Print edition - ISSN 1974-9422
Online edition - ISSN 1974-9430
2008 - I . I

JeSP
Journal of ESeC Short Papers

International Journal of Economics, Statistics and Social Science Methods and Applications

Editorial

Articles

Referee's Short Notes

ESeC web site:
www.economicstatistics.eu

ESeC

JESP
JOURNAL OF ESEC SHORT PAPERS

INTERNATIONAL JOURNAL OF ECONOMICS, STATISTICS AND SOCIAL SCIENCE METHODS AND APPLICATIONS

Orders
e-mail: mail@economicstatistics.eu

Subscription information
ISSN 1974-9422 (print edition)
ISSN 1974-9430 (electronic edition)
Volume 1 (2 issues) will appear in 2008.

Instructions for Authors
online www.economicstatistics.eu/jesp

Abstracted / Indexed in
IDEAS (USA), EconPapers (Sweden), Socionet (Russia), RePEc (USA)

JESP Aims

JESP is an international journal aiming to promote the development of methods and applications in economics, statistics and social science. The journal overcomes the linguistic barriers offering title and abstract in three languages, keywords and paragraph titles in English. JESP is culturally open. The author is free to choose the language to be used in text. "Shorts" does not mean "easy", on the contrary the format of JESP, three languages and 2 pages with two columns each, constrains the authors to a "weighted synthesis". MARTA's corner (MARTA - Methods and Approaches for Research and Teaching Applications), finally, is the corner where it is possible to find solutions of practical problems. Researchers will be able to learn how to use techniques for the management, analysis and synthesis of data.

Journal of ESeC Short Papers (2008) 1: 9-10
DOI 10.3257/ISSN1974-9422.1.1.9

ORIGINAL ARTICLE

The Generalised Index Numbers

I numeri indice generalizzati

Les nombres indices généralisés

Flavio Verrecchia

 - Accepted: July 15, 2008 - Published online: July 24, 2008

Abstract. The aim of the paper is to redefine, the notational aspect of the traditional formulas of the, numbers index theory. After having defined the total value index, the "generalised Index Numbers" (g-IN) are introduced and the "indicator function of the co-present" and the Basket factor are defined.

Abstract. L'obiettivo dell'articolo è ridefinire, dal punto di vista della notazione, le tradizionali formule della teoria dei numeri indice. Dopo aver definito l'indice di valore totale si introducono i "generalised Index Numbers" (g-IN) e si definiscono la "funzione indicatrice dei co-presenti" ed il fattore "Basket".

Abstract. Le principal objectif de l'article est redéfinir, du point de vue de la notation, les traditionnelles formules de la théorie des nombres indice. Après avoir défini l'indice de valeur totale on introduit les «generalised Index Numbers» (g-IN) et, en relation aux g-IN, on définit: la «fonction indicatrice des co-présents» et le facteur «Basket».

Keywords: Generalised Index Numbers, Basket Factor, Indicator Function.

JELclassification: C02, C43.

1. Introduction

L'évolution technologique a impliqué l'immédiate disponibilité des informations, en rééquilibrant l'asymétrie historique et en garantissant la possibilité d'une position neutre basée sur les valeurs (et non plus centrée sur les prix). L'indice «central», synthèse des variations remarquables, est par conséquant l'indice de valeur totale.

On suppose la présence d'un marché, de deux périodes de relevé (0 et t) des prix et des quantités traitées des biens. La mesure de la variation de la valeur totale (V) de tous les agrégats considérés dépend de trois facteurs. Les deux premiers sont classiques: la mesure de la variation des prix (P) et de la variation des quantités traitées (Q). Un troisième facteur, généralement non considéré, inhérent aux variations non mesurables des indices de prix et de quantité: la mesure de la variation du Basket (B).

Définition 1: *Indice de valeur totale*

Soit ${}_0P_t^{g\text{-}IN}$ un indice généralisé des prix et ${}_0Q_t^{g\text{-}IN}$ un indice généralisé des quantités axiomatiquement corrects, soit B_{0t} le facteur Basket. ${}_0V_t$, défini par la suivante expression factorielle

$$ {}_0V_t = {}_0P_t^{g\text{-}IN} \cdot {}_0Q_t^{g\text{-}IN} \cdot B_{0t} \qquad (1) $$

est l'indice de valeur totale entre 0 et t.

Sans l'identité exprimée par la Déf. 1, il n'est pas garanti que les formules traditionnellement utilisées soient effectivement des mesures correctes des variations des agrégats considérés. La satisfaction des propriétés axiomatiques non-renonçables (Martini, 2001: 100), devient donc condition nécessaire mais pas suffisante. Des précises hypothèses sur les données sont nécessaires.

2. Methodological Approach and Applications

Soit (Ω, F) un espace mesurable, Ω un ensemble appelé espace échantillon, F une *σ-algebra* sur Ω, $\wp$ *une mesure de probabilité* sur (Ω, F). Soit Z le # des biens relevés en deux situations 0 et t. Soit $(\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_t, \boldsymbol{Q}_0, \boldsymbol{Q}_t, {}^c\boldsymbol{I}_{[0\cap t]})$ un vecteur aléatoire définit sur $(\Omega, F, \wp)$ a valeur on $\Re^{+4Z} \times \{0,1\}$ (avec $\Re^{+4Z} = ([(\Re^+]^Z]^4)$, soient les vecteurs de prix $\boldsymbol{P}_.$ et de quantité $\boldsymbol{Q}_. \in \Re^{+Z}$ (au temps 0 et t) et ${}^c\boldsymbol{I}_{[0\cap t]}$ la fonction indicatrice des co-présents dans les deux situations (0 et t). Soient $\mathbf{p}_.$, $\mathbf{q}_.$ et ${}^c\mathbf{i}_{[0\cap t]}$ les déterminations des variables aléatoires $\boldsymbol{P}_.$, $\boldsymbol{Q}_.$ *et* ${}^c\boldsymbol{I}_{[0\cap t]}$.

Une application mesurable non négative définie sur F

$$ f\,(\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_t, \boldsymbol{Q}_0, \boldsymbol{Q}_t, {}^c\boldsymbol{I}_{[0\cap t]}) : F \to [0,\infty) $$

qui transforme les v.a. de prix et de quantités en nombre $\in \Re^+$ est dite indice généralisé sur (Ω, F) si elle satisfait les propriétés[1] suivantes:

i) $f[p_0, p_t, q_0, q_t, {}^ci_{[0\cap t]}] \in Co$
ii) $f[p_0, p_t, q_0, q_t, {}^ci_{[0\cap t]}] \in Ho$
iii) $f[p_0, p_t, q_0, q_t, {}^ci_{[0\cap t]}] \in Mo$
iv) $f[p_0, p_t, q_0, q_t, {}^ci_{[0\cap t]}] \in Ag$ (ou AgI)

et si son co-facteur est une application mesurable non négative définie sur F

$$ Cof\,[\,f\,(\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_t, \boldsymbol{Q}_0, \boldsymbol{Q}_t, {}^c\boldsymbol{I}_{[0\cap t]})] : F \to [0,\infty) $$

qui transforme les v.a. de prix et de quantités en nombre $\in \Re^+$ et qui satisfait les propriétés[2] suivantes:

v) $Cof[f[p_0, p_t, q_0, q_t, {}^ci_{[0\cap t]}]] \in Ho$
vi) $Cof[f[p_0, p_t, q_0, q_t, {}^ci_{[0\cap t]}]] \in Mo$
vii) $Cof[f[p_0, p_t, q_0, q_t, {}^ci_{[0\cap t]}]] \in Ag$ (ou AgI).

F. Verrecchia - ESEC - Economic Statistics no-profit Association, Assago (MI), Italy
flavio.verrecchia@gmail.com

Par rapport aux applications, les variations des prix et des quantités traitées entre 0 et t sont mesurables par un indice si et seulement si toutes les informations relatives aux biens considérés sont disponibles. Cette hypothèse, d'un point de vue empirique, est souvent fausse. Pour la généralisation des formules traditionnelles il faut employer la fonction indicatrice des co-présents qui permet de mettre en évidence le seul sous-ensemble mesurable.

Définition 2: *Fonction indicatrice des co-présents*
Soient les $v_{00,z}$ (avec z = 1,2,...,Z) les Z valeurs des biens du panier en 0. Une application non négative

$$I_{[0],z} = \begin{cases} 1 \text{ pour } v_{00,z} > 0 \\ 0 \text{ pour } v_{00,z} = 0 \end{cases} \qquad (z = 1,2,\ldots,Z) \qquad (2a)$$

est dite fonction indicatrice en 0 du z-ième bien.

Soient les $v_{tt,z}$ (avec z = 1,2,...,Z) les Z valeurs des biens du panier en t. Une application non négative

$$I_{[t],z} = \begin{cases} 1 \text{ pour } v_{tt,z} > 0 \\ 0 \text{ pour } v_{tt,z} = 0 \end{cases} \qquad (z = 1,2,\ldots,Z) \qquad (2b)$$

est dite fonction indicatrice en t du z-ième bien.

On définit le produit des fonctions indicatrices en 0 et en t du z-ième bien

$$^{c}I_{[0\cap t],z} = I_{[0],z} \cdot I_{[t],z} \qquad (z = 1,2,\ldots,Z) \qquad (2c)$$

fonction indicatrice des co-présents en 0 et t.

A partir de la Déf. 2 on peut construire des indices qui peuvent être valides indépendamment des «missing values» et des variations du panier.

Définition 3: *Nombre Indice généralisé (g-IN)*
Soit F un indice des prix ou des quantités, soit f_z le z-ième prix ou quantité, soit $^{c}I_{[0\cap t],z}$ la z-ième fonction indicatrice des co-présents, soit γ_z le z-ième poids. Un indice caractéristique, défini par la suivante expression (par exemple avec la forme de MR[3])

$$\underset{MR}{{}_0F_t^{g\text{-}IN}} = \sum_{z=1}^{Z} \frac{f_{t,z}}{f_{0,z}} \left(\gamma_z\, {}^{c}I_{[0\cap t],z} \Big/ \sum_{z=1}^{Z} \gamma_z\, {}^{c}I_{[0\cap t],z} \right) \qquad (3)$$

est dit indice généralisé (par la suite g-indices).

Infin, on peut traiter l'indice de valeur des co-présents (${}^{c}_{0}V_t$) et le facteur Basket (B) de suite définis (Déf. 4,5).

Définition 4: *Indice de valeur des co-présents*
Soit p_z le z-ième prix, soit q_z la z-ième quantité, soit $^{c}I_{[0\cap t],z}$ la z-ième fonction indicatrice des co-présents. Le rapport de dépense des co-présents de la période comparée (t) par rapport à la période de base (0), défini par l'expression suivante

$${}^{c}_{0}V_t = \sum_{z=1}^{Z} p_{t,z}\, q_{t,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z} \Big/ \sum_{z=1}^{Z} p_{0,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z} \qquad (4a)$$

est dit indice de valeur des co-présents, et la suivante identité est valable

$${}^{c}_{0}V_t = {}_0P_t^{g\text{-}IN} \cdot {}_0Q_t^{g\text{-}IN} \qquad (4b)$$

Définition 5: *Le facteur Basket*
Soient R_0 et R_t les indicateurs de représentativité[4] en 0 et en t. L'application non négative

$$B_{0t} = R_0 \cdot (R_t)^{-1} \qquad (5)$$

est dite facteur «Basket».

Le facteur Basket est la synthèse de trois éléments: la variation effective du panier (e.g. nouveaux biens dans le panier), la présence de «missing values» (e.g. non mesurabilité des prix ou quantité), l'effet calendrier (par exemple, fermeture d'un marché pour une fête locale).

3. Discussion and Conclusion

La notation introduite, valide aussi dans le domaine axiomatique (Diewert, 1992; Balk, 1995 ; Martini, 2001) et synthétisée par la Déf. 3, n'est pas seulement préliminaire aux applications, elle a aussi une fonction d'encadrement théorique de base. Grâce à la généralisation des indices (i.e. sans la nécessité d'hypothèses préalables sur les données) on peut exprimer l'indice de valeur totale comme le résultat de la contribution des variations des prix, des quantité traitées, et des variations liées au panier. L'indice de valeur totale, grâce à l'identité exprimée par son calcul factoriel (Déf. 1), devient «central» pour la correcte définition des mesures (g-IN) des prix, des quantités et du panier. On observe que l'habitude de calculer l'indice des prix pendant celui des quantités est calculé indirectement porterait à des indices déformés même lorsque l'on considère les seuls biens comparables (e.g. en 0 ou en t). La comparabilité de l'indice des prix, en effet, serait relative à 0 ou bien à t, alors que l'indice de quantité calculé indirectement serait par définition le deuxième facteur de l'indice de valeur. Donc, souvent B_{0t} est en partie présent dans l'indice de prix et en partie dans celui des quantités, en contribuant à fournir des mesures non valables des variations des agrégats considérés.

References

B. M. Balk (1995), Axiomatic Price Index Theory: A Survey, International Statistical Review, 63: 69-93.

W. E. Diewert (1992), Essay in Index Number Theory, Volume I. [Online]. Available: http://www.econ.ubc.ca/diewert/inbook.htm [2005, June 6].

M. Martini (2001), Numeri indice per il confronto nel tempo e nello spazio, CUSL, Milano. (ISBN: 88-8132-138-6).

F. Verrecchia (2005), Théorie des nombres index: les Nombres Index généralisés (gIN). INSEE, Paris. [Online]. Available: http://jms.insee.fr [2005, March 14].

---

1 Où Commensurabilité (Co), Homogénéité (Ho), Monotonicité (Mo), Agrégativité (Ag), Agrégativité indirecte (AgI - les indices construits comme Crossing de indices agrégatifs, dans le domaine de l'approche systémique, sont eux-mêmes des indices indirectement agrégatifs. Voir Verrecchia, 2005).

2 Evidemment si $f\,(\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_t, \boldsymbol{Q}_0, \boldsymbol{Q}_t, {}^{c}\boldsymbol{I}_{[0\cap t]})$ est un g-IN sur (Ω, F) de conséquence $Cof\,[\,f\,(\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_t, \boldsymbol{Q}_0, \boldsymbol{Q}_t, {}^{c}\boldsymbol{I}_{[0\cap t]})]$ aussi sera un g-IN sur (Ω, F), et vice versa, pour la dualité exprimée par l'expression 4b.

3 MR: Moyenne de Rapports. Par exemple, l'indice de g-Laspeyres des prix (${}_0P_t^{g\text{-}L}$) à base fixe, peut s'écrire comme de suite

$$\underset{MR}{{}_0P_t^{g\text{-}L}} = \sum_{z=1}^{Z} \frac{p_{t,z}}{p_{0,z}} \left(p_{0,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z} \Big/ \sum_{z=1}^{Z} p_{0,z}\, q_{0,z}\, {}^{c}I_{[0\cap t],z} \right)$$

et naturellement ${}_0P_t^{L} = {}_0P_t^{g\text{-}L}$ si et seulement si ${}^{c}\boldsymbol{I}_{[0\cap t],z} = 1$ pour $\forall$ z.

4 Comme une mesure n'a aucun signifié si elle n'est pas référable à l'ensemble mesuré, un indice pourrait ne pas être représentatif du panier total. La connaissance de la partie mesurée, du panier considéré, résulte par conséquant nécessaire. Les indicateurs de représentativités sont ici définis en 0 et en t. En particulier, soit ${}^{c}V_{00}$ la somme pour z des r<Z valeurs en 0 (où z =1,2...,r...,Z) co-présents en 0 et t, soit V_{00} la somme des Z valeurs en 0. L'application non négative $R_0 = {}^{c}V_{00} \cdot (V_{00})^{-1}$ est dite indicateur de représentativité en 0. Soit ${}^{c}V_{tt}$ la somme des r<Z valeurs en t co-présents en 0 et t, soit V_{tt} la somme des Z valeurs en t. L'application non négative $R_t = {}^{c}V_{tt} \cdot (V_{tt})^{-1}$ est dite indicateur de représentativité en t.

Finito di stampare nel mese di Dicembre 2008 presso La Cartolitografica S.r.L. - Via Monte Grappa, 40/7 – 20020 Arese (MI)
La Redazione ottempera agli obblighi previsti dalla L. 106/2004 e dal D.P.R. 252/2006

ESeC

ESeC - Economic Statistics no-profit Association
Via Matteotti, 15/A - 20090 Assago (MI) Italy
web site: www.economicstatistics.eu
e-mail: mail@economicstatistics.eu