

DEVELOPPEMENT DURABLE, FLUX COMPTABLES ET EVALUATION D'ENTREPRISE

Paul Amadiou

Maître de Conférences

CR2M – Université de Montpellier

paul.amadiou@univ-montp1.fr

Jean-Laurent Viviani

Professeur

CR2M – Université de Montpellier

jviviani@univ-montp1.fr

Résumé : L'objectif de cet article est d'étudier l'impact de la non-durabilité des flux comptables sur la valeur de l'entreprise. L'absence de durabilité de l'entreprise est donc ici définie comme l'incapacité de son modèle économique actuel à générer sur une longue période des flux. L'absence de durabilité se traduit par une chute brutale de la valeur de l'entreprise. Or les modèles traditionnels d'évaluation d'entreprise fondés sur l'actualisation des flux négligent la possibilité de cette chute brutale de valeur. Ces modèles présupposent donc une durabilité parfaite du modèle économique. En utilisant un processus à saut, nous pouvons analyser l'impact de la perte soudaine de valeur des actifs sur la valeur des dettes, des capitaux propres et de l'entreprise. Les simulations numériques montrent que l'impact des sauts sur la valeur de l'entreprise est non linéaire et peut être fort surtout pour les entreprises les plus endettées.

Mots clés : actualisation des flux de trésorerie, résultat résiduel, évaluation, non-durabilité, processus à saut.

Abstract : The objective of this paper is to investigate the impact of non sustainability on company value. Non sustainability is defined as the incapacity for the present business model to perpetuate the same cash flow or the same profit generation. The consequence of non sustainability must be a dramatic drop in company value. This impact of non sustainability is often neglected by the traditional two steps discount cash flows method or by the residual income model. Thus empirical valuation methods presuppose often without any investigation a perfect sustainability of the present business model. Using a double exponential jump diffusion process to describe the evolutions of the company's asset, we are able to describe the consequences of large downward jumps on the asset value on the debt, equity and company value. Numerical simulations show that this impact is non linear and could be quite large especially on companies with large leverage.

Key words : discounted cash-flows valuation method, residual income model, valuation, non sustainability, jumps diffusion process

Les incertitudes actuelles sur les risques environnementaux, sur la situation économique internationale et sur le déséquilibre des demandes sociales selon les pays peuvent remettre en cause le développement durable de nombre d'entreprises. Ce développement suppose en effet une capacité d'adaptation de plus en plus forte de leur part, que ce soit en adaptant leurs activités pour les rendre conforme à une demande collective fondée sur les trois piliers du développement durable (environnemental, social et économique¹) ou que ce soit en

¹ Ces trois préoccupations sont considérées comme les piliers du développement durable qui sont aussi connu sous le nom de *Triple Bottom Line* (expression issue du titre de l'ouvrage de John Elkington, 1998) ou de *Triple P* (*People, Planet, Profit*).

abandonnant certaines activités vouées à disparaître rapidement au profit d'autres offrant de nouvelles perspectives de croissance. Sans cette capacité d'adaptation, il est vraisemblable que les entreprises soient confrontées à des disparitions brutales de revenus générant des chocs importants sur leur valeur pouvant remettre en question leur pérennité.

Le but de notre présent travail est d'explorer l'impact sur la valeur de l'entreprise que peuvent avoir ces chocs liés à des déséquilibres environnementaux, sociaux ou économiques. L'apparition de ces chocs crée un phénomène de discontinuité. Leur prise en considération dans un cadre managérial de maximisation de la valeur va conduire la direction de l'entreprise à modifier sa stratégie d'investissement et sa politique de financement. En effet, cette maximisation est un processus itératif dans lequel la manière de valoriser l'entreprise influence les décisions stratégiques : si les modèles d'évaluation intègrent la possibilité de survenance de ces chocs, les décisions managériales seront influencées par la volonté de limiter ces chocs ou leurs conséquences négatives sur la valeur de l'entreprise. Ainsi, la prise en considération de ces chocs dans l'évaluation d'entreprise n'influence pas seulement le résultat d'un calcul destiné à valoriser un patrimoine ou une transaction mais peut conduire à des réorientations managériales. Si les dirigeants ont conscience que les investisseurs prennent en considération ces chocs dans leurs décisions de financer telle ou telle entreprise, ils seront amenés à effectuer des choix qui permettent de réduire la probabilité de survenance et l'ampleur de ces chocs.

Ce comportement peut alors être une voie de réconciliation entre une approche classique de gestion (logique BAU – *business as usual*) et une approche intégrant les problématiques de développement durable. Ces deux approches sont en général mises face à face. On considère souvent que les actions destinées à corriger la trajectoire engendrée par l'application stricte de la logique des affaires et à adopter un comportement plus durable (notamment environnemental ou social) ne sont pas entreprises dans l'intérêt des actionnaires. Ceux-ci ont un objectif de maximisation de la valeur de l'entreprise à court-terme parfois considéré comme incompatible avec les objectifs à long terme du développement durable. Notons toutefois que l'horizon de maximisation à court-terme n'interdit pas des investissements de long-terme dès lors qu'ils sont créateurs d'une valeur immédiate par anticipation de la valeur future qu'ils vont engendrer. Or, en réduisant la non-durabilité des revenus, les décisions environnementales, sociales et économiques destinées à favoriser le développement durable de l'entreprise peuvent être créatrices de valeur immédiate si les modèles d'évaluation prennent en considération la probabilité de survenance et l'ampleur de ces chocs. Ainsi, l'introduction dans les modèles d'évaluation des problèmes de non-durabilité des revenus tendrait à réconcilier les objectifs du développement durable de l'entreprise avec celui de la maximisation de la valeur poursuivie par les actionnaires.

Dans ce travail, notre but n'est pas d'abandonner le concept classique de valorisation par l'actualisation de flux futurs (que ce soit des flux de dividende, de trésorerie ou de résultats résiduels) mais de proposer une modification dans l'application des modèles d'évaluation existants en explorant l'impact de la prise en considération de baisses brutales de la valeur des actifs en place provoquées par des chocs sur les revenus dégagés de l'activité. Ainsi, contrairement à l'approche classique, nous n'utilisons pas un processus aléatoire continu (processus brownien géométrique) mais un processus stochastique à sauts pour décrire l'évolution de la valeur des actifs en place comme le fait Kou (2002) dans le cadre de l'évaluation des options. Les baisses brutales de la valeur des actifs ainsi obtenues entraînent

directement à une baisse équivalente de la valeur de l'entreprise. Au-delà de cette première conséquence, la baisse de la valeur des actifs en place génère une série de conséquences indirectes. Tout d'abord, elle entraîne une modification de la probabilité de survenance d'une cessation des paiements concrétisant les coûts de faillite. Elle conduit de plus à un accroissement de perte de valeur pour les prêteurs qui, anticipant cette perte vont exiger une rémunération plus forte. Cette exigence et la modification de la probabilité de faillite vont changer le niveau d'endettement optimal et ainsi l'avantage fiscal de l'endettement. C'est l'ensemble de ces conséquences que nous nous proposons ici d'explorer pour comprendre l'impact d'une baisse brutale de la valeur de l'actif sur la valeur globale de l'entreprise et/ou sur la valeur des capitaux propres (valeur revenant aux actionnaires).

Dans une première section nous décrivons les modèles classiques d'évaluation et leur capacité à prendre en considération des chocs provoqués par des déséquilibres environnementaux, sociaux ou économique. La deuxième section propose une approche intégrant ces chocs dans la valorisation globale de l'entreprise. En intégrant ces chocs, il n'est plus possible de trouver une solution algébrique à la valeur de l'entreprise. Celle-ci doit être obtenue par simulation. La troisième section présente différentes simulations qui permettent de comprendre l'impact des chocs sur la valeur de l'entreprise selon ses caractéristiques et notamment son niveau d'endettement.

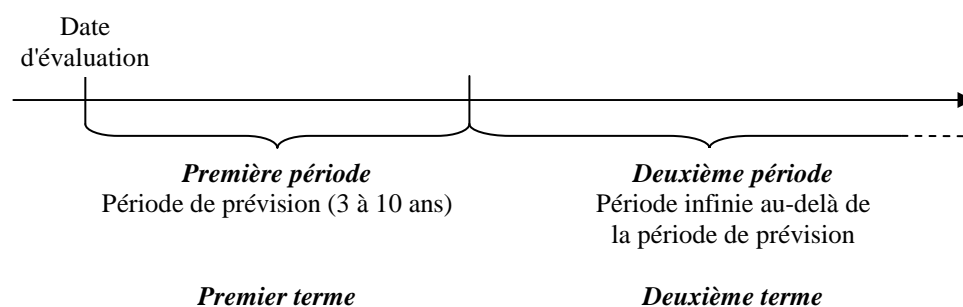
1 Modèles d'évaluation et développement durable

En matière d'évaluation de l'entreprise, on distingue deux approches complémentaires : la première s'appuie sur l'état actuel de l'entreprise (approche patrimoniale) et la seconde s'intéresse à la capacité pour l'entreprise de dégager des flux dans le futur (approche consistant essentiellement à actualiser des flux futurs). Les financiers privilégient la deuxième approche car ils considèrent qu'un actif n'a de valeur que dans la mesure où il permet à l'investisseur de percevoir un revenu. Ainsi, l'une des méthodes les plus classiques, qui est en même temps recommandée par la plupart des ouvrages sur l'évaluation d'entreprise (Titman & Martin (2008), Thauvron (2009), pour des références récentes), est connue sous son abréviation anglaise DCF (*discounted cash flow*). Elle consiste à actualiser les flux futurs de trésorerie disponibles après financement de l'investissement et des besoins d'exploitation (*free cash flow*). Pour appliquer cette méthode, il est donc nécessaire d'estimer les flux futurs de trésorerie disponibles qui seront dégagés par l'activité de l'entreprise. L'incertitude relative à ces prévisions se répercute naturellement sur l'évaluation ainsi obtenue. Face à ce problème, le développement au cours des années 90 des modèles se fondant simultanément sur les deux approches (patrimoniale et par les flux) a permis d'isoler l'incertitude de la prévision des flux futurs sur une partie seulement de la valeur de l'entreprise. Ainsi, la méthode d'évaluation par le résultat résiduel formalisée par Ohlson (1995) et Feltham et Ohlson (1995), permet d'estimer la valeur de marché des capitaux propres à partir de leur valeur comptable et des résultats résiduels futurs (résultat comptable après rémunération des capitaux propres). L'incertitude d'évaluation paraît ici moindre dans la mesure où la valeur comptable des capitaux propres est appréhendée de façon certaine par la comptabilité. Nous étudions ci-dessous chacun de ces modèles et les problèmes liés à la non-durabilité des flux futurs.

1.1 Modèle DCF et non-durabilité des flux

Dans l'approche DCF, l'horizon de prévision des flux de trésorerie est infini. En effet, ceux-ci prennent en considération le renouvellement des actifs, qu'ils correspondent à des investissements ou à des besoins d'exploitation. L'actif ainsi renouvelé est sensé se perpétuer indéfiniment et générer des flux de trésorerie sur un horizon infini. Un problème technique apparaît alors : comment prévoir les flux qui seront générés dans plusieurs années ? Les flux lointains, sont difficiles à prévoir d'une part parce qu'ils dépendent d'éléments externes que l'entreprise a du mal à anticiper (évolution des ventes, prix des consommations, évolution des salaires...) et d'autre part parce qu'ils ne sont plus tributaires de l'état actuel de l'entreprise mais dépendent des décisions stratégiques futures. Pour aborder ce problème, on décompose l'horizon de prévision en deux périodes (cf. schéma 1) : une première période finie appelée période de prévision pour laquelle on juge acceptable la prévision des flux car ils dépendent de l'état actuel de l'entreprise (ils découlent des caractéristiques structurelles de l'entreprise et de son secteur) et une deuxième période infinie au-delà. La valeur des actifs de l'entreprise est alors composée de deux termes correspondant à chacune des deux périodes. Le premier terme correspond à la valeur actuelle des flux qui seront dégagés au cours de la période de prévision. Le second terme correspond à la valeur actuelle de la valeur terminale (ou valeur résiduelle, *i.e.* la valeur à la fin de la période de prévision).

Schéma 1 : horizon de prévision et valeur des actifs en place



Valeur des actifs en place	=	Valeur actuelle des flux dégagés pendant la période de prévision	+	Valeur actuelle de la valeur des actifs à la fin de la période de prévision
----------------------------	---	--	---	---

Cette décomposition en deux termes ne permet pas de résoudre le problème de la prévision des flux au-delà de la période de prévision qui reste entier. En effet, il est nécessaire de déterminer la valeur terminale qui, elle-même, correspond à une valeur actuelle des flux dégagés au-delà de la période de prévision. Dans l'approche classique, cette valeur terminale peut être déterminée de deux manières. La première consiste à estimer les flux de la deuxième période selon un modèle de croissance perpétuelle : on considère que les flux vont, en moyenne, augmenter chaque année d'un taux de croissance constant et ce à l'infini². Le

² Il convient de noter que les taux de croissance préconisés pour déterminer la valeur terminale sont toujours relativement faible et en tout état de cause inférieur au taux de croissance anticipé de l'économie. Certains préconisent même d'utiliser un modèle dit de rente décroissante (Vernimmen, 2005, pp. 846-847).

principal avantage de cette méthode réside dans sa simplicité. La valeur actuelle d'une rente perpétuelle est un calcul simple pour lequel il n'est nécessaire d'estimer que trois paramètres : le premier flux, un taux de croissance et un taux d'actualisation. La deuxième manière de déterminer la valeur terminale se fonde sur la méthode des multiples. Cette dernière consiste à estimer un niveau de résultat comptable et à estimer la valeur terminale comme étant un multiple de ce résultat³.

Dans la mise en œuvre de ce modèle, le deuxième terme de l'évaluation est souvent traité avec beaucoup moins de précision que le premier terme du fait des difficultés à effectuer des prévisions fiables au-delà de la période de prévision. Or, selon Titman & Martin (2008, p. 284), ce deuxième terme représente de 84% à 47% de la valeur des actifs selon que la période de prévision varie de 3 à 10 ans⁴. Les deux manières d'évaluer la valeur terminale citées ci-dessus s'appuient sur une hypothèse de croissance à l'infini des flux qui seront générés par les actifs en place. Cette hypothèse nous semble soulever des problèmes importants. En effet, elle signifie que l'entreprise aura une activité en moyenne stable (ou en croissance régulière) au cours de la deuxième période. Or, s'il paraît logique de ne pas intégrer les flux de trésorerie lointains dans la période de planification du fait qu'ils ne peuvent être générés par la situation actuelle de l'entreprise, il devient paradoxal de déterminer la valeur terminale en considérant que la situation de l'entreprise va se reproduire indéfiniment. Si la situation peut être jugée stable au cours de la période de prévision, ce n'est pas le cas au-delà de cette période. En effet, c'est au cours de cette période que peuvent se concrétiser des chocs correspondant à des problèmes de non-durabilité des flux de trésorerie et pouvant entraîner une baisse brutale de la valeur.

1.2 Résultat résiduel et non-durabilité des flux

La modélisation proposée par Ohlson (1995) et par Feltham et Ohlson (1995) permet de calculer la valeur des capitaux propres en la décomposant en deux termes : la valeur comptable des capitaux propres à laquelle est ajoutée la somme actualisée des résultats résiduels futurs. Les résultats résiduels correspondent au surplus de résultat après rémunération des capitaux propres au taux de rendement requis par les actionnaires. La principale difficulté d'application dans ce modèle réside dans l'estimation des résultats résiduels futurs. Pour prévoir ces derniers, les auteurs proposent un modèle linéaire dans lequel le résultat résiduel d'un exercice dépend du résultat résiduel de l'exercice précédent de la valeur comptable des actifs au début de l'exercice et d'un ensemble d'autres informations qui ne sont pas encore prises en considération par la comptabilité (ces deux dernières variables sont elles mêmes anticipées à travers des modèles autorégressifs d'ordre 1). Les paramètres du modèle linéaire sont fixés de telle manière que les résultats résiduels futurs sont décroissants et deviennent nuls à un horizon lointain. Cette atténuation des résultats résiduels futurs et leur disparition peut faire penser que la durabilité des flux n'est ici pas supposée

³ Ces méthodes d'évaluation peuvent paraître rudimentaires. Pour compenser cette faiblesse, un évaluateur met en général en œuvre plusieurs méthodes avec divers paramètres et s'applique à rechercher la valeur vers laquelle convergent les résultats obtenus par ces différentes approches.

⁴ La part du deuxième terme dans la valeur des actifs dépend de la durée de la période de prévision (relation négative), du taux d'actualisation des flux (relation négative), du taux de croissance des flux au-delà de la période de prévision (relation positive).

comme dans le modèle DCF. En réalité, ce n'est pas le cas dans la mesure où l'entreprise est supposée rémunérer au moins la valeur comptable de ses capitaux propres au taux de rentabilité exigé par ses propriétaires. Or une entreprise qui serait confronté à de graves difficultés du fait d'un modèle économique inadapté peut subir une baisse brutale de son résultat ne lui permettant plus de rémunérer la valeur comptable des ses capitaux propres. On serait alors en présence d'un résultat résiduel négatif et la valeur de marché des capitaux propres pourrait devenir inférieure à leur valeur comptable. Dans ce cas, au-delà de la difficulté de prévoir les résultats résiduels, modèle devient alors difficilement applicable.

1.3 Non-durabilité des flux et évaluation

Une solution simple pour incorporer la problématique du développement durable dans les flux de trésorerie serait de ne retenir qu'un nombre limité de flux au-delà de la période de prévision. Le cas extrême serait même de ne retenir aucun flux, c'est-à-dire de considérer une valeur terminale nulle à l'issue de cette période de prévision. L'intérêt de cette démarche est de renverser la charge de la preuve. Un flux n'est pas d'emblée considéré comme durable, seule une démarche raisonnée ayant démontré la validité de cette hypothèse permet de le retenir. Dans cette approche, le choix du nombre de flux de trésorerie retenus sera sans doute en partie arbitraire, et il ignore le fait que la non-durabilité n'affecte pas uniquement le montant des flux mais leur risque. En effet, la date d'apparition et l'ampleur de la chute des flux ne sont pas connues au moment de l'évaluation ; ces deux éléments ne peuvent qu'être estimés avec un fort degré d'incertitude. Dès lors il devient très difficile de prévoir les flux comptables futurs si l'on anticipe des risques de non-durabilité. Cependant, on sait qu'une baisse brutale des flux se traduit par un choc sur la valeur de l'actif. Pour simplifier notre approche, nous considérons directement les chocs qui peuvent toucher la valeur de l'actif, sans déterminer les baisses des flux comptables qui ont engendré ces chocs. Comme nous le verrons ci-dessous, cette simplification permet d'intégrer une modification de la structure financière de l'entreprise liée à l'accroissement des coûts de faillite engendrés par la probabilité de survenance de ces chocs.

Pour prendre en considération ces chocs, nous adaptons un modèle structurel de défaut avec barrière endogène développé à l'origine par Kou (2002) dans le but d'expliquer le coût de la dette des entreprises. L'idée fondamentale est que, si le modèle économique de l'entreprise est non-durable, la valeur de ses actifs peut subir dans l'avenir un ou plusieurs sauts négatifs. Les raisons de ces baisses brutales peuvent être variées. Elles peuvent correspondre par exemple à l'épuisement des ressources non-renouvelables utilisées par l'entreprise dans son processus de production, à un niveau de pollution généré par l'activité devenu intolérable, à des produits qui ne sont plus acceptés par les consommateurs (les difficultés de certaines entreprises automobiles américaines peut illustrer cette catégorie), à des relations sociales inacceptables (travail des enfants ou des immigrants clandestins)... Nous faisons l'hypothèse que, si l'entreprise ne modifie pas son mode de développement, l'impact de la non-durabilité de son activité sur sa valeur ne sera pas progressif, mais brutal.

Notons que de nombreuses séries financières présentent ce genre d'évolution comportant des sauts importants. C'est le cas par exemple des taux d'intérêt et de change, des prix de l'énergie (voir par exemple l'étude récente des prix de l'électricité de Geman & Roncoroni, 2006), des matières premières, des marchandises ou des prix des quotas d'émission de CO₂ (Daskalakis

et al., 2005 et Benz & Trück, 2009)... L'histoire récente des marchés financiers avec trois krachs en un peu plus de 20 ans (1987, 2001, 2008) montre qu'une chute brutale des valeurs des entreprises illustre la nécessité de renoncer à la modélisation classique de la valeur par des mouvements browniens géométriques pour la remplacer par des processus stochastiques à saut. Notre objectif est de montrer que l'impact de ces sauts sur la valeur de l'entreprise est loin d'être négligeable, même si la perspective de leur apparition est relativement lointaine. Ainsi, si l'adoption d'un modèle de développement durable pour l'entreprise peut se justifier à partir d'arguments éthique (responsabilité sociale, entreprise citoyenne...), il peut aussi être mis en œuvre pour un objectif de maximisation de la valeur de l'entreprise. Les coûts liés à cette adoption ne doivent pas être envisagés par les actionnaires comme des investissements à perte mais comme une préservation de la valeur actuelle de l'entreprise par la consolidation des flux de trésorerie futurs anticipés. Dans une approche purement financière, ces coûts peuvent alors être comparés à l'avantage résultant de la suppression des baisses brutales de valeur liées à un développement non-durable. Pour reprendre un des exemples cités ci-dessus, on peut penser que si l'industrie automobile américaine s'était engagée plus avant dans la conception de voitures propres et moins voraces en carburant, sa situation financière actuelle serait plus saine et sa capacité à traverser la crise meilleure.

2 Evaluation de la dette, des capitaux propres et de l'entreprise⁵

Dans cette section, nous présentons un modèle général d'évaluation d'entreprise capable de prendre en compte l'impact de la non-durabilité des flux de trésorerie sur la valeur de l'entreprise. Suivant la démarche initiée par Modigliani et Miller (1958), le modèle décompose la valeur de l'entreprise en trois éléments : la capacité de son actif économique à générer des revenus, le fait que les intérêts de la dette (déductibles des impôts) engendrent une économie fiscale, les coûts de faillite dont la probabilité augmente avec l'endettement. Le modèle est fondé sur la théorie des options en ce sens que les capitaux propres de l'entreprise sont analysés comme une option d'achat sur l'actif économique dont le prix d'exercice est la valeur de remboursement de la dette (Black & Scholes (1973)). La dette est risquée du fait de la possibilité de défaut. Au sein de cette famille de modèles, les modèles structurels de faillite (dont l'origine remonte à Merton (1974)) supposent que les caractéristiques économiques et financières de la firme sont à l'origine de sa défaillance. Plus précisément, l'entreprise tombe en faillite lorsque la valeur de l'actif économique tombe en dessous de la valeur des dettes. En pratique, le seuil qui déclenche la faillite est une fonction plus ou moins complexe de la valeur des dettes. Ainsi le *Credit Monitor Model* de l'agence de notation *Moody's/KMV*, qui est l'un des modèles standards utilisé par les banques pour mesurer leur exposition au risque de crédit choisit comme seuil la somme des dettes court terme et de la moitié des dettes long terme.

En résumé, en fonction des caractéristiques économiques de l'activité de l'entreprise (profitabilité et risque) et de ses engagements vis-à-vis des créanciers, il est possible de déduire la valeur de marché et le coût de la dette ainsi que la probabilité de faillite. Le montant et coût de la dette déterminent le niveau des économies fiscales. La probabilité de faillite et les coûts spécifiques de faillite associés permettent de calculer l'espérance du coût de faillite. Conformément à l'équation de valorisation de Modigliani Miller, la connaissance

⁵ Les détails techniques sont donnés en annexe 1.

des ces éléments permet de déduire la valeur de l'entreprise puis celle des capitaux propres. C'est la démarche adoptée dans la résolution du modèle.

Nous allons tout d'abord décrire la façon dont la dette est émise et remboursée, puis le processus de faillite et, enfin nous exposerons la logique des formules générales donnant la valeur de la dette, de l'entreprise et des capitaux propres. Ces formules sont générales car elles sont valables pour un large éventail de processus d'évolution de l'actif économique (pour des caractéristiques variées de la profitabilité et du risque). Pour obtenir des formules opérationnelles, il faut donc préciser les caractéristiques du processus d'évolution de l'actif. C'est à ce stade que nous présentons un processus capable de prendre en compte des chocs importants sur la valeur de l'actif. Le processus choisi permet d'obtenir des expressions explicites de la valeur de la dette, de l'entreprise et des capitaux propres.

2.1 Emission de la dette et paiement des coupons

Nous considérons que la structure de la dette est stationnaire et homogène comme dans le modèle de Leland (1994). C'est-à-dire que la dette est renouvelée de manière à maintenir constante sa valeur nominale, les intérêts versés et la maturité moyenne. Pour cela, nous adoptons les mécanismes d'émission de la dette et de paiement des coupons développés par Toft et Leland (1996). La dette arrivant à échéance est remplacée par une dette ayant des caractéristiques identiques. À chaque moment du temps, l'entreprise a la même structure de la dette avec un taux de coupon, c , et un principal, P , constant, le montant des intérêts $C = cP$. L'entreprise renouvelle de manière continue une fraction constante de la dette, m . La dette remboursée est remplacée, aux taux p , par une dette nouvellement émise, de coupon, de principal et de maturité identiques. Le prix de la nouvelle dette émise dépend de la valeur de l'actif de l'entreprise au moment de l'émission. Cette approche permet une grande flexibilité dans la détermination des caractéristiques de la dette, notamment en ce qui concerne sa maturité. En effet, contrairement au modèle de Modigliani et Miller (1958, 1963) et aux premiers modèles d'option dans lesquels la dette est perpétuelle (Leland, 1994), l'approche de Leland et Toft permet de construire une dette de maturité moyenne quelconque ce qui rend le modèle plus opérationnel.

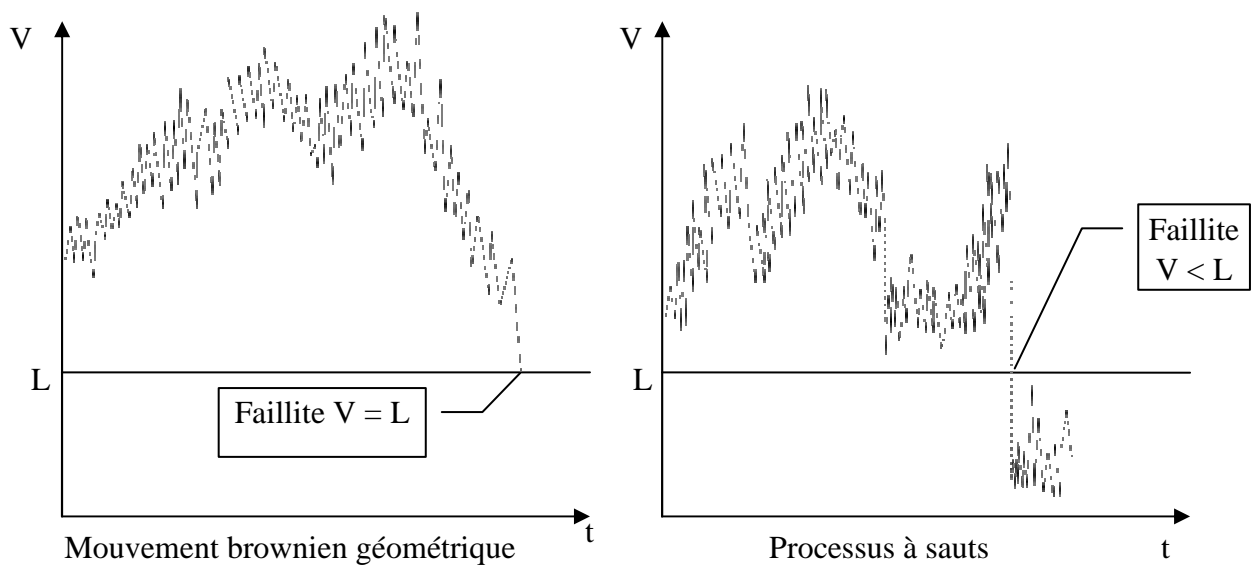
2.2 Défaut de paiement

La faillite ou le défaut de paiement se produit à la première date à laquelle la valeur des actifs de l'entreprise, V , descend en dessous d'une barrière qui déclenche le défaut L . Contrairement aux premiers modèles d'option où la valeur de la barrière était exogène ou déterminée à partir d'observations empiriques (voir le modèle *Moody's/KMV*), dans les modèles récents, le niveau optimal de la barrière, L , est déterminé par la maximisation de la valeur des fonds propres.

La faillite se produit lorsque la valeur des actifs de l'entreprise tombe à un niveau tel qu'elle ne peut plus lever suffisamment de fonds pour assurer le service de sa dette. En effet, à ce niveau de valeur de l'actif, la dette devient très risquée, les créanciers demandent alors une rémunération très élevée. Le coût de l'endettement devient tel que les actionnaires refusent de conserver leur option sur les actifs de l'entreprise, les gains potentiels futurs ne sont plus suffisants compte tenu du risque des capitaux propres et des coûts atteints par la dette. Les

actionnaires exercent donc leur clause de responsabilité limitée et abandonnent leur droit de propriété sur l'actif aux créanciers. C'est le mécanisme financier de la faillite.

Graphique 1 : Valeur de l'entreprise et déclenchement de la faillite



En cas de faillite, les créanciers ne récupéreront qu'une partie de la valeur des actifs au moment de la faillite. Une partie de ces actifs, α , ($0 \leq \alpha \leq 1$) servira à régler les coûts de réorganisation et les coûts spécifiques de faillite. De plus, si la règle de priorité absolue, RPA, n'est pas respectée, ce qui est fréquemment le cas en pratique (Franks & Torous, (1989), Eberhart *et al.* (1990)), les actionnaires recevront une fraction de la valeur résiduelle de l'actif au moment du défaut, γ , ($0 \leq \gamma \leq 1$). La fraction de la valeur de l'actif récupérée par les créanciers est donc égale à $(1 - \alpha)(1 - \gamma) = 1 - \hat{\alpha}$. Ce pourcentage s'applique à la valeur des actifs au moment du défaut.

Notons que la valeur de l'actif économique (avant coût de réorganisation et prélèvement des actionnaires) peut tomber au-dessous de la barrière L lorsque le processus stochastique qui décrit son évolution n'est pas continu (voir graphique 1). L'existence de sauts fait donc subir un risque supplémentaire aux créanciers qui doit être rémunéré par un taux d'intérêt plus élevé.

2.3 Valeur de la dette, de l'entreprise et des capitaux propres

Le calcul de la valeur de la dette est réalisé en 2 étapes. Dans une première étape, on effectue le calcul de la valeur d'une dette élémentaire de valeur nominale égale à 1 et de maturité t . La valeur d'une dette élémentaire est égale à la moyenne de la valeur actuelle des flux générés par la dette si elle est remboursée et de la valeur actuelle des flux en cas de défaut. En l'absence de défaut, la valeur de la dette est égale à la valeur actuelle des intérêts et du remboursement du principal. En cas de défaut, les intérêts ne seront versés que jusqu'à la date du défaut et seule une fraction du principal sera remboursée. Il est alors facile d'interpréter la formule d'évaluation de la dette élémentaire qui se décompose en trois termes :

- le premier terme est la valeur actuelle de tous les intérêts payés jusqu'à la maturité de la dette ou jusqu'à la date de faillite si celle-ci a lieu avant la maturité.

- Le second terme correspond à la valeur actuelle du remboursement s'il n'y a pas de défaut avant t .
- Le troisième terme représente la valeur actuelle de ce que les créanciers recevront en cas de défaillance.

Dans une deuxième étape on fait la somme de toutes ces dettes élémentaires de manière à reproduire les caractéristiques (maturité, principal, coupon) de la dette de l'entreprise. La valeur de la dette⁶ dépend du taux d'intérêt nominal, du taux d'actualisation, du taux de remboursement, de la maturité, de la probabilité de faillite et de ce que les créanciers récupèrent en cas de faillite.

La valeur de l'entreprise⁷ quant à elle est composée de trois termes classiques depuis les travaux sur la structure du capital initiés Modigliani et Miller :

- la valeur de l'actif économique de l'entreprise qui correspond à la valeur d'une entreprise non endettée ;
- la valeur actuelle des avantages fiscaux liés à l'endettement du fait de la déductibilité des intérêts d'emprunt ;
- la valeur actuelle des coûts de la faillite.

Valeur de l'entreprise = valeur d'une entreprise non endettée + valeur actuelle des économies d'impôts générées par l'endettement – valeur actuelle des coûts de faillite

La valeur des fonds propres de l'entreprise est égale à la valeur de l'actif de l'entreprise moins la valeur de la dette. Enfin, la valeur optimale de la barrière endogène, L , est déterminée par la maximisation de la valeur des fonds propres (Leland (1994), Leland & Toft (1996), Hilberink et Rogers (2002))

A ce stade, les expressions des valeurs de l'entreprise des capitaux propres et des dettes sont formelles car nous n'avons fait aucune hypothèse sur le processus stochastique suivi par la valeur des actifs de l'entreprise. Il n'est donc pas possible de calculer la distribution de probabilités de la date d'apparition de la faillite. La nature du processus choisi, purement continu (comme le mouvement brownien géométrique par exemple qui sert de référence dans les formules d'option), ou continu avec des sauts (comme le processus décrit ci-dessous) et l'estimation des paramètres de ce processus permettent de calculer les différentes valeurs pertinentes (dette, entreprise, capitaux propres). La plupart des processus ne permettent pas d'obtenir des formules explicites, les valeurs doivent alors être calculées numériquement. Certains processus permettent d'aboutir à des formules explicites, c'est évidemment le cas du mouvement géométrique mais aussi celui du processus avec sauts doublement exponentiels que nous avons choisi.

2.4 Processus de diffusion avec sauts doublement exponentiels⁸

Nous considérons que la non-durabilité des flux aura pour conséquence une ou plusieurs chutes brutales de la valeur des actifs de l'entreprise. La date et la taille de ces sauts sont inconnues à la date de l'évaluation. Pour intégrer ces caractéristiques dans le modèle nous faisons donc l'hypothèse que la valeur de l'actif suit un processus à sauts. Dans cette famille

⁶ Voir l'équation (A1-1) de l'annexe 1 pour une expression mathématique précise.

⁷ Voir l'équation (A1-2) de l'annexe 1 pour une expression mathématique précise.

⁸ Voir l'annexe 2 pour une présentation technique de ce processus.

de processus, la double distribution exponentielle des sauts permet d'obtenir une formule explicite de la dette, des capitaux propres et de l'entreprise ce qui facilite les calculs et interprétations ainsi que la statique comparative.

Plus précisément le processus suivi par l'actif se décompose en :

- un processus continu, à savoir le mouvement brownien géométrique classique : les rendements instantanés de l'actif ont une moyenne et un écart-type constant,
- des sauts décrits par deux distributions, la première (une distribution de Poisson) pour l'intensité du processus (le nombre de sauts susceptibles d'apparaître au cours d'une période donnée), la seconde (une distribution exponentielle) pour l'importance des sauts. La valeur de l'actif à la fin d'une période donnée va donc dépendre du nombre de sauts qui ont eu lieu durant cette période et de l'importance de chacun des sauts.

Les différentes sources d'aléas, processus continu, nombre de sauts, taille des sauts, sont indépendants les uns des autres. Ce qui signifie, par exemple, que le nombre de sauts n'a pas d'influence sur leur taille.

Dans le modèle général (Kou, (2002), Kou & Wang (2003), Dao & Jeanblanc, (2006)), les sauts peuvent être positifs (augmentation brutale de la valeur de l'actif) ou négatifs (diminution brutale de la valeur de l'actif). L'ampleur du saut est décrite par une distribution exponentielle spécifique selon le signe du saut, d'où le nom de fonction doublement exponentielle. Cette fonction donne également, pour chaque saut, la probabilité qu'il soit positif ou négatif.

2.5 Valeur de la dette, des capitaux propres et de l'entreprise sous l'hypothèse de processus à sauts doublement exponentiels⁹

Le choix d'un processus stochastique précis pour décrire l'évolution de la valeur de l'actif de l'entreprise permet de donner des expressions explicites aux valeurs des dettes, des capitaux propres et de l'entreprise ainsi que pour la barrière optimale à partir de laquelle l'entreprise tombe en faillite. Le calcul des différentes espérances qui entrent dans le calcul des valeurs est fondé sur l'outil mathématique de la transformée de Laplace (voir Cont & Tankov, (2003) pour une application systématique de cet outil aux problèmes financiers).

L'équation de la transformée de Laplace du processus d'évolution de la valeur de l'actif de l'entreprise est du 4^{ème} degré. Il est possible de démontrer (Dao & Jeanblanc, (2006)) que cette équation a exactement 4 racines réelles dont il est possible de trouver une expression exacte pour chacune d'elle. Ces solutions sont ensuite introduites dans les formules d'évaluation des dettes et des capitaux propres de manière à aboutir à des formules explicites.

3 Analyse numérique de la valeur terminale de l'entreprise

Pour toutes les simulations, nous prendrons les valeurs suivantes pour les paramètres du scénario de base (ces valeurs sont utilisées dans Leland 1994, Hilberink et Rogers 2002, Dao et Jeanblanc 2006). Les caractéristiques de l'entreprise sont : valeur de l'actif $V = 100$, taux sans risque $r = 7,5\%$, taux de distribution $\delta = 7\%$, volatilité des actifs $\sigma = 20\%$, taux

⁹ Voir l'annexe 3 pour une présentation technique du calcul des différentes valeurs.

d'imposition sur les sociétés $\theta = 0,35$, coûts spécifiques de faillite et de réorganisation $\alpha = 0,5$, taux de violation de la RPA $\gamma = 0,5$.

La dette a les caractéristiques suivantes : principal $P = 30$, le coupon, $C = 3$, valeur de l'échéance $m = 0,2$ (la durée moyenne de la dette est de 5 ans).

Les valeurs des paramètres du processus de saut sont différents de celles utilisées dans les études de simulation précédentes (Kou et Wang, 2003 et de Dao et Jeanblanc, 2006). En effet, dans ces études les sauts sont fréquents (plusieurs sauts par période : $\lambda > 1$), mais de taille relativement modeste (en moyenne la taille du saut est inférieure à 5%). Nous sommes intéressés par l'impact sur la valeur de l'entreprise de sauts rares, mais de grande taille. D'où le choix d'une intensité égale à 0,2 ($\lambda = 0,2$), la probabilité et la taille des sauts positifs est nulle ($p = 0, q = 1$), la taille moyenne des sauts négatifs est de 30%. Cela signifie que l'entreprise subira en moyenne un saut de 30% tous les cinq ans.

Les calculs sont effectués de la manière suivante :

- 1) Résolution de l'équation du 4^{ème} degré.
- 2) Calcul de la valeur de la barrière optimale.
- 3) Calcul de la valeur d'entreprise.

Nous déterminons l'impact de la taille du saut, de son intensité et de l'endettement de l'entreprise sur la valeur terminale de l'entreprise¹⁰.

Tableau 2 : impact de sauts négatifs de grande taille sur la valeur terminale

Taille du saut	Valeur terminale	Intensité (λ)	Valeur terminale	Levier P/V	Valeur terminale
5 %	97,85	0,05	90,32	0,1	94,76
10 %	95,79	0,10	88,04	0,2	89,24
15 %	93,25	0,15	85,75	0,3	83,45
20 %	90,30	0,20	83,45	0,4	77,37
25 %	87,02	0,25	81,13	0,5	71,01
30 %	83,45	0,30	78,81	0,6	64,34
35 %	79,62	0,35	76,48	0,7	57,36
40 %	75,57	0,40	74,14	0,8	49,99
45 %	71,32	0,45	71,80	0,9	42,15
50 %	66,88	0,50	69,45		
55 %	62,28	0,55	67,09		
60 %	57,52	0,60	64,73		
65 %	52,62	0,65	62,37		
70 %	47,59	0,70	60,00		

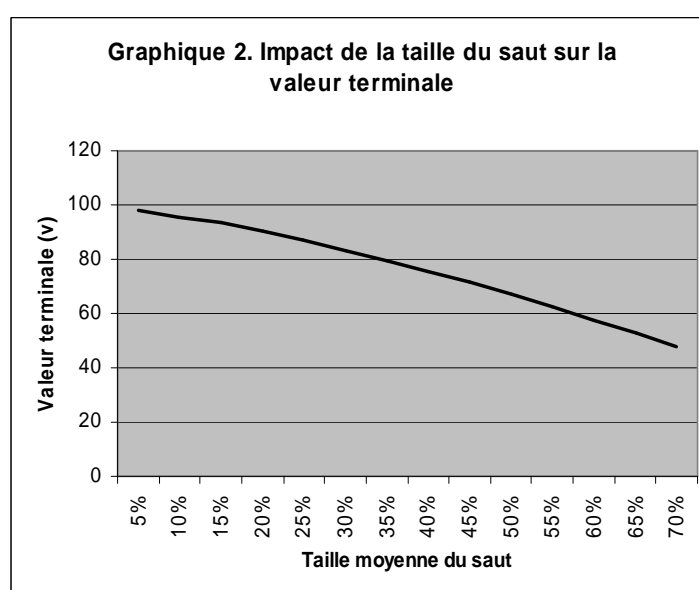
Les résultats ci-dessous correspondent à la valeur terminale obtenue dans le cadre d'une variation de la taille du saut, de l'intensité des sauts et du levier financier. Les valeurs en gras (83,45) correspondent à celles obtenues dans le scénario de base.

Ainsi, si le scénario de base se produit, la valeur terminale de l'entreprise baisse de 16,55% ($100 - 83,45$) (voir le tableau 2) par rapport à une entreprise en tout point identique mais pour laquelle on a fait l'hypothèse d'une évolution continue de la valeur de l'actif. Si la valeur terminale représente la moitié de la valeur globale de l'entreprise fixée à 100 millions d'euros, cela signifie que la possibilité d'un saut de non-durabilité réduit la valeur actuelle de

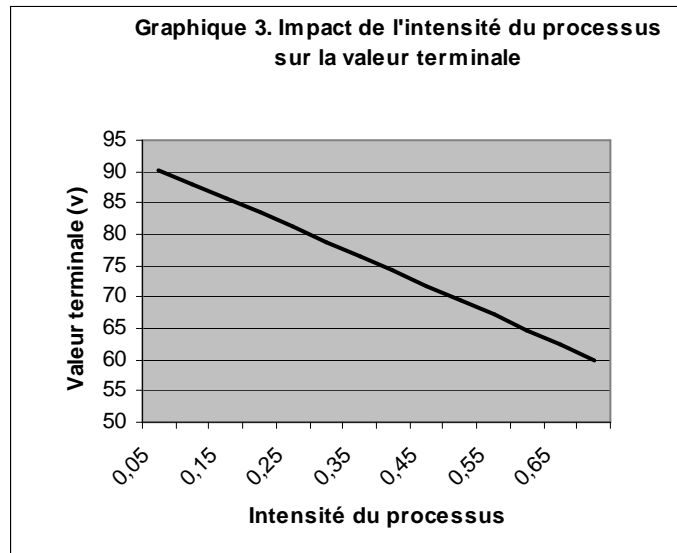
¹⁰ Le tableau 2 donne le détail des résultats numériques.

l'entreprise de 8,275 millions d'euros. Imaginons que l'entreprise puisse éviter ce choc en faisant un investissement de 6 millions d'euros pour rendre ses activités plus durables. Si elle utilise le modèle d'évaluation classique, cet investissement ne semble pas intéressant du point de vue économique puisque aucun gain ne lui est associé. En revanche, l'utilisation d'un modèle d'évaluation approprié, montre que cet investissement dégage une VAN de 2,275 millions d'euros, il sera alors adopté.

Sur le graphique 2 nous pouvons voir que la valeur de l'entreprise est une fonction concave de la taille moyenne du saut. La taille du saut a de plus en plus d'impact sur la valeur terminale de l'entreprise. Logiquement, les entreprises les plus fortement exposées à la non-durabilité de leur activité sont celles qui ont le plus à gagner dans la mise en place d'un modèle de développement durable.

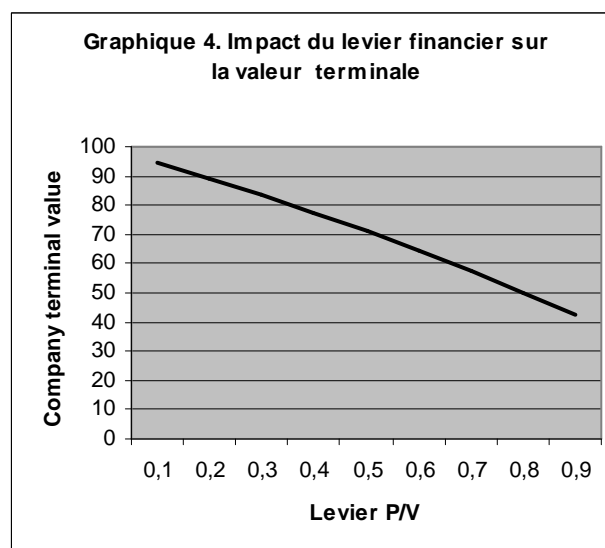


La valeur terminale de l'entreprise est une fonction linéaire de l'intensité du processus de saut, λ (graphique 3). Ce résultat a une interprétation intéressante, lorsque l'entreprise est « loin » d'un saut, c'est-à-dire lorsque la probabilité d'apparition d'un saut est faible, le passage du temps a peu d'impact sur la valeur terminale de l'entreprise, mais au fur et à mesure que le temps s'écoule, la valeur terminale diminue de plus en plus vite. Cela signifie que, quand elles sont « loin du saut », les entreprises n'ont aucun intérêt à investir dans le développement durable pendant une longue période, mais au-delà d'une certaine date, toutes les entreprises devraient avoir intérêt à mettre en œuvre ce type d'investissement dans un court laps de temps.



Pour illustrer ce phénomène, reprenons l'exemple de l'entreprise précédente. Lorsqu'un saut négatif de 30% ne risque d'apparaître que sur les 20 ans à venir (1/0,05) la perte de valeur due au saut n'est que de 4,84 millions d'euros $(100 - 90,32)/2$. Dix ans plus tard, si le saut ne s'est pas produit et que l'intensité a augmenté (1/0,1) la perte n'a augmenté que de 1,14 millions pour atteindre 5,98 millions. En revanche, elle augmente de 1,16 millions $(9,435 - 8,275)$ entre la 5^{ème} et la 4^{ème} année si le même processus se poursuit. Si, par exemple, l'intensité est de 0,05 et l'investissement en développement durable est au minimum de 9 millions d'euros, les entreprises ne vont « rien faire » pendant 15 ans puis réaliser tous les investissements en l'espace d'une ou quelques années.

Le graphique 4 montre que la valeur de l'entreprise diminue nettement lorsque l'on augmente le levier. Les entreprises endettées sont donc très sensibles à la non-durabilité de leur modèle économique et devraient donc être les premières à investir pour améliorer la durabilité de leur mode de développement. Si elles n'investissent pas, la perspective d'un choc de non-durabilité devrait les pousser à fortement réduire leur ratio d'endettement mais dans ce cas, elles se privent de sources de financement.



Conclusion

La prise en considération de la non-durabilité des flux comptables liés à des déséquilibres environnementaux, sociaux ou économiques dans l'évaluation des entreprises apparaît difficile dans le cadre des modèles d'évaluation traditionnels (DCF et résultat résiduel). L'utilisation d'un modèle général d'évaluation d'entreprise, nous permet d'étudier l'impact de la non-durabilité de l'activité de l'entreprise sur sa valeur. Considérant la possibilité de voir apparaître des chocs sur la valeur des actifs du fait de la disparition de flux de revenu (existence de sauts négatifs) nous adaptons le modèle d'évaluation des entreprises à la problématique du développement durable. A partir de ce nouveau modèle, il est alors possible d'effectuer des simulations afin de mesurer l'impact de la taille des chocs et de leur fréquence selon la structure financière de l'entreprise étudiée. Nos simulations montrent que l'impact des chocs est loin d'être négligeable. En effet, ils réduisent la valeur des actifs et augmentent les coûts de faillite (augmentation de la probabilité de faillite et des pertes qu'elle peut engendrer). Nous montrons que la perte de valeur subie par l'entreprise est une fonction croissante de la taille des sauts d'une part et de leur fréquence d'autre part. De plus, cette relation se trouve accentuée par le niveau d'endettement ; plus l'entreprise est endettée, plus la perte de valeur liée aux chocs est forte. Si l'on considère qu'avec le passage du temps la taille et la fréquence des chocs risquent d'augmenter, nous pouvons conclure que les entreprises qui négligent la durabilité de leurs activités sont susceptibles de connaître une forte baisse de leur valeur.

L'intégration des problèmes de durabilité des flux dans les modèles d'évaluation par les investisseurs devrait pousser les dirigeants d'une part à anticiper globalement ces problèmes dans les chiffres comptables et d'autre part à mettre en œuvre des stratégies destinées à rendre plus durable l'activité de leur entreprise et les revenus qui en découlent. Cette intégration peut être une voie de réconciliation entre les objectifs financiers des investisseurs et les objectifs de développement durable.

Bibliographie

- Benz, E., Trück, S. (2009). Modeling the price dynamics of CO2 emission allowances. *Energy Economics* 31 : 4-15.
- Black, F., Scholes, M. (1973), The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economic* 81 (3) : 637-654.
- Cont, R., Tankov, P. (2003). *Financial Modelling with Jump Process*. Chapman & Hall/CRC.
- Dao, B., Jeanblanc, M. (2006), Double Exponential Jump Diffusion Process: A structural Model of endogenous Default Barrier with Roll-over Debt Structure. Cahier de recherche, Université de Paris Dauphine, 20 p.
- Daskalakis, G., Psychoyios D., Markellos, R. (2005). Modeling CO2 emission allowance prices and derivatives: evidence from EEX. ERIM Report Series ERS-2005-052-F&A.
- Eberhart, A., Moore, W., Roenfeld, R. (1990). Security pricing deviations from the Absolute Priority Rule in Bankruptcy Proceedings. *The Journal of Finance* 45 : 1457-1469.

- Elkington, J. (1998). *Cannibals with Forks: the Triple Bottom Line of 21st Century Business*. New Society Publishers.
- Feltham, G.A., Ohlson, J.A. (1995). Valuation and Clean Surplus Accounting for Operating Financial Activities. *Contemporary Accounting Research* 11 (2) : 689-731.
- Franks, J., Torous, W. (1989). An empirical Investigation of US firms in reorganization. *The Journal of Finance* 44 : 747-769.
- Geman, H., Roncoroni, A. (2006). Understanding the Fine Structure of Electricity Prices. *Journal of Buisness* 79 (3) : 1225-1262.
- Hilberink, B., Rogers, C. (2002). Optimal capital structure and endogenous default. *Finance and Stochastics* 6 : 237-263.
- Kou, S. (2002). A jump diffusion model for option pricing. *Management Science* 48 : 1086-1101.
- Kou, S., Petrella, G., Wang, H. (2005). Pricing Path-Dependent Options with jump Risk via Laplace Transforms. *The Kyoto Economic Review* 74 (1) : 1-23.
- Kou, S., Wang, H. (2003). First Passage times of a jump diffusion process. *Advances in Applied Probability* 35 : 504-531.
- Leland, H. (1994). Corporate debt value, bonds covenants and optimal capital structure. *Journal of Finance* 49 (4) : 1213-1253.
- Leland, H., Toft, K. B. (1996). Optimal capital structure, endogenous bankruptcy, and the term structure of credit spreads. *Journal of Finance* 51 (3) : 987-1019.
- Lo, S-F., Sheu, H-J. (2007). Is corporate sustainability a value-increasing strategy for business? *Corporate Governance* 15 (2) : 345-358,
- Merton, R.C. (1974). On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. *The Journal of Finance* 29 : 449-470.
- Modigliani, F., Miller, M. H. (1958). The Cost of Capital, Corporation Finance, and the Theory of Investment. *American Economic Review* 48 (2) : 261-297.
- Modigliani, F., Miller, M. H. (1963). Corporate Income Taxes and the Cost of Capital: A Correction. *American Economic Review* 53 : 433-43.
- Ohlson, J.A. (1995). Earnings, Book Values, and Dividends in Equity Valuation. *Contemporary Accounting Research* 11 (2) : 661-687.
- Thauvron, A. (2009). *Evaluation d'entreprise*. Paris : Economica.
- Titman, S., Martin, J.D. (2008). *Valuation, The art & science of corporate investment decisions*. Pearson Education, Addison Wesley.
- Vernimmen, P. (2005). *Finance d'entreprise*. 6^{ème} édition par P. Quiry & Y. Le Fur, Paris : Dalloz.

ANNEXE 1 Modèle d'évaluation de la dette, des capitaux propres et de l'entreprise

Dans l'intervalle de temps dt , l'entreprise émet de nouvelles dettes, à un taux constant p , égales à une quantité constante pdt . Le profil de maturité est $\varphi(t) = me^{-mt}$, c'est-à-dire que la maturité d'une obligation est choisie au hasard selon une variable aléatoire exponentielle de moyenne $1/m$. Sur l'intervalle de temps $(t, t+dt)$, le montant dû à l'échéance est égal à :

$$\left(\int_{-\infty}^t p\varphi(t-u)du \right) dt = pdt$$

L'entreprise le rembourse intégralement. Puisque $mPdt$ est le montant total de la dette remboursé dans le même intervalle, il en résulte que $p = mP$. C'est la conséquence souhaitée de l'hypothèse de la distribution exponentielle du profil de maturité, la valeur nominale de l'ensemble de la dette venant à échéance en $(t, t+dt)$ est égale à la valeur nominale de la dette nouvellement émises au cours de la même période.

Si aucune faillite n'intervient, la durée moyenne de la dette T est égale à : $T = \int_0^{\infty} t\varphi(t)dt = \frac{1}{m}$.

La valeur d'une obligation de coupon c émise en 0 avec une valeur nominale de 1 et une maturité de t peut être écrite, sous la probabilité risque neutre, q , comme suit :

$$d_0(V, L, t) = E_q \left[\int_0^{t \wedge \tau} ce^{-rs} ds \right] + E_q \left[e^{-rt} 1_{t < \tau} \right] + \frac{1}{P} (1 - \alpha)(1 - \gamma) E_q \left[V_{\tau} e^{-r\tau} 1_{\tau \leq t} \right]$$

$$t \wedge \tau = \inf(t, \tau)$$

En faisant la somme pour toutes les maturités des dettes élémentaires, la valeur totale de la dette en 0 est¹¹ :

$$D(V, L) = \frac{C + mP}{r + m} E_q \left[1 - e^{-(r+m)\tau} \right] + (1 - \hat{\alpha}) V E_q \left[e^{X_{\tau} - (r+m)\tau} 1_{\tau < \infty} \right] \text{ avec } V_t = V e^{X_t} \quad (\text{A1-1})$$

La valeur de l'entreprise est alors calculée comme suit. Le taux de l'impôt sur les sociétés étant noté θ , la valeur actualisée de l'avantage fiscal est égal à : $\frac{\theta C}{r} (1 - e^{-r\tau} 1_{\tau < \infty})$. En effet, si

la faillite survient à la date τ , la valeur de l'avantage fiscal est : $\int_0^{\tau} \theta C e^{-rs} ds = \frac{\theta C}{r} [1 - e^{-r\tau}]$

$$v = v(V, L) = V + E_q \left[\frac{\theta C}{r} (1 - e^{-r\tau}) \right] - E_q \left[\alpha V_{\tau} e^{-r\tau} 1_{\tau < \infty} \right]$$

La valeur de l'entreprise est

$$= V + \frac{\theta C}{r} E_q \left[(1 - e^{-r\tau}) \right] - \alpha V E_q \left[e^{X_{\tau} - r\tau} 1_{\tau < \infty} \right] \quad (\text{A1-2})$$

¹¹ Voir Dao & Jeanblanc (2006) pour la démonstration.

ANNEXE 2 Processus à sauts doublement exponentiels

N_t suit une distribution de Poisson de paramètre λt : $P[N_t = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$,

Soient $\{Z_k, k \geq 0\}$ des variables aléatoires i.i.d. et $E_q[Z_1] < \infty$, $\sum_{k=1}^{N_t} Z_k$ est un cas particulier de sommes aléatoires appelé processus de Poisson composé.

La valeur des actifs de l'entreprise V_t , suit un processus de la forme :

$$\frac{dV_t}{V_{t-}} = (r - \delta)dt + \sigma dW_t + dM_t, \quad (\text{A2-1})$$

V_{t-} signifie que chaque fois qu'il y a un saut, la valeur du processus, avant le saut, est utilisée dans le terme de gauche de l'égalité,

δ : taux de distribution des bénéfices, aux investisseurs (actionnaires et obligataires). Plus précisément le taux de distribution aux investisseurs s'écrit $\delta_e = \delta V - c - p + d$ avec c , le taux de coupon, p le taux de remboursement du principal, d le taux d'émission de la nouvelle dette. Ce taux diminue à mesure que la valeur de l'entreprise baisse, à un certain niveau de la valeur de l'actif, les contributions requises ne sont plus versées par les actionnaires (dont la responsabilité est limitée), et la faillite survient,

σ : la volatilité des actifs de la société,

W_t : mouvement brownien standard sous la probabilité q ,

M_t : est la martingale du processus de Poisson composé, i.e. $M_t = \left(\sum_{k=1}^{N_t} Z_k \right) - \lambda E_q[Z_1]t$.

Toutes les sources d'aléas N , W , Z , sont supposées indépendantes sous la probabilité q ,

La solution de l'équation (A2-1) est :

$$V_t = V_0 \exp\left(\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda E_q[Z_1] \right) t + \sigma W_t \right) \prod_{k=1}^{N_t} (Z_k + 1)$$

Dans le cas où Z_k prennent leurs valeurs dans l'intervalle $]1, \infty[$ le processus prend des valeurs strictement positives et

$$V_t = V e^{X_t} \text{ où } X_t = \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda E_q[Z_1] \right) t + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N_t} \ln(Z_k + 1) \quad (\text{A2-2})$$

Dans le but de simplifier la formule (A2-2) et la modélisation de la taille des sauts, nous introduisons les variables $Y_k = \ln(Z_k + 1)$, $k \geq 0$, Ces variables aléatoires sont i.i.d. et :

$$X_t = \mu t + \sigma W_t + \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$$

$$\mu = \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda (E_q[e^{Y_1}] - 1) \right)$$

La transformée de Laplace de X est la fonction $G(\cdot)$ telle que : $E_q[e^{\beta X_t}] = \exp\{G(\beta)t\}$ pour tout t et β avec $E_q[e^{\beta X_t}] < \infty$,

L'expression de la transformée de Laplace du processus précédent est (Cont et Tankov, 2003) :

$$\begin{aligned} G(\beta) &= \frac{1}{2}\sigma^2\beta^2 + \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda(E_q[e^{Y_1}] - 1)\right)\beta + \lambda(E_q[e^{\beta Y_1}] - 1) \\ &= \frac{1}{2}\sigma^2\beta^2 + \mu\beta + \lambda(E_q[e^{\beta Y_1}] - 1) \end{aligned} \quad (\text{A2-3})$$

Dans le processus de diffusion à saut doublement exponentiels (Kou, 2002), la taille des sauts, Y_k , suit une double distribution exponentielle de densité :

$$f(y) = p\eta_1 e^{-\eta_1 y} 1_{\{y \geq 0\}} + q\eta_2 e^{-\eta_2 y} 1_{\{y < 0\}}, \quad \eta_1 > 0 \quad \eta_2 > 0$$

Où $p+q = 1$ représentent les probabilités de saut positives ou négatifs. Le premier terme représente donc la distribution exponentielle des sauts positifs et le second terme celle des sauts négatifs. La transformée de Laplace devient :

$$E_q(e^{\beta Y_1}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta y} f(y) dy = \frac{p\eta_1}{\eta_1 - \beta} + \frac{q\eta_2}{\eta_2 + \beta} < \infty \text{ si } \beta < \eta_1 \text{ et } \beta + \eta_2 > 0$$

$$\text{Si } \eta_1 > 1 \text{ alors } E_q(e^{Y_1}) < +\infty \text{ et } E_q(e^{Y_1}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta y} f(y) dy = \frac{p\eta_1}{\eta_1 - 1} + \frac{q\eta_2}{\eta_2 + 1}$$

Cette condition implique que le saut positif moyen ne peut dépasser 100% ce qui semble être une hypothèse raisonnable. D'après l'équation (A2-3) la fonction de Laplace est définie pour $-\eta_2 < \beta < \eta_1$ comme :

$$\begin{aligned} G(\beta) &= \frac{1}{2}\sigma^2\beta^2 + \mu\beta + \lambda\left(\frac{p\eta_1}{\eta_1 - \beta} + \frac{q\eta_2}{\eta_2 + \beta} - 1\right) \\ \mu &= r - \delta - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\left(\frac{p\eta_1}{\eta_1 - 1} + \frac{q\eta_2}{\eta_2 + 1} - 1\right) = r - \delta - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\zeta \end{aligned} \quad (\text{A2-4})$$

Pour $\rho > 0$, $G(\beta) = \rho$ a exactement 4 racines réelles vérifiant les inégalités suivantes :

$$-\infty < -\beta_{4,\rho} < -\eta_2 < -\beta_{3,\rho} < 0 < \beta_{1,\rho} < \eta_1 < \beta_{2,\rho} < \infty$$

Suivant Kou *et al.* (2005) annexe B, nous pouvons calculer les expressions explicites de ces racines.

Soit $\tau_l(X)$ la date du premier passage du processus X sous la barrière $l < 0$, $\tau_l(X) = \inf\{t \geq 0 : X_t \leq l\}$.

L'utilisation du théorème 3.1 de Kou and Wang (2003) et de son corollaire 3.3 permet de déduire relativement facilement la transformée de Laplace de $\tau_l(X)$ de même que pour tout $\rho > 0$ les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 E_q \left[e^{-\rho \tau_l(X)} \right] &= \frac{\eta_2 - \beta_{3,\rho}}{\eta_2} \frac{\beta_{4,\rho}}{\beta_{4,\rho} - \beta_{3,\rho}} e^{l\beta_{3,\rho}} + \frac{\beta_{4,\rho} - \eta_2}{\eta_2} \frac{\beta_{3,\rho}}{\beta_{4,\rho} - \beta_{3,\rho}} e^{l\beta_{4,\rho}} \\
 E_q \left[e^{-\rho \tau_l(X)} 1_{X_{\tau_l} - l < -y} \right] &= e^{-\eta_2 y} \frac{\eta_2 - \beta_{3,\rho}}{\eta_2} \frac{\beta_{4,\rho} - \eta_2}{\beta_{4,\rho} - \beta_{3,\rho}} \left[e^{l\beta_{3,\rho}} - e^{l\beta_{4,\rho}} \right] \quad y > 0 \\
 E_q \left[e^{-\rho \tau_l(X)} 1_{X_{\tau_l} = l} \right] &= \frac{\eta_2 - \beta_{3,\rho}}{\beta_{4,\rho} - \beta_{3,\rho}} e^{l\beta_{3,\rho}} + \frac{\beta_{4,\rho} - \eta_2}{\beta_{4,\rho} - \beta_{3,\rho}} e^{l\beta_{4,\rho}} \\
 E_q \left[e^{\xi X_{\tau_l} - \rho \tau_l(X)} 1_{\tau_l(X) < \infty} \right] &= e^{\xi l} \left[\frac{\eta_2 - \beta_{3,\rho}}{\beta_{4,\rho} - \beta_{3,\rho}} \frac{\beta_{4,\rho} + \xi}{\eta_2 + \xi} e^{l\beta_{3,\rho}} + \frac{\beta_{4,\rho} - \eta_2}{\beta_{4,\rho} - \beta_{3,\rho}} \frac{\beta_{3,\rho} + \xi}{\eta_2 + \xi} e^{l\beta_{4,\rho}} \right]
 \end{aligned} \tag{A2-5}$$

La première équation est la transformée de Laplace de la date à laquelle le processus touche la barrière. La seconde équation est la transformée de Laplace de la première fois où le processus descend sous la barrière d'un montant $y > 0$. L'équation suivante donne une expression similaire en l'absence de dépassement de la barrière. La dernière équation est la transformée de Laplace de la date de premier passage et de la valeur à la date de premier passage si la date est finie.

ANNEXE 3 Formule explicite de la valeur des dettes, des capitaux propres et de la barrière

Le remplacement des espérances dans les équations (A1-1) et (A1-2) par leurs expressions données par les équations (A2-5) permet d'obtenir, après quelques calculs, les expressions explicites de la valeur de la dette des capitaux propres et de l'entreprise :

$$D(V, L) = \frac{C + mP}{r + m} \left[1 - \frac{\eta_2 - \beta_{3,r+m}}{\eta_2} \frac{\beta_{4,r+m}}{\beta_{4,r+m} - \beta_{3,r+m}} e^{l\beta_{3,r+m}} - \frac{\beta_{4,r+m} - \eta_2}{\eta_2} \frac{\beta_{3,r+m}}{\beta_{4,r+m} - \beta_{3,r+m}} e^{l\beta_{4,r+m}} \right] \\ + (1 - \hat{\alpha}) V e^l \left[\frac{\eta_2 - \beta_{3,r+m}}{\beta_{4,r+m} - \beta_{3,r+m}} \frac{\beta_{4,r+m} + 1}{\eta_2 + 1} e^{l\beta_{3,r+m}} + \frac{\beta_{4,r+m} - \eta_2}{\beta_{4,r+m} - \beta_{3,r+m}} \frac{\beta_{3,r+m} + 1}{\eta_2 + 1} e^{l\beta_{4,r+m}} \right]$$

Après avoir remplacé l par $l = \ln\left(\frac{L}{V}\right)$ dans l'expression précédente et après quelques calculs nous arrivons à la formule :

$$D(V, L) = \frac{C + mP}{r + m} - \left(\frac{C + mP}{r + m} \frac{\beta_{4,r+m}}{\eta_2} - (1 - \hat{\alpha}) L \frac{\beta_{4,r+m} + 1}{\eta_2 + 1} \right) \frac{\eta_2 - \beta_{3,r+m}}{\beta_{4,r+m} - \beta_{3,r+m}} \left(\frac{L}{V} \right)^{\beta_{3,r+m}} \\ - \left(\frac{C + mP}{r + m} \frac{\beta_{3,r+m}}{\eta_2} - (1 - \hat{\alpha}) L \frac{\beta_{3,r+m} + 1}{\eta_2 + 1} \right) \frac{\beta_{4,r+m} - \eta_2}{\beta_{4,r+m} - \beta_{3,r+m}} \left(\frac{L}{V} \right)^{\beta_{4,r+m}} \quad (A3-1)$$

La valeur de l'entreprise est donnée par :

$$v(V, L) = V + \frac{\theta C}{r} - \left(\frac{\theta C}{r} \frac{\beta_{4,r}}{\eta_2} + \alpha L \frac{\beta_{4,r} + 1}{\eta_2 + 1} \right) \frac{\eta_2 - \beta_{3,r}}{\beta_{4,r} - \beta_{3,r}} \left(\frac{L}{V} \right)^{\beta_{3,r}} \\ - \left(\frac{\theta C}{r} \frac{\beta_{3,r}}{\eta_2} - \alpha L \frac{\beta_{3,r} + 1}{\eta_2 + 1} \right) \frac{\beta_{4,r} - \eta_2}{\beta_{4,r} - \beta_{3,r}} \left(\frac{L}{V} \right)^{\beta_{4,r}} \quad (A3-2)$$

La valeur des capitaux propres est obtenue par différence entre la valeur de l'entreprise et la valeur des dettes : $E(V, L) = v(V, L) - D(V, L)$ (A3-3)

La barrière optimale pour le déclenchement du défaut est déterminée par la maximisation de l'expression des capitaux propres¹²:

$$L = \frac{\frac{C + mP}{r + m} \beta_{3,r+m} \beta_{4,r+m} - \frac{\theta C}{r} \beta_{3,r} \beta_{4,r}}{1 + \alpha [(\beta_{3,r} + 1)(\beta_{4,r} + 1) - 1] + (1 - \hat{\alpha}) [(\beta_{3,r+m} + 1)(\beta_{4,r+m} + 1) - 1]} \frac{\eta_2 + 1}{\eta_2} \quad (A3-4)$$

¹² Démonstration dans Dao & Jeanblanc (2006).