligned}
(VI.5-33) \quad \tilde{p}(x,y,z,\tau) = & \exp[-(\epsilon K\#/4) (\sin \phi_0 / c)^2 \tau] [2C (\sin \phi_0 / c) [\exp [cz / \sin \phi_0] \\
& - 1] X_2(x,y) + (L/a_0) \hat{p}_2(x,y,z)]
\end{aligned}$$

donde  $\hat{p}_2(x,y,z)$  será solución del sistema (VI.5-9a,b).

El autovalor temporal dado por (VI.5-24) es un caso particular de la (VI.4-23) cuando  $n = 0$ . Esto significa que la presencia de un modo barotrópico reduce el número de autovalores posibles en el caso de un océano baroclínico a solamente uno. Debemos destacar que la estabilidad de la solución (VI.5-33) es completamente independiente de  $\hat{p}_2(x,y,z)$ . Al mismo tiempo que es sencillo probar que dicha solución es nula cuando

no existe flujo de empuje en  $z = 0$ .

A pesar de que el objetivo del trabajo fue el investigar la estabilidad hidrodinámica de la circulación termohalina bajo perturbaciones de origen atmosférico, los resultados obtenidos pueden ser extendidos a cualquier tipo de perturbación. En efecto, hemos demostrado que el flujo básico puede ser perturbado unicamente por medio de un flujo de empuje a través de la interface aire-mar y aún en tal caso la solución permanecerá estable.



Dr. GUSTAVO U. VELASCO  
Co-Director

## REFERENCIAS

- Acley, S. F. (1979): A review of sea-ice weather relationships in Southern Hemisphere. Ice Sheets and Climatic Changes Session, XVII Assembly IUGG, Canberra, Australia.
- Antosiewicz, H. A. (1964): In: "Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables", Abramowitz M. and I. A. Stegun Ed., Bureau of Standard Applied Mathematics Series, 55, United States Department of Commerce, Washington D. C., 435-494.
- Barcilon, V. (1974): In: "Handbook of Applied Mathematics", Pearson C. E. Ed., Van Nostrand Reinhold, New York, 344-377.
- Batchelor, G. K. (1967): "An Introduction to Fluid Dynamics", Cambridge University Press, London-New York, 336 pp.
- Bennet, A. F. (1978): Poleward heat fluxes in Southern Hemisphere Oceans, Journal of Physical Oceanography, Vol. 8, 785-798.
- Birkhoff G. and G. C. Rota (1959): "Ordinary Differential Equations", John Wiley & Sons, New York, 342 pp.
- Blandford, R. (1965): Notes on the theory of the thermocline, Journal of Marine Research, Vol. 23, 18-29.
- Boyce W. E. and R. C. DiPrima (1965): "Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems", John Wiley & Sons, New York, 582 pp.
- Bryan, K. (1962): Measurements of meridional heat transport by ocean model, Journal of Geophysical Research, Vol. 67, 9, 3403-3414.
- \_\_\_\_\_ (1969): Climate and the ocean circulation. III The ocean model. Monthly Weather Review, Vol. 97, 806-827.
- \_\_\_\_\_, S. Manabe and R. C. Pacanowski (1975): A global ocean-atmosphere climate model. Part II. The oceanic circulation, Journal of Physical Oceanography, Vol. 5, 30-46.
- Bunker, A. F. (1980): Trends of variables and energy fluxes over the Atlantic Ocean from 1948 to 1972. Monthly Weather Review, Vol. 108, 720-732.
- Charney, J. G. and M. E. Stern (1962): On the stability of inertial baroclinic jets in a rotating atmosphere, Journal of the Atmospheric Sciences, Vol. 19, 159-172.
- Conte, S. D. and C. de Boor (1965): "Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach", Mc. Graw-Hill Book Company, New York,



432 pp.

- Drazin, P. G. and L. N. Howard (1966): Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid, Advance in Applied Mechanics, Nol. 9, 1-89.
- \_\_\_\_\_ and W. H. Reid (1981): "Hydrodynamics Stability", Cambridge University Press, New York, 525 pp.
- Ekman, V. W. (1908): Die Zusammendruckbarkeit des meerswasser nebst einigen werten fur wasser und quecksilber, Cons. Perm. Int. Explor. Mer., Publ. Circonstance, 43, Copenhagen.
- Fedorov, K. N. (1978): "The Thermohaline Finestructure of the Ocean" Pergamon Marine Series, Vol. 2, Pergamon Press, Oxford, 170 pp.
- Fletcher, J. O. (1968): The Polar Ocean and World Climate, The Rand Corporation, Santa Monica, California, P-3801, 55 pp.
- Fofonoff, N. P. (1962): Dynamics of the Ocean Currents, In: "The Sea, Ideas and Observations on Progress in the Study of the Seas", Vol. 1, M. N. Hill Ed., John Wiley & Sons, New York, 25-38.
- Ford, L. R. (1955): "Differential Equations", Mc. Graw-Hill Book Company, New York, 291 pp.
- Georgi, D. T. and J. M. Toole (1981): The Antarctic Circumpolar Current and the Oceanic Heat and Freshwater Budget, Wood Hole Oceanographic Instituttion, Contribution Nr. 4839.
- Gill, A. E. and P. P. Niiler (1973): Theory of the seasonal variability in the ocean, Deep Sea Research, Vol. 20, 141-177.
- Gordon, A. L. (1971a): Recent Physical Oceanographic Studies of Antarctic Waters, Research in the Antarctic, AAAS Annual Meeting, 135 Symp. Papers AAAS, Public. 93, 609-729.
- \_\_\_\_\_ (1971b): Oceanography of Antarctic Waters, Antarctic Oceanology I, Antarctic Research Series, Vol. 15, American
- \_\_\_\_\_ and E. J. Molinelli (1982): Thermohaline and Chemical Distributions and The Atlas Data Set, In: "Southern Ocean Atlas", Columbia University Press, New York.
- Grosch, C. E.; E.Y. T. Kuo and M. Berstein (1973): The Thermal Structure of the Air-Sea Interface - A Review, Ocean and Atmospheric Science, Inc., TR 73-148, 106 pp.
- Hastenrath, S. (1977a): Relative role of atmosphere and ocean in the global heat budget: Tropical and Eastern Pacific, Quarterly Journal of Royal Met. Society, Vol. 103, 519-526.
- \_\_\_\_\_ (1977b): Hemispheric asymmetry of oceanic heat budget in

the Equatorial Atlantic and Eastern Pacific, Tellus, Vol. 29, 6, 523-529.

\_\_\_\_\_ (1980): Heat budget of tropical ocean and atmosphere, Journal of Physical Oceanography, Vol. 10, 159-170.

Helmholtz, H. (1968): Uber Diskontinuierliche Flussigkeitsbewegungen, Monatsbericht der Koniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 215-228; (English Translation) On Discontinuous Movements of Fluid, Philosophical Magazine, Vol. 4, 244, 337-346, (1968).

Katsaros, B. C. (1969): Temperature and salinity of the sea surface with particular emphasis on effects of precipitation, Doctoral Dissertation, University of Washington, 307 pp.

Killworth, P. D. (1980): Barotropic and baroclinic instability in rotating stratified fluids, Dynamics of Atmospheres and Oceans, Vol. 4, 143-184.

\_\_\_\_\_ (1981): Eddy fluxes and mean flow tendencies in open ocean baroclinic instability, Dynamics of Atmospheres and Oceans, Vol. 5, 175-186.

Knudsen, M. (1901): "Hydrographical Tables", Copenhagen.

Koshlyakov, N. S., M. N. Smirnov and E. B. Gliner (1964): "Differential Equations of Mathematical Physics", North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 701 pp.

Kozlov, V. F. (1966): Certain exact solutions of the nonlinear equation for density advection in the ocean, (English Translation) Izvestia, Atmosphere and Oceanic Physics, Vol. 2, 11, 742-744, (in Russian) Fizika Atmosfer, Okean Izv., Akad. Sci. SSSR, Vol. 2, 11, 1205-1207.

Kraus, E. B. and J. S. Turner (1967): A one-dimensional model of seasonal thermocline. II. The general theory and its consequences, Tellus, Vol. 19, 98-105.

Lamb P. J. and A. F. Bunker (1982): The annual march of the heat budget of the North and Tropical Atlantic Oceans, Journal of Physical Oceanography, Vol. 12, 1388-1410.

Lin, C. C. (1966): "The Theory of Hydrodynamic Stability", Cambridge University Press, Cambridge, 155 pp.

Liou, K. N. (1980): "An Introduction to Atmospheric Radiation", International Geophysics Series, Vol. 26, Academic Press, New York, 392 pp.

Malkus, J. S. (1962): Large Scale Interaction, In: "The Sea, Ideas and

- Observations on Progress in the Study of the Seas", Vol. 1, M. N. Hill Ed., John Wiley & Sons, New York, 88-294.
- Mamayev, O. I. (1975): "Temperature-Salinity Analysis of World Ocean Waters". Elsevier Oceanography Series, 11, Elsevier Scientist Publishing Co., Amsterdam, 374 pp.
- Manabe, S.; K. Bryan and M. J. Spelman (1975): A global ocean-atmosphere climate model. Part I. The atmospheric circulation. Journal of Physical Oceanography, Vol. 5, 3-29.
- Miller, F. H. (1941): "Partial Differential Equations", John Wiley & Sons, New York, 259 pp.
- Monin, A. S. (1973): Turbulence and microstructure in the ocean (English Translation) Uspekhi Fizicheskikh Nauk, Vol. 109, 2, 333-354.
- Munk, W. H. (1966): Abyssal recipes, Deep-Sea Research, Vol. 13, 707-730.
- Nayfeh, A. H. (1973): "Perturbation Methods", John Wiley & Sons, New York, 425 pp.
- Necco, G. V. (1982): Resultados recientes sobre la meteorologia austral derivados de nuevas tecnicas de observacion y analisis: Una revision. Informe Interno, Servicio Meteorologico Nacional, Republica Argentina, 48 pp.
- Needler, G. T. (1967): A model for thermocline circulation in an ocean of finite depth, Journal of Marine Research, Vol. 25, 329-342.
- Okubo, A. (1962): Horizontal diffusion from an instantaneous point source due to oceanic turbulence, Chesapeake Bay Institute, John Hopkins University, Techn. Report, 32.
- \_\_\_\_\_ (1968): A new set of oceanic diffusion diagrams, Chesapeake Bay Institute, John Hopkins University, Techn. Report, 38.
- \_\_\_\_\_ and V. Ozmidov (1970): Empirical dependence of the coefficient of horizontal turbulent diffusion in the ocean on the scale of the phenomenon in question, (English Translation) Izvestiya Atmospheric and Oceanic Physics, Vol. 6, 5, 534-536.
- Olver, F. W. J. (1964): In: "Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables"; Abramowitz M. and I. A. Stegun Ed., Bureau of Standard Applied Mathematics Series, 55; United States Depart. of Commerce, Washington D. C., 355-433.
- \_\_\_\_\_ (1974): "Asymptotics and Special Functions", Computer Science and Applied Mathematics Series of Monographs and Text-books, Academic Press, New York, 572 pp.

- Oort, A. H. and T. H. Vonder Haar (1976): On the observed annual cycle in the ocean-atmosphere heat balance over the Northern Hemisphere, Journal of Physical Oceanography, Vol. 6, 6, 781-800.
- Orlanski, I. and M. D. Cox (1973): Baroclinic instability in ocean currents, Geophysical Fluid Dynamics, Vol. 4, 297-332.
- Ozmidov, R. V. (1959): The investigation of medium-scale horizontal turbulent exchange in the ocean using radiolocation observations of floating buoys (English Translation), Doklady Akademii Nauk SSSR, Vol. 126, 1, 63-65.
- Pedlosky, J. (1964a): The stability of currents in the atmosphere and ocean: Part I, Journal of the Atmospheric Sciences, Vol. 21, 201-219.
- \_\_\_\_\_ (1964b): The stability of currents in the atmosphere and ocean: Part II, Journal of the Atmospheric Sciences, Vol. 21, 342,353.
- \_\_\_\_\_ (1979): "Geophysical Fluid Dynamics", Springer-Verlag, New York, 624 pp.
- Petrovsky, I. G. (1954): "Lectures on Partial Differential Equations", Interscience Publishers, New York, 245 pp.
- Phillips, O. M. (1969): "The Dynamics of the Upper Ocean", Cambridge University Press, London-New York, 336 pp.
- Rassol S. I. and J. S. Hogan (1969): Ocean circulation and climatic changes, Bulletin of American Meteorological Society, Vol. 50, 3, 130-134.
- Rayleigh, J. W. S. (1945): (Reprint of 2nd. Ed. of 1894) "Theory of Sound", Vol. II, Dover Publications, New York, 504 pp.
- Richardson, L. F. (1926): Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph. Proceeding Royal Society of London, A 110, 756, 709-737.
- Robinson, A. R. and P. Welander (1963): Thermal circulation on a rotating sphere; with application to the oceanic thermocline, Journal of Marine Research, Vol. 21, 25-38.
- Scott, D. B. and R. Tims (1966): "Mathematical Analysis-An Introduction", Cambridge University Press, Cambridge, 46 pp.
- Seller, W. D. (1965): "Physical Climatology", The University of Chicago Press, Chicago-London, 272 pp.
- Stepanov, V. N. and A. M. Gritsenko (1980): Heat budget in the world

ocean, Oceanology, Vol. 20, 4, 403-406.

Stokes G. G. (1889): On the discontinuity of Arbitrary Constants that appears as Multipliers of Semi-convergent Series, Proc. Camb. Philos. Society, VI, 362-366.

Severdrup, H. U; M. W. Johnson and R. H. Fleming (1942): "The Oceans", Prentice Hall, New York, 1087 pp.

Szoeke R. A. and M. D. Leviene (1981): The advective flux of heat by means geostrophic motions in the Southern Ocean, Deep-Sea Research, Vol. 28, 10, 1057-1085.

Trenberth, K. E. (1979): Mean annual poleward energy transport by the ocean in the Southern Hemisphere, Dynamics of Atmospheres and Oceans, Vol. 4, 57-64.

\_\_\_\_\_ and H. van Loon (1981): Comment on impact of FGGE buoy data on Southern Hemisphere Analysis, Bulletin of American Meteorological Society, Vol. 62, 1486-1488.

Turner, J. S. (1965): The coupled turbulent transport of salt and heat across a sharp density interface, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 8, 759-767.

\_\_\_\_\_ (1967): Salt fingers across a density interface, Deep-Sea Research, Vol. 4, 599-611.

United States Committee for GARP (1975): Understanding Climatic Change, National Academy of Sciences.

Veronis, G. (1969): On theoretical models of thermocline circulation, Deep-Sea Research, Vol. 16, 301-323.

\_\_\_\_\_ (1973): Large scale ocean circulation, In: "Advances in Applied Mechanics", Vol. 13, Chia-Shun Yih Ed., Academic Press, New York, 1-91.

Vonder Haart T.H. and H. Oort (1973): New estimate of annual energy transport by Northern Hemisphere Oceans, Journal of Physical Oceanography, Vol. 3, 2, 169-172.

Watson, G. N. (1958): "A Treatise on Theory of Bessel Functions", Cambridge University Press, London, 804 pp.

Watson, J. (1960): Three-dimensional disturbances in flow between parallel planes, Proceeding of the Royal Society, Serie A-Math. and Phys. Sciences, Vol. 254, 562-569.

Watson, F. (1961): "Advanced Calculus-An Introduction to Analysis", John Wiley & Sons, New York, 521 pp.

- Webster, P. J. and K. M. W. Lau (1977): A simple ocean-atmosphere climate model; Basic model a simple experiment, Journal of Atmospheric Sciences, Vol. 34, 1063-1084.
- Weinstein, M. (1981): Non linear instability in plane poiseulle flow: A quantitative comparison between the methods of amplitude expansions and the method of multiple scales. Proceeding Royal Society of London, Series A- Math. and Phys. Sciences, Vol. 375, 155-167.
- Welander P. (1959): An advective model of the ocean thermocline, Tellus, Vol. 11, 309-318.
- Wetherald, R. T. and S. Manabe (1972): Response of joint ocean-atmosphere model to the seasonal variation of the solar radiation, Monthly Weather Review, Vol. 100, 42-59.