Rev.R.Acad.Cien.Exact.Fis.Nat. (Esp)
Vol. 92, N.º 1, pp 35-40, 1998
Matemáticas

ESPACIOS SEPARABLEMENTE CONEXOS*

ALEJANDRO BALBÁS DE LA CORTE*, MARGARITA ESTÉVEZ TORANZO**, CARLOS HERVÉS BELOSO** Y AMELIA VERDEJO RODRÍGUEZ**.

* *Departamento de Economía de la Empresa.* Universidad Carlos III de Madrid. C/ Madrid, 126. 28903 Getafe (Madrid).
** *Departamento de Matemáticas.* Universidad de Vigo. C/ Lagoas Marcusende, s/n. 36200 Vigo.

Presentado por Pedro Jiménez Guerra, 15 de diciembre de 1997. Aceptado el 14 de enero de 1998.

ABSTRACT

A topological spaces is said to be separably connected if any two points are contained in a connected and separable subspace. In this work we study the properties of the separably connected spaces in relation with the properties of connected and path conneted spaces.

1. INTRODUCCIÓN

En un reciente artículo [1] se ha introducido el concepto de espacio topológico separablemente conexo, para estudiar la representación de relaciones de preferencia definidas en espacios no separables.

Un resultado clásico de Eilenberg (1941) establece que si X es un espacio topológico conexo y separable, cualquier preorden completo y continuo, $\preccurlyeq$ (relación reflexiva, transitiva completa y continua), en X es representable por una función de utilidad continua; es decir, existe $u : X \to I\!R$ continua tal que $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow u(x) \leq u(y)$.

Ahora bien, los espacios no separables cada vez son más frecuentes en las aplicaciones y para estos espacios existen relaciones de preferencia que no son representables.

El concepto de espacio separablemente conexo formaliza la idea de que para cada par de puntos del espacio X se pueda asegurar la existencia de un conjunto conexo y separable que los contenga. En este marco, si la relación posee un *mejor* y un *peor* elemento (existen $a, b \in X$ tales que $a \leq x \leq b$ para todo $x \in X$) puede aplicarse el resultado de Eilenberga en un conjunto conexo y separable C_{ab} que contiene a los puntos a y b, para obtener una función continua $\bar{u}: C_{ab} \subset X \to I\!R$ que representa a $\leq$ en C_{ab}. Un argumento de conexión permite demostrar que para cada $x \in X$ existe $i_x \in C_{ab}$ tal que $x \sim i_x$, y entonces la función definida mediante $u(x) = \bar{u}(i_x)$ es una extensión continua de $\bar{u}$ a todo X que representa la relación de partida.

Además de ser los espacios separablemente conexos un marco natural para el estudio de la representación de preferencias, éstos tienen interés en sí mismos pues están situados estrictamente entre los espacios conexos por caminos y los espacios conexos.

En este trabajo se hace un estudio de las propiedades de los espacios separablemente conexos en relación con las que poseen los espacios conexos o los espacios por caminos. Se plantean diversos ejemplos que ponen de manifiesto el carácter estricto de las inclusiones habidas entre estas tres clases de espacios. Se definen las componentes separablemente conexas de un espacio topológico y se introduce el concepto de espacio localmente separablemente conexo obteniéndose una serie de interesantes propiedades. Por último, en la sección de notas finales se comenta el interés de la introducción del concepto de espacio compactamente conexo y se plantea una conjetura en el marco de los espacios métricos.

2. DEFINICIÓN Y PROPIEDADES

Definición 2.1. [1] *Un espacio topológico X se dice que es separablemente conexo si para cada dos puntos, s, $y \in X$ existe un conjunto $C_{\{x,y\}}$ conexo y separable tal que $\{x, y\} \subset C_{\{x,y\}} \subset X$.*

Es obvio que todo espacio separablemente conexo es conexo. Además, teniendo en cuenta que cada camino, por

* Este trabajo fue parcialmente financiado por el proyecto PB95-0729-C02 de la Dirección General de Investigación Científica y Técnica (DGICYT), Ministerio de Educación.

ser la imagen continua de un intervalo, es un conjunto conexo y separable, todo espacio conexo por caminos es separablemente conexto. Estas relaciones son inclusiones en sentido estricto, como se deduce de los ejemplos que se dan a continuación.

Ejemplo 2.2. *Sea* $[0, \Omega]$ *el espacio ordinal, donde* Ω *es el menor ordinal no numerable. Introduciendo entre cada ordinal* α *y su sucesor* $\alpha + 1$ *una copia del intervalo (0,1), se obtiene la recta larga L. Este conjunto es totalmente ordenado y en él se considera la topología del orden.*

Se añade a L un punto p no perteneciente a él, por ejemplo $p = \Omega$, *y se considera como abiertos de* $L \cup \{p\}$ *los abiertos de L junto con los generados por los entornos de p,* $U_\beta(p) = \{p\} \cup \left(\bigcup_{\beta\leq\alpha<\Omega}(\alpha, \alpha + 1)\right)$ *(donde a, b* $\in [0, \Omega]$*). Se considera como orden en* $L \cup \{p\}$ *el dado por el de L y además* $l < p$, *para cada* $l \in L$. *El espacio* $L \cup \{p\}$ *es conexo no separable y por ello no es separablemente conexo, ya que cualquier conjunto conexo que contenga a los puntos 0 y p debe contener a todo* $L \cup \{p\}$.

Ejemplo 2.3. [1] *El espacio* $X = \{0\} \times [-1, 1] \cup \left\{\left(x, sen\,\frac{1}{x}\right) : x \in (0, 1]\right\}$ *dotado con la topología inducida por la euclídea de* $\mathbb{R}^2$ *es separablemente conexo pero no es conexo por caminos.*

Haciendo uso de la propiedad de que en espacios ordenados el ser separablemente conexo equivale a ser conexo por caminos ([1]), pueden darse otros ejemplos de espacios topológicos conexos que no son separablemente conexos, como puede ser el espacio $X = [0, 1] \times [0, 1]$ dotado con la topología del orden inducida por el orden lexicográfico de $\mathbb{R}^2$ ([1]) o también L^*, la compactificación de la recta larga, L, dotada de la topología del orden, que es conexa, por ser la adherencia de L, pero que no es conexa por caminos ([5]) y por tanto no es separablemente conexa.

Si X es un espacio topológico conexo y separable, entonces X es separablemente conexo. El recíproco no es cierto: Basta considerar un espacio de Banach (que siempre es separablemente conexo) que no sea separable, como por ejemplo l_∞ con la topología de la norma del supremo. Además, teniendo en cuenta que todo espacio métrico compacto es separable, se tiene que si X es un espacio métrico compacto (o σ-compacto), entonces X es separablemente conexo si y sólo si es conexo.

A continuación se analizan algunas propiedades de los espacios separablemente conexos. Se esquematizará la demostración de las mismas en los casos más significativos, para poner de manifiesto las técnicas utilizadas. (Para más detalles, ver [6]).

Proposición 2.4. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico y* $\{S_\alpha : \alpha \in A\}$ *una familia de subconjuntos separablemente conexos tales que* $S_\alpha \cap S_\beta \neq \emptyset$, *para todo* $\alpha, \beta \in A$. *Entonces* $S = \cup_{\alpha\in A} S_\alpha$ *es separablemente conexo. Si la familia es numerable, basta pedir que* $S_n \cap S_{n+1} \neq \emptyset$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 2.5. *Sean X e Y dos espacios topológicos y* $f : X \to Y$ *continua. Si X es separablemente conexo, entonces* $f(X)$ *es separablemente conexo.*

Como consecuencia, se obtiene que un espacio separablemente conexo sigue siéndolo si se debilita su topología, y que para que un espacio producto sea separablemente conexo es necesario que sean separablemente conexos todos los espacios factores. Sin embargo parece que, en general, el que cada espacio factor sea separablemente conexo no garantiza que el espacio producto lo sea, ya que en el marco de los espacios Hausdorff, un espacio producto es separable si y sólo si cada espacio factor es separable y todos, salvo a lo sumo $2^{\aleph_0}$ de ellos, son espacios que se reducen a un único punto. Esta propiedad de los espacios separables permite obtener la siguiente condición suficiente para garantizar que el espacio producto sea separablemente conexo.

Proposición 2.6. *Si* $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ *es una familia de espacios separablemente conexos y todos, salvo a los suma* $2^{\aleph_0}$ *de ellos, son espacios que se reducen a un único punto, el espacio* $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ *dotado de la topología producto es separablemente conexo.*

Demostración: Sean $a = (a_\alpha)_{\alpha\in A} \in X$ y $b = (b_\alpha)_{\alpha\in A} \in X$. Para cada $\alpha \in A$, existe un conexo y separable, $C^\alpha_{\{a,b\}}$, tal que $\{a_\alpha, b_\alpha\} \subset C^\alpha_{\{a,b\}} \subset X_\alpha$. Llamando $C_{\{a,b\}} = \prod_{\alpha\in A} C^\alpha_{\{a,b\}}$ se tiene que $\{a, b\} \subset C_{\{a,b\}} \subset X$; además $C_{\{a,b\}}$ es conexo, por ser producto de conexos, y separable, por ser cada $C^\alpha_{\{a,b\}}$ separable y reducirse todos a un único punto, salvo a lo sumo $2^{\aleph_0}$ de ellos.

El hecho de que un espacio producto sea conexo por caminos si y sólo si cada espacio factor lo es, hace que la condición suficiente que se da en la proposición anterior no sea condición necesaria para que el espacio producto sea separablemente conexo. Si la familia de espacios que constituyen el producto es numerable, como consecuencia de lo anterior, se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 2.7. *Si* $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ *es una familia numerable de espacios topológicos, entonces* $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ *dotado de la topología producto es separablemente conexo si y sólo si cada* X_α *es separablemente conexo.*

Utilizando este resultado puede darse un ejemplo de espacio métrico separablemente conexo que no es separable ni conexo por caminos.

Ejemplo 2.8. *El espacio* $X = l^+_\infty \times Y$ *con* $Y = \left\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, t = sen\,\frac{1}{x}\right\} \cup \{(0, t) : t \in [-1, 1]\}$ *es* *un espacio métrico separablemente conexo, por serlo tanto l_∞^+ como Y, no es separable puesto l_∞^+ no es separable, y no es conexo por caminos.*

Si bien en cualquier espacio topológico la adherencia de un subconjunto conexo también lo es, esta propiedad no puede trasladarse al caso de los subconjuntos separablemente conexos, como se pone de manifiesto, por ejemplo, si se considera la recta larga, L, que es un subconjunto separablemente conexo de L^*, dotada de la topología del orden. Su adherencia, que es L^*, no es separablemente conexo.

Una condición adicional que garantiza la propiedad anterior se pone de manifiesto a continuación.

Proposición 2.9. *Sea X un espacio topológico que verifica el primer axioma de numerabilidad y S un subconjunto separablemente conexo de X. Entonces la adherencia de S es separablemente conexo.*

Demostración: Sean $x, y \in \overline{S}$. Por verificar X el primer axioma de numerabilidad, existen $\{x_n\}_{n\in N} \subset S$, $\{y_n\}_{n\in N} \subset S$ tales que $x = \lim\limits_n x_n$, $y = \lim\limits_n y_n$. *Por ser* S separablemente conexo, fijado $s \in S$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen C_n y C_n' conexos y separables tales que $\{s, x_n\} \subset C_n \subset S$ y $\{s, y_n\} \subset C_n' \subset S$. El conjunto $C = \cup_{n\in N}\left(C_n \cup C_n'\right) \subset S$ es conexo y separable, y x_n, $y_n \in C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Su adherencia $\overline{C}$ es conexo y separable y además $\{x, y\} \subset \overline{C} \subset \overline{S}$, lo que prueba que $\overline{S}$ es separablemente conexo.

Como se acaba de demostrar, la verificación del primer axioma de numerabilidad es condición suficiente para asegurar que la adherencia de un conjunto separablemente conexo también lo es. Sin embargo ésta no es condición necesaria, como se pone de manifiesto si se considera, por ejemplo, un conjunto no numerable X con la topología del complemento finito; ese espacio no verifica el primer axioma de numerabilidad ([5]), es conexo (no existen abiertos disjuntos) y es separable (cualquier subconjunto infinito numerable es denso); por tanto, es separablemente conexo. Sin embargo, la adherencia de cualquier subconjunto separablemente conexo de él también lo es, ya que si S es separablemente conexo debe contener una cantidad infinita de puntos (pues los subconjuntos finitos no son conexos) y la adherencia de un conjunto con infinitos puntos es el espacio total, que es separablemente conexo.

3. COMPONENTES SEPARABLEMENTE CONEXAS

En esta sección se definen las componentes separablemente conexas de un espacio topológico. Se estudian diversas propiedades de las mismas que permiten obtener, en un margo general, condiciones para que un espacio conexo sea separablemente conexo. En el caso de que las componentes separablemente conexas sean cerradas (lo cual se verifica, por ejemplo, si el espacio verifica el primer axioma de numerabilidad) se prueba que si un espacio conexo no es separablemente conexo ha de tener una cantidad infinita de componentes separablemente conexas. También se pone de manifiesto que si bien la propiedad del punto fijo garantiza la conexión del espacio, no garantiza que el espacio sea separablemente conexo.

Proposición 3.1. *Sea X un espacio topológico. La relación binaria definida en X de la forma: $x \sim y$ si existe $C_{\{x,y\}}$ conexo y separable tal que $\{x, y\} \subset C_{\{x,y\}} \subset X$,* es una relación de equivalencia.

Definición 3.2. *Se llaman componentes separablemente conexas de X a cada una de las clases de equivalencia a que da lugar la relación anterior sobre el conjunto X. Se denotará por $C_x = \{y \in X : x \sim y\}$.*

En general, en un espacio topológico X, las componentes separablemente conexas están contenidas en las componentes conexas pero no tienen por qué coincidir con ellas, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3. *El espacio $X = [0, 1] \times [0, 1]$ con la topología del orden lexicográfico es conexo y por tanto, cualquiera que sea el punto (a, b) $\in$ X, la componente conexa de ese punto es el propio X, mientras que la componente separablemente conexa del punto (a, b) $\in$ X es $C_a = \{(a, y) \in X : 0 \leq y \leq 1\}$.*

Se dan a continuación algunas propiedades de las componentes separablemente conexas de un espacio topológico.

Proposición 3.4. *Sea X un espacio topológico. Se verifica:*

1. *$x \in C_x$, para cada $x \in X$.*

2. *Si $Y \subset X$ es separablemente conexo y $x \in Y$, entonces $Y \subset C_x$.*

3. *Cada C_x es separablemente conexo.*

4. *$C_x \cap C_y \neq \emptyset \Rightarrow C_x = C_y$.*

Proposición 3.5. *Si X e Y son dos espacios topológicos y $f: X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces f transforma las componentes separablemente conexas de X en componentes separablemente conexas de Y. Por tanto, el cardinal del conjunto de componentes separablemente conexas de un espacio topológico es un invariante topológico.*

Teorema 3.6. *En un espacio topológico X son equivalentes:*

1. *Todas las componentes separablemente conexas son abiertas.*

2. *Todas las componentes separablemente conexas son cerradas y constituyen una familia localmente finita (cada punto de X posee un entorno que interseca sólo a un número finito de elementos de esa familia).*

3. *Cada punto tiene un entorno separablemente conexo.*

Corolario 3.7. *Sea X un espacio topológico. X es separablemente conexo y sólo si X es conexo y cada punto tiene un entorno separablemente conexo.*

El siguiente teorema proporciona condiciones para que la componente separablemente conexa de un elemento de un espacio producto coincida con el producto de las respectivas componentes separablemente conexas.

Teorema 3.8. *Sea* $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ *una familia de espacios topológicos y sea* $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ *dotado de la topología producto. Si* $a = (a_\alpha) \in X$ *es tal que las componentes separablemente conesas de cada* a_α, C_{a_α} *se reducen a un punto, salvo a lo sumo* $2^{\aleph_0}$ *de ellas, entonces la componente separablemente conexa de a en X es* $C_a = \prod_{\alpha\in A} C_{a_\alpha}$.

Como consecuencia de este resultado, si la familia es numerable, la componente separablemente conexa de cada punto $x = (x_n) \in X = \prod_{\alpha\in N} X_n$ coincide con el producto de las componentes separablemente conexas de cada $x_n \in X_n$.

Haciendo uso de las componentes separablemente conexas de un espacio topológico, se puede poner de manifiesto que si bien todo espacio que verifique la propiedad del punto fijo (cada aplicación del espacio en sí mismo que sea continua tiene un punto fijo) es conezo ([3]), dicha propiedad no garantiza que el espacio sea separablemente conexo, como se puede comprobar con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.9. *El espacio* $X = [0, 1] \times [0, 1]$ *dotado de la topología del orden lexicográfico tiene la propiedad del punto fijo y sin embargo no es separablemente conexo.*

En efecto, sea $f : X \to X$ continua. Si denotamos $(x_a, y_b) = f(a, b)$, por ser f continua, $f(C_a) \subset C_{x_a}$ *para cada* $a \in I = [0, 1]$. A partir de f se define $g: I \to I$ mediante $g(a) = p_1(f(a, 0))$, siendo $p_1(x, y) = x$; la función g es continua, pues para cada $\varepsilon > 0$ el conjunto $N(f(a, 0)) = (x_a - \varepsilon, x_a + \varepsilon) \times [0, 1]$ es un entorno abierto de $f(a, 0)$ en X, y por la continuidad de f, $f^{-1}(N(f(a, 0)))$ es un abierto de X. Como además $f(C_a) \subset C_{x_a} \subset N(f(a, 0))$, $C_a \subset f^{-1}(N(f(a, 0)))$ y por tanto debe existir un $\delta > 0$ tal que $\{(x, y) \in X : a - \delta < x < a + \delta\} \subset f^{-1}(N(f(a, 0)))$, con lo cual $g(x) \in (x_a - \varepsilon, x_a + \varepsilon)$, si $x \in (a - \delta, a + \delta)$.

Pero entonces g tiene un punto fijo, es decir existe $a^* \in I$ tal que $g(a^*) = a^*$, y en consecuencia $f(C_{a^*}) \subset C_{a^*}$. Teniendo en cuenta, por último, que $C_{a^*} = \{a^*\} \times I$, que la topología relativa en C_{a^*} permite la identificación topológica de C_{a^*} con I, y que la restricción de f a C_{a^*}, $f_{C_{a^*}}: C_{a^*} \to C_{a^*}$, es continua, se garantiza la existencia de un $b^* \in I$ tal que $f(a^*, b^*) = (a^*, b^*)$; lo que prueba que f tiene un punto fijo.

Si bien en cualquier espacio topológico las componentes conexas son conjuntos cerrados, no ocurre así, en general, con las componentes separablemente conexas, como se pone de manifiesto si se considera L^*; la componente separablemente conexa de cada punto de L es el propio L, que no es un conjunto cerrado de L^*.

En el final de esta sección se obtiene más información relativa a las componentes separablemente conexas en espacios que verifican el primer axioma de numerabilidad. En realidad, la propiedad esencialmente utilizada es que la adherencia de los conjuntos separablemente conexos sigue siendo separablemente conexa, que es estrictamente más débil.

Proposición 3.10. *Si X es un espacio topológico que verifica el primer axioma de numerabilidad, entonces* C_x *es cerrado, para cada* $x \in X$.

La verificación del primer axioma de numerabilidad garantiza el carácter cerrado de las componentes separablemente conexas, sin embargo existen espacios que no verifican el primer axioma de numerabilidad en los que cada componente separablemente conexa es cerrada, como pone de manifiesto el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.11. *Sea, para cada* $r \in I\!R$, $S_r = \{0, 1\}$ *con la topología discreta. El espacio* $X = \prod_{r\in R} S_r$ *con la topología producto no verifica el primer axioma de numerabilidad, ya que la topología producto verifica el primer axioma de numerabilidad si y sólo si cada espacio lo verifica y todos salvo a lo sumo una cantidad numerable de ellos son espacios indiscretos* ([4]). *Sin embargo, la componente separablemente conexa de cualquier punto es cerrada, ya que se reduce al propio punto.*

Proposición 3.12. *Si X es un espacio topológico conexo que verifica el primer axioma de numerabilidad, entonces se verifica una y sólo una de las siguientes afirmaciones:*

- *X es separablemente conexo.*
- *X contiene una cantidad infinita de componentes separablemente conexas.*

Observación 3.13. *Espacios que verifican el primer axioma de numerabilidad son por ejemplo los espacios de Banach, que además son separablemente conexos, por ser convexos.*

Por otro lado, el espacio $X = [0, 1] \times [0, 1]$ *con la topología del orden lexicográfico verifica el primer axioma de numerabilidad y es conexo pero no es separablemente conexo. Nótese que X tiene una cantidad infinita de componentes separablemente conexas ya que éstas son,* *como se ha dicho,* $Ca = \{(a, y) \in X : 0 \leq y \leq 1\}$, $a \in [0, 1]$.

4. PROPIEDADES LOCALES

Definición 4.1. *Un espacio topológico X es localmente separablemente conexo en un punto $x \in X$ si cada entorno de x contiene un entorno del mismo que es separablemente conexo.*

Definición 4.2. *Un espacio topológico X se dice que es localmente separablemente conexo si X es localmente separablemente conexo en cada punto $x \in X$.*

Los conceptos separablemente conexo y localmente separablemente conexo son independientes, en el sentido de que, en general, de ninguno de ellos se deduce el otro, como muestran los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.3. *El espacio*

$X = \left\{\left(x,\ sen\left(\frac{1}{x}\right)\right) : 0 < x \leq 1\right\} \cup \{(0, 0)\}$ *con la topología inducida por la euclídea de* $\mathbb{R}^2$ *es separablemente conexo. Sin embargo X no es localmente separablemente conexo en el* (0, 0) *ya que cualquier entorno de la forma* $X \cap B((0, 0), r)$ *con* $r < 1$ *no contiene a ningún entorno de* (0, 0) *separablemente conexo.*

Ejemplo 4.4. *Sea P una partición de* $\mathbb{R}$ *en subconjuntos y* τ *la topología que tiene como base los elementos de P y el conjunto* $\emptyset$. $(\mathbb{R}, \tau)$ *tiene la propiedad de que cada conjunto abierto es también cerrado, por lo que* $(\mathbb{R}, \tau)$ *no es conexo ni, por supuesto, separablemente conexo. Sin embargo* $(\mathbb{R}, \tau)$ *es localmente separablemente conexo ya que dado cualquier* $r \in \mathbb{R}$ *y cualquier entorno* $N(r)$ *del punto r en* $(\mathbb{R}, \tau)$, *existe un entorno separablemente conexo de r (el elmento de P al que pertenece r), contenido en el entorno de partida.*

Se estudian a continuación propiedades de las componentes separablemente conexas de los espacios localmente separablemente conexos.

Proposición 4.5. *Si X es un espacio topológico localmente separablemente conexo en un punto $x \in X$, entonces x es un punto interior de la componente separablemente conexa a la que pertenece. Por tanto, si X es un espacio topológico localmente separablemente conexo, las componentes separablemente conexas son conjuntos abiertos de X. Además, cada subespacio abierto de un espacio localmente separablemente conexo es localmente separablemento conexo.*

Se ha visto que, en general, las componentes separablemente conexas no coinciden con las componentes conexas. Sin embargo, si el espacio es localmente separablemente conexo, sí coinciden. En consecuencia, si X es un espacio topológico localmente separablemente conexo, X es conexo si y sólo si es separablemente conexo.

Teorema 4.6. *Sea X un espacio topológico. Son equivalentes:*

1. X es localmente separablemente conexo.

2. Las componentes separablemente conexas de cada subespacio abierto de X son conjuntos abiertos de X.

3. Los conjuntos abiertos separablemente conexos de X forman una base de la topología de X.

Demostración: Si X es localmente separablemente conexo y G es un subespacio abierto de X, G es localmente separablemente conexo, por tanto sus componentes separablemente conexas son conjuntos abiertos de G y, por ser G abierto, son también abiertos de X.

Si G es un subespacio abierto de X, como, por hipótesis, las componentes separablemente conexas de G son conjuntos abiertos de X que son separablemente conexos y además recubren a G, se tiene que G es la unión de una colección de abiertos de X que son separablemente conexos; lo que prueba que el conjunto de abiertos separablemente conexos de X forman una base de su topología.

Por último, si $N(x)$ es un entorno abierto de un punto arbitrario $x \in X$ como, por hipótesis, $N(x)$ es la unión de abiertos separablemente conexos, existe un abierto separablemente conexo V tal que $x \in V \subset N(x)$; lo que prueba que X es localmente separablemente conexo en el punto x, y por tanto X es localmente separablemente conexo.

Reforzando las hipótesis sobre el espacio, puede obtenerse información acerca del número de componentes separablemente conexas del mismo. Así, si el espacio es localmente separablemente conexo y compacto, entonces tiene sólo un número finito de componentes separablemente conexas. Si el espacio es localmente separablemente conexo y σ-compacto (o separable), entonces tiene una cantidad numerable de componentes separablemente conexas.

5. NOTAS FINALES

1. Los ejemplos planteados en este trabajo, de espacios conexos no separablemente conexos, no son espacios métricos. Nuestra conjetura es si en el marco de los espacios métricos los espacios conexos coinciden con los separablemente conexos. Nótese que si existiese un espacio métrico conexo que no fuese separablemente conexo no podría ser localmente separablemente conexo y debería poseer una cantidad infinita de componentes separablemente conexas.

2. Utilizando una idea similar a la que motivó la introducción del concepto de espacio separablemente conexo,

podríamos pensar en los espacios compactamente conexos; es decir, en espacios en los que cada dos puntos del mismo estuviesen contenidos en un conjunto compacto y conexo contenido en él. Ya que en el caso de espacios métricos estos espacios son separablemente conexos, nos pareció interesante estudiar las propiedades de este nuevo tipo de espacios. Encontramos que, en general, las propiedades eran análogas, salvo para el producto donde se obtiene que el producto arbitrario de espacios compactamente conexos es compactamente conexo y, en espacios ordenados, no se obtiene la equivalencia entre los conexos por caminos y los compactamente conexos. Lo más importante, sin embargo, quizás sea señalar que, en el marco de los espacios métricos, sí existen espacios conexos que no son compactamente conexos, como puede ser, por ejemplo, $X = \{(0, 0)\} \cup \left\{\left(x, sen\, \frac{1}{x}\right) : x \in (0, 1]\right\}$ que es un espacio métrico conexo y separable que no es compactamente conexo. En efecto, dados, por ejemplo, $(0, 0), \left(\frac{2}{\pi}, 1\right) \in X$ cualquier conexo que los contenga debe contener a todos los puntos de la forma $\left(x, sen\, \frac{1}{x}\right)$, con $0 < x \leq \frac{2}{\pi}$; pero el conjunto $\{(0, 0)\} \cup \left\{\left(x, sen\, \frac{1}{x}\right) : 0 < x \leq y\right\}$ no es compacto [5], cualquier que sea $y \in (0, 1]$.

BIBLIOGRAFÍA

1. Candeal, J.C., Hervés C. & Induráin E. (1997) Some results on representation and extension of preferences. *To appear in Journal of Mathematical Economics.*
2. Eilenberg, S. (1941) Ordered topological spaces. *American Journal of Mathematics* 63, 39-45.
3. Jameson, G.J.O. (1974) *Topology and Normed Spaces.* Chapman and Hall. London.
4. Kelley, J.L. (1955) *General Topology.* D. Van Nostrand Company, Inc. New York.
5. Steen, L.A. & Seebach J.A., Jr. (1970) *Counterexamples in Topology.* Holt, Rinehart and Winston, Inc. New York.
6. Verdejo, A. (1997) *Espacios Separablemente Conexos y Relaciones de Preferencia.* Tesis Doctoral. Universidad de Vigo.