Cuantificación de la Pérdida de Bienestar Asociada a la Imposición de Restricciones en la Optimización de Carteras de las Administradoras de Fondos de Retiro.

Elvio Accinelli* Alfredo Piria † Raúl Tempone ‡

18/02/99

Abstract

Las restricciones impuestas por organismos reguladores al diseño de carteras de administradoras de fondos de retiro, pretenden orientar el comportamiento de las administradoras, no obstante estas restricciones conllevan pérdida de bienestar por parte de los ahorristas. En el presente trabajo se cuantifica, en forma numérica, la pérdida de bienestar asociado a diferentes restricciones posibles. Para ello se utilizan técnicas de programación matemática, las que permiten a la vez obtener en forma rápida portafolios óptimos en el marco de tales restricciones. Un ejemplo numérico pretende ayudar a entender la situación creada.

1 Introducción

En el problema que enfrenta una administradora de fondos de retiro al diseñar su portafolio óptimo de inversiones, existen restricciones externas sobre su posible composición, impuestas por un organismo regulador central. Estas restricciones pueden tener distintos motivos, entre ellos evitar el comportamiento oportunista por parte de las administradoras o la captación de inversiones en un determinado tipo de activos de interés de la entidad reguladora. La imposición de esas restricciones conlleva una desviación de la frontera de eficiencia, con la consecuente pérdida de bienestar individual y social, medida ésta en términos del

*Facultad de Ingeniería, IMERL, CC.30; Montevideo, Uruguay. E-mail elvio@fing.edu.uy.
†Facultad de Ingeniería, IMERL, CC.30; Montevideo, Uruguay. E-mail apiria@fing.edu.uy.
‡Facultad de Ingeniería, IMERL, CC.30; Montevideo, Uruguay. E-mail rtempone@fing.edu.uy

riesgo que los ahorristas son obligados a asumir. Usualmente esta pérdida no es cuantificada al momento de definir las restricciones.

En este trabajo se muestra la posibilidad de realizar tal cuantificación, comparando el impacto de la imposición de un tipo de restricción frente a otro. A tales efectos se define un conjunto de índices, los que se calculan en forma numérica una vez hallada la frontera de eficiencia. No se pretende recomendar un tipo u otro de restricción, ya que si ese fuera el caso se debería disponer de un modelo matemático de los objetivos del regulador.

Con este objetivo se presenta el modelo clásico de optimización de portafolios, con esperanza dada y minimización del riesgo, en el marco de un modelo sin activo libre de riesgo y luego en uno con tal activo.

A continuación el modelo clásico es abandonado y nos introducimos en un modelo donde una autoridad central impone restricciones. Se analiza la situación creada cuando la aseguradora pretende optimizar su cartera, y como antes se consideran dos modelos: con y sin activo libre de riesgo. Un algoritmo computacional permite obtener en forma rápida las fronteras de eficiencia.

Para uno y otro caso (con y sin restricciones exógenas) las curvas obtenidas son convexas, no obstante mientras la primera es diferenciable en todo punto, la segunda presenta puntos angulosos. En modelos con presencia de activos libres de riesgo, la clásica recta también cambia por una curva convexa no regular.

Se comparan las dos situaciones, mostrando la pérdida de bienestar que la imposición de restricciones conlleva y se definen cuatro índices diferentes para medirla. Los dos primeros miden la diferencia entre la situaciones con y sin restricciones impuestas. El tercero mide la sensibilidad al cambio en las restricciones. El cuarto muestra que el valor marginal por una unidad adicional de retorno esperado, en términos de riesgo deja de ser constante, para obtener sólo validez local cuando se trata de un problema con restricciones exógenas.

Finalmente se presenta un ejemplo explicativo de las dos situaciones mencionadas, donde se compara el precio que en términos de riesgo debe pagar la sociedad por una u otra restricción posible.

En un anexo se presentan los cálculos más prolongados.

2 Planteo del problema

Nuestro interés es analizar el comportamiento de un agente (una administradora de fondos de pensión por ejemplo) al intentar crear una cartera, con preferencias sobre retorno esperado y adversión a la variancia.

En el caso que nos ocupa, el vector $x = \{x_1, x_2, ...x_n\}$ de variables de decisión representará un portafolio, siendo x_i, con $i = (1, 2, ..., n)$ el porcentaje del activo i que compone el portafolio o cartera x.

Para un portafolio x dado, el valor esperado del retorno (asociado al vector aleatorio $\tilde{e}$, con vector de esperanzas e) queda definido como $E(x) = \sum_{i=1}^{n} e_i \ x_i = e^T x$, y la varianza asociada es $var(x) = \frac{1}{2}x^T \mathbf{V} x$ donde $\frac{1}{2}\mathbf{V}$ representa la matriz de varianzas y covarianzas asociadas a $\tilde{e}$. Consideraremos el valor $var(x)$ como el riesgo asociado al portafolio x, y usaremos la notación σ^2 para referirnos a ella.

El agente intenta conformar una cartera con un retorno esperado E dado, siendo conocido el retorno esperado e_i de cada uno de los n activos existentes en el mercado. Entre dos portafolios x, e y con igual valor esperado ($E(x) = E(y)$) se eligirá aquel con menor varianza, es decir $x \succeq y$ si y sólo si $var(x) \leq var(y)$.

El programa para este agente corresponde a una minimización cuadrática con restricciones lineales, y se escribe de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{rl}
\sigma^2(E) & = \min \frac{1}{2} x^T \mathbf{V} x \\
s.a & . \\
e^T x & = E \\
\mathbf{1}^T x & = 1 \\
a_j^T x \leq b_j, & j \in J
\end{array}
\tag{1}
$$

La primera restricción dice que debemos limitarnos a considerar aquellos portafolios tales que tengan el valor E como retorno esperado. La segunda muestra que optimizamos el porcentaje de cada activo en el portafolio o cartera que creamos a partir de estos. Finalmente, se ha incluído un conjunto J de restricciones de desigualdad para contemplar el caso general a tratar en este trabajo. Dicho conjunto J puede ser vacío en la formulación más simple.

2.1 Caso sin restricciones externas

Presentamos aquí el modelo clásico [Huang, C.; Litzenberger, R.], con objeto de comparar sus resultados con los del modelo más general que estudiaremos más adelante y verificar las bondades de nuestro algoritmo de cálculo. Sus limitaciones sobre las funciones de utilidad individual son conocidas, pero su tratabilidad matemática y popularidad en la teoría de finanzas nos lleva a su consideración.

2.1.1 Caso en que no existe un activo libre de riesgo

Aunque el tratamiento matemático del problema incluyendo o no un activo libre de riesgo es idéntico, los distinguimos aquí pues sus soluciones cualitativas son diferentes.

En esta subsección nos limitaremos a la formulación del problema sin activo libre de riesgo. Con la notación presentada es la siguiente:

$$\begin{array}{ll} \sigma^2(E) & = \min \frac{1}{2} x^T \mathbf{V} x \\ s.a & . \\ e^T x & = E \\ \mathbf{1}^T x & = 1 \end{array} \tag{2}$$

siendo su solución óptima (ver anexo):

$$\sigma^2(E) = \frac{1}{2} [E, 1]^T \, \mathbf{P}^{-1} \left[\begin{array}{c} E \\ 1 \end{array} \right]. \tag{3}$$

donde la matriz $\mathbf{P}$ viene dada por

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{cc} e^T \mathbf{V}^{-1} e & e^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \mathbf{V}^{-1} e & \mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \end{array} \right]$$

Esta solución corresponde a una parábola en un diagrama que relaciona riesgo y valor esperado.
Dicha curva representa la frontera de eficiencia. Lo anterior nos dice que no existen puntos (portafolios) en el plano σ^2, E (varianza, valor esperado) con mayor retorno esperado para un nivel de riesgo dado, que los determinados por la curva de eficiencia.

2.1.2 Caso en que existe un activo libre de riesgo

Las técnicas de cálculo para esta subsección son análogas a las de la anterior, debiendo cambiarse la restricción de retorno esperado dado, del programa anterior por la siguiente:

$$x^T e + (1 - x\mathbf{1}) e_f = E. \tag{4}$$

Aquí x representa el vector de inversiones en activos con riesgo, siendo e el vector de retornos esperado de dichos activos. Por otra parte e_f es el retorno del activo sin riesgo y $(1 - x\mathbf{1})$ el porcentaje invertido en él. La solución para este problema está ampliamente tratada en la bibliografía. Su frontera de eficiencia es una parábola en el plano σ^2, E (varianza del retorno, valor esperado del retorno), mientras que en el plano σ, E (desvío estándar del retorno, valor esperado del retorno) la misma es una recta que también se muestra en la figura 1. Como es bien conocido, dicha recta tiene ordenada en el origen en e_f y es tangente a la frontera de eficiencia del problema presentado en la subsección 2.1.1.

Figure 1: En la figura se muestra la frontera de eficiencia en ausencia de activo libre de riesgo (hipérbola) y cuando existe tal activo (recta)

3 Programa con restricciones impuestas por agentes externos

En el caso de fondos de previsión a las restricciones naturales de un programa de maximización de activos (retorno esperado prefijado y suma de porcentajes igual a 1), debemos agregarle aquellas que impone la autoridad central. Esta autoridad persigue sus objetivos propios, no necesariamente coincidentes con los de la aseguradora, los que por otra parte como ya fue dicho, muchas veces intentan prevenir conductas oportunistas. Estas restricciones adicionales, al limitar el dominio en el que se resolverá el problema, hacen que para valores esperados iguales se deba asumir más riesgo en el caso con restricciones que sin ellas. Definimos este aumento en el riesgo como pérdida de bienestar social.

En el modelo estas son consideradas como externalidades, que hacen cambiar la estructura del problema. La frontera de eficiencia presentará cambios en su regularidad, no obstante mantener su convexidad como será probado en la proposición 1 del apéndice C.

Como en la sección anterior consideraremos dos situaciones diferentes, minimización de una función cuadrática con restricciones impuestas por la autoridad central, en ausencia y en presencia de un activo sin riesgo en el mercado de activos.

3.1 Modelo con restricciones y sin activo libre de riesgo

A diferencia de la situación en que no hay restricciones, la frontera de eficiencia no se presenta como una curva regular. Si bien se mantiene su convexidad se pierde la diferenciabilidad, aunque no como propiedad genérica. La frontera ahora será una unión de arcos de curvas simples, como se explicará a continuación.
Con el propósito de mantener la simplicidad de la exposición, asumiremos que las restricciones lineales de desigualdad son solamente del tipo de cotas en las variables x_i. Esto se puede hacer sin perder generalidad, ya que el caso general que nos ocupa puede reescribirse con restricciones de cotas luego de un cambio de variables.

Haremos ahora un razonamiento de tipo teórico para mostrar la dependencia de la varianza mínima respecto del retorno esperado E. En el vector óptimo X algunas de las restricciones adicionales son efectivas, lo cual implica que algunas variables, porcentajes posibles de algunos activos en la cartera o portafolio, tomen los valores límites. Este conjunto de variables, llamado conjunto activo, no es conocido apriori pero para nuestro argumento alcanza con su existencia, y el hecho de que el mismo solo se modifica una cantidad finita de veces al variar el parámetro retorno esperado E.

Considerando dado el conjunto activo en nuestro modelo diremos que hay variables libres esto es, que no alcanzan sus cotas impuestas. Denotaremos este subvector como X_1. Por X_2 denotaremos el subvector de variables que toman valores en sus cotas. La figura 2 muestra esta situación, comparándose esta frontera de eficiencia con la hallada para el caso sin restricciones y sin activo libre de riesgo.

El programa de optimización correspondiente se puede ver en el apéndice C. Discutiremos en lo que sigue las características de la solución. Supongamos que los valores de las variables comprendidas en el conjunto X_2 estén limitados por l como valor inferior y b para el superior, cuales de estas variables alcanzarán uno u otro valor dependerá de cual sea el valor retorno esperado E del portafolio.

Tal como anunciamos con anterioridad, usaremos la notación:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}; \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}; \mathbf{1} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_1 \\ \mathbf{1}_2 \end{bmatrix}.$$

Consecuentemente la matriz V quedará representada por los siguientes bloques:

$$V = \left[\begin{array}{cc} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{array}, \right]$$

donde $V_{12} = V_{21}$.

De esta manera el programa de minimización del riesgo es:

$$\begin{array}{c} Min \ \ \frac{1}{2} X_1^T V_{11} X_1 \ + \ (V_{12} X_2)^T X_1 \ + \ \frac{1}{2} X_2^T V_{22} X_2 \\ s.a: \left\{ \begin{array}{rcccl} e_1^T X_1 & = & E - e_2^T X_2 & = & \bar{E} \\ \mathbf{1}_1^T X_1 & = & 1 - \mathbf{1}_2^T X_2 & = & \bar{1} \end{array} \right. . \end{array} \tag{5}$$

En este programa X_2 es una constante, pues se supone que alguna de las cotas se ha alcanzado.

El valor óptimo para este caso es $\sigma^2(E)$

$$\sigma^2(E) = \frac{1}{2} \left[\bar{E}, \bar{1} \right] P_{11}^{-1} \left[\begin{array}{c} \bar{E} \\ \bar{1} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} e_1^T \\ \mathbf{1_1^T} \end{array} \right] V_{11}^{-1} V_{12} X_2 + \frac{1}{2} X_2^T V_{12}^T V_{11}^{-1} \left[e_1, \mathbf{1}_1 \right] P_{11}^{-1} \left[\begin{array}{c} e_1^T \\ \mathbf{1}_1^T \end{array} \right] V_{11}^{-1} V_{12} X_2$$

donde

$$\mathbf{P_{11}} = \left[\begin{array}{cc} e_1^T V_{11}^{-1} e_1 & e_1^T V_{11}^{-1} \mathbf{1}_1 \\ e_1^T V_{11}^{-1} \mathbf{1}_1 & \mathbf{1}_1^T V_{11}^{-1} \mathbf{1}_1 \end{array} \right].$$

Figure 2: Se muestra la frontera eficiente (en el plano σ^2, E), la cual al imponer restricciones deja de ser una parábola. Se comparan las fronteras con y sin restricciones impuestas.

3.2 Optimización con restricciones en presencia de un activo libre de riesgo

Procediendo de manera totalmente análoga a lo realizado en la subsección 2.1.2, agregamos el activo libre de riesgo a la formulación propuesta en la subsección anterior 3.1.

A diferencia de la solución obtenida en el problema sin restricciones la frontera de eficiencia ya no será representada por una recta en el plano (desvío estándar, retorno), sino que obtenemos ahora una curva, como se muestra en la figura 3. Por este motivo se pierde el precio constante en término de riesgo adicional que se obtenía anteriormente. Ahora este precio es sólo local, quedando medido por el valor de la pendiente de la recta tangente a la frontera en cada punto de esta.

Figure 3: Izquierda: Se muestra la frontera eficiente (en el plano σ, E), la cual al imponer restricciones deja de ser una recta. Aunque sigue siendo una curva convexa ahora presenta puntos angulosos. Derecha: Aquí se muestra en las ordenadas el riesgo adicional que debe asumirse para incrementar en una unidad el valor esperado del retorno. El valor del retorno esperado se representa en las abcisas.

En la figura 4 se muestran las fronteras para el caso con restricciones, comparando las curvas correspondientes a los casos con y sin activo libre de riesgo. Se puede observar que ambas curvas son tangentes como en el caso sin restricciones. También se observa que, debido a la imposición de una cantidad mínima de algunos activos con riesgo en la composición del portafolio, la frontera no alcanza un punto con riesgo cero.

En los puntos angulosos de la nueva frontera, el incremento de valor esperado en función del riesgo sufre una abrupta caída.

Figure 4: Se muestran las fronteras con restricciones (en el plano σ, E), comparando el caso en que existe un activo libre de riesgo con el caso en que no existe.

Como se muestra en la figura 3, el precio que debe pagarse en términos de riesgo para incrementar el retorno esperado es creciente con el riesgo asumido. Esto es, agentes más adversos al riesgo, deberán pagar menos que los más propensos al riesgo para incrementar en una unidad su retorno esperado. Entendemos, como se muestra en la proposición 2 del apéndice, que los agentes que eligen portafolios con mayor valor esperado asumen riesgos más altos. En la figura se compara la curva de precios mencionada con la que corresponde al caso sin restricciones, en que por ser la frontera una recta, ese precio es constante para cualquier nivel de retorno esperado.

4 Indices para medir la pérdida de bienestar

Con el fin de medir la pérdida de bienestar asociada a la imposición de restricciones, se definirán cuatro índices diferentes. Por pérdida de bienestar entendemos el aumento del riesgo necesario para obtener un mismo valor esperado del retorno asociado a la cartera.

A cada conjunto J de restricciones asociamos una curva de eficiencia representada por una función $F_J : \Re \to \Re,\ F_J(E) = \sigma^2$ que relaciona el valor esperado E de retorno con el riesgo mínimo σ^2 que es necesario asumir, obtenido a partir de la resolución del problema de optimización ya presentado. Indicaremos por F la función correspondiente al caso sin restricciones.

Dado un conjunto de restricciones J, definimos el primer índice I_1 de comparación como

$$I_1(E) = F_J(E) - F(E).$$

Este índice señala la pérdida de bienestar para un retorno E dado, asociada a la imposición del conjunto J de restricciones, como se muestra en la figura 5. Un valor I_1 alto indica que el regulador deberá prestar particular atención a la definición del conjunto de restricciones J pues su imposición implica un incremento de riesgo importante para el nivel de retorno E considerado.

Figure 5: Indice I_1, muestra la diferencia en riesgo a valor esperado fijo.

También puede interesar medir la pérdida de bienestar asociada a todo un intervalo $[E_A, E_B]$ en el que se supone que la administradora puede trabajar. En este caso es natural considerar el siguiente índice, que se muestra gráficamente en la figura 6:

$$I_2([E_A, E_B]) = \frac{1}{E_B - E_A} \int_{E_A}^{E_B} I_1(E) dE.$$

Este índice es un valor promedio correspondiente a un espectro posible de valores esperados de retorno. Es de especial interés cuando existe una banda limitante del retorno E en el momento del diseño del portafolio.

Los índices anteriores comparan incrementos de riesgo cuando se introducen restricciones. También es importante estudiar el comportamiento de la solución del problema

Figure 6: Indice I2. El área corresponde a $\int_{E_A}^{E_B} I_1(E)dE$.

ante la perturbación de uno de los segundos miembros b_j $(j \in J)$ de un conjunto J de restricciones fijo. La sensibilidad del riesgo σ^2 viene dada directamente por el correspondiente multiplicador de Lagrange λ_j, observándose que aquellas restricciones con mayor valor del multiplicador son críticas en el sentido de que restringen el uso de activos de bajo riesgo y retorno interesante.

Para analizar la sensibilidad del retorno esperado E frente a una perturbación en b_j (para un nivel de riesgo σ^2 dado), podemos usar el siguiente índice:

$$I_3(\sigma^2) = \frac{\partial E(\sigma^2)}{\partial b_j},$$

donde $E(\sigma^2) = F_J^{-1}(\sigma^2)$, es decir que $E(\sigma^2)$ es el retorno esperado que es necesario imponer para obtener σ^2 como valor mínimo en el problema de optimización con restricciones considerado. Este índice puede calcularse a partir de la pendiente de la función F_J y del valor del multiplicador de Lagrange λ_j asociado a la restricción j en el problema de minimización:

$$I_3(\sigma^2) = \frac{\partial E}{\partial(\sigma^2)} \frac{\partial \sigma^2}{\partial b_j} = \frac{1}{\frac{\partial \sigma^2}{\partial E}} \frac{\partial \sigma^2}{\partial b_j} = \frac{1}{F_J'} \lambda_j.$$

Un valor alto de I_3 indica una pérdida importante en el retorno esperado ante un endurecimiento marginal de la restricción j.

En el caso sin restricciones, en presencia de un activo libre de riesgo, la relación incremental valor esperado - riesgo $p = \frac{\Delta E}{\Delta \sigma}$, se mantiene constante. Este valor es conocido como la pendiente de la recta frontera en el modelo CAPM. Al imponer un conjunto J de restricciones adicionales, como ya fue dicho la frontera eficiente se deforma y el valor p pasa a tener un comportamiento local $p_J(E) = \frac{\partial E}{\partial \sigma}$, que viene dado por la pendiente de la tangente a la frontera de eficiencia $E(\sigma)$, en los puntos en que la frontera es diferenciable.

El índice que se propone, para cuantificar el efecto de las restricciones en el precio del riesgo es:

$$I_4(E) = p - p_J(E) = p - \frac{\partial E}{\partial \sigma} = p - \frac{2\sigma(E)}{F'_J(E)}$$

En el caso no diferenciable existe una discontinuidad en la pendiente, presentando el precio en cuestión un salto hacia abajo.

Este índice mide el premio por riesgo, es decir el incremento en valor esperado que debería pagarse al inversor que es obligado a asumir una unidad de riesgo adicional por la imposición de restricciones.

5 Ejemplo numérico

El siguiente ejemplo muestra como, la imposición de restricciones adicionales, implica una pérdida en la utilidad del inversor, en la medida que mantenga el objetivo de minimizar el riesgo.

Se consideran 10 activos posibles para componer una cartera, cuyos retornos se distribuyen normalmente y se muestran en la tabla 1. La matriz de varianzas y covarianzas V se muestra en la tabla 2. Los datos considerados son tomados del Banco Central de Uruguay.

6.4	7.7	8.9	4.7	5.2	18.9	21.4	18.6	18.1	9.2

Table 1: Vector **e** de retornos esperados

En este caso particular, se consideran como restricciones impuestas por la autoridad central, no negatividad en todos los activos, y la obligación de invertir más del 60 % en los activos 1, 3, 4. Esto es un ejemplo a los efectos de mostrar las posibilidades del algoritmo de cálculo.

En la figura 7 se muestra la frontera de eficiencia en el ejemplo numérico, estudiado (curva superior), junto con la frontera obtenida correspondiente al modelo CAPM sin re-

4.2	-4.3	3	2.6	1.1	-11.2	-2.7	-7.6	-12.7	13.3
-4.3	54.5	-4.3	-3.7	22.4	35	14.6	21.5	37.5	15.6
3	-4.3	27.9	2	0	-11.7	2	-3.4	-13.3	75.4
2.6	-3.7	2	1.9	0.5	-8.7	-2.9	-6.2	-9.6	8.5
1.1	22.4	0	0.5	24	2.3	-4.8	-5.9	3.2	-54.9
-11.2	35	-11.7	-8.7	2.3	122.1	70	83.9	119	-52.8
-2.7	14.6	2	-2.9	-4.8	70	68.4	70.7	67.2	-37.9
-7.6	21.5	-3.4	-6.2	-5.9	83.9	70.7	83.9	82.6	-2.7
-12.7	37.5	-13.3	-9.6	3.2	119.9	67.2	82.6	120.3	-93
13.3	15.6	75.4	8.5	-54.9	-52.8	-37.9	-2.7	-93	9111.4

Table 2: Matriz **V** de varianzas y covarianzas

stricciones (curva inferior). modelo CAPM sin restricciones (curva inferior), que es la misma que en la figura 2. La curva superior muestra como agregar la condiciones en las variables (activos) del problema supone un aumento de riesgo para el inversor. También se muestran las respectivas derivadas. En el caso del modelo CAPM la curva es una parábola y la derivada es una recta. En el caso del ejemplo, la curva está compuesta por arcos de parábola y su derivada es lineal a trazos.

Figure 7: Curvas de eficiencia en el plano σ^2, E y sus derivadas.

En la figura 8, se muestra el índice $I1$ para diferentes valores del retorno esperado E.

La siguiente figura 9, muestra la sensibilidad respecto de una de las restricciones impuestas: la de no negatividad del porcentaje x_5 invertido en el activo número 5. Se muestra el multiplicador de Lagrange del problema de optimización, que representa el riesgo adicional que debe estar dispuesto a asumir un inversor en caso de aumentar la cota inferior de x_5. También se muestra el índice 3, que representa la disminución en el retorno esperado correspondiente.

6 Conclusiones

En este trabajo se logra cuantificar la relación retorno esperado-riesgo en presencia de restricciones adicionales. Cabe entonces la pregunta acerca de la posible existencia de mejores oportunidades de inversión para el ahorrista diversificando las oportunidades de inversión. Así por ejemplo creando diversos tipos de aseguradoras que contemplen diferentes actitudes frente al riesgo, o bien la posibilidad de que una aseguradora presente un producto diferenciado, hecho que cobra sentido en función de la existencia de diversas actitudes hacia el riesgo, particularmente motivada por la diferencia de edad o ingresos. La convexidad de la frontera de eficiencia, muestra que en el caso de una inversión diversificada en portafolios de distinto valor esperado de retorno, se obtiene un riesgo menor al promedio de los riesgos correspondientes a los portafolios considerados.

La no diferenciabilidad de la frontera implica la existencia de intervalos separados por los puntos angulosos, donde el precio del riesgo es una función continua.

La convexidad de la frontera muestra que para obtener un incremento de una unidad de valor esperado de retorno, inversores adversos al riesgo deben de asumir un precio, relativo en términos de riesgo, menor que inversores propensos al riesgo, al haber elegido estos últimos, un portafolio cuyo riesgo es mayor.

Por otra parte la influencia fuerte que la imposición de restricciones por parte de los agentes reguladores imponen sobre el bienestar social, evidencia la necesidad de cuantificar esta influencia y buscar aquellas que minimicen este impacto. Esto es posible hacerlo en casos concretos en forma numérica, tanto comparando diversos conjuntos posibles de restricciones que conlleven un mismo objetivo, como ante un conjunto dado de restricciones es posible mostrar en cual de ellas un incremento en el segundo miembro de la restricción es más costosa en términos del riesgo que se obliga a asumir.

Figure 8: Resultados del índice I_1 en el ejemplo numérico.

Figure 9: Sensibilidad respecto de la restricción $x_5 \geq 0$. A la izquierda se ve la sensibilidad del riesgo σ^2 y a la derecha la sensibilidad del retorno esperado E, que es el índice 3.

7 Apéndices

A Minimización cuadrática con restricciones Lineales

El modelo que se presenta a continuación es clásico en la literatura y de amplia utilización. El objetivo de la presentación de este modelo es el de dar un marco genérico a nuestro problema concreto.

Se trata de un programa en el que se minimiza una función objetivo, cuadrático, con restricciones lineales de igualdad, la referencia general para este tipo de problemas es [Gill, P.E.; Murray, W.; Wright, M.H.]:

$$\begin{array}{ll} min & F(\mathbf{x}) \\ s.a & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{array} \tag{6}$$

Aquí $\mathbf{x} \in \Re^n$, $\mathbf{b} \in \Re^m$ siendo A una matriz de n columnas por m filas.

Siendo F un funcional convexo y derivable, para el valor $\mathbf{x}^*$ el gradiente del Lagrangiano evaluado en el óptimo $\bigtriangledown_x \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$, debe anularse, además de cumplirse la restricción, esto es, deben verificarse las siguientes condiciones:

$$\left\{ \begin{array}{c} \bigtriangledown_x f(\mathbf{x}^*) + A^T \lambda^* = 0 \\ A\mathbf{x}^* - b = 0 \end{array} \right. \tag{7}$$

En el caso particular de un problema cuadrático el funcional f presenta la siguiente forma:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}H\mathbf{x} + c^T\mathbf{x}.$$

Correspondientemente:

$$\bigtriangledown_x f(\mathbf{x}) = H\mathbf{x} + c,$$

debiendo satisfacer el óptimo, $\mathbf{x}^*$:

$$\left\{ \begin{array}{c} H\mathbf{x}^* + c + A^T \lambda^* = 0 \\ A\mathbf{x}^* = b \end{array} \right. \tag{8}$$

En forma matricial el sistema (8) puede escribirse como

$$\left[\begin{array}{cc} H & A^T \\ A & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{x}^* \\ \lambda^* \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} -c \\ b \end{array} \right]$$

B Modelo sin restricciones impuestas

El programa para este agente se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} f(x^*) & = \min \frac{1}{2} x^T \mathbf{V} x \\ s.a & . \\ e^T x & = E \\ \mathbf{1}^T x & = 1 \end{array} \tag{9}$$

Las condiciones de optimalidad, para este problema son las siguientes:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V} & e & \mathbf{1} \\ e^T & 0 & 0 \\ \mathbf{1}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ \mu^* \\ \lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Donde $\mathbf{V}$ representa la matriz de covarianzas. λ y μ son los multiplicadores asociados a la primera y segunda restricción respectivamente.

La primera restricción dice que debemos limitarnos a considerar aquellos portafolios tales que tengan el valor E como retorno esperado. La segunda muestra que optimizamos el porcentaje de cada activo en el portafolio o cartera que creamos a partir de estos. Los activos son n, preexistentes y su retorno esperado es respectivamente $e_i, i = (1, 2, ...n)$.

A partir de las condiciones de optimalidad 10 obtenemos para el portafolio óptimo la siguiente identidad:

$$x^* = -\left(\mu^* \mathbf{V}^{-1} e + \lambda^* \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}\right). \tag{11}$$

Sustituyendo este valor en las restricciones obtendremos la siguiente igualdad matricial:

$$\begin{bmatrix} e^T \mathbf{V}^{-1} e & e^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \mathbf{V}^{-1} e & \mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu^* \\ \lambda^* \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} E \\ 1 \end{bmatrix}$$

Al considerar

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} e^T \mathbf{V}^{-1} e & e^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \mathbf{V}^{-1} e & \mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

obtenemos para λ y μ óptimos los siguientes valores:

$$\begin{bmatrix} \mu^* \\ \lambda^* \end{bmatrix} = -\mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} E \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Sean $\mathbf{e}^1$ y $\mathbf{e}^2$ los elementos de la base canónica de $\Re^2$ obtenemos entonces:

$$\mu = -\mathbf{e}^{1T} P^{-1} \begin{bmatrix} E \\ 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$\lambda = -\mathbf{e}^{2T} P^{-1} \begin{bmatrix} E \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Luego el portafolio óptimo, sustituyendo en 11. obtendremos la siguiente expresión:

$$x^* = \left(\mathbf{e}^{1T} P^{-1} \begin{bmatrix} E \\ 1 \end{bmatrix}\right) \mathbf{V}^{-1} e + \mathbf{e}^{2T} P^{-1} \begin{bmatrix} E \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}. \tag{15}$$

Sustituyendo en 9 obtenemos como valor de menor varianza:

$$f(x^*) = \frac{1}{2} [E, 1]^T P^{-1} \begin{bmatrix} E \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

C Modelo con restricciones

A continuación presentaremos el programa de optimización y discutiremos las características de la solución.

Supongamos que los valores de las variables comprendidas en el conjunto X_2 esten limitados por l como valor inferior y b para el superior, cuales de estas variables alcanzarán uno u otro valor dependerá de cual sea el valor del retorno esperado E del portafolio.

Haremos la notación siguiente:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}; \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}; \mathbf{1} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_1 \\ \mathbf{1}_2 \end{bmatrix}.$$

Consecuentemente la matriz V quedará representada por los siguientes bloques:

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix},$$

donde $V_{12} = V_{21}$.

De esta manera el programa de minimización del riesgo es:

$$Min \ \frac{1}{2} X_1^T V_{11} X_1 \ + \ (V_{12} X_2)^T X_1 \ + \ \frac{1}{2} X_2^T V_{22} X_2 \tag{17}$$

$$s.a: \begin{cases} e_1^T X_1 \ = \ E - e_2^T X_2 \\ \mathbf{1}_1^T X_1 \ = \ 1 - \mathbf{1}_2^T X_2 \end{cases}$$

En este programa X_2 es una constante, pues se supone que alguna de las cotas se ha alcanzado. En lo que sigue, usaremos las notaciones:

$$\bar{E} = E - e_2^T X_2$$

$$\bar{1} = 1 - \mathbf{1}_2^T X_2$$

Las condiciones de primer orden para este problema son las siguientes

$$\left\{ \begin{array}{ccc} V_{11}X_1^* + V_{12}X_2 + \lambda e_1 + \mu \mathbf{1}_1 & = & 0 \\ e_1^T X_1^* & = & \bar{E} \\ \mathbf{1}_1^T X_1^* & = & \bar{1} \end{array} \right. ,$$

a partir de estas igualdades obtenemos:

$$\bar{E} + e_1^T V_{11}^{-1} V_{12} X_2 + \mu e_1^T V_{11}^{-1} e_1 + \lambda e_1^T V_{11}^{-1} \mathbf{1}_1 = 0. \tag{18}$$

$$\bar{1} + \mathbf{1}_1^T V_{11}^{-1} V_{12} X_2 + \mu \mathbf{1}_1^T V_{11}^{-1} e_1 + \lambda \mathbf{1}_1^T V_{11}^{-1} \mathbf{1}_1 = 0. \tag{19}$$

En forma matricial despejando adecuadamente y usando la simetría de la matriz V_{11} obtenemos:

$$\left[\begin{array}{cc} e_1^T V_{11}^{-1} e_1 & e_1^T V_{11}^{-1} \mathbf{1}_1 \\ e_1^T V_{11}^{-1} \mathbf{1}_1 & \mathbf{1}_1^T V_{11}^{-1} \mathbf{1}_1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mu \\ \lambda \end{array} \right] = - \left[\begin{array}{c} \bar{E} \\ \bar{1} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} e_1^T V_{11}^{-1} V_{12} X_2 \\ \mathbf{1}_1^T V_{11}^{-1} V_{12} X_2 \end{array} \right].$$

Llamando P_{11} a la matriz que multiplica al vector de los multiplicadores en la ecuación anterior, el nuevo valor para $\sigma^2(E)$ será:

$$\sigma^2(E) = \frac{1}{2} \left[\bar{E}, \bar{1} \right] P_{11}^{-1} \left[\begin{array}{c} \bar{E} \\ \bar{1} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} e_1^T \\ \mathbf{1_1^T} \end{array} \right] V_{11}^{-1} V_{12} X_2 + \frac{1}{2} X_2^T V_{12}^T V_{11}^{-1} \left[e_1, \mathbf{1}_1 \right] P_{11}^{-1} \left[\begin{array}{c} e_1^T \\ \mathbf{1}_1^T \end{array} \right] V_{11}^{-1} V_{12} X_2.$$

De esta forma obtenemos arcos de parábola que se irán solapando correspondientes a los diferentes valores que las variables acotadas vayan alcanzando en función del valor esperado del retorno del portafolio. Como se observa en la figura 2), se pierde la anterior frontera para portafolios sin restricciones adicionales.

Convexidad de la frontera eficiente

Sea

$$\sigma^2(E) = min \left\{ \frac{1}{2} X^T \mathbf{V} X, \ sujeto \ a : e^T X = E, \ \ \mathbf{1}_1^T X \ = 1 \right\}.$$

Proposición 1 *El funcional $\sigma^2(.)$ es convexo.*

Prueba:

$$\sigma^2(\alpha E_1 + (1-\alpha)E_2) =$$

$\min\left\{\frac{1}{2}X^T\mathbf{V}X,\ \textit{sujeto a}:\right.$
$\left. X = \alpha X_1 + (1-\alpha)X_2),\ \ e^T X_1 = E_1,\ \ \mathbf{1}_1^T X_1\ = 1,\ e^T X_2 = E_2,\ \ \mathbf{1}_1^T X_2\ = 1\right\},$

de la convexidad de la función objetivo se deduce ahora que:

$$\begin{aligned} &\sigma^2(\alpha E_1 + (1-\alpha)E_2)) \\ &\leq \alpha \min\left\{\frac{1}{2}X_1^T\mathbf{V}X_1 : X_1 : e^T X_1 = \alpha E_1,\ \mathbf{1}_1^T X_1\ =\ 1\right\} \\ &+(1-\alpha)\min\left\{\frac{1}{2}X_2^T\mathbf{V}X_2 : X_2 : e^T X_2 = \alpha E_2,\ \mathbf{1}_1^T X_2\ = 1\right\} \\ &\leq\ \alpha\sigma^2(E_1)\ +\ (1-\alpha)\sigma^2(E_2)[] \end{aligned}$$

La siguiente proposición prueba que el riesgo míinimo óptimo es creciente con el valor esperado de retorno del portafolio.

Proposición 2 *El funcional $\sigma^2(.)$ es creciente, es decir si:*
$E_1\ \leq\ E_2$, *entonces* $\sigma^2(E_1)\ \leq \sigma^2(E_2)$.

Prueba: La prueba sale directamente de la consideración del tipo de resticción asociado al retorno del valor esperado.

References

[Huang, C.; Litzenberger, R.] Foundations for Financial Economics, *ed. Prentice-Hall International* (1993).

[Gill, P.E.; Murray, W.; Wright, M.H.] Practical Optimization, *Academic Press* (1981).