Sonderdruck aus:

Mitteilungen
aus der
Arbeitsmarkt- und
Berufsforschung

Rainer Pischner und Reiner Stäglin

Darstellung des um den Keynes'schen Multiplikator erweiterten offenen statischen Input-Output-Modells

9. Jg./1976

3

Mitteilungen aus der Arbeitsmarkt- und Berufsforschung (MittAB)

Die MittAB verstehen sich als Forum der Arbeitsmarkt- und Berufsforschung. Es werden Arbeiten aus all den Wissenschaftsdisziplinen veröffentlicht, die sich mit den Themen Arbeit, Arbeitsmarkt, Beruf und Qualifikation befassen. Die Veröffentlichungen in dieser Zeitschrift sollen methodisch, theoretisch und insbesondere auch empirisch zum Erkenntnisgewinn sowie zur Beratung von Öffentlichkeit und Politik beitragen. Etwa einmal jährlich erscheint ein „Schwerpunktheft", bei dem Herausgeber und Redaktion zu einem ausgewählten Themenbereich gezielt Beiträge akquirieren.

Hinweise für Autorinnen und Autoren

Das Manuskript ist in dreifacher Ausfertigung an die federführende Herausgeberin
Frau Prof. Jutta Allmendinger, Ph. D.
Institut für Arbeitsmarkt- und Berufsforschung
90478 Nürnberg, Regensburger Straße 104
zu senden.

Die Manuskripte können in deutscher oder englischer Sprache eingereicht werden, sie werden durch mindestens zwei Referees begutachtet und dürfen nicht bereits an anderer Stelle veröffentlicht oder zur Veröffentlichung vorgesehen sein.

Autorenhinweise und Angaben zur formalen Gestaltung der Manuskripte können im Internet abgerufen werden unter http://doku.iab.de/mittab/hinweise_mittab.pdf. Im IAB kann ein entsprechendes Merkblatt angefordert werden
(Tel.: 09 11/1 79 30 23, Fax: 09 11/1 79 59 99; E-Mail: ursula.wagner@iab.de).

Redaktion

Ulrike Kress, Gerd Peters, Ursula Wagner, in: Institut für Arbeitsmarkt- und Berufsforschung der Bundesanstalt für Arbeit (IAB),
90478 Nürnberg, Regensburger Str. 104, Telefon (09 11) 1 79 30 19, E-Mail: ulrike.kress@iab.de: (09 11) 1 79 30 16,
E-Mail: gerd.peters@iab.de: (09 11) 1 79 30 23, E-Mail: ursula.wagner@iab.de: Telefax (09 11) 1 79 59 99.

Herstellung

Satz und Druck: Tümmels Buchdruckerei und Verlag GmbH, Gundelfinger Straße 20, 90451 Nürnberg

Verlag

W. Kohlhammer GmbH, Postanschrift: 70549 Stuttgart: Lieferanschrift: Heßbrühlstraße 69, 70565 Stuttgart: Telefon 07 11/78 63-0;
Telefax 07 11/78 63-84 30: E-Mail: waltraud.metzger@kohlhammer.de, Postscheckkonto Stuttgart 163 30.
Girokonto Städtische Girokasse Stuttgart 2 022 309.
ISSN 0340-3254

Bezugsbedingungen

Die „Mitteilungen aus der Arbeitsmarkt- und Berufsforschung" erscheinen viermal jährlich. Bezugspreis: Jahresabonnement 52,- €
inklusive Versandkosten: Einzelheft 14,- € zuzüglich Versandkosten. Für Studenten, Wehr- und Ersatzdienstleistende wird der Preis
um 20 % ermäßigt. Bestellungen durch den Buchhandel oder direkt beim Verlag. Abbestellungen sind nur bis 3 Monate vor Jahresende möglich.

Zitierweise:

MittAB = „Mitteilungen aus der Arbeitsmarkt- und Berufsforschung" (ab 1970)
Mitt(IAB) = „Mitteilungen" (1968 und 1969)
In den Jahren 1968 und 1969 erschienen die „Mitteilungen aus der Arbeitsmarkt- und Berufsforschung" unter dem Titel
„Mitteilungen", herausgegeben vom Institut für Arbeitsmarkt- und Berufsforschung der Bundesanstalt für Arbeit.

Internet: http://www.iab.de

Darstellung des um den Keynes'schen Multiplikator erweiterten offenen statischen Input-Output-Modells

*Rainer Pischner und Reiner Stäglin**

Einer der Ansatzpunkte der Kritik am offenen statischen Leontief-Modell ist die Vernachlässigung des Keynes'schen Multiplikators. Ihm wird durch die Darstellung des erweiterten Input-Output-Modells in einem ersten Schritt Rechnung getragen.

Die Erweiterung des bisher verwendeten Input-Output-Ansatzes erfolgt durch eine teilweise modellendogene Erklärung des privaten Verbrauchs. Ihr liegt folgender Gedankengang zugrunde: Erhöht sich im Sinne eines exogenen Anstoßes z. B. die Staatsnachfrage, so führt das — vorausgesetzt, es findet kein Lagerabbau statt — zu Produktionsänderungen. Die im Zusammenhang mit der zusätzlichen Produktion entstehenden Einkommen werden teilweise wieder für Verbrauchszwecke ausgegeben. Aus der Veränderung des privaten Verbrauchs resultieren wiederum Produktions- und Einkommenseffekte; diese ihrerseits bewirken eine erneute Veränderung des privaten Verbrauchs und geben den Anstoß zu einer neuen „Runde“, der sukzessiv weitere folgen.

Bei der hier dargestellten Verknüpfung des Keynes'schen Multiplikators mit dem offenen statischen Leontief-Modell wird der Kreislauf von Endnachfrage-, Produktions- und Einkommensänderungen in einem geschlossenen Ausdruck zusammengefaßt. Dadurch ist es möglich, mit alternativen Annahmen über den Anteil und die Verwendungsstruktur der wieder für private Verbrauchszwecke verwendeten zusätzlichen Einkommen die Auswirkungen von Endnachfrageveränderungen auf die sektorale Produktion zu ermitteln. Bei Verwendung von Arbeitskoeffizienten lassen sich auch die zugehörigen Beschäftigungseffekte berechnen.

Gliederung

1. Einleitung

Die Input-Output-Rechnung bietet die Möglichkeit, die von einer veränderten Endnachfrage — hierzu zählen privater Verbrauch, öffentlicher Verbrauch, Investitionen und Ausfuhr — ausgehenden Produktions- und Beschäftigungswirkungen zu quantifizieren. Dabei werden nicht nur die direkten, sondern durch die Verwendung der inversen Leontief-Matrix als dem Kernstück des offenen statischen Input-Output-Modells auch die indirekten Effekte ermittelt. Unberücksichtigt bleiben dagegen die durch eine veränderte Endnachfrage induzierten Folgereaktionen beim Einkommen und beim privaten Verbrauch, wie sie z. B. in der Keynes'schen Multiplikatortheorie zum Ausdruck kommen.

Die Vernachlässigung dieser multiplikator-induzierten Effekte im traditionellen Leontief-Modell ist bei den bisherigen empirischen Input-Output-Analysen als Mangel empfunden worden[1]). Mit der hier vorgenommenen Modellerweiterung als einem ersten Lösungsansatz wird versucht, Abhilfe zu schaffen: Durch die Verbindung einer sog. Matrix der Verbrauchsmultiplikatoren mit der traditionellen Leontief-Inversen ergibt sich eine erweiterte inverse Matrix, die neben den Produktionseffekten im Sinne von Leontief auch die Einkommenseffekte im Sinne von Keynes mißt[2]). Eine anschließende Transformation in Arbeitsmarkteinheiten führt zu der für Arbeitsmarktanalysen wichtigen sog. erweiterten Beschäftigungsinverse.

2. Grundannahmen des Keynes'schen Einkommensmultiplikators und des offenen statischen Leontief-Modells

Die Keynes'sche Multiplikatortheorie und das offene statische Leontief-Modell sind ihrer Struktur nach sehr unterschiedlich aufgebaut. Dennoch ist es möglich, zwischen beiden Modellansätzen eine Verbindung herzustellen, weil die wichtigste Voraussetzung hierfür gegeben ist: Die Kompatibilität in den Grundannahmen. Keynes und Leontief gehen beide von einer Volkswirtschaft aus, für die folgende Prämissen gelten sollen:

— Die Volkswirtschaft befindet sich im Gleichgewicht.

— Eine Ausweitung der Produktion ist im gewissen Umfang möglich, ohne daß die Produktionskapazitäten überschritten werden, d.h. ohne daß Neuinvestitionen erforderlich sind.

* Dipl.-Volkswirt Rainer Pischner und Prof. Dr. Reiner Stäglin sind wissenschaftliche Mitarbeiter am Deutschen Institut für Wirtschaftsforschung (DIW), Berlin.

[1]) Andere Mängel des traditionellen Input-Output-Modells sind: Vernachlässigung des Akzelerators und fehlender Bezug zur jeweiligen Konjunkturphase (u. a. durch Nichtbeachtung der Kapazitätsauslastung und der Arbeitszeitveränderung sowie durch Vernachlässigung der Lagerentwicklung). Auf sie wird in dem Gutachten kurz eingegangen, das vom Deutschen Institut für Wirtschaftsforschung (DIW), Berlin, im Auftrage der Bundesanstalt für Arbeit (BA) erstellt wurde. Vgl. R. Stäglin und R. Pischner unter Mitarbeit von R. Mehl und B. Weiser: Weiterentwicklung der Input-Output-Rechnung als Instrument der Arbeitsmarktanalyse, Beiträge zur Arbeitsmarkt- und Berufsforschung (BeitrAB) 13, hrsg. vom Institut für Arbeitsmarkt- und Berufsforschung der Bundesanstalt für Arbeit, Nürnberg 1976.

[2]) Vgl. auch: Quantifizierung der vom „Programm zur Stärkung von Bau- und anderen Investitionen“ ausgehenden Effekte, Gutachten des DIW im Auftrage des Bundesministers für Wirtschaft, Berlin, Februar 1976, S. 12 ff. (Veröffentlichung in Vorbereitung).

— Zusätzliche Nachfrage wird nicht über Lager aufgefangen, sondern in Produktion umgesetzt.
— AkzeleratorefFekte treten nicht auf.
— Sämtliche im volkswirtschaftlichen Kreislauf auftretenden Lag-Beziehungen (Produktion-Einkommen-Lag, Robertson-Lag, Lundberg-Lag) werden vernachlässigt.

Tritt in der so strukturierten Volkswirtschaft nun eine autonome Nachfrage nach Gütern auf, ergeben sich zwei hauptsächliche Folgewirkungen:

1. *Produktionseffekte:* Die Nachfrage nach einem Gut erfordert seine Produktion. Dies führt zu zusätzlicher Produktion, da der Produzent dieses Gutes seinerseits Vorleistungsprodukte benötigt. Aber auch der Vorleistungsproduzent braucht wieder Vorleistungsprodukte usw.
2. *Einkommenseffekte:* Die Nachfrage nach einem Gut bewirkt über die Produktion eine Erhöhung der Wertschöpfung, die den privaten Haushalten in Form von zusätzlichen Einkommen zufließt. Ein Teil der zusätzlichen Einkommen wird wieder in Verbrauchernachfrage nach Konsumgütern umgesetzt, dies bewirkt wiederum Produktion und Einkommen usw.

Leontief hat sich mit den *Produktionseffekten,* Keynes dagegen mit den *Einkommenseffekten* ceteris paribus auseinandergesetzt, also jeweils die andere Folgewirkung außer acht gelassen. Es ist anzunehmen, daß in beiden Modellen die gesamten Folgewirkungen einer autonomen Nachfrageänderung unterschätzt werden. Deshalb wird hier der Versuch unternommen, beide Ansätze miteinander zu verknüpfen[3]). Dies ist möglich, weil beide Modelle — wie bereits erwähnt — auf den gleichen Voraussetzungen aufbauen und sich — wie noch zu zeigen sein wird — auch in den übrigen Annahmen nicht widersprechen. Dem steht auch nicht entgegen, daß der Ansatz von Keynes zu einem aggregierten Modell und derjenige von Leontief zu einem disaggregierten Mehrsektoren-Modell führt. Zunächst sollen jedoch beide Ansätze in groben Zügen dargestellt werden.

3. Produktionseffekte im offenen statischen Leontief-Modell

Das offene statische Leontief-Modell ist in vielen Veröffentlichungen ausführlich behandelt und diskutiert worden[4]). Deshalb wird die Theorie dieses Modells an dieser Stelle nur soweit behandelt, wie es zum Verständnis der nachfolgenden Ausführungen unbedingt erforderlich ist.

Betrachtet wird eine Volkswirtschaft, die die im vorigen Abschnitt getroffenen Voraussetzungen erfüllt. Sie hat n Produktionssektoren, und es gilt für jeden Sektor die Budget- bzw. Bilanzgleichung

(1) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i = x_i$ mit $i = 1,\ldots, n$ und mit

x_{ij} = Lieferungen von Vorleistungsgütern des Sektors i an den Sektor j (Vorleistungen).

y_i = Lieferungen von Gütern des Sektors i, die der Befriedigung der Endnachfrage dienen (Endnachfrage).

x_i = Gesamtlieferungen des Sektors i (Bruttoproduktion).

In Matrixschreibweise lautet dann (1)

(1a) $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}'_j + \mathbf{y} = \mathbf{x}$ mit $\mathbf{x}'_j = (x_{1j},\ldots, x_{nj})$.

Die Verhaltensgleichungen des Modells bestehen aus den Produktionsfunktionen[5])

(2) $x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$ mit $i = 1,\ldots, n$ für alle $j = 1,\ldots, n$ und mit den Input-Koeffizienten a_{ij}.

Die Input-Koeffizienten werden in der quadratischen Matrix **A** zusammengefaßt und beschreiben die Kostenstruktur der Volkswirtschaft. Ein Element a_{ij} der Matrix **A** gibt an, wieviel des Gesamtinputs des Sektors j auf Vorleistungsbezüge von anderen Produktionssektoren entfällt; es kann gleichzeitig als Maß für den *direkten* Produktionseffekt im Sektor i interpretiert werden, der bei der Herstellung einer Endnachfrageeinheit durch den Sektor j entsteht[6]).

Gleichung (2) lautet in Matrixform

(2a) $\sum_{j=1}^{n} \mathbf{x}'_j = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}.$

Setzt man (2a) in (1a) ein, ergibt sich die Leontief'sche Modellgleichung

(3) $\mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y}.$

Gilt für alle Input-Koeffizienten die Beziehung

(4) $0 \leq a_{ij} < 1,$

d.h. sind sämtliche Parameter der Produktionsfunktionen (2) ökonomisch sinnvoll, ergibt sich als Lösung des Modells (3)

(5) $\mathbf{x} = (\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{y}$ mit

E = Einheitsmatrix und

C = Leontief-Inverse.

Die Leontief-Inverse **C** ist wie **A** eine quadratische Matrix. Mit ihr können die gesamten Produktionseffekte gemessen werden, die durch die Endnachfrage induziert werden. Ein Koeffizient c_{ij} der Matrix **C** gibt an, wie viele Einheiten Vorleistungsproduktion des Sektors i zur Erzeugung einer Endnachfrageeinheit des Sektors j *direkt und indirekt* benötigt werden[7]). Deshalb gilt für die Matrizen **A** und **C** die Beziehung

(6) $\mathbf{C} \geq \mathbf{A}$, d.h. $c_{ij} \geq a_{ij}$ für alle $i, j = 1,\ldots, n$.

Die Spaltensummen der Leontief-Inverse können als sektorale Produktionsmultiplikatoren bezeichnet werden, da sie angeben, wie viele Produktionseinheiten alle Produktionssektoren zusammen bereitstellen müssen, damit eine Einheit Endnachfrage nach Gütern des Sektors j erzeugt werden kann.

[3]) In diese Richtung führende Versuche wurden bereits in den fünfziger Jahren unternommen. Vgl. z. B. F. T. Moore and J. W. Petersen: Regional Analysis. An Interindustry Model of Utah, in: The Review of Economics and Statistics, 1955, S. 368-381.

[4]) Vgl. W. W. Leontief: The Structure of American Economy, 2. Auflage, New York: Oxford University Press 1961, Teil IV, Abschnitte A, B und C, und J. Schumann: Input-Output-Analyse, Berlin-Heidelberg-New York 1968, S. 30ff. Eine kritische Würdigung ist zu finden bei G. Rosenblutb: Input-Output Analysis: A Critique, in: Statistische Hefte, N. F., Heft 4/1968, S. 255-268.

[5]) Es wird zunächst nur der I. Quadrant betrachtet.

[6]) Die Berechnung und Bedeutung der Input-Koeffizienten sowie aller weiteren hier benötigten Auswertungsfunktionen ist mit Beispielen behandelt in der Veröffentlichung R. Pischner, R. Stäglin und H. Wessels: Input-Output-Rechnung für die Bundesrepublik Deutschland 1972, Deutsches Institut für Wirtschaftsforschung: Beiträge zur Strukturforschung, Heft 38, Berlin 1975, Teil II, S. 18 ff.

[7]) Die Diagonalelemente der Matrix enthalten zusätzlich genau eine Endnachfrageeinheit, die die Produktionseffekte auslöst.

Für die später beschriebene Weiterentwicklung des Modells ist es notwendig, die Produktionseffekte in primäre Inputs zu transformieren. So interessieren zunächst für jeden Sektor die *direkten* Anteile der primären Inputs an der Bruttoproduktion, die bei m primären Inputs in einer m · n Matrix $\mathbf{A}^{(P)}$ zusammengefaßt werden können. Dies führt zu einer Input-Koeffizienten-Matrix für den III. Quadranten der Input-Output-Tabelle. Vormultipliziert man $\mathbf{A}^{(P)}$ mit $\mathbf{C}$, erhält man eine Matrix $\mathbf{F}$, die zusätzlich zu den *direkten* primären Input-Anteilen auch die *indirekten* Anteile der primären Inputs je Einheit sektoraler Endproduktion ausweist. Entsprechend (6) gilt also die Ungleichung

(7) $\mathbf{F} \geq \mathbf{A}^{(P)}$, d. h. $f_{pj} \geq a_{pj}^{(P)}$ für alle $p = 1, \ldots, m$ und für alle $j = 1, \ldots, n$.

4. Einkommenseffekte beim Keynes'schen Multiplikator

Keynes' Modell[8]) besteht aus einer Definitionsgleichung (Bilanzgleichung) und einer Verhaltensgleichung (Konsumfunktion).

(8) $Y = C + N_0$ als Bilanzgleichung
mit Y = Volkseinkommen, Wertschöpfung,
C = Ausgaben der privaten Haushalte und
N_0 = restliche Ausgaben für Investitionen, Exporte. N_0 ist eine exogene Größe.

(9) $C = C(Y)$ als Konsumfunktion, d.h. die Höhe des privaten Verbrauchs ist vom Volkseinkommen bzw. von der Wertschöpfung abhängig.

Die Konsumfunktion hat die Eigenschaft

(10) $0 < \frac{dC}{dY} < 1$; d.h. die marginale Konsumquote $c(Y) = \frac{dC}{cY}$ liegt zwischen Null und Eins.

Die Problemstellung von Keynes lautet: Wie wirkt sich eine autonome Erhöhung der exogenen Ausgaben um ΔN_0 auf die Volkswirtschaft aus? Aus den Gleichungen (8) und (9) ergibt sich

(11) $Y - C(Y) = N_0$.

Differenziert man diesen Ausdruck nach N_0, folgt

(12) $(1 - \frac{dC}{dY}) \frac{dY}{dN_0} = 1,$

was gleichbedeutend ist mit

(13) $\frac{dY}{dN_0} = \frac{1}{1 - \frac{dC}{dY}} = \frac{1}{1 - c(Y)} = m(Y) > 1.$

$m(Y)$ ist der Keynes'sche Einkommensmultiplikator; er mißt bei gegebener Wertschöpfung Y, um wie viele Einheiten sich Y erhöht, wenn die autonomen Ausgaben N_0 um eine Einheit steigen. Wegen der Bedingung (10) ist $m(Y)$ immer größer als Eins.

[8]) Vgl. *A. Paulsen*: Neue Wirtschaftslehre. Einführung in die Wirtschaftstheorie von J. M. Keynes und die Wirtschaftspolitik der Vollbeschäftigung, 4. Auflage, Berlin und Frankfurt/Main 1958, S. 88ff.

Spezifiziert man die allgemeine Konsumfunktion (9) durch eine lineare Konsumfunktion, also durch

(9a) $C = C_0 + cY,$

läßt sich die angegebene Lösung auch auf iterativem Weg finden, da die marginale Konsumquote in diesem Fall konstant ist $(c(Y) = \frac{dC}{dY} = c)$.

Werden nämlich die exogenen Ausgaben, zu denen jetzt auch C_0 gerechnet werden muß, um eine Menge $\Delta N_0^* = \Delta N_0 + \Delta C_0$ autonom ausgeweitet, so erhöht sich die Wertschöpfung gerade um diesen Betrag. Von diesem Betrag werden $c \cdot \Delta N_0^*$ Einheiten wieder ausgegeben, deshalb erhöht sich die Wertschöpfung erneut, usw. Da die Konsumquote zwischen Null und Eins liegt, werden die Zuwächse immer geringer und gehen schließlich gegen Null, so daß der Prozeß allmählich zum Stillstand kommt. Die Veränderung der Wertschöpfung ΔY aufgrund des Anstoßes ΔN_0^* läßt sich demnach berechnen aus

(14) $\Delta Y = \Delta N_0^* + c \cdot \Delta N_0^* + c^2 \cdot \Delta N_0^* + c^3 \cdot \Delta N_0^* + \ldots\ldots = \Delta N_0^* \cdot \sum_{t=0}^{\infty} c^t.$

Hieraus folgt nach Auflösung der unendlichen Reihe

(15) $\frac{\Delta Y}{\Delta N_0^*} = \frac{1}{1 - c} = m(Y).$

5. Berücksichtigung des Keynes'schen Multiplikators im offenen statischen Leontief-Modell

Die kurze Skizzierung der beiden Modelle hat gezeigt, daß auch die zusätzlichen Annahmen, nämlich die homogenen limitationalen Produktionsfunktionen bei Leontief und die Konsumfunktion bei Keynes widerspruchsfrei sind, so daß einer Verknüpfung beider Modelle nichts entgegensteht.

5.1 Das erweiterte Input-Output-Modell

Gedanklich soll das Modell folgendermaßen ablaufen, wenn ein autonomer Nachfragestoß den schematisierten Prozeß in Gang setzt:

1. Die zusätzliche Endnachfrage induziert zusätzliche Endproduktion.
2. Die zusätzliche Endproduktion induziert zusätzliche Vorleistungsproduktion.
3. Die zusätzliche Vorleistungsproduktion induziert ihrerseits zusätzliche Vorleistungsproduktion usw.
4. Die gesamte zusätzliche End- und Vorleistungsproduktion induziert zusätzliche primäre Inputs.
5. Die zusätzlichen primären Inputs werden teilweise zu zusätzlicher Nachfrage nach Gütern des privaten Verbrauchs umgesetzt.
6. Weiter bei 1., bis der Prozeß zum Stillstand kommt.

Unerheblich ist es, daß die jeweils induzierten Einkommenseffekte erst nach Ablauf sämtlicher Produktionseffekte behandelt werden, da Lag-Beziehungen nicht berücksichtigt werden.

Zur Lösung dieses Modells stehen grundsätzlich alle notwendigen Instrumente zur Verfügung, so daß folgender iterativer Lösungsansatz denkbar ist:

Der Anstoßeffekt spiegelt sich wider im vorgegebenen Endnachfragevektor $\Delta \mathbf{C}_0$. →

→ Durch die Multiplikation der Leontief-Inverse $(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$ mit dem Endnachfragevektor $\Delta \mathbf{C}_0$ läßt sich die zusätzlich induzierte Bruttoproduktion $\Delta \mathbf{X}_0$ berechnen. →

→ Durch Vormultiplikation dieses Ergebnisvektors mit der Input-Koeffizienten-Matrix $\mathbf{A}^{(P)}$ aus dem III. Quadranten werden die bei der Erzeugung der Bruttoproduktion induzierten primären Inputs ermittelt. →

→ Anhand der Konsumquoten wird der Anteil der primären Inputs bestimmt, der erneut zur Nachfrage nach Gütern des privaten Verbrauchs führt. →

→ Aufgrund einer marginalen Verbrauchsstruktur wird diese Verbrauchsnachfrage in Form eines neuen — diesmal jedoch endogenen — Anstoßeffektes sektoral aufgeteilt. →

→ Die Rechnung wird wiederholt, bis die $\Delta \mathbf{C}_t$ genügend klein geworden sind.

Es ist zu erkennen, daß dieses Prinzip gerade dem iterativen Vorgehen im Keynes'schen Multiplikator-Modell entspricht. Diese Ähnlichkeit läßt deshalb vermuten, daß das beschriebene iterative Verfahren in einem geschlossenen Ausdruck zusammengefaßt werden kann.

Folgende Daten müssen für die Anwendung des Modells bekannt sein:

— Die Spaltenstrukturen einer Input-Output-Tabelle, die hinreichend genau die Kostenstruktur der Volkswirtschaft beschreiben. Aus ihr können die Input-Koeffizienten-Matrix $\mathbf{A}^{(P)}$ des III. Quadranten und die Leontief-Inverse $(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$ abgeleitet werden.

— Ein Vektor $\mathbf{w}_1$, der die marginale Verbrauchsstruktur der privaten Haushalte beschreibt.

— Ein Vektor $\mathbf{w}_2$, der aus den „Konsumquoten" für die einzelnen primären Inputs besteht. Im hier verwendeten Ansatz werden die Quoten für die Importe, Abschreibungen und für die indirekten Steuern ./· Subventionen a priori Null gesetzt.

— Der Nachfrageanstoß $\Delta \mathbf{C}_0$, der den Prozeß in Gang setzen soll.

Der erste Schritt der Lösung ist die Suche nach einer Matrix $\mathbf{R}$, die die durch $\Delta \mathbf{C}_0$ induzierten Produktions- und Einkommenseffekte in eine zusätzliche Nachfrage nach Konsumgütern $\Delta \mathbf{C}_1$ transformiert; $\Delta \mathbf{C}_1$ ist dann Ausgangspunkt für eine neue Runde des Iterationsprozesses. Es muß also für $\mathbf{R}$ gelten:

$$(16) \quad \Delta \mathbf{C}_1 = \mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{C}_0.$$

Da $\Delta \mathbf{C}_0$ und $\Delta \mathbf{C}_1$ $(m \cdot 1)$-Matrizen sind, muß $\mathbf{R}$ notwendig eine quadratische $(m \cdot m)$-Matrix sein.

Durch die Multiplikation

$$\mathbf{A}^{(P)} \cdot (\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} \cdot \Delta \mathbf{C}_0 = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{C}_0$$

erhält man für alle Industriezweige die gesamten primären Inputs, die durch $\Delta \mathbf{C}_0$ induziert werden. Die Vormultiplikation mit $\mathbf{w}_2$ führt zu einer skalaren Größe, die gerade angibt, wieviel Einheiten aufgrund des Konsumstoßes, der Konsumquoten und der intersektoralen Verflechtung erneut konsumiert werden. Eine anschließende Multiplikation mit $\mathbf{w}_1$ von links teilt diesen Wert sektoral zu dem endogenen Endnachfrageschub auf, der Ausgangspunkt der nächsten Runde ist.

Somit ergibt sich

$$(17) \quad \Delta \mathbf{C}_1 = \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{C}_0 = \mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{C}_0 \quad \text{mit } \mathbf{R} = \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{F}.$$

Wie leicht zu sehen ist, hängt $\mathbf{R}$ nicht von dem Startwert und somit auch nicht von dem jeweiligen Iterationsschritt ab; deshalb gilt allgemein

$$(18) \quad \Delta \mathbf{C}_t = \mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{C}_{t-1} = \mathbf{R}^2 \cdot \Delta \mathbf{C}_{t-2} \text{ usw.}$$

Der Gesamteffekt ist demnach durch

$$(19) \quad \Delta \mathbf{C} = \sum_{t=0}^{\infty} \Delta \mathbf{C}_t = (\mathbf{E} + \mathbf{R} + \mathbf{R}^2 + \ldots) \cdot \Delta \mathbf{C}_0 = (\mathbf{E} - \mathbf{R})^{-1} \cdot \Delta \mathbf{C}_0$$

gegeben.

Damit ist das offene statische Leontief-Modell um den Keynes'schen Einkommensmultiplikator erweitert. Der Lösungsvektor $\Delta \mathbf{C}$ gibt also an, um wie viele Einheiten der private Verbrauch nach Produkten aller Wirtschaftszweige steigt, und um wieviel dadurch die Summe der primären Inputs zunimmt, wenn die private Verbrauchernachfrage autonom um $\Delta \mathbf{C}_0$ erhöht wird; Input-Struktur (Leontief) und Konsumverhalten (Keynes) der Volkswirtschaft werden dabei berücksichtigt.

Die oben angeführte Gleichung (19) führt indes nur zu den Einkommenseffekten, da die Produktionseffekte bisher lediglich Hilfsmittel zur Bestimmung der induzierten primären Inputs waren. Die Gesamteffekte — Produktions- *und* Einkommenseffekte — ergeben sich demzufolge durch

$$\begin{aligned}(20) \quad \Delta \mathbf{X} &= (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \Delta \mathbf{C} \\ &= (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{R})^{-1} \cdot \Delta \mathbf{C}_0 \\ &= (\mathbf{E} - (\mathbf{A} + \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{A}^{(P)}))^{-1} \cdot \Delta \mathbf{C}_0 \\ &= (\mathbf{E} - (\mathbf{A} + \mathbf{A}^{(Z)}))^{-1} \cdot \Delta \mathbf{C}_0 \\ &= (\mathbf{E} - \mathbf{Z})^{-1} \cdot \Delta \mathbf{C}_0 \\ &\text{mit } \mathbf{A}^{(Z)} = \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{A}^{(P)} \text{ und } \mathbf{Z} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^{(Z)}.\end{aligned}$$

Der Ausdruck $\mathbf{A} + \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{A}^{(P)}$ ist eine aufdatierte Input-Koeffizienten-Matrix, da $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ und $\mathbf{A}^{(P)}$ keine negativen Elemente enthalten. Dies entspricht formal der Lösung, die Schumann bei seinem Ansatz zur Erweiterung des offenen statischen Leontief-Modells gefunden hat[9]).

5.2 Interpretation der Ergebnismatrizen

Mit $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}$, $(\mathbf{E}-\mathbf{R})^{-1}$ und $(\mathbf{E}-\mathbf{Z})^{-1}$ sind vier neue Matrizen hergeleitet worden, deren ökonomischer Inhalt noch zu verdeutlichen ist. Dies geht am einfachsten, wenn die Matrizen $\mathbf{R}$ und $\mathbf{Z}$ im Zusammenhang mit der hinlänglich bekannten Input-Koeffizienten-Matrix $\mathbf{A}$ interpretiert und die Inversen $(\mathbf{E}-\mathbf{R})^{-1}$ und $(\mathbf{E}-\mathbf{Z})^{-1}$ der Leontief-Inversen $(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$ gegenübergestellt werden:

Wird zusätzlich[10]) eine Endnachfrageeinheit des Sektors j nachgefragt, dann geben die Koeffizienten

— der Matrix $\mathbf{A}$ an, wie viele Vorleistungsbezüge aus dem Sektor i zur Produktion des Endnachfragegutes *direkt* (d.h. in der letzten Produktionsstufe) erforderlich sind[11]),

[9]) Praktisch kommt Schumann zu dem gleichen Ergebnis. Er bestimmt ebenfalls eine Matrix $\mathbf{Z} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^{(Z)}$, datiert die Input-Koeffizienten-Matrix indes direkt auf, indem er Teile des Konsums endogenisiert. Unter gleichen ökonomischen Voraussetzungen liefert Schumanns Modell völlig identische Ergebnisse. Vgl. *J. Schumann*: Möglichkeiten und Bedeutung einer teilweise endogenen Erklärung des privaten Konsums und der privaten Investitionen im statischen offenen Leontief-Modell, in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Band 189, Heft 5, 1975, S. 378–410.

[10]) Nur im statischen Leontief-Modell kann auf das „zusätzlich" verzichtet werden. Im erweiterten Modell ist es eine unabdingbare Voraussetzung.

[11]) i kennzeichnet wie üblich den Zeilenindex, j den Spaltenindex der Koeffizienten.

- der Matrix **R** an, wieviel zusätzliche Endnachfrage nach Gütern aus dem Sektor i aufgrund desjenigen Einkommens entsteht, das durch die Produktion des Gutes j *einschließlich* der dazu erforderlichen Vorleistungsproduktion induziert wird[12]),
- der Matrix **Z** in der Summe einerseits die Vorleistungsbezüge an, die der Sektor i zur Produktion des Gutes direkt bereitstellen muß, andererseits die zusätzliche Endnachfrage nach Gütern aus dem Sektor i, die aufgrund desjenigen Einkommens entsteht, das durch diese Produktion *ohne* die dazu erforderliche Vorleistungsproduktion induziert wird,
- der Matrix $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ an, wie viele Vorleistungsbezüge aus dem Sektor i zur Produktion des Gutes j insgesamt (d. h. beim Durchlauf aller Produktionsstufen) erforderlich sind[13]),
- der Matrix $(\mathbf{E} - \mathbf{R})^{-1}$ (Matrix der Verbrauchsmultiplikatoren) an, wieviel Endnachfrage insgesamt im Sektor i aufgrund der Nachfrage nach dem Gut j und der daraus resultierenden produktions- und einkommensbedingten Folgewirkungen entsteht[13]), und
- der Matrix $(\mathbf{E} - \mathbf{Z})^{-1}$ (erweiterte inverse Matrix) an, wieviel Bruttoproduktion insgesamt im Sektor i aufgrund der Nachfrage nach dem Gut j und der daraus resultierenden produktions- und einkommensbedingten Folgewirkungen entsteht[13]).

6. Bedeutung des erweiterten offenen statischen Leontief-Modells für die Arbeitsmarktanalyse

Im Mittelpunkt der Arbeitsmarktanalysen auf der Basis des traditionellen Input-Output-Modells steht die Beschäftigungsinverse[14]). Sie ergibt sich durch Multiplikation der als Diagonalmatrix geschriebenen Arbeitskoeffizienten für Erwerbstätige oder Arbeitsvolumen mit der inversen Leontief-Matrix[15]).

Entsprechend lassen sich die durch die Erweiterung des offenen statischen Leontief-Modells gewonnene Matrix der Verbrauchsmultiplikatoren $(\mathbf{E} - \mathbf{R})^{-1}$ und die erweiterte inverse Leontief-Matrix $(\mathbf{E} - \mathbf{Z})^{-1}$ in Arbeitsmarkteinheiten transformieren; notwendig ist nur die Vormultiplikation mit einer Diagonalmatrix ${}_{D}\mathbf{L}$ der Erwerbstätigen- bzw. Volumenkoeffizienten:

$$(21) \quad {}_{D}\mathbf{L} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{R})^{-1} = (\mathbf{E} - \mathbf{R})_{L}^{-1} \text{ und}$$

$$(22) \quad {}_{D}\mathbf{L} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{Z})^{-1} = (\mathbf{E} - \mathbf{Z})_{L}^{-1}.$$

Die in Arbeitsmarkteinheiten transformierte Matrix der Verbrauchsmultiplikatoren $(\mathbf{E} - \mathbf{R})_{L}^{-1}$ zeigt, wieviel Erwerbstätige bzw. Erwerbstätigenvolumen *direkt* im Sektor i eingesetzt werden müssen, um die durch eine Einheit Endnachfrage nach dem Gut j ausgelöste private Verbrauchernachfrage bei allen Wirtschaftszweigen zu befriedigen. Die erweiterte Beschäftigungsinverse $(\mathbf{E} - \mathbf{Z})_{L}^{-1}$ gibt Auskunft darüber, wieviel Erwerbstätige bzw. Beschäftigtenstunden *direkt und indirekt* im Sektor i aufgewendet werden müssen, um der autonomen Endnachfrageeinheit nach dem Gut j und den multiplikator-induzierten Folgewirkungen nachkommen zu können.

Werden diese Matrizen von rechts mit einer beliebigen Endnachfrage multipliziert, ergeben sich die dazugehörigen direkten, multiplikator-induzierten und indirekten Beschäftigungseffekte. Somit bietet die erweiterte Beschäftigungsinverse die Möglichkeit, die von bestimmten Endnachfrageveränderungen ausgehenden Beschäftigungseffekte für die einzelnen Wirtschaftszweige abzuschätzen — im Gegensatz zum traditionellen Input-Output-Modell, aber unter Berücksichtigung der produktions- und einkommensbedingten Folgewirkungen[16]).

Die Bedeutung dieser Weiterentwicklung für die Arbeitsmarktanalyse wird durch die im nachfolgenden Aufsatz beschriebene Anwendung des erweiterten offenen statischen Leontief-Modells auf das Programm zur Stärkung von Bau- und anderen Investitionen vom 27. August 1975 veranschaulicht[17]).

---

[12]) In der zusätzlich entstehenden Endnachfrage sind also bereits indirekte Vorleistungseffekte einbezogen, wie auch an der Definition $\mathbf{R} = \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{F}$ zu erkennen ist.

[13]) Ist i = j, so enthalten die Koeffizienten genau die Endnachfrageeinheit, die die produktionsbedingten und/oder die einkommensbedingten Folgewirkungen auslöst.

[14]) Vgl. hierzu *L. Reyher*: Zu den kurzfristigen Beschäftigungsauswirkungen einer vorwiegend durch Energieverknappung ausgelösten Wachstumsverlangsamung, Modellrechnung mit Hilfe der Input-Output-Methode, in: MittAB, Heft 1, 1974, S. 32–35, und *R. Filip-Köhn* und *R. Stäglin* (Bearb.): Jeder 18. Arbeitsplatz von der Nachfrage nach Automobilen abhängig, in: Wochenbericht des DIW, Nr. 39/1974.

[15]) Vgl. *R. Stäglin* unter Mitarbeit von *R. Mehl* und *J. Schintke*: Quantifizierung direkter und indirekter Beschäftigungseffekte mit Hilfe der Input-Output-Rechnung, BeitrAB 4, und *R. Stäglin*: Der Einsatz der Input-Output-Rechnung zur Quantifizierung direkter und indirekter Beschäftigungseffekte, in: Mitteilungen aus der Arbeitsmarkt- und Berufsforschung, MittAB, Heft 4, 1973, S. 289–313.

[16]) Vgl. hierzu *R. Stäglin* und *R. Pischner* unter Mitarbeit von *R. Mehl* und *B. Weiser*: Weiterentwicklung der Input-Output-Rechnung als Instrument der Arbeitsmarktanalyse, BeitrAB 13.

[17]) Vgl. *E. Spitznagel*: Anwendung des erweiterten Input-Output-Modells auf das Programm zur Stärkung von Bau- und anderen Investitionen, in diesem Heft.