Sonderdruck aus:

Mitteilungen
aus der
Arbeitsmarkt- und
Berufsforschung

Dietrich Lüdeke, Leo Pusse

Potentielle Arbeitsproduktivität und potentieller Arbeitseinsatz

10. Jg./1977

2

Mitteilungen aus der Arbeitsmarkt- und Berufsforschung (MittAB)

Die MittAB verstehen sich als Forum der Arbeitsmarkt- und Berufsforschung. Es werden Arbeiten aus all den Wissenschaftsdisziplinen veröffentlicht, die sich mit den Themen Arbeit, Arbeitsmarkt, Beruf und Qualifikation befassen. Die Veröffentlichungen in dieser Zeitschrift sollen methodisch, theoretisch und insbesondere auch empirisch zum Erkenntnisgewinn sowie zur Beratung von Öffentlichkeit und Politik beitragen. Etwa einmal jährlich erscheint ein „Schwerpunktheft“, bei dem Herausgeber und Redaktion zu einem ausgewählten Themenbereich gezielt Beiträge akquirieren.

Hinweise für Autorinnen und Autoren

Das Manuskript ist in dreifacher Ausfertigung an die federführende Herausgeberin
Frau Prof. Jutta Allmendinger, Ph. D.
Institut für Arbeitsmarkt- und Berufsforschung
90478 Nürnberg, Regensburger Straße 104
zu senden.

Die Manuskripte können in deutscher oder englischer Sprache eingereicht werden, sie werden durch mindestens zwei Referees begutachtet und dürfen nicht bereits an anderer Stelle veröffentlicht oder zur Veröffentlichung vorgesehen sein.

Autorenhinweise und Angaben zur formalen Gestaltung der Manuskripte können im Internet abgerufen werden unter http://doku.iab.de/mittab/hinweise_mittab.pdf. Im IAB kann ein entsprechendes Merkblatt angefordert werden (Tel.: 09 11/1 79 30 23, Fax: 09 11/1 79 59 99; E-Mail: ursula.wagner@iab.de).

Herstellung

Satz und Druck: Tümmels Buchdruckerei und Verlag GmbH, Gundelfinger Straße 20, 90451 Nürnberg

Verlag

W. Kohlhammer GmbH, Postanschrift: 70549 Stuttgart: Lieferanschrift: Heßbrühlstraße 69, 70565 Stuttgart: Telefon 07 11/78 63-0;
Telefax 07 11/78 63-84 30: E-Mail: waltraud.metzger@kohlhammer.de, Postscheckkonto Stuttgart 163 30.
Girokonto Städtische Girokasse Stuttgart 2 022 309.
ISSN 0340-3254

Bezugsbedingungen

Die „Mitteilungen aus der Arbeitsmarkt- und Berufsforschung“ erscheinen viermal jährlich. Bezugspreis: Jahresabonnement 52,- €
inklusive Versandkosten: Einzelheft 14,- € zuzüglich Versandkosten. Für Studenten, Wehr- und Ersatzdienstleistende wird der Preis
um 20 % ermäßigt. Bestellungen durch den Buchhandel oder direkt beim Verlag. Abbestellungen sind nur bis 3 Monate vor Jahresende möglich.

Zitierweise:

MittAB = „Mitteilungen aus der Arbeitsmarkt- und Berufsforschung“ (ab 1970)
Mitt(IAB) = „Mitteilungen“ (1968 und 1969)
In den Jahren 1968 und 1969 erschienen die „Mitteilungen aus der Arbeitsmarkt- und Berufsforschung“ unter dem Titel
„Mitteilungen“, herausgegeben vom Institut für Arbeitsmarkt- und Berufsforschung der Bundesanstalt für Arbeit.

Internet: http://www.iab.de

Potentielle Arbeitsproduktivität und potentieller Arbeitseinsatz

1. Teil: Schätzgrundlagen

*Dietrich Lüdeke, Leo Pusse**

Nach den Versuchen im IAB, mit Hilfe der Methoden „Analogieschluß" und „systemtheoretische Zusammenhänge" die zukünftige Entwicklung der Arbeitsproduktivität zu erfassen, wurde der Weg eingeschlagen, diese Größe auf Grundlage der volkswirtschaftlichen Produktionstheorie zu erklären und zu prognostizieren, weil die zuerst genannten Methoden nur in Spezialfällen angewandt werden können.

In der vorliegenden Abhandlung werden auf dieser Basis Verfahren zur Erklärung und Prognose der potentiellen Arbeitsproduktivität, die sich aus der Produktion bei Vollauslastung der Produktionsanlagen und entsprechendem Arbeitseinsatz ergibt, entwickelt.

Im einzelnen werden zunächst Schätzansätze für die tatsächliche Produktivität auf zwei Wegen hergeleitet: einmal, ohne bestimmte Annahmen über das ökonomische Unternehmerverhalten vorauszusetzen, zum anderen unter der Annahme der Gewinnmaximierung bzw. Kostenminimierung. Als Produktionsfunktionen werden die CES-Funktion und die Cobb-Douglas-Funktion herangezogen. Aus den geschätzten Funktionen für die tatsächliche Produktivität werden sodann die Ansätze für die potentielle Produktivität gewonnen.

Bei der Weiterentwicklung dieser Verfahren sollen vor allem die Annahmen der Strukturkonstanz und der Homogenität der Produktionsfaktoren überwunden werden. Ein weiterer wesentlicher Schritt soll in der Ausarbeitung der vorliegenden Ansätze zu einem auch nachfrageorientierten längerfristigen Modell bestehen, in dem Marktverhältnisse auf den Produkt- und Faktormärkten berücksichtigt werden.

Anmerkung der Redaktion:

Die vorliegende Abhandlung stellt den ersten Teil eines Gesamtbeitrags dar. Das Kapitel A., dieses ersten Teils ist von Leo Pusse, die Kapitel B. und C. sowie der Anhang sind von Dietrich Lüdeke und das Kapitel D ist von beiden Verfassern. Der zweite Teil von Leo Pusse über erste empirische Ergebnisse unter Zugrundelegung der hier entwickelten Verfahren erscheint im nächsten Heft.

Gliederung:

A. Einleitung und Überblick

Der Begriff Arbeitsproduktivität wird bekanntlich durch das Verhältnis von Produktion zu Arbeitseinsatz definiert. Unabhängig davon, nach welcher Definition

* Dr. Dietrich Lüdeke ist ordentlicher Professor für Statistik und Ökonometrie an der Universität Freiburg/Breisgau und Direktor des Instituts für allgemeine Wirtschaftsforschung der Universität Freiburg, Abteilung für Statistik und Ökonometrie. Dr. Leo Pusse ist Mitarbeiter des Instituts für Arbeitsmarkt- und Berufsforschung.

die Zählergröße Produktion und die Nennergröße Arbeitseinsatz zweckmäßig zu messen sind, lassen sich bei beiden Größen jeweils zwei Begriffe unterscheiden. Bei der Produktion:

— die tatsächliche Produktion sowie

— die bei Vollauslastung der Produktionsanlagen maximal mögliche Produktion, d. h. das Produktionspotential

und analog beim Arbeitseinsatz:

— die tatsächlich eingesetzte Arbeit sowie

— der dem Produktionspotential entsprechende Arbeitseihsatz, der in dieser Abhandlung kurz als potentieller Arbeitseinsatz bezeichnet wird.

Während es sich bei den ersten beiden Größen um tatsächlich eintretende und somit auch statistisch meßbare Größen handelt, stellen das Produktionspotential und der potentielle Arbeitseinsatz zwei Größen dar, die sich i. d. R. nicht realisieren und mithin statistisch nicht durchgehend gemessen, sondern nur geschätzt werden können.

Aus den obigen vier Größen lassen sich zwei sinnvolle Maße der Arbeitsproduktivität definieren:

— die tatsächliche Arbeitsproduktivität, die durch das Verhältnis von tatsächlicher Produktion zu tatsächlichem Arbeitseinsatz definiert ist, sowie

— die bei Vollauslastung der Anlagen erzielte Arbeitsproduktivität, die durch den Quotienten Produktionspotential zu potentiellem Arbeitseinsatz gegeben und die im folgenden kurz als potentielle Arbeitsproduktivität bezeichnet wird.

Ziel eines größeren Forschungsvorhabens im IAB ist die Erklärung und Prognose dieser potentiellen Produktivität in den einzelnen Wirtschaftssektoren, insbesondere in den Industriezweigen, sowie in der Gesamtwirtschaft der Bundesrepublik Deutschland[1]). Gelingt es, die potentielle Produktivität z. B. in den Industriezweigen ökonometrisch zu erklären und zu prognostizieren, so ist es über die Definition der potentiellen Produktivität in Verbindung mit einer geeigneten Prognosereihe für das Produktionspotential ebenfalls möglich, eine Aussage über den künftigen potentiellen Arbeitseinsatz und die mögliche Anzahl an künftigen Arbeitsplätzen in den Industriezweigen zu treffen. Ein Teilbereich im Rahmen dieses Forschungsprojektes befaßt sich mit der Möglichkeit, die Erklärung und Vorausschätzung der potentiellen Produktivität auf der Grundlage produktionstheoretischer Ansätze durchzuführen. In der vorliegenden Arbeit, die eine zweite Veröffentlichung[2]) über diesen Teilbereich darstellt, werden die hierfür relevanten Schätzgrundlagen entwickelt. Dabei werden im einzelnen die auf produktionstheoretischen Ansätzen basierenden Funktionen für die tatsächliche Produktivität und deren Parameterschätzfunktionen sowie die Erklärungs- und Prognoseansätze für die potentielle Produktivität und den potentiellen Arbeitseinsatz hergeleitet. Als Schätzfunktionen für die Parameter der Potentialansätze werden die Parameterschätzungen aus den Funktionen für die tatsächliche Produktivität verwendet.

Die Herleitung der Parameterschätzansätze erfolgt auf zwei Wegen: Zum einen werden Schätzansätze dargestellt, ohne irgendwelche Annahmen über das Verhalten der Unternehmer vorauszusetzen; zum anderen werden Schätzansätze aus Produktionsmodellen entwickelt, in denen bestimmte Annahmen über das Verhalten der Unternehmer im Produktionsprozeß zugrunde gelegt werden. Dabei wird zunächst von der Gewinnmaximierungshypothese, also von der Annahme ausgegangen, daß die Unternehmer stets die Menge des von ihnen produzierten Gutes herstellen, bei der ihr Gewinn ein Maximum erreicht. Die Verfasser sind sich darüber im klaren, daß diese Verhaltensmaxime zumindest kurzfristig kritisch zu bewerten ist. Deshalb wird als weitere Verhaltensmaxime nur Kostenminimierung, d. h. lediglich die Annahme zugrunde gelegt, daß die Unternehmen die jeweilige Produktion, die bei dieser Verhaltensweise als vorgegebene Größe zu betrachten ist, mit den jeweils kostenminimalen Faktorenmengen produzieren.

Im zweiten Teil dieses Beitrages, der im nächsten Heft der MittAB erscheinen wird, werden für die Industriezweige und die Gesamtindustrie der Bundesrepublik Deutschland erste empirische Ergebnisse, die unter Zugrundelegung der in der vorliegenden Abhandlung entwickelten Verfahren gewonnen wurden, vorgestellt und diskutiert.

Wenn in der vorliegenden Abhandlung vielfach im Singular von *der* Produktionsfunktion, *der* Produktivitätsfunktion, *der* potentiellen Arbeitsproduktivität usw. gesprochen wird, so geschieht dies aus Gründen der vereinfachenden Ausdrucksweise. Sämtliche Begriffe, Ansätze und Verfahren beziehen sich auf die jeweils zu untersuchenden Aggregate wie Wirtschaftssektoren, Industriezweige etc. Ferner sei darauf hingewiesen, daß zur Vereinfachung der Indizierung der Störglieder diese in jedem der Abschnitte I. b), I. c), II. b), II. c), II. d) und II. e) neu zu zählen beginnen.

B. Die hauptsächlich in Kapitel C. verwendeten Größen und ihre Symbole

Bevor im folgenden Kapitel die für die Erklärung und Prognose der potentiellen Arbeitsproduktivität und des potentiellen Arbeitseinsatzes erforderlichen Schätzansätze und Schätzverfahren dargestellt werden, sollen im vorliegenden Kapitel die in diesen Ansätzen hauptsächlich auftretenden Größen definiert werden. Im einzelnen handelt es sich hierbei um die nachstehenden Variablen:

L = tatsächlicher Einsatz des Faktors Arbeit in Stunden

[1]) Vgl.: 16. Arbeitsbericht des IAB, Stand Juli 1976, S. 14; Projekt 1-185 D: Bestimmungsfaktoren der Produktivitätsentwicklung. Volkswirtschaftliche Analyse und Prognose, in: Materialien aus der Arbeitsmarkt- und Berufsforschung (MatAB); bei Produktivitätsvorausschätzungen wurde bislang zumeist auf Trendverlängerungen (Trendextrapolationen) zurückgegriffen. Da bei dieser Vorgehensweise ökonomische Erklärungsfaktoren unberücksichtigt bleiben und eine Fortsetzung des in der Vergangenheit beobachteten Trendverlaufs nicht immer erwartet werden kann, wurde im IAB zunächst versucht, mit Hilfe des „Analogieschlusses" und „systemtheoretischer Zusammenhänge" die Entwicklung der Arbeitsproduktivität zu erfassen; doch nur in Spezialfällen können diese Methoden zu Prognosezwecken angewandt werden. Vgl.: Brödner, P., F. Hamke: Automatisierung und Arbeitsplatzstrukturen. Bericht über Methoden und Ergebnisse von Untersuchungen in der Einzel- und Kleinserienfertigung, in: Mitt(IAB), H. 8 (1969); Brödner, P., F. Hamke: Automatisierung und Arbeitsplatzstrukturen. Bericht über eine Prognose der mutmaßlichen Entwicklung in der Einzel- und Kleinserienfertigung, in: MittAB 2/1970; Egle, F., W. Klauder, M. Tbon: Zur Produktivitätsprognose mit Hilfe von intrasek-toralen Analogieschlüssen, in: MittAB 4/1972, S. 285 ff.; Klauder, W., D. Mertens, E. Ulrich: Ansätze zur Prognose des spezifischen Arbeitskräftebedarfs, in: Mitt(IAB), H. 8 (1969), S. 599 ff.

[2]) Zur ersten Publikation vgl. Pusse, L. Zur Analyse und Prognose der Arbeitsproduktivität auf produktionstheoretischer Basis, in: MittAB 3/75.

L_c = potentieller Einsatz des Faktors Arbeit in Stunden, d.h. der bei Vollauslastung der Produktionsanlagen erforderliche Arbeitseinsatz

L_c und L stehen miteinander in folgender Beziehung:

$L_c = L/\gamma_L$ mit γ_L = Auslastungskoeffizient des Faktors Arbeit

Y = tatsächliche Wertschöpfung in konstanten Preisen, d.h. reale Wertschöpfung

Y_c = Produktionspotential, d.h. reale Wertschöpfung bei Vollauslastung der Produktionsanlagen

Y_c und Y stehen miteinander in folgender Beziehung

$Y_c = Y/\gamma_Y$ mit γ_Y = Kapazitätsauslastungskoeffizient

π = Y/L, tatsächliche Arbeitsproduktivität

π_c = Y_c/L_c, potentielle Arbeitsproduktivität, d.h. die Arbeitsproduktivität, die bei Vollauslastung der Produktionsanlagen und beim potentiellen Einsatz des Faktors Arbeit erzielt wird

K = tatsächlicher realer Einsatz des Faktors Kapital, d.h. ausgelastetes Bruttoanlagevermögen in konstanten Preisen

K_c = vorhandener realer Kapitalbestand, vorhandenes Bruttoanlagevermögen in konstanten Preisen

K und K_c stehen miteinander in folgender Beziehung:

$K = \gamma_K K_c$ mit γ_K = Auslastungskoeffizient des Kapitals.

Bei den vorstehenden Größen handelt es sich um die am meisten in Kapitel C. verwendeten Größen. Weitere einzuführende Größen werden an den betreffenden Stellen im Text definiert.

C. Ökonometrische Schätzansätze und Schätzverfahren für die Erklärung und Prognose der potentiellen Arbeitsproduktivität und des potentiellen Arbeitseinsatzes aufgrund produktionstheoretischer Ansätze

Wie in der Einleitung bereits betont, ist das Ziel eines Teilbereiches des dort erwähnten Forschungsvorhabens, die potentielle Produktivität und den potentiellen Arbeitseinsatz in den einzelnen Industriezweigen auf der Grundlage von produktionstheoretischen Ansätzen ökonometrisch zu erklären und zu prognostizieren. Dies setzt die Ökonometrische Schätzung der Parameter der entsprechenden Erklärungs- und Prognoseansätze für die beiden genannten Größen voraus. Es erschiene zunächst naheliegend, die Parameter aus diesen Erklärungsansätzen direkt zu schätzen. In den einzelnen Erklärungsansätzen treten aber Potentialgrößen, d.h. von Auslastungsschwankungen bereinigte Größen des Arbeits- und Kapitaleinsatzes, der Produktion etc. auf, für die es mit Ausnahme des Kapitals keine durchgängigen, in der Realität eingetretene Zeitreihen gibt, da der Zustand der Vollauslastung nur selten erreicht wird. Hier bestünde lediglich die Möglichkeit, für diese Größen über Auslastungskoeffizienten berechnete Reihen heranzuziehen. Da es sich bei den zu schätzenden Parametern der Erklärungsansätze um technische Parameter handelt, die eine Aussage über die durch die herrschenden technischen Gegebenheiten bedingten tatsächlichen Produktionsstrukturen vermitteln, ist es unter diesem Gesichtspunkt zweckmäßig, die Schätzung dieser Parameter auch aufgrund der tatsächlichen Zeitreihenwerte für die einzelnen Größen und damit aufgrund der tatsächlich eingetretenen Information über die Produktionsverhältnisse durchzuführen. Hinzu kommt noch, daß — wie sich weiter unten zeigen wird — bestimmte Schätzverfahren auf weitere Größen, wie Preise, Kapitalkostensätze usw. zurückgreifen, für die tatsächliche Zeitreihen verwendet werden und diese Größen folglich nur mit der tatsächlichen Produktivität in Zusammenhang gebracht werden können. Aus diesen Gründen werden die einzelnen Schätzansätze unter Verwendung von Auslastungsgrößen, d.h. von Auslastungsschwankungen nicht bereinigten Größen entwickelt.

In der deutschen Literatur wurden von *Frohn* einige Ansätze für die tatsächliche Arbeitsproduktivität aus produktionstheoretischen Grundlagen dargestellt, ohne aber ausführlicher auf die Schätzung dieser Ansätze einzugehen. Dabei handelt es sich um die Produktivitätsfunktionen auf der Grundlage der CES- und Cobb-Douglas-Produktionsfunktion zum einen im Fall ohne Annahmen über das ökonomische Verhalten der Unternehmer und zum anderen im Fall der Gewinnmaximierung[3]). Diese Ansätze werden hier übernommen und durch Produktivitätsfunktionen für den Fall ausschließlicher Kostenminimierung ergänzt. Das Schwergewicht im vorliegenden Kapitel C. liegt aber auf der Entwicklung von adäquaten Ansätzen und Verfahren für die Schätzung der Produktivitätsfunktionen in den einzelnen Fällen sowie auf der Herleitung von Erklärungs- und Prognoseansätzen für die potentielle Arbeitsproduktivität und den potentiellen Arbeitseinsatz.

I. Schätzansätze und Schätzverfahren aufgrund von Produktionsfunktionen ohne Annahmen über das ökonomische Verhalten der Unternehmer

a) Vorbemerkung

Als produktionstheoretische Grundlage für die nachstehenden Betrachtungen werden zwei Typen von Produktionsfunktionen herangezogen: Erstens die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion und zweitens die CES-Produktionsfunktion, die in bezug auf den Substitutionsparameter bzw. die Substitutionselastizität wesentlich allgemeiner ist und die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion als Spezialfall enthält. Dabei werden im Gegensatz zu den späteren Betrachtungen hier zunächst keine Annahmen über das ökonomische Verhalten der Unternehmer bezüglich der Produktion getroffen. Die für diesen Fall gewonnenen Produktivitätsfunktionen werden auch als technische Produktivitätsfunktionen bezeichnet[4]).

[3]) Vgl. Frobn, J. Produktivität und Produktionsmodell, in: Neuere Methoden der Produktivitätsmessung, Sonderhefte zum Allgemeinen Statistischen Archiv, Organ der Statistischen Gesellschaft, Heft 4.

[4]) Vgl. Frobn, J. Produktivität und Produktionsmodell, a.a.O., S. 87.

b) Schätzung auf der Grundlage einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

1. Die Produktivitätsfunktion

Ein Produktionsprozeß vollzieht sich nach einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion, wenn die Produktion nach der Funktion

$$\text{(C. 1)} \qquad Y_t = \gamma_t L_t^{r\beta} K_t^{r(1-\beta)} e^{u_{1t}}, \quad t = 1,2,\ldots,T$$

erfolgt, wobei mit γ_t der technische Fortschritt in der Periode t erfaßt wird und u_{1t} eine Störvariable (Zufallsvariable) ist, die den stochastischen Voraussetzungen

$$E(u_{1t} \mid L_{t'}K_t) = E(u_{1t}) = 0 \text{ für alle t}$$

und

$$E(u_{1t}u_{1t'}) = \begin{cases} \sigma^2 \text{ für } t = t', \sigma^2 \text{ endlich} \\ 0 \quad \text{für } t \neq t' \end{cases}$$

genüge. $r\beta$ bzw. $r(1-\beta)$ stellt die Produktionselastizität in bezug auf den Faktor Arbeit bzw. Kapital dar. Der Parameter r sagt etwas über die Eigenart der Skalenerträge aus. Gilt $r = 1$ bzw. $r > 1$ bzw. $r < 1$, so liegen konstante bzw. steigende bzw. sinkende Skalenerträge vor.

Aus (C. 1) ergibt sich über die Beziehung $\pi_t = Y_t/L_t$ für die tatsächliche Arbeitsproduktivität der Ausdruck

$$\text{(C. 2)} \qquad \pi_t = \gamma_t L_t^{r\beta-1} K_t^{r(1-\beta)} e^{u_{1t}}$$

bzw. daraus die Funktion

$$\text{(C. 3)} \qquad \pi_t = \gamma_t L_t^{r-1} \varkappa_t^{r(1-\beta)} e^{u_{1t}}$$

$$\text{mit } \varkappa_t = \frac{K_t}{L_t} = \text{Kapitalintensität.}$$

Aus der letzteren Beziehung läßt sich sofort ablesen, daß

— cet. par. bei wachsendem technischen Fortschritt die tatsächliche Arbeitsproduktivität um das gesamte Fortschrittswachstum steigt,

— steigender Arbeitsinput bei gleicher Kapitalintensität und gleichbleibendem γ_t zu einer Steigerung der tatsächlichen Arbeitsproduktivität entsprechend dem Exponenten $r - 1$ führt, sofern $r > 1$, d.h. steigende Skalenerträge vorliegen,

— die Arbeitsproduktivität bei steigendem Arbeitseinsatz, aber gleichbleibender Kapitalintensität und gleichbleibendem γ_t entsprechend dem Exponenten $r - 1$ sinkt, wenn $r < 1$ ist, d.h. die Skalenerträge sinken,

— die Arbeitsproduktivität bei gleichbleibendem Arbeitseinsatz und unverändertem γ_t entsprechend dem Exponenten $r(1-\beta)$ steigt, wenn sich die Kapitalintensität erhöht.

Ist $r = 1$, d.h. der Skalenertrag konstant, so geht die Produktivitätsfunktion (C. 3) in den Ausdruck

$$\text{(C. 4)} \qquad \pi_t = \gamma_t \varkappa_t^{1-\beta} e^{u_{1t}}$$

über. In diesem Fall kann die Produktivität nur steigen, wenn — abgesehen von wachsendem technischen Fortschritt — die Kapitalintensität steigt oder/und sich die Produktionselastizität $1-\beta$ in bezug auf das Kapital erhöht, d.h., wenn die Produktionselastizität in bezug auf den Faktor Arbeit sinkt.

2. Die Schätzung der Produktivitätsfunktion

Zur Schätzung der Produktivitätsfunktionen (C. 2) und (C. 3) ist naheliegend, diese Funktionen durch Logarithmierung zu linearisieren und die Parameter der logarithmierten Ansätze durch Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate zu schätzen, um aus diesen Parameterschätzungen wiederum Schätzungen für die einzelnen Parameter r und β zu berechnen. Unterstellen wir Hicks-neutralen technischen Fortschritt und erfassen wir diesen durch einen exponentiellen Trend

$$\text{(C. 5)} \qquad \gamma_t = \gamma e^{\alpha t}$$

so ergeben sich durch Logarithmierung von (C. 2) und (C. 3) die beiden Schätzansätze

$$\text{(C. 6)} \qquad \ln \pi_t = \ln \gamma + \alpha t + (r\beta - 1) \ln L_t + r(1-\beta) \ln K_t + u_{1t}$$

und

$$\text{(C. 7)} \qquad \ln \pi_t = \ln \gamma + \alpha t + (r-1) \ln L_t + r(1-\beta) \ln \varkappa_t + u_{1t}.$$

Wenn die Störvariable u_{1t} — wie oben angenommen — nicht mit den Größen L_t und K_t bzw. $\varkappa_t$ korreliert ist, so ist die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf diese logarithmierten Ansätze schätztheoretisch zulässig. Aus den sich dabei ergebenden Parameterschätzungen lassen sich Schätzungen für die einzelnen Parameter γ, r und β eindeutig berechnen. Die Unkorreliertheit zwischen u_{1t} einerseits und L_t und K_t bzw. $\varkappa_t$ andererseits impliziert aber, daß keine wechselseitigen Beeinflussungen zwischen π_t und den beiden Variablen L_t und K_t existieren. Denn würden solche Beziehungen bestehen, so würde beispielsweise die eingesetzte Arbeit L_t von der Produktivität und damit automatisch von der Störvariablen u_{1t} abhängen, so daß sich die Annahme der Nichtkorrelation zwischen L_t bzw. $\varkappa_t$ und u_{1t} nicht aufrechterhalten ließe. In diesem Fall würde die Methode der kleinsten Quadrate zu Verzerrungen der Parameterschätzungen führen.

Ein anderes Schätzproblem kann sich aus dem statistischen Material ergeben. In den logarithmischen Schätzansätzen tritt jeweils ein lineares Trendglied auf. Nach einem Theorem von *Frisch* und *Waugh*[5]) bedeutet dies, daß die Kleinst-Quadrate-Parameterschätzungen dieser Ansätze mit den Parameterschätzungen identisch sind, die man erhalten würde, wenn man zunächst die Abweichungen der logarithmierten Variablen von ihrem jeweiligen linearen Trend berechnen und die beiden Ansätze unter Verwendung dieser Abweichungen ohne Trendglied nach der Methode der kleinsten Quadrate schätzen würde. Aufgrund der ausgleichenden Wirkung von Logarithmen können die Trendabweichungen nur noch eine sehr geringe Variabilität aufweisen, so daß die resultierenden Kleinst-Quadrate-Schätzungen nicht hinreichend genau, d.h. mit großen Streuungen behaftet und somit vielfach nicht signifikant sind. Diese Problematik kann insbesondere in Verbindung mit der Kapitalintensität auftreten, da diese Größe schon selbst

[5]) *Frisch, R., F. V. Waugh*, Partial Time Regressions as compared with Individual Trends, Econometrica, Vol. 1, 1933.

infolge des weitgehenden zeitlichen Gleichlaufes von K_t und L_t nicht selten eine nur geringe Variation aufweist, so daß die Trendabweichungen hier noch eine wesentlich kleinere Streuung als bei den anderen Größen haben werden. Mit anderen Worten: Durch das Trendglied in den Ansätzen (C. 6) und (C. 7) wird zusammen mit der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate bei den anderen Variablen eine Trendausschaltung durchgeführt. Dadurch kann von diesen Variablen so viel Information abgeschnitten werden, daß die Parameterschätzungen keine hinreichende Aussagekraft mehr besitzen.

Eine weitere Möglichkeit zur Schätzung der Parameter der Produktivitätsfunktionen, bei der die Informationsreduzierung des Ausgangsmaterials u. U. schwächer ist, wird in dem Versuch überprüft, als Schätzgrundlage die zu den beiden Produktivitätsausdrücken gehörenden Wachstumsratenansätze zu verwenden. Diese Ansätze ergeben sich, indem man die logarithmischen Produktivitätsansätze (C. 6) und (C. 7) nach der Zeit t differenziert. Dadurch erhalten wir

$$\text{(C. 8)} \qquad w_\pi = \alpha + (r\beta - 1)\, w_L + r(1-\beta)\, w_K + u_{2t}$$

und

$$\text{(C. 9)} \qquad w_\pi = \alpha + (r - 1)\, w_L + r(1-\beta)\, w_\varkappa + u_{2t}$$ [6].

Durch Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf diese Ansätze lassen sich Schätzungen für die technische Fortschrittsrate α und die beiden Koeffizienten $(r\beta-1)$ und $r(1-\beta)$ bzw. $(r-1)$ und $r(1-\beta)$ gewinnen. Aus diesen Schätzungen können wiederum Schätzungen für die einzelnen Parameter r und β berechnet werden.

Da die Ansätze (C. 8) und (C. 9) im Wege der Differentation gewonnen werden, gelten sie — streng genommen — nur bei infinitesimaler Betrachtung. Im praktischen Fall endlicher Differenzen stellen sie lediglich Approximationen dar. Um diese Approximationen zu vermeiden, läßt sich auf ähnliche, im endlichen Fall exakt geltende Ansätze zurückgreifen. Bei diesen Ansätzen handelt es sich um die zu den Produktivitätsfunktionen (C. 2) und (C. 3) gehörenden Wachstumskoeffizientenansätze, die in Verbindung mit (C. 5) durch die Ausdrücke

$$\text{(C. 10)} \qquad \frac{\pi_t}{\pi_{t-1}} = e^{\alpha} \left(\frac{L_t}{L_{t-1}}\right)^{r\beta-1} \cdot \left(\frac{K_t}{K_{t-1}}\right)^{r(1-\beta)} \cdot e^{u_{3t}}$$

und

$$\text{(C. 11)} \qquad \frac{\pi_t}{\pi_{t-1}} = e^{\alpha} \left(\frac{L_t}{L_{t-1}}\right)^{r-1} \cdot \left(\frac{\varkappa_t}{\varkappa_{t-1}}\right)^{r(1-\beta)} \cdot e^{u_{3t}}$$

bzw. in vereinfachender Schreibweise durch

$$\text{(C. 12)} \qquad wk_\pi = e^{\alpha}\, wk_L^{r\beta-1}\, wk_K^{r(1-\beta)}\, e^{u_{3t}}$$

und

$$\text{(C. 13)} \qquad wk_\pi = e^{\alpha}\, wk_L^{r-1}\, wk_\varkappa^{r(1-\beta)}\, e^{u_{3t}}$$

gegeben werden. Diese Ansätze lassen sich als Schätzansätze dadurch verwenden, daß man sie durch Logarithmierung linearisiert und die Methode der kleinsten Quadrate anwendet. Dabei ergeben sich wiederum Schätzungen für α und die Koeffizienten $r\beta-1$ und $r(1-\beta)$ bzw. $(r-1)$ und $r(1-\beta)$, aus denen Schätzungen für r und β berechnet werden können.

Die Schätzansätze (C. 8) und (C. 9) bzw. (C. 12) und (C. 13) bieten keine unmittelbare Schätzung des Niveauparameters γ der Produktivitätsfunktionen, da in ihnen dieser Parameter nicht mehr auftritt. Eine Schätzung für γ läßt sich hier in einem zweiten Schritt erlangen. Zu diesem Zweck ersetzen wir in dem logarithmischen Ansatz (C. 6) bzw. (C. 7) die Parameter α, $r\beta-1$ und $r(1-\beta)$ bzw. α, $(r-1)$ und $r(1-\beta)$ durch die aufgrund des Schätzansatzes (C. 8) bzw. (C. 9) oder des Schätzansatzes (C. 12) bzw. (C. 13) gefundenen Kleinst-Quadrate-Schätzwerte $\hat{\alpha}$, $\widehat{r\beta-1}$ und $\widehat{r(1-\beta)}$ bzw. $\hat{\alpha}$, $\widehat{(r-1)}$ und $\widehat{r(1-\beta)}$ und wenden danach zur Schätzung von $\ln\gamma$ die Methode der kleinsten Quadrate an. Dadurch erhalten wir für $\ln\gamma$ den Schätzausdruck

$$\text{(C. 14)} \qquad \widehat{\ln\gamma} = \overline{\ln\pi} - \hat{\alpha}\bar{t} - \widehat{(r\beta-1)}\,\overline{\ln L} - \widehat{r(1-\beta)}\,\overline{\ln K}$$

bzw.

$$\text{(C. 15)} \qquad \widehat{\ln\gamma} = \overline{\ln\pi} - \hat{\alpha}\bar{t} - \widehat{r-1}\,\overline{\ln L} - \widehat{r(1-\beta)}\,\overline{\ln\varkappa},$$

wobei die Querstriche die jeweiligen arithmetischen Mittel im Schätzzeitraum $t = 1,2,\ldots,T$ bezeichnen.

Die Schätzung für γ ergibt sich schließlich durch Delogarithmierung von $\widehat{\ln\gamma}$ [7], [8]).

[6]) Der Zeitindex t wird bei den Wachstumsraten zur Vereinfachung der Schreibweise fortgelassen.

[7]) Die Schätzansätze (C. 8) und (C. 9) sowie die zu (C. 12) und (C. 13) gehörenden logarithmischen Schätzansätze

$$\text{(C.16)} \quad \ln wk_\pi = \alpha + (r\beta-1)\ln wk_L + r(1-\beta)\ln wk_K + u_{3t}$$

und

$$\text{(C.17)} \quad \ln wk_\pi = \alpha + (r-1)\ln wk_L + r(1-\beta)\ln wk_\varkappa + u_{3t}$$

sind auch nicht völlig problemlos. So sind ihre beiden Störglieder u_{2t} und u_{3t} in jedem Fall autokorreliert, sofern das Ausgangsstörglied u_{1t} nicht autokorreliert ist. Ist dagegen u_{1t} autokorreliert, so können die transformierten Störglieder u_{2t} und u_{3t} nicht autokorreliert sein. Z. B. ist u_{3t} in dem speziellen Fall nicht autokorreliert, wenn u_{1t} gemäß dem autoregressiven Prozeß

$$\text{(C.18)} \quad u_{1t} = u_{1,t-1} + \varepsilon_t$$

autokorreliert und ε_t von Autokorrelation frei und nicht mit $u_{1,t-1}$ korreliert ist. In diesem Fall ist $u_{3t} = \varepsilon_t$ und somit nicht autokorreliert. In diesem Zusammenhang sei noch darauf verwiesen, daß man in der Praxis nicht selten von dem autoregressiven Prozeß (C. 18) ausgeht und durch Differenzentransformation der zu schätzenden Niveauansätze die bei den Störgliedern dieser Ansätze vorliegende Autokorrelation auszuschalten versucht.

[8]) Im vorangehenden sind verschiedene Möglichkeiten zur Schätzung der Parameter der beiden Produktivitätsfunktionen (C. 2) und (C. 3) aufgezeigt worden. Alle Parameterschätzungen sind hierbei im Wege der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt worden. Unter der zusätzlichen Annahme, daß u_{1t} normalverteilt ist, läßt sich somit auch gleichzeitig der t-Test anwenden. Allerdings treffen seine Voraussetzungen nur bei den Schätzansätzen (C. 6) und (C. 7) exakt zu; nicht aber bei den übrigen Schätzansätzen, da bei diesen die Störglieder in der Regel autokorreliert sind. Hier kann der t-Test nur als eine Art heuristischer Orientierungshilfe Verwendung finden. So besteht insbesondere die Möglichkeit zu überprüfen, ob konstante, steigende oder fallende Skalenerträge vorliegen. Prüfmaß ist hierbei die Kleinst-Quadrate-Schätzung $\widehat{r-1}$, die sich aus den Ansätzen (C. 7), (C. 9) und (C. 17) ergibt. Dieses Prüfmaß läßt sich gegenüber der Prüfhypothese $H_O : r - 1 = 0$ testen. Durch Anwendung des t-Tests als einseitigen Tests läßt sich dabei ermitteln, ob fallende Skalenerträge ($\widehat{r-1}$ signifikant kleiner als Null), steigende Skalenerträge ($\widehat{r-1}$ signifikant größer als Null) oder konstante Skalenerträge ($\widehat{r-1}$ nicht signifikant von Null verschieden) vorliegen. Dabei stellt nur das Testergebnis aus dem Schätzansatz (C. 7) ein exaktes t-Testergebnis dar.

Eine entsprechende exakte Anwendung des t-Tests zur Überprüfung dieser Frage ist aufgrund der Parameterschätzungen, die aus den Ansätzen (C. 6), (C. 8) und (C.16) gewonnen werden, nicht möglich. Denn hier kann aus den Parameterschätzungen $\widehat{r\beta-1}$ und $\widehat{r(1-\beta)}$, auf die zwar im Fall des Schätzansatzes (C. 6) der t-Test exakt zutrifft, mit Hilfe dieses Tests keine direkte Schlußfolgerung in bezug auf den Parameter r gezogen werden. Die Schätzung für den Skalenparameter r wird in diesem Fall aus dem Ausdruck

$$\text{(C.19)} \quad \hat{r} = \widehat{r\beta-1} + \widehat{r(1-\beta)} + 1$$

berechnet, bei dem die Bedingungen des t-Tests nicht mehr erfüllt sind. Somit kann hier dieses Testverfahren nur als heuristische Entscheidungshilfe angewendet werden.

→

3. *Erklärungs- und Prognoseansätze für die potentielle Arbeitsproduktivität und den potentiellen Arbeitseinsatz*

Zur Erklärung der potentiellen Arbeitsproduktivität und des potentiellen Arbeitseinsatzes im Schätzzeitraum lassen sich aufgrund der bisherigen Betrachtungen verschiedene Ansätze entwickeln, die im folgenden zusammengestellt werden. Die in dem vorangehenden Abschnitt hergeleiteten Schätzansätze werden mit sog. Auslastungsgrößen, d.h. von Auslastungsschwankungen nicht bereinigten Größen geschätzt. Grundlegend für die Ansätze zur Erklärung der potentiellen Arbeitsproduktivität und des potentiellen Arbeitseinsatzes ist es, daß wir diese Ansätze aus den Ansätzen in den vorhergehenden Abschnitten dadurch gewinnen, daß die Auslastungsgrößen durch ihre entsprechenden Kapazitätsgrößen, d.h. von Auslastungsschwankungen bereinigte Größen ersetzt werden. Diesem Vorgehen liegt die Annahme zugrunde, daß die Parameter der Produktivitätsfunktionen wertmäßig die gleichen sind, wenn in jeder Periode statt der Auslastungsgrößen die Kapazitätsgrößen die tatsächlichen, d.h. die sich in der Realität einstellenden Größen wären. Geht man von der Tatsache aus, daß die Produktionsstrukturen und mit ihnen auch die Parameter der Produktions- bzw. Produktivitätsfunktionen durch die herrschenden technischen Gegebenheiten bestimmt werden, so lassen sich schwer Gründe finden, die für eine Veränderung dieser Parameter durch andere eintretende Wertesätze (einschließlich der Kapazitätsdaten) für die Inputgrößen sprechen.

Ausgangspunkt der folgenden Betrachtung sind zunächst die Formeln (C. 2) und (C. 3) in Verbindung mit (C. 5). Ersetzen wir in diesen Ausdrücken die beiden Inputgrößen L und K durch ihre Kapazitätsgrößen L_c und K_c und setzen wir ferner für die einzelnen Parameter ihre Schätzungen ein, so erhalten wir für die potentielle Arbeitsproduktivität π_c die ökonometrischen Erklärungsansätze

$$\text{(C. 20)} \quad \pi_{c,t} = \hat{\gamma}\, e^{\hat{\alpha} t}\, L_{c,t}^{\hat{r}\hat{\beta}-1}\, K_{c,t}^{\hat{r}(1-\hat{\beta})}\, e^{\hat{u}_{4t}},$$

$$\text{(C. 21)} \quad \pi_{c,t} = \hat{\gamma}\, e^{\hat{\alpha} t}\, L_{c,t}^{\hat{r}-1}\, \varkappa_{c,t}^{\hat{r}(1-\hat{\beta})}\, e^{\hat{u}_{4t}}, \quad \varkappa_{c,t} = \frac{K_{c,t}}{L_{c,t}}$$

mit den zugehörigen Wachstumsratenansätzen

$$\text{(C. 22)} \quad w_{\pi_c} = \hat{\alpha} + (\hat{r}\hat{\beta}-1)\, w_{L_c} + \hat{r}(1-\hat{\beta})\, w_{K_c} + \hat{u}_{5t}$$

$$\text{(C. 23)} \quad w_{\pi_c} = \hat{\alpha} + (\hat{r}-1)\, w_{L_c} + \hat{r}(1-\hat{\beta})\, w_{\varkappa_c} + \hat{u}_{5t}.$$

In Ansatz (C. 20) bzw. (C. 22) wird die potentielle Arbeitsproduktivität bzw. ihre Wachstumsrate durch die beiden Faktoren: potentieller Arbeitseinsatz und gesamtes verfügbares Kapital bzw. durch die Wachstumsraten dieser Faktoren bestimmt. Erklärungsansatz (C. 21) bzw. (C. 23) führt die potentielle Arbeitsproduktivität bzw. ihr Wachstum auf den potentiellen Arbeitseinsatz und die Kapitalintensität bei Vollauslastung bzw. auf die Wachstumsraten beider Größen zurück. Von Bedeutung für die Erklärung der Vergangenheitsentwicklung der potentiellen Arbeitsproduktivität sowie insbesondere für die Prognose dieser Größe sind noch zwei weitere ökonometrische Ansätze, aus denen der Faktor Arbeit eliminiert ist und in denen π_c durch das Produktionspotential und den verfügbaren Kapitalbestand bzw. die Kapitalintensität bei Vollauslastung bestimmt wird. Beide Ansätze bilden darüber hinaus — wie weiter unten gezeigt wird — eine geeignete Grundlage zur Herleitung von Erklärungsfunktionen für den potentiellen Arbeitseinsatz L_c.

Der erste Ansatz ergibt sich dadurch, daß man in (C. 20) L_c durch die rechte Seite der Beziehung

$$\text{(C. 24)} \quad L_{c,t} = \frac{Y_{c,t}}{\pi_{c,t}}$$

ersetzt und nach π_c expliziert. Dadurch erhalten wir den Ausdruck

$$\text{(C. 25)} \quad \pi_{c,t} = \hat{\gamma}^{\frac{1}{\hat{r}\hat{\beta}}}\, e^{\frac{\hat{\alpha}}{\hat{r}\hat{\beta}} t} \cdot Y_{c,t}^{1-\frac{1}{\hat{r}\hat{\beta}}}\, K_{c,t}^{\frac{1}{\hat{\beta}}-1} \cdot e^{\hat{u}_{6t}}$$

mit dem zugehörigen Wachstumsratenansatz

$$\text{(C. 26)} \quad w_{\pi_c} = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{r}\hat{\beta}} + \left(1 - \frac{1}{\hat{r}\hat{\beta}}\right) w_{Y_c} + \left(\frac{1}{\hat{\beta}} - 1\right) w_{K_c} + \hat{u}_{7t}.$$

Der zweite Ansatz folgt aus (C. 21), indem man dort die gleiche Substitution durchführt und ebenfalls nach π_c expliziert. Dadurch ergibt sich die Beziehung

$$\text{(C. 27)} \quad \pi_{c,t} = \hat{\gamma}^{\frac{1}{\hat{r}}}\, e^{\frac{\hat{\alpha}}{\hat{r}} t}\, Y_{c,t}^{1-\frac{1}{\hat{r}}}\, \varkappa_{c,t}^{1-\hat{\beta}}\, e^{\hat{u}_{8t}}$$

mit dem zugehörigen Wachstumsratenansatz

$$\text{(C. 28)} \quad w_{\pi_c} = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{r}} + \left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right) w_{Y_c} + (1 - \hat{\beta}) w_{\varkappa_c} + \hat{u}_{9t}.$$

Nach (C. 28) wird das Niveau der Wachstumsrate der potentiellen Arbeitsproduktivität durch das Verhältnis der geschätzten technischen Fortschrittsrate $\hat{\alpha}$ zum geschätzten Skalenparameter $\hat{r}$ festgelegt. Das Wachstum der potentiellen Arbeitsproduktivität ist cet.par. um so größer, je höher die Kapitalintensität bei Vollauslastung ist, da, abgesehen von entarteten Fällen, $1 - \beta$ aufgrund theoretischer Überlegungen größer als Null sein muß. Ferner erhöht sich das Wachstum der potentiellen Produktivität, wenn das Wachstum des Produktionspotentials cet. par. steigt und steigende Skalenerträge ($\hat{r} > 1$) vorliegen. Demgegenüber nimmt in diesem Fall ihr Wachstum ab bzw. bleibt es konstant, wenn die Skalenerträge sinken ($\hat{r} < 1$) bzw. konstant sind ($\hat{r} = 1$).

Insbesondere die Wachstumsratenansätze (C. 22), (C. 23), (C. 26) und (C. 28) eignen sich dazu, den Verlauf der potentiellen Arbeitsproduktivität im Schätzzeitraum

noch Fußnote [8])

Und zwar ist es dabei von Interesse, das Verhältnis der Differenz $\hat{r} - 1$ zur geschätzten Standardabweichung $\hat{\sigma}_{\hat{r}}$ von $\hat{r}$ zu betrachten. (Diese Schätzung wird durch den Ausdruck

$$\hat{\sigma}_{\hat{r}} = +\sqrt{\hat{\sigma}^2_{\widehat{r\beta-1}} + 2\,\hat{\sigma}_{\widehat{(r\beta-1)},\,\widehat{r(1-\beta)}} + \hat{\sigma}^2_{\widehat{r(1-\beta)}}}$$

gegeben, wobei die $\hat{\sigma}^2 \ldots$ die geschätzten Streuungen der beiden indizierten Parameterschätzungen und $\hat{\sigma} \ldots$ ihre geschätzte Kovarianz bezeichnen.) Ist dieses Verhältnis negativ und sein Absolutbetrag relativ groß, so läßt das Ergebnis auf fallende Skalenerträge schließen; ist es dagegen positiv und ebenfalls groß, so deutet dies auf steigende Skalenerträge hin; liegt sein Wert in der Nähe von 0, so kann man konstante Skalenerträge annehmen. Zur Erhärtung dieser Ergebnisse kann man mit Hilfe des t-Tests feststellen, ob die gefundenen Abweichungen von $\hat{r}$ gegenüber 1 nach diesem Prüfverfahren signifikant bzw. nicht signifikant wären, wenn die Voraussetzungen dieses Tests erfüllt wären. Der t-Test dient hier — wie oben bereits betont — lediglich als heuristische Entscheidungs- und Orientierungshilfe und kann damit — wie die Praxis auf anderen Gebieten gezeigt hat — durchaus wertvolle Dienste leisten.

mit Hilfe einer deskriptiven Komponentenanalyse in die sie bestimmenden Komponenten zu zerlegen und zu untersuchen. Im einzelnen besteht dabei die Möglichkeit festzustellen, welche Komponenten die Entwicklung der potentiellen Arbeitsproduktivität am stärksten und welche sie weniger stark beeinflußt haben. Auf die Feinheiten dieser Analyse soll hier nicht näher eingegangen werden[9]). Einschränkend sei hier nur vermerkt, daß die obigen sowie auch die weiteren noch herzuleitenden Wachstumsraten-Erklärungsansätze im praktischen Fall endlicher Differenzen approximativ geltende Beziehungen darstellen, da bei ihnen die Jointeffekte zwischen den Bestimmungsfaktoren vernachlässigt werden. Berücksichtigt man jedoch, daß diese Effekte i. d. R. vernachlässigbar klein sind, so bilden diese Ansätze im allgemeinen recht gute Analysegrundlagen.

Wie oben schon erwähnt, sind die Beziehungen (C. 25) und (C. 27) auch für die Erklärung des potentiellen Arbeitseinsatzes L_c von Bedeutung. So lassen sich aus diesen Beziehungen unmittelbar geeignete Erklärungsfunktionen für L_c herleiten. Zu diesem Zweck ersetzen wir in der definitorischen Gleichung

$$\text{(C. 29)} \quad L_{c,t} = \frac{Y_{c,t}}{\pi_{c,t}}$$

die Größe $\pi_{c,t}$ durch ihre Schätzausdrücke auf den rechten Seiten von (C. 25) und (C. 27). Dadurch ergeben sich für den potentiellen Arbeitseinsatz L_c die ökonometrischen Erklärungsansätze

$$\text{(C. 30)} \quad L_{c,t} = \hat{\gamma}^{-\frac{1}{\hat{r}\hat{\beta}}} e^{-\frac{\hat{\alpha}}{\hat{r}\hat{\beta}}t} \cdot Y_{c,t}^{\frac{1}{\hat{r}\hat{\beta}}} K_{c,t}^{1-\frac{1}{\hat{\beta}}} e^{\hat{u}_{10,t}}$$

und

$$\text{(C. 31)} \quad L_{c,t} = \hat{\gamma}^{-\frac{1}{\hat{r}}} e^{-\frac{\hat{\alpha}}{\hat{r}}t} Y_{c,t}^{\frac{1}{\hat{r}}} \varkappa_{c,t}^{\hat{\beta}-1} e^{\hat{u}_{11,t}}$$

mit den zugehörigen Wachstumsratenansätzen

$$\text{(C. 32)} \quad w_{L_c} = -\frac{\hat{\alpha}}{\hat{r}\hat{\beta}} + \frac{1}{\hat{r}\hat{\beta}} w_{Y_c} + + (1 - \frac{1}{\hat{\beta}}) w_{K_c} + \hat{u}_{12,t}$$

und

$$\text{(C. 33)} \quad w_{L_c} = -\frac{\hat{\alpha}}{\hat{r}} + \frac{1}{\hat{r}} w_{Y_c} + (\hat{\beta} - 1) w_{\varkappa_c} + \hat{u}_{13,t}.$$

Über diese Wachstumsratenansätze läßt sich die Entwicklung des potentiellen Arbeitseinsatzes L_c während des Schätzzeitraumes analog zur Erklärung von π_c im Wege der erwähnten Komponentenanalyse auf die Entwicklung der erklärenden Größen zurückführen.

Grundlage für die Prognose von π_c ist die Beziehung (C. 25) oder (C. 27) ohne das jeweilige Residualglied, also die Prognoseform

$$\text{(C. 34)} \quad \hat{\pi}_{c,t} = \hat{\gamma}^{\frac{1}{\hat{r}\hat{\beta}}} \cdot e^{\frac{\hat{\alpha}}{\hat{r}\hat{\beta}}t} \cdot \hat{Y}_{c,t}^{1-\frac{1}{\hat{r}\hat{\beta}}} \cdot \widehat{K}_{c,t}^{\frac{1}{\hat{\beta}}-1}$$

oder

$$\text{(C. 35)} \quad \hat{\pi}_{c,t} = \hat{\gamma}^{\frac{1}{\hat{r}}} e^{\frac{\hat{\alpha}}{\hat{r}}t} \hat{Y}_{c,t}^{1-\frac{1}{\hat{r}}} \hat{\varkappa}_{c,t}^{1-\hat{\beta}}$$

$$\text{für } t = T + i, \; i = 1,2,\ldots .$$

Die Beziehungen (C. 20) und (C. 21) sind für die Prognose von π_c nicht geeignet, da in diesen Ausdrücken die Größe L_c als unabhängige Variable auftritt, die aber selbst Gegenstand der Prognose sein soll.

Anhand der Formel (C. 34) bzw. (C. 35) zeigt sich, daß für die Prognose der potentiellen Arbeitsproduktivität Prognosen $\hat{Y}_c$ und $\widehat{K}_c$ bzw. $\hat{\varkappa}_c$ für das Produktionspotential Y_c und für den verfügbaren Kapitalbestand K_c bzw. für die Kapitalintensität $\varkappa_c$ bei Vollauslastung der Anlagen erforderlich sind. Auf die Quellen, auf die zur Beschaffung solcher Prognosen zurückgegriffen werden könnte bzw. auf die Verfahren, mit denen derartige Prognosen berechnet werden können und auf die damit verbundene Problematik soll hier nicht näher eingegangen werden.

Aufgrund dieser alternativen Prognosen für π_c lassen sich dann die zugehörigen Prognosen für den potentiellen Arbeitseinsatz L_c über die definitorische Beziehung

$$\text{(C. 36)} \quad \hat{L}_{c,t} = \frac{\hat{Y}_{c,t}}{\hat{\pi}_{c,t}}, \; t = T + i, \; i = 1,2,\ldots ,$$

berechnen.

c) Schätzung auf der Grundlage einer CES-Produktionsfunktion

1. Die Produktivitätsfunktion

Die CES-Produktionsfunktion ist eine allgemeinere Klasse von Produktionsfunktionen, in der die Cobb-Douglas-Funktion als Spezialfall enthalten ist. Ein Produktionsprozeß erfolgt nach einer CES-Produktionsfunktion, wenn die Produktion nach der Funktion

$$\text{(C. 37)} \quad Y_t = \gamma_t \left[\delta K_t^{-\rho} + (1-\delta) L_t^{-\rho}\right]^{-r/\rho} e^{u_{1t}}$$

erstellt wird. Diese Funktion spezialisiert sich zu einer Cobb-Douglas-Funktion, wenn $\rho = 0$ ist. Da zwischen ρ und der Substitutionselastizität σ die Beziehung

$$\text{(C. 38)} \quad \sigma = \frac{1}{1 + \rho}$$

besteht, wird sofort ersichtlich, daß bei der Cobb-Douglas-Funktion $\sigma = 1$ ist. Die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion und die aus der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion abgeleiteten Produktivitätsfunktionen sind somit nur auf solche Industriezweige anwendbar, die eine Substitutionselastizität von 1 oder annähernd 1 haben. Die CES-Produktionsfunktion ist in diesem Punkt wesentlich allgemeiner, da sie nicht nur für *einen* Wert der Substitutionselastizität, sondern entsprechend dem zulässigen Wertebereich

$$\text{(C. 39)} \quad -1 < \rho < \infty$$

von ρ für alle Werte von σ Gültigkeit besitzt, die in dem Bereich $0 < \sigma < \infty$ liegen.

Aus der CES-Funktion (C. 37) läßt sich der folgende Ausdruck für die tatsächliche Arbeitsproduktivität herleiten:

[9]) Zu den Verfahren dieser Komponentenanalyse vgl. *Wagner, A.*, Die Wachstumszyklen in der Bundesrepublik Deutschland, Tübingen 1972.

$$\text{(C. 40)} \quad \pi_t = \gamma\, e^{\alpha t} L_t^{r-1} \left[\delta(\varkappa_t)^{-\rho} + (1-\delta)\right]^{-r/\rho} e^{u_{1t}},$$

$$\varkappa_t = \frac{K_t}{L_t}.$$

Dabei ist das Glied γ_t für den technischen Fortschritt durch die exponentielle Trendfunktion (C. 5) ersetzt worden. Wie aus der Beziehung (C. 40) sofort ersichtlich wird, steigt die Produktivität, wenn

— cet. par. der technische Fortschritt zunimmt,

— cet. par. der Kapitaleinsatz und damit die Kapitalintensität $\varkappa$ steigt und $\rho \neq 0$ ist,

— bei gleichbleibender Kapitalintensität der Arbeitseinsatz cet. par. vergrößert wird und $r > 1$ ist, d. h. steigende Skalenerträge vorliegen.
Die Produktivität sinkt im letzteren Fall, wenn $r < 1$ ist, also die Skalenerträge abnehmen.

2. *Die Schätzung der Produktivitätsfunktion*

Die Schätzung der Produktivitätsfunktion (C. 40) ist wesentlich komplizierter als die Schätzung entsprechender Ansätze aufgrund der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion, da sich hier die Produktivitätsfunktion nicht durch Logarithmierung in einen linearen Ansatz überführen läßt, auf den die gewöhnliche Methode der kleinsten Quadrate angewendet werden kann. Für die Schätzung bieten sich im vorliegenden Fall zwei andere Verfahren an. Bei dem einen handelt es sich um eine iterative Methode der kleinsten Quadrate, welche die Schätzung nichtlinearer Ansätze zum Gegenstand hat und die im Anhang dargestellt ist. Die zweite Methode basiert auf der Kmenta-Approximation, die weiter unten noch näher behandelt wird.

Zur Anwendung der iterativen Methode der kleinsten Quadrate ist es zunächst erforderlich, einen geeigneten Anfangswertesatz für die Parameter von (C. 40) zu ermitteln, der über die Iteration zu den gewünschten Kleinst-Quadrate-Schätzungen der Parameter führt. So besteht nicht bei jedem Anfangswertesatz die Garantie, daß das Verfahren konvergiert. Um diese Gefahr weitgehend auszuschalten, sollte mit einem Anfangswertesatz begonnen werden, der möglichst in der Nähe der Werte liegt, bei denen die Iteration wegen erzielter Konvergenz abgebrochen wird. Im folgenden wird zur Auffindung eines solchen Wertesatzes für den vorliegenden Fall ein Verfahren entwickelt, das sich an einen Vorschlag von Frohn et al. anlehnt[10]). Wir gehen zu diesem Zweck von der CES-Produktivitätsfunktion (C. 40) aus und geben für die beiden Parameter δ und ρ bestimmte Werte δ^* und ρ^* vor. Unter Verwendung dieser Werte läßt sich der Ausdruck in der eckigen Klammer in (C. 40) für jedes t berechnen und dadurch eine Zeitreihe für die Größe

$$\text{(C. 41)} \quad \left[\delta^* \varkappa_t^{-\rho^*} + (1-\delta^*)\right]^{-1/\rho^*} = X_t$$

entwickeln. Mit Hilfe dieser Größe kann die Produktivitätsfunktion (C. 40) in der Form

$$\text{(C. 42)} \quad \pi_t = \gamma e^{\alpha t} L_t^{r-1} X_t^{r} e^{u_{2t}}$$

geschrieben werden. Die restlichen Parameter γ, α und r lassen sich nun durch Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf den zu (C. 42) gehörenden logarithmischen Ansatz

$$\text{(C. 43)} \quad \ln \pi_t + \ln L_t = \ln Y_t = \ln \gamma + \alpha t + r \ln X^*_t + u_{2t}$$

mit

$$\ln X^*_t = \ln X_t + \ln L_t$$

schätzen. Diese Schätzungen bilden zusammen mit den vorgegebenen Werten δ^* und ρ^* einen Wertesatz für die Parameter der Produktivitätsfunktion. Das Verfahren zur Auffindung eines geeigneten Anfangswertesatzes für diese Parameter läuft nun darauf hinaus, daß man für die beiden Parameter ρ und δ mehrere alternative Wertesätze vorgibt, zu jedem dieser Wertesätze die übrigen Parameter α, γ und r durch Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf den Ansatz (C. 43) schätzt und schließlich *den* Wertesatz für die Parameter als Anfangswertesatz in die Iteration eingibt, bei dem die Kleinst-Quadrate-Reststreuung

$$\text{(C. 44)} \quad s^2_{\hat{u}_2} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \hat{u}^2_{2t} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} (\ln Y_t - \ln \hat{\gamma} - \hat{\alpha} t - \hat{r} \ln X^*_t)^2$$

des Schätzansatzes (C. 43) am kleinsten ist. Frohn schlägt für den Parameter ρ die folgenden Alternativwerte vor[11]):

(C. 45) ρ^* : 1,5; 0,5; — 0,5.

Da δ zwischen 0 und 1 liegt, werden im vorliegenden Fall für δ die Alternativwerte:

(C. 46) δ^* : 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9

vorgegeben und diese mit den Alternativwerten für ρ kombiniert. Dadurch ergeben sich 27 zu überprüfende Wertesätze.

Die Analyse für den Anfangswertesatz kann noch verfeinert werden, indem für ρ die zusätzlichen Werte

(C. 47) ρ : 2; 1,7; 1

und für δ im Bereich zwischen 0,3 und 0,6 auch die Zwischenwerte

(C. 48) δ^* : 0,35; 0,45; 0,55

verwendet werden. Mit diesen Zusatzwerten müssen für jeden Industriezweig jeweils 72 alternative Wertesätze zur Auffindung des jeweiligen Anfangswertesatzes überprüft werden.

Neben dem Problem der Ermittlung eines geeigneten Anfangswertesatzes für die Parameter besteht ein weiteres Problem darin, daß das Iterationsverfahren gegen einen Schätzvektor $\breve{\theta} = (\breve{\gamma}, \breve{\alpha}, \breve{\delta}, \breve{r}, \breve{\rho})$ konvergiert, bei dem der zu minimierende Ausdruck

$$\text{(C. 49)} \quad Q(\theta | \pi_t, L_t, \varkappa_t, t;\ t = 1,2,\ldots,T) = \sum_{t=1}^{T} [\pi_t - f(L_t, \varkappa_t, t, \theta)]^2$$

$$\text{mit } f(\ldots) = \gamma e^{\alpha t} L_t^{r-1} \left[\delta \varkappa_t^{-\rho} + (1-\delta)\right]^{-r/\rho}$$

nicht sein absolutes, sondern nur ein relatives Minimum erlangt. Zur Überprüfung dieser Frage empfiehlt es sich, das Verfahren nach durchgeführter Schätzung nochmals mit einigen alternativen Anfangswertesätzen

[10]) Vgl. *Frohn, J.*, *R. Krengel* et al., Der technische Fortschritt in der Industrie, Berlin 1973, S. 63.

[11]) *Frohn, J.*, Untersuchungen zur CES-Produktionsfunktion, Würzburg 1970, S. 89.

zu wiederholen. Streben dabei die Iterationen gegen dieselbe Schätzung wie im ersten Lauf, so kann der Verdacht auf ein relatives Minimum weitgehend entkräftet werden.

Wie oben bereits angedeutet, bietet sich als weitere Möglichkeit zur Schätzung der CES-Produktivitätsfunktion ein Verfahren an, das auf dem Prinzip der Kmenta Approximation[12]) beruht und das im folgenden näher beschrieben werden soll.

Logarithmieren wir die CES-Produktivitätsfunktion (C. 40), so ergibt sich der Ausdruck

$$\text{(C. 50)} \quad \ln \pi_t = \ln \gamma + \alpha t + (r-1) \ln L_t - \frac{r}{\rho} \ln \left[\delta \varkappa_t^{-\rho} + (1-\delta) \right] + u_{1t}.$$

Die Kmenta Approximation besteht darin, daß der Logarithmus der eckigen Klammer auf der rechten Seite von (C. 50) in eine Taylor-Reihe um $\rho = 0$ entwickelt und diese Reihe nach der zweiten Ableitung abgebrochen wird. Damit geht der Ausdruck (C. 50) in den Ansatz

$$\text{(C. 51)} \quad \ln \pi_t = \ln \gamma + \alpha t + (r-1) \ln L_t + r\delta \ln \varkappa_t - \frac{r\rho\delta(1-\delta)}{2} (\ln \varkappa_t)^2 + u_{3t}$$

über, wobei die Gleichheit beider Seiten durch das Störglied u_{3t} erreicht wird. Auf diesen Ausdruck läßt sich die gewöhnliche Methode der kleinsten Quadrate anwenden, aus deren Parameterschätzungen man Schätzungen für γ, α, r, δ und ρ berechnen kann.

Einschränkend muß zu diesem Verfahren angemerkt werden, daß die Kmenta Approximation um $\rho = 0$ entwickelt wird und somit dieses Verfahren nur auf Industriezweige angewendet werden kann, in denen diese Bedingung annähernd erfüllt ist.

Neben dem Niveauansatz der Produktivitätsfunktion soll auch hier zur Vermeidung etwaiger Multikollinearitätsprobleme der zugehörige Wachstumskoeffizientenansatz auf seine Brauchbarkeit als Schätzgrundlage überprüft werden. Aus dem Niveauansatz (C. 40) erhalten wir für den Wachstumskoeffizienten den Ausdruck

$$\text{(C. 52)} \quad wk_\pi = e^\alpha \left(\frac{L_t}{L_{t-1}} \right)^{r-1} \left\{ \frac{\delta \varkappa_t^{-\rho} + (1-\delta)}{\delta \varkappa_{t-1}^{-\rho} + (1-\delta)} \right\}^{-r/\rho} e^{u_{4t}}$$

Die Parameter α, δ, r und ρ lassen sich bei diesem Ausdruck ebenfalls wie bei der Produktivitätsfunktion (C. 40) auf zwei Wegen, einmal mit Hilfe der iterativen Methode der kleinsten Quadrate und zum anderen mit dem Kmenta Verfahren schätzen. Um für die iterative Methode einen geeigneten Anfangswertesatz für die Parameter zu ermitteln, werden die auf Seite 326 vorgeschlagenen Alternativwertesätze für δ und ρ vorgegeben und zunächst die zu den einzelnen Industriezweigen gehörenden Zeitreihen für die Größe

$$\text{(C. 53)} \quad V_t = \left\{ \frac{\delta^* \varkappa_t^{-\rho^*} + (1-\delta^*)}{\delta^* \varkappa_{t-1}^{-\rho^*} + (1-\delta^*)} \right\}^{-\frac{1}{\rho^*}}$$

berechnet. Unter Benutzung dieser Größe läßt sich der Ansatz (C. 52) in der Form

$$\text{(C. 54)} \quad wk_\pi = e^\alpha \, wk_L^{r-1} \, V_t^r \, e^{u_{5t}} \quad \text{mit } wk_L = \frac{L_t}{L_{t-1}}$$

schreiben, aus dem sich der logarithmische Schätzansatz

$$\text{(C. 55)} \quad \ln wk_\pi + \ln wk_L = \ln wk_Y = \alpha + r \ln V^*_t + u_{5t}$$

mit

$$\ln V^*_t = \ln V_t + \ln wk_L$$

ergibt. Durch Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf diesen Ansatz gelangen wir für jeden Wertesatz δ^* und ρ^* zu Schätzungen für die restlichen Parameter α und r. Aus den sich so ergebenden alternativen Wertesätzen für die Parameter α, δ, r und ρ wird schließlich der Wertesatz als Anfangswertesatz verwendet, für den die Kleinst-Quadrate-Reststreuung

$$\text{(C. 56)} \quad s^2_{\hat{u}_5} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \hat{u}^2_{5t} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (\ln wk_Y - \hat{\alpha} - \hat{r} \ln V^*_t)^2$$

des Schätzansatzes (C. 55) am kleinsten ist.

Aus dem Schätzansatz (C. 52) lassen sich ausschließlich Schätzungen für die Parameter α, ρ, δ und r herleiten, nicht aber für den Niveauparameter γ. Eine Schätzung für diesen Parameter erhält man durch die folgende Berechnung

$$\text{(C. 57)} \quad \widehat{\ln \gamma} = \overline{\ln \pi} - \hat{\alpha}\bar{t} - (\hat{r}-1) \overline{\ln L} + \frac{\hat{r}}{\hat{\rho}} \overline{\ln \left[\delta \varkappa^{-\hat{\rho}} + (1-\delta) \right]},$$

$$\text{(C. 58)} \quad \hat{\gamma} = \operatorname{delog} \widehat{(\ln \gamma)},$$

worin die Querstriche die arithmetischen Mittel im Schätzzeitraum bezeichnen. Die Schätzfunktion (C. 57) ergibt sich dadurch, daß man die Produktivitätsfunktion (C. 40) logarithmiert, die Parameter α, ρ, δ und r durch ihre Schätzungen ersetzt und danach zur Schätzung von $\ln \gamma$ die Methode der kleinsten Quadrate anwendet.

Ein weiteres Verfahren zur Schätzung der Parameter des Wachstumskoeffizientenansatzes (C. 52) basiert auf der Kmenta Approximation. Logarithmieren wir den Wachstumskoeffizientenansatz (C. 52), so ergibt sich der Ausdruck

$$\text{(C. 59)} \quad \ln wk_\pi = \alpha + (r-1) \ln wk_L - \frac{r}{\rho} \ln \left[\delta \varkappa_t^{-\rho} + (1-\delta) \right] + \frac{r}{\rho} \ln \left[\delta \varkappa_{t-1}^{-\rho} + (1-\delta) \right] + u_{4t}.$$

Durch Anwendung der Kmenta Approximation auf die Logarithmen der Ausdrücke in den beiden eckigen Klammern auf der rechten Seite von (C. 59) ergibt sich bei Abbruch der Taylorentwicklungen jeweils nach der zweiten Ableitung der Ausdruck

[12]) *Kmenta, J.*, On Estimation of the CES Production Function, International Economic Review, Vol. 8, 1967.

$$(C.\,60)\quad \ln wk_{\pi} = \alpha + (r-1)\ln wk_L + r\delta \ln wk_{\varkappa} - \frac{r\rho\delta(1-\delta)}{2}\Big[(\ln \varkappa_t)^2 - (\ln \varkappa_{t-1})^2\Big] + u_{6t}\,,$$

$$wk_{\varkappa} = \frac{\varkappa_t}{\varkappa_{t-1}}\,,$$

auf den sich die gewöhnliche Methode der kleinsten Quadrate anwenden läßt, aus deren Parameterschätzungen Schätzungen für die Parameter α, δ, r und ρ berechnet werden können. Die Schätzung für den Niveauparameter γ erhält man hierbei ebenfalls aus den Beziehungen (C. 57) und (C. 58).

Da man im Rahmen der Iterativen Methode der kleinsten Quadrate auch Schätzungen für die Standardabweichungen der Parameterschätzungen berechnen kann (siehe Anhang), ist es wie bei der Cobb-Douglas-Funktion auch hier möglich, aufgrund der Parameterschätzungen mit Hilfe des t-Tests als heuristischer Entscheidungshilfe bestimmte Hypothesen, wie die Hypothesen $H_0 : \rho = 0$ und $H_0 : r = 1$ zu überprüfen. In gleicher Weise läßt sich auch bei den Kmenta-Ansätzen der t-Test verwenden, mit dem hier insbesondere die Kleinst-Quadrate-Schätzung $\widehat{r-1}$ gegenüber der Hypothese $H_0 : r-1 = 0$ (d.h. $r = 1$) getestet werden kann.

3. Erklärungs- und Prognoseansätze für die potentielle Arbeitsproduktivität und den potentiellen Arbeitseinsatz

Auch im Rahmen der CES-Produktionsfunktion lassen sich für die Erklärung und Prognose der potentiellen Arbeitsproduktivität und des potentiellen Arbeitseinsatzes verschiedene Funktionen aufstellen, denen wir uns im folgenden näher zuwenden wollen.

Einen Ansatz für die Erklärung der Entwicklung der potentiellen Arbeitsproduktivität innerhalb des Schätzzeitraumes erhalten wir dadurch, daß wir in (C. 40) die Parameter durch ihre Schätzungen und die Auslastungsgrößen Y_t, L_t und $\varkappa_t$ durch ihre Kapazitätsgrößen ersetzen. Somit ergibt sich für π_c der folgende Ausdruck

$$(C.\,61)\quad \pi_{c,t} = \hat{\gamma}\, e^{\hat{\alpha}t}\, L_{c,t}^{\hat{r}-1}\left[\hat{\delta}\, \varkappa_{c,t}^{-\hat{\rho}} + (1-\hat{\delta})\right]^{-\frac{\hat{r}}{\hat{\rho}}} e^{\hat{u}_{7t}}$$

mit dem Wachstumsratenansatz

$$(C.\,62)\quad w_{\pi_c} = \hat{\alpha} + (\hat{r}-1)\, w_{L_c} - \frac{\hat{r}}{\hat{\rho}} w_{\left[\hat{\delta}\, \varkappa_c^{-\hat{\rho}} + (1-\hat{\delta})\right]} + \hat{u}_{8t}\,.$$

Nach (C. 62) ist das Wachstum der potentiellen Arbeitsproduktivität um so stärker, je größer cet. par. das Wachstum des potentiellen Arbeitseinsatzes bei $\hat{r} > 1$ ist. Ist $\hat{r} < 1$, so verringert ein steigendes Wachstum des potentiellen Arbeitseinsatzes cet. par. das Wachstum der potentiellen Produktivität. Demgegenüber wirkt cet. par. ein Anstieg der Kapitalintensität bei Vollauslastung stets erhöhend auf die potentielle Produktivität.

Ein weiterer Ansatz ergibt sich dadurch, daß wir in (C. 61) L_c durch $\frac{Y_c}{\pi_c}$ ersetzen und nach π_c explizieren.

Dadurch erlangen wir den Ausdruck

$$(C.\,63)\quad \pi_{c,t} = \hat{\gamma}^{\frac{1}{\hat{r}}}\, e^{\frac{\hat{\alpha}}{\hat{r}}t}\, Y_{c,t}^{1-\frac{1}{\hat{r}}}\left[\hat{\delta}\varkappa_{c,t}^{-\hat{\rho}} + (1-\hat{\delta})\right]^{-\frac{1}{\hat{\rho}}} e^{\hat{u}_{9t}}$$

mit dem Wachstumsratenansatz

$$(C.\,64)\quad w_{\pi_c} = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{r}} + \left(1 - \frac{1}{\hat{r}}\right) w_{Y_c} - \frac{1}{\hat{\rho}}\, w_{\left[\hat{\delta}\varkappa_c^{-\hat{\rho}} + (1-\hat{\delta})\right]} + \hat{u}_{10,t}\,.$$

Anhand dieses Ausdrucks zeigt es sich, daß das Wachstum der potentiellen Produktivität cet. par. mit steigendem Wachstum des Produktionspotentials steigt bzw. fällt, wenn $\hat{r} > 1$ bzw. $\hat{r} < 1$ gilt. Ferner ist das Wachstum der potentiellen Produktivität cet. par. um so höher, je größer das Wachstum der Kapitalintensität bei Vollauslastung ist.

Neben den voranstehenden Ansätzen kann noch eine dritte Beziehung hergeleitet werden. Diese Beziehung ist dadurch gekennzeichnet, daß π_c in Abhängigkeit vom technischen Fortschritt, vom Produktionspotential und vom Kapitalkoeffizienten bei Vollauslastung erklärt wird. Ihr Ausdruck lautet

$$(C.\,65)\quad \pi_{c,t} = (1-\hat{\delta})^{-1/\hat{\rho}}\left[(\hat{\gamma} e^{\hat{\alpha}t})^{\hat{\rho}/\hat{r}}\, Y_{c,t}^{\hat{\rho}(1-\frac{1}{\hat{r}})} - \hat{\delta}\left(\frac{K_{c,t}}{Y_{c,t}}\right)^{-\hat{\rho}}\right]^{1/\hat{\rho}} e^{\hat{u}_{11,t}}\ ^{13)}\,.$$

Da in der eckigen Klammer alle erklärenden Größen auftreten, läßt sich hier nicht wie bei den beiden anderen Funktionen ein Wachstumsratenansatz herleiten, der für eine Komponentenanalyse geeignet wäre. Zweckmäßige Ansätze für eine derartige Analyse zur Erklärung der Entwicklung der potentiellen Produktivität im Schätzzeitraum stellen somit die Wachstumsratenausdrücke (C. 62) und (C. 64) dar.

Für den potentiellen Arbeitseinsatz L_c läßt sich unter Verwendung der Beziehung $L_c = Y_c/\pi_c$ aus (C. 63) der Ansatz

$$(C.\,66)\quad L_{c,t} = \hat{\gamma}^{-\frac{1}{\hat{r}}}\, e^{-\frac{\hat{\alpha}}{\hat{r}}t}\, Y_{c,t}^{\frac{1}{\hat{r}}}\left[\hat{\delta}\varkappa_{c,t}^{-\hat{\rho}} + (1-\hat{\delta})\right]^{\frac{1}{\hat{\rho}}} e^{\hat{u}_{12,t}}$$

---

[13]) (C. 65) ergibt sich aus der Funktion

$$\pi_{c,t} = \hat{\gamma}\, e^{\hat{\alpha}t}\, L_{c,t}^{-1}\left[\hat{\delta}K_{c,t}^{-\hat{\rho}} + (1-\hat{\delta})L_{c,t}^{-\hat{\rho}}\right]^{-\hat{r}/\hat{\rho}} e^{\hat{u}_{7t}}$$

dadurch, daß man $L_{c,t}$ durch $\frac{Y_{c,t}}{\pi_{c,t}}$ ersetzt und nach π_c expliziert.

mit dem Wachstumsratenansatz

$$(C.\,67) \quad w_{L_c} = -\frac{\hat{\alpha}}{\hat{f}} + \frac{1}{\hat{f}} w_{Y_c} + \frac{1}{\hat{\rho}} w_{\left[\hat{\delta} \varkappa_c^{-\hat{\rho}} + (1-\hat{\delta})\right]} + \hat{u}_{13,t}$$

herleiten. Wie man anhand von (C. 66) sieht, wird der potentielle Arbeitseinsatz durch den technischen Fortschritt, das Produktionspotential und die Kapitalintensität bei Vollauslastung bestimmt. Je größer cet. par. der technische Fortschritt oder/und die Kapitalintensität bei Vollauslastung ist, desto geringer ist der potentielle Bedarf am Faktor Arbeit. Demgegenüber steigt dieser Bedarf, wenn sich cet. par. das Produktionspotential erhöht.

Für eine Komponentenanalyse zur Erklärung der Entwicklung des potentiellen Arbeitsbedarfes während des Schätzzeitraumes kann insbesondere der Wachstumsratenansatz (C. 67) herangezogen werden.

Für die Prognose von π_c bilden die Beziehungen (C. 63) und (C. 65) unter Vernachlässigung ihrer Residualglieder alternative Prognoseansätze. Prognoseberechnungen aufgrund dieser Ausdrücke bedingen wiederum externe Prognosen für das Produktionspotential und die Kapitalintensität bzw. den Kapitalkoeffizienten bei Vollauslastung. Der Ansatz (C. 61) scheidet als Prognoseansatz für π_c aus, weil in ihm die Größe L_c auftritt, die nicht extern vorgegeben werden, sondern ebenfalls Gegenstand der Prognose sein soll.

Die Prognose des potentiellen Arbeitsbedarfes L_c läßt sich auch hier wie im Fall der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion über die Definitionsgleichung

$$(C.\,68) \quad \hat{L}_{c,t} = \frac{\hat{Y}_{c,t}}{\hat{\pi}_{c,t}}, \; t = T + i, \; i = 1,2,\ldots,$$

ermitteln, wobei $\hat{\pi}_{c,t}$ die berechneten Prognosen von π_c und $\hat{Y}_c$ geeignete externe Prognosen des Produktionspotentials bezeichnen.

II. Schätzansätze und Schätzverfahren aufgrund von Produktionsfunktionen in Verbindung mit Annahmen über das ökonomische Verhalten der Unternehmer

a) Vorbemerkung

In Abschnitt I. wurden die potentielle Arbeitsproduktivität und der potentielle Arbeitseinsatz auf der Grundlage von Produktionsfunktionen geschätzt, ohne daß eine Annahme über ein bestimmtes ökonomisches Verhalten der Unternehmer im Hinblick auf den Produktionsprozeß unterstellt wurde. Im folgenden sollen die bereits verwendeten Produktionsfunktionen alternativ mit zwei Annahmen über die ökonomische Verhaltensweise der Unternehmer gekoppelt werden. Dabei wird zunächst davon ausgegangen, daß die Unternehmer bei gegebener Preis- und Kostensituation stets *die* Produktionsmenge anstreben, bei der ihr Gewinn maximal ist. Diese unter dem Namen Gewinnmaximierungs-Hypothese bekannte Annahme ist — wie bereits in Kapitel A. erwähnt wurde — zumindest, was die kurzfristige Betrachtung anlangt, umstritten. Bei langfristiger Betrachtung lassen sich dagegen eher Gründe für ihre Rechtfertigung anführen.

In der weiteren Untersuchung wird die Gewinnmaximierungs-Hypothese aufgegeben und unterstellt, daß die jeweilige Produktionshöhe für die einzelnen Unternehmen vorgegeben ist und die Unternehmer lediglich bestrebt sind, die Produktion bei gegebenen Faktorpreisen mit den jeweils kostenminimalen Faktorenmengen zu erstellen.

Bei beiden alternativen Hypothesen wird die Produktivitätsanalyse zunächst auf der Grundlage der allgemeineren CES-Produktionsfunktion durchgeführt. Die Betrachtung wird danach auf den Spezialfall der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion spezialisiert.

b) Schätzung auf der Grundlage einer CES-Produktionsfunktion bei Gewinnmaximierung

1. Die Produktivitätsfunktion

Wir gehen davon aus, daß die Produktion nach der CES-Produktionsfunktion (C. 37) erstellt wird, die unter Berücksichtigung von (C. 5) wie folgt lautet:

$$(C.\,69) \quad Y_t = \gamma e^{\alpha t}\left[\delta K_t^{-\rho} + (1-\delta) L_t^{-\rho}\right]^{-r/\rho} e^{u_{1t}}.$$

Der Gewinn aus der Produktion ergebe sich aus der linearen Gewinnfunktion

$$(C.\,70) \quad G_t = p_t Y_t - i_t K_t - l_t L_t$$

mit p = Produktpreis, i = Kapitalkostensatz und l = Lohnsatz. Dabei sei unterstellt, daß die Größen p, i und l für die Unternehmer vom Markt her vorgegebene Größen sind, d. h. daß auf dem Produktmarkt sowie auf den Faktorenmärkten vollkommene Konkurrenz herrscht[14]). Die Gewinnmaximierungs-Hypothese impliziert nun, daß die Unternehmer bei diesen Gegebenheiten die Kapital- und Arbeitseinsatzmenge K_t und L_t und damit die Produktionsmenge Y_t in jeder Periode t so bestimmen, daß ihr Gewinn G_t stets maximal ist[15]). Unter Annahme dieser Verhaltensweise folgt für die tatsächliche Arbeitsproduktivität die Funktion

$$(C.\,74) \quad \pi_t = \left[\frac{(\gamma e^{\alpha t})^{\rho/r}}{r(1-\delta)}\right]^{\frac{1}{1+\rho}} \left(\frac{l_t}{p_t}\right)^{\frac{1}{1+\rho}} Y_t^{-\rho(1-r)/r(1+\rho)} e^{u_{3t}}\;^{16)}.$$

---

[14]) u_{1t} sei unkorreliert mit p_t, i_t und l_t.

[15]) Die den Gewinn maximierenden Faktoreinsatzmengen $\tilde{K}_t$ und $\tilde{L}_t$ sowie die zugehörige Produktionsmenge $\tilde{Y}_t$ erhält man formal dadurch, daß man unter Anwendung des Lagrange-Verfahrens den Ausdruck

$$(C.\,71) \quad G^*_t = p_t Y_t - i_t K_t - l_t L_t - \lambda\,[Y_t - f(\ldots)]$$

(λ = Lagrange-Multiplikator, f(...) steht für den Ausdruck der CES-Produktionsfunktion (C. 69))

nach Y_t, L_t, K_t und λ differenziert, die Ableitungen gleich 0 setzt und dieses System von Ableitungen nach $\tilde{Y}_t$, $\tilde{L}_t$ und $\tilde{K}_t$ löst. Somit ergeben sich für die gewinnmaximierenden Faktoreinsatzmengen $\tilde{L}_t$ und $\tilde{K}_t$ die Ausdrücke

$$(C.\,72) \quad \tilde{L}_t = \left[\frac{(\gamma e^{\alpha t})^{\rho/r}}{r(1-\delta)}\right]^{-\frac{1}{1+\rho}} \left(\frac{l_t}{p_t}\right)^{-\frac{1}{1+\rho}} \tilde{Y}_t^{\,(\frac{\rho}{r}+1)/(1+\rho)} e^{u_{2t}},$$

$$(C.\,73) \quad \tilde{K}_t = \left[\frac{(\gamma e^{\alpha t})^{\rho/r}}{r\delta}\right]^{-\frac{1}{1+\rho}} \left(\frac{i_t}{p_t}\right)^{-\frac{1}{1+\rho}} \tilde{Y}_t^{\,(\frac{\rho}{r}+1)/(1+\rho)} e^{u_{2t}}.$$

Das Schlangesymbol wird künftig der Einfachheit halber fortgelassen.

[16]) Diese Beziehung ergibt sich unmittelbar dadurch, daß man L_t in $\pi_t = Y_t/L_t$ durch die rechte Seite von (C. 72) ersetzt.

2. Die Schätzung der Produktivitätsfunktion

Es wäre zunächst naheliegend, die Produktivitätsfunktion (C. 74) dadurch zu schätzen, daß man sie durch Logarithmierung linearisiert und danach die Methode der kleinsten Quadrate anwendet. Durch Logarithmierung dieser Funktion erhalten wir

$$(C.\ 75)\quad \ln \pi_t = \frac{1}{1+\rho}\left\{\frac{\rho}{r}\ln\gamma - \ln[r(1-\delta)]\right\} + \frac{\rho}{r(1+\rho)}\alpha t + \frac{1}{1+\rho}\ln\left(\frac{l_t}{p_t}\right) - \frac{\rho(1-r)}{r(1+\rho)}\ln Y_t + u_{3t}$$

oder kürzer

$$(C.\ 76)\quad \ln \pi_t = a + bt + c\ln\left(\frac{l_t}{p_t}\right) + d\ln Y_t + u_{3t}.$$

Durch Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf diese Gleichung würden sich für die Parameter a, b, c und d Schätzwerte $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ und $\hat{d}$ ergeben, aus denen sich dann für die Parameter ρ, r und α wie folgt Schätzwerte berechnen ließen:

$$(C.\ 77)\quad \hat{\rho} = \frac{1}{\hat{c}} - 1,\ \hat{r} = \frac{\hat{c}\hat{\rho}}{\hat{c}\hat{\rho}-\hat{d}},\ \hat{\alpha} = \frac{\hat{b}\,\hat{r}}{\hat{c}\,\hat{\rho}}.$$

Für den Niveauparameter γ und den Parameter δ könnten wir auf diesem Wege keine Schätzungen ermitteln, da $\hat{a}$ nicht nach beiden Schätzungen lösbar ist. Die Schätzung dieser Parameter ließe sich dadurch bewerkstelligen, daß man die aus dem Ansatz (C. 76) geschätzten Werte für die Parameter ρ, r und α in die Produktivitätsfunktion (C. 40) einsetzt und die restlichen Parameter γ und δ mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate schätzt. Dieser Schätzweg sei aber hier nicht näher dargestellt, da die sich dabei ergebenden Schätzungen für γ und δ sowie die obigen Schätzungen $\hat{\rho}$, $\hat{r}$ und $\hat{\alpha}$ nicht verzerrungsfrei sind, d. h. einen Haavelmo-Bias aufweisen, weil zwischen Y_t und dem Störglied u_{3t} in (C. 74) Korrelation besteht und somit $\ln Y_t$ und u_{3t} in (C. 75) ebenfalls korreliert sind. Dies ist leicht einzusehen. So ist Y_t über die CES-Produktionsfunktion, die im Gewinnmaximierungsprozeß erhalten bleibt, abhängig vom Arbeitseinsatz L_t und damit eine Funktion vom Störglied u_{2t} in der Arbeitsnachfragefunktion (C. 72), woraus unmittelbar die Korrelation zwischen Y_t und dem Störglied u_{3t} in der Produktivitätsfunktion (C. 74) resultiert. Diese Problematik tritt nicht auf, wenn $r = 1$ ist, d. h. wenn konstante Skalenerträge vorliegen. In diesem speziellen Fall geht der logarithmische Schätzansatz (C. 75) in die Form

$$(C.\ 78)\quad \ln \pi_t = \frac{1}{1+\rho}\Big[\rho\ln\gamma - \ln(1-\delta)\Big] + \frac{\rho}{1+\rho}\alpha t + \frac{1}{1+\rho}\ln\left(\frac{l_t}{p_t}\right) + u_{3t}$$

über[17]). In diesem Ansatz tritt ln Y nicht mehr auf. Da l und p vom Markt her vorgegebene Größen darstellen, kann zwischen dem Verhältnis l_t/p_t und dem Störglied u_{3t} Unabhängigkeit vorausgesetzt werden. Das gleiche gilt auch für t und u_{3t}, wenn u_{3t} keinem Trend folgt, was ohnehin unterstellt ist. Somit würde in diesem Fall die Methode der kleinsten Quadrate zu verzerrungsfreien Schätzungen führen. Die Verwendung des Schätzansatzes (C. 78) ist aber nur gerechtfertigt, wenn man a priori weiß, daß $r = 1$ ist. Über dieses a priori Wissen verfügt man jedoch nicht. Kenntnis darüber soll vielmehr erst in der Analyse gewonnen werden.

Im folgenden wollen wir von der allgemeineren Produktivitätsfunktion (C. 74) ausgehen. Um in diesem Fall den aus der Korrelation zwischen Y_t und u_{3t} resultierenden Haavelmo-Bias zu vermeiden, muß ein simultanes Schätzverfahren herangezogen werden. Ein solches Verfahren ergibt sich hier aus der Anwendung des Prinzips der Indirekten Methode der kleinsten Quadrate. Die Nützlichkeit dieses Prinzips ist für den vorliegenden Fall dadurch gegeben, daß sich die Produktivitätsfunktion in eine Reduzierte-Form-Gleichung überführen läßt, in der die Produktivität ausschließlich in Abhängigkeit exogener Größen dargestellt und somit die Korrelation zwischen Y_t und dem Störglied eliminiert ist. Um zu dieser Reduzierten-Form-Gleichung zu gelangen, ersetzen wir zunächst in der CES-Produktionsfunktion (C. 69), die — wie schon einmal betont — im Gewinnmaximierungsmodell erhalten bleibt, die Größen L_t und K_t durch die rechten Seiten von (C. 72) und (C. 73). Explizieren wir dann nach Y_t, so ergibt sich unter Vernachlässigung eines Störgliedes der Ausdruck

$$(C.\ 79)\quad Y_t = (\gamma e^{\alpha t})^{-\frac{1}{r-1}}\, r^{-\frac{r}{r-1}}\left[\delta^{\frac{1}{1+\rho}}\left(\frac{i_t}{p_t}\right)^{\frac{\rho}{1+\rho}} + (1-\delta)^{\frac{1}{1+\rho}}\cdot\left(\frac{l_t}{p_t}\right)^{\frac{\rho}{1+\rho}}\right]^{\frac{r(1+\rho)}{\rho(r-1)}}$$ [18]).

Ersetzt man jetzt Y_t in der Produktivitätsfunktion (C. 74) durch die rechte Seite von (C. 79), so erhält man die Reduzierte-Form-Gleichung

$$(C.\ 80)\quad \pi_t = \frac{1}{r}\cdot\frac{l_t}{p_t}\left[\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{\frac{1}{1+\rho}}\left(\frac{i_t}{l_t}\right)^{\frac{\rho}{1+\rho}} + 1\right]e^{u_{4t}}.$$

Diese Funktion muß mit der Iterativen Methode der kleinsten Quadrate geschätzt werden, da sie sich nicht in einen für die Anwendung der Gewöhnlichen Methode der kleinsten Quadrate geeigneten Ausdruck überführen läßt[19]). Die Kmenta Annäherung ist hier für die Schätzung wenig nützlich.

[17]) Dieser Ansatz wurde von ACMS in die Literatur eingeführt und empirisch angewendet. Vgl. *Arrow, K. J., H. B. Chenery, B. S. Minhas, R. M. Solow*, Capital — Labor Substitution and Economic Efficiency, Review of Economics and Statistics, Vol. 43, 1961.

[18]) Diese Funktion entartet für $r = 1$. In diesem Fall geht — wie oben gezeigt — der logarithmische Ansatz (C. 75) der Produktivitätsfunktion (C. 74) in den logarithmischen Ansatz (C. 78) über, der mit der Gewöhnlichen Methode der kleinsten Quadrate verzerrungsfrei geschätzt werden kann.

[19]) Für die Schätzung von (C. 80) ist es erforderlich, daß für den Markt des Faktors Kapital ebenfalls vollständige Konkurrenz vorausgesetzt wird, da andernfalls zwischen i_t und dem Störglied u_{4t} Korrelation bestehen würde, was einen Haavelmo-Bias zur Folge hätte.

In dem Ansatz (C. 80) treten nur die Parameter r, δ und ρ auf. Die übrigen Parameter γ und α lassen sich in einem zweiten, weiter unten noch näher zu beschreibenden Schritt schätzen, nachdem zunächst die Parameter r, δ und ρ mit Hilfe der Iterativen Methode der kleinsten Quadrate geschätzt sind. Zur erfolgreichen Anwendung der Iterativen Methode der kleinsten Quadrate ist auch hier ein geeigneter Anfangswertesatz, und zwar für die Parameter r, δ und ρ erforderlich. In diesem Zusammenhang wird vorgeschlagen, als Anfangswerte die verzerrten Schätzwerte zu verwenden, die sich aus dem logarithmischen Schätzansatz (C. 75) mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate ergeben. Aus diesem Schätzansatz lassen sich aber nur Anfangswerte für die Parameter r und ρ gewinnen, nicht aber für den Parameter δ. Für diesen Parameter können wir jedoch einen Anfangswert in einem weiteren Schätzschritt ermitteln. Zu diesem Zweck setzen wir die aus (C. 75) gewonnenen Kleinst-Quadrate-Schätzwerte $\hat{r}$ und $\hat{\rho}$ in (C. 80) ein und erhalten unter Verwendung eines neuen Störgliedes und durch Logarithmierung den Schätzansatz

$$\text{(C. 81)} \quad M_t = \ln\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right) + u_{5t}$$

wobei

$$M_t = (1+\hat{\rho})\left[\ln\left(\pi_t - \frac{1}{\hat{r}}\frac{l_t}{p_t}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\hat{\rho}}{1+\hat{\rho}}\ln\left(\frac{i_t}{l_t}\right) + \ln\hat{r} - \ln\left(\frac{l_t}{p_t}\right)\right]$$

ist. Durch Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf (C. 81) erlangt man die Schätzung

$$\text{(C. 82)} \quad \widehat{\ln\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)} = \bar{M}$$

mit $\bar{M}$ als arithmetisches Mittel der M_t ($t = 1,2,\ldots,T$). Aus (C. 82) ergibt sich schließlich der Anfangswert für δ durch den Ausdruck

$$\text{(C. 83)} \quad \delta = \frac{\operatorname{delog}\bar{M}}{1+\operatorname{delog}\bar{M}} .$$

Somit steht ein Anfangswertesatz für die Parameter r, δ und ρ in (C. 80) zur Verfügung. Nach Anwendung der Iterativen Methode der kleinsten Quadrate auf diesen Ansatz stellt sich die Frage nach den Schätzwerten für die übrigen Parameter γ und α in der Produktivitätsfunktion (C. 74). Zur Berechnung dieser Schätzwerte setzt man die aus dem Ansatz (C. 80) mit Hilfe der Iterativen Methode der kleinsten Quadrate gewonnenen Schätzungen $\hat{r}$, $\hat{\delta}$ und $\hat{\rho}$ in (C. 75) ein und erhält den Schätzansatz

$$\text{(C. 84)} \quad W_t = \ln\gamma + \alpha t + u_{6t}$$

mit

$$W_t = \frac{\hat{r}(1+\hat{\rho})}{\hat{\rho}}\ln\pi_t + \frac{\hat{r}}{\hat{\rho}}\left\{\ln[\hat{r}(1-\hat{\delta})] - \right.$$

$$\left. - \ln\left(\frac{l_t}{p_t}\right)\right\} + (1-\hat{r})\ln Y_t,$$

aus dem sich mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate die restlichen Schätzungen $\hat{\gamma}$ und $\hat{\alpha}$ für γ und α berechnen lassen.

Für die vorangehend behandelten Schätzungen benötigt man im Vergleich zu den Schätzansätzen, die ohne Annahmen über das ökonomische Verhalten der Unternehmer hergeleitet wurden, zusätzlich unabhängige statistische Informationen für die Größen l, i und p. Würde man hier die Zeitreihen für den Kapitalkostensatz i über den Ausdruck $i = (pY - lL)/K$ bestimmen und diese anstelle einer unabhängigen statistischen Information verwenden, so würde dies in dem vorliegenden Produktionsmodell theoretisch die Restriktion $r = 1$ implizieren[20]). Ein derartiges Vorgehen würde bei allen Industriezweigen, bei denen diese Parameterbedingung nicht zutrifft, zu keinen aussagekräftigen Schätzungen führen.

Der Fall der Gewinnmaximierung unterscheidet sich vom Fall ohne jegliche Annahmen über das ökonomische Unternehmerverhalten aus ökonometrischer Sicht lediglich in der Schätzung der Parameter. Zur Erklärung und Prognose der beiden Größen π_c und L_c kann auch hier auf die Beziehungen in Abschnitt C. I. c) 3. zurückgegriffen werden, da diese Formeln im vorliegenden Fall ebenfalls Gültigkeit haben.

c) Schätzung auf der Grundlage einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion bei Gewinnmaximierung

Der Vollständigkeit halber soll im Rahmen der Gewinnmaximierung noch der Fall der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion behandelt werden. Wie im vorangehenden Abschnitt bei der CES-Funktion steht auch hier nur die Schätzung der fraglichen Parameter im Vordergrund. Erklärung und Prognose der potentiellen Arbeitsproduktivität π_c und des potentiellen Arbeitseinsatzes L_c lassen sich aufgrund der gleichen Beziehungen wie im Fall ohne Annahme über das ökonomische Verhalten der Unternehmer durchführen, da diese Beziehungen auch im vorliegenden Fall gelten. In diesem Zusammenhang sei auf die Ansätze in Abschnitt C. I. b) 3. verwiesen.

Für die folgende Betrachtung gehen wir von der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

$$\text{(C. 85)} \quad Y_t = \gamma e^{\alpha t} L_t^{r\beta} K_t^{r(1-\beta)} e^{u_{1t}}$$

aus. Der Gewinn bestimme sich auch hier wie im Fall der CES-Produktionsfunktion aufgrund der linearen Gleichung

$$\text{(C. 86)} \quad G_t = p_t Y_t - i_t K_t - l_t L_t .$$

Ferner sei wieder unterstellt, daß p, i und l vom Markt her gegebene Größen sind und die Unternehmer unter diesen Gegebenheiten in jeder Periode t den Kapitaleinsatz K_t, den Arbeitseinsatz L_t und die Produktion Y_t

[20]) Vgl. *Frohn, J., R. Krengel* et al., a.a.O., S. 40/41.

so bestimmen, daß der Gewinn maximal ist[21]). In diesem Fall folgt dann für die tatsächliche Arbeitsproduktivität die Beziehung

$$\text{(C. 90)} \quad \pi_t = \frac{1}{r\beta} \cdot \frac{l_t}{p_t} \cdot e^{u_{4t}} \quad ^{22}).$$

Durch Logarithmierung erhalten wir daraus den Schätzansatz

$$\text{(C. 91)} \quad \ln \pi_t - \ln \left(\frac{l_t}{p_t}\right) = \ln \left(\frac{1}{r\beta}\right) + u_{4t}.$$

Hieraus läßt sich für rβ über die Methode der kleinsten Quadrate die Schätzung

$$\text{(C. 92)} \quad \widehat{r\beta} = GM \left(\frac{l_t L_t}{p_t Y_t}\right), \; t = 1,2,\ldots,T\,,$$

herleiten, wobei die rechte Seite das geometrische Mittel der Anteile der Lohneinkommen an der nominalen Wertschöpfung bedeutet.

Durch analoges Vorgehen in bezug auf Gleichung (C. 89) erhalten wir zunächst für die tatsächliche Kapitalproduktivität den Ausdruck

$$\text{(C. 93)} \quad \pi_{K,t} = \frac{1}{r(1-\beta)} \, \frac{i_t}{p_t} \, e^{u_{5t}}\,,$$

aus dem sich durch Logarithmierung der Schätzansatz

$$\text{(C. 94)} \quad \ln \pi_{K,t} - \ln \left(\frac{i_t}{p_t}\right) = \frac{1}{r(1-\beta)} + u_{5t}$$

ergibt. Hieraus erlangt man über die Methode der kleinsten Quadrate für r(1—β) die Schätzung

$$\text{(C. 95)} \quad \widehat{r(1-\beta)} = GM \left(\frac{i_t K_t}{p_t Y_t}\right), \; t = 1,2,\ldots,T,$$

wobei die rechte Seite das geometrische Mittel der Anteile der Kapitaleinkommen an der nominalen Wertschöpfung darstellt.

Aus den Schätzungen (C. 92) und (C. 95) ergeben sich getrennte Schätzungen für r und β wie folgt:

$$\text{(C. 96)} \quad \hat{r} = \widehat{r\beta} + \widehat{r(1-\beta)}\,,$$

$$\text{(C. 97)} \quad \hat{\beta} = \frac{\widehat{r\beta}}{\hat{r}}\,.$$

Damit liegen zwei Parameter der zur Cobb-Douglas-Produktionsfunktion gehörenden Produktivitätsfunktion in geschätzter Form vor. Um auch für die restlichen beiden Parameter, den Niveauparameter γ und die Rate α des technischen Fortschritts, Schätzungen zu erhalten, gehen wir vom logarithmierten Ansatz (C. 6) der Cobb-Douglas-Produktivitätsfunktion (C. 2) aus, der zur Erleichterung der Lektüre hier nochmals niedergeschrieben sei:

$$\text{(C. 98)} \quad \ln \pi_t = \ln \gamma + \alpha t + (r\beta - 1) \ln L_t + r(1-\beta) \ln K_t + u_{1t}\,.$$

Ersetzen wir hierhin die kombinierten Parameter rβ und r(1—β) durch ihre Schätzungen (C. 92) und (C. 95), so erhalten wir den Schätzansatz

$$\text{(C. 99)} \quad (\ln \pi_t)^* = \ln \gamma + \alpha t + u_{6t}$$

mit

$$(\ln \pi_t)^* = \ln \pi_t - \widehat{(r\beta - 1)} \ln L_t - \widehat{r(1-\beta)} \ln K_t\,,$$

aus dem γ und α mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate geschätzt werden können.

Um bei der im vorangehenden behandelten Methode aussagekräftige Schätzungen für die Parameter zu erhalten, sind auch hier wie im Fall der CES-Produktivitätsfunktion bei Gewinnmaximierung zusätzlich unabhängige statistische Informationen über l, i und p notwendig (vgl. hierzu auch Seite 331).

d) Schätzung auf der Grundlage einer CES-Produktionsfunktion bei ausschließlicher Kostenminimierung

1. Die Ansätze von ACMS und Diwan

Die in den Abschnitten C. II. b) und C. II. c) hergeleiteten Schätzansätze basieren auf der Annahme, daß die Produzenten bei vom Markt her gegebenen Produkt- und Faktorpreisen jeweils nur die Gütermenge herstellen, bei welcher der Gewinn maximal ist. Hiergegen wird häufig eingewendet, daß diese Zielsetzung zumindest kurzfristig in der Realität nicht zutrifft, da die Unternehmungen in der kurzen Frist vielfach anderen Zielen (wie beispielsweise Erweiterung des Marktanteils, Erlangung eines bestimmten sozialen Ansehens) den Vorrang einräumen. Um diesen Sachverhalt in den Voraussetzungen der produktionstheoretischen Schätzansätze zu berücksichtigen, gibt man zuweilen die Gewinnmaximierungshypothese auf und beschränkt sich auf die Annahme, daß die Unternehmer — wenn sie auch nicht stets das Gewinnmaximum anstreben — zumindest die jeweilige Produktionsmenge mit der jeweils kostengünstigsten Faktorenmengenkombination, d.h. mit der sog. Minimalkostenkombination erstellen[23]). Die sich aus dieser Verhaltensmaxime für unsere Problemstellung ergebenden Schätzmöglichkeiten sollen im folgenden auf formalem Wege näher behandelt werden.

Wir wollen zunächst davon ausgehen, daß sich die Kosten der Unternehmung gemäß der Kostenfunktion

$$\text{(C. 100)} \quad C_t = l_t(L_t)\, L_t + i_t(K_t)\, K_t$$

---

[21]) Die gewinnmaximierenden Faktoreinsatzmengen $\tilde{L}_t$ und $\tilde{K}_t$ ergeben sich dadurch, daß man die Funktion

$$\text{(C. 87)} \quad G^*_t = p_t Y_t - i_t K_t - l_t L_t - \lambda\, [Y_t - f(\ldots)]$$

(λ = Lagrange-Multiplikator, f(...) = rechte Seite von (C. 85))

partiell nach L, K, Y und λ differenziert und die Ableitungen gleich 0 setzt. Aus diesen Ableitungen lassen sich dann für $\tilde{L}_t$ und $\tilde{K}_t$ die Ausdrücke

$$\text{(C. 88)} \quad \tilde{L}_t = r\beta \cdot \left(\frac{l_t}{p_t}\right)^{-1} \cdot \tilde{Y}_t \cdot e^{u_{2t}}\,,$$

$$\text{(C. 89)} \quad \tilde{K}_t = r(1-\beta) \cdot \left(\frac{i_t}{p_t}\right)^{-1} \cdot \tilde{Y}_t \cdot e^{u_{3t}}$$

herleiten, wobei u_{2t} und u_{3t} hinzugefügte eigenständige Störgrößen darstellen. Das Schlangesymbol wird im folgenden fortgelassen.

[22]) Diese Gleichung ergibt sich, indem man L_t in $\pi_t = Y_t/L_t$ durch die rechte Seite von (C. 88) ersetzt.

[23]) Vgl. z. B. *Frohn, J., R. Krengel* et al., a.a.O., S. 39 ff., insbesondere S. 55.

errechnen und die Produktion nach der Produktionsfunktion

$$\text{(C. 101)} \quad Y_t = f(K_t, L_t, t)$$

erfolgt, die homogen vom Grade r sei. Um die für eine vorgegebene Produktionshöhe Y_t geltende Bedingung der Minimalkostenkombination herzuleiten, ist es erforderlich, die Kostenfunktion (C. 100) unter der Nebenbedingung (C. 101) zu minimieren. Hierfür ist notwendig, daß die ersten Ableitungen des Lagrange-Ausdrucks

$$\text{(C. 102)} \quad C^*_t = l_t(L_t)\, L_t + i_t(K_t)\, K_t - \lambda[Y_t - f(K_t, L_t, t)]$$

nach K, L und λ gleich Null gesetzt werden. Führt man diese Operation durch, so ergibt sich aus diesen Ableitungen nach einigen Umformungen die folgende Bedingung für die Minimalkostenkombination:

$$\text{(C. 103)} \quad \frac{\partial f/\partial L_t}{\partial f/\partial K_t} = \frac{l_t}{i_t} \, \frac{1 + \frac{dl_t}{dL_t}\frac{L_t}{l_t}}{1 + \frac{di_t}{dK_t}\frac{K_t}{i_t}} = \frac{l_t}{i_t} \, \frac{m_{L,t}}{m_{K,t}} \, ,$$

wobei $m_{L,t}$ den Monopolgrad auf dem Arbeitsmarkt darstellt und entsprechend $m_{K,t}$ den Monopolgrad auf dem Kapitalmarkt bezeichnet. Ersetzt man die Produktionsfunktion f durch die CES-Produktionsfunktion (C. 69) und unterstellt man auf beiden Faktormärkten vollkommene Konkurrenz ($m_{L,t} = m_{K,t} = 1$), d. h. vom Markt her gegebenen Lohn- und Kapitalkostensatz, so ergibt sich aus (C. 103) die Beziehung

$$\text{(C. 104)} \quad \varkappa_t = \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{\frac{1}{1+\rho}} \left(\frac{l_t}{i_t}\right)^{\frac{1}{1+\rho}} e^{u_{1t}}$$ [24], [25])

mit $\varkappa_t = K_t/L_t$, wobei u_{1t} nicht das Störglied der CES-Produktionsfunktion, sondern eine hinzugefügte eigene Störgröße mit den üblichen Annahmen ist.

Diese Gleichung bietet in ihrer logarithmisch linearen Form

$$\text{(C. 105)} \quad \ln \varkappa_t = \frac{1}{1+\rho} \ln\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right) + \frac{1}{1+\rho} \ln\left(\frac{l_t}{i_t}\right) + u_{1t}$$

einen Schätzansatz, aus dem man mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate Schätzungen $\hat{\delta}$ und $\hat{\rho}$ für die Parameter δ und ρ gewinnen kann. Die Schätzungen für die übrigen Parameter γ, α und r der CES-Produktivitätsfunktion (C. 40) werden in der Literatur unter Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf den Schätzansatz

$$\text{(C. 106)} \quad \ln Y_t + \ln \gamma + \alpha t + r \ln X^*_t + u_{2t}$$

ermittelt, der sich aus (C. 40) — wie auf Seite 326 beschrieben — nach Einsetzen der Schätzungen $\hat{\delta}$ und $\hat{\rho}$ für die Parameter δ und ρ und anschließender Logarithmierung ergibt[26]), [27]). Das vorangehend beschriebene Verfahren stellt in der Tat einen relativ einfach zu handhabenden Weg für die Schätzung der Parameter der Produktivitätsfunktion dar, da hierbei ausschließlich die Gewöhnliche Methode der kleinsten Quadrate ohne den Umweg über Iterationen angewendet werden kann. Allerdings ist im Zusammenhang mit der Fragestellung der vorliegenden Arbeit nicht ganz zufriedenstellend, daß bei diesen Verfahren nicht von einer spezifischen Produktivitätsfunktion ausgegangen wird.

2. *Die Produktivitätsfunktion und ihre Schätzung*

Eine derartige Produktivitätsfunktion läßt sich auch im Modell ausschließlicher Kostenminimierung aufstellen, die sich von der im Gewinnmaximierungsmodell wesentlich unterscheidet.

Gehen wir wieder von der Annahme aus, daß auf den Faktormärkten vollkommene Konkurrenz herrscht

---

[24]) Diese Beziehung ist, ohne den Aspekt der Kostenminimierung zu erörtern, von ACMS in die Literatur eingeführt und empirisch angewendet worden. ACMS verwenden diese Gleichung auch in der Form

$$(*) \quad \frac{l_t}{i_t} = \frac{1-\delta}{\delta} \, \varkappa_t^{1+\rho} \, e^{u^*_t} \, ,$$

wie sie auch später von Diwan benutzt wird (vgl. *Arrow, K. J., H. B. Chenery, B. S. Minhas, R. M. Solow*, a. a. O., S. 233 und *R. K. Diwan*, An Empirical Estimate of the Elasticity of Substitution Production Function, Indian Economic Journal, 1964/65, Vol. 12, S. 348 f.).

[25]) (C. 104) gilt auch unter der weniger stringenten Annahme gleicher Monopolgrade auf den Faktormärkten ($m_{L,t} = m_{K,t}$), da im Kostenminimierungsmodell bei Verwendung einer CES-Produktionsfunktion — unter Vernachlässigung eines Störeinflusses — allgemein

$$\varkappa_t = \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{\frac{1}{1+\rho}} \left(\frac{l_t}{i_t}\right)^{\frac{1}{1+\rho}} \left(\frac{m_{L,t}}{m_{K,t}}\right)^{\frac{1}{1+\rho}}$$

ist, woraus für $m_{L,t} = m_{K,t}$ ebenfalls (C. 104) folgt. Damit wäre der Gedanke naheliegend, daß man (C. 104) bzw. (C. 105) auch als Schätzansatz für den allgemeineren Fall gleicher Monopolgrade auf den Faktormärkten verwenden kann und somit dieser allgemeinere Fall nicht von vornherein auf den speziellen und stringenten Fall vollkommener Konkurrenz eingeschränkt werden sollte (vgl. hierzu auch *Frohn, J., R. Krengel* et al., a. a. O., S. 40 ff. und S. 55). Hiergegen ist jedoch einzuwenden, daß im allgemeineren Fall die Abhängigkeit des Lohnsatzes l_t von der Arbeitsnachfrage L_t und die Abhängigkeit des Kapitalkostensatzes i_t von der Kapitalnachfrage K_t zugelassen sind. Damit ist aber zugleich eine Korrelation von l_t/i_t und dem Störglied u_{1t} in (C. 104) verbunden, woraus bei der Kleinst-Quadrate-Schätzung des zu (C. 104) gehörenden logarithmischen Schätzansatzes (C. 105) Haavelmo-Verzerrungen resultieren, die ohne nähere Spezifikation der Lohnsatz- und Kapitalkostensatzfunktion nicht ausgeschaltet werden können. Aus diesem Grunde wird hier und im folgenden die Annahme vollkommener Konkurrenz auf den Faktormärkten getroffen.

Da sich eine Unkorreliertheit zwischen u^*_t und $\varkappa_t$ kaum begründen läßt, ergibt sich eine derartige Schätzproblematik auch bei der Verwendung des Ansatzes (*) und bei dem von ACMS abgewandelten Ausdruck

$$(**) \quad \frac{l_t L_t}{i_t K_t} = \frac{1-\delta}{\delta} \, \varkappa_t^{\rho} \, e^{u^*_t} \, ,$$

der auch von Frohn et al. (vgl. *Frohn, J., R. Krengel* et al., a. a. O., S. 64 f.) zur Schätzung herangezogen wird und mit dem man hier die Schwierigkeit bei der Ermittlung einer geeigneten Reihe für den Kapitalkostensatz zu vermeiden sucht. Beide Ansätze beinhalten noch eine weitere Problematik, da sie das Verhältnis von Lohn- und Kapitalkostensatz als zu erklärende Größe verwenden, obwohl beide Variablen im Fall vollkommener Konkurrenz auf den Faktormärkten von diesen vorgegeben werden und damit exogen sind. Im Fall unvollkommener Konkurrenz und gleicher Monopolgrade auf den Faktormärkten werden beide Größen durch andere Funktionen erklärt, so daß die Ansätze (*) und (**) Modellinkonsistenzen implizieren. Darüber hinaus wird der Ansatz (**) durch Multiplikation der Gleichung (*) mit dem Verhältnis L_t/K_t gewonnen, so daß in (**) die abhängige Größe gleichsam durch sich selbst erklärt wird.

[26]) Vgl. hierzu und zu weiteren, hier nicht behandelten Schätzproblemen, die bei diesem Verfahren auftreten können, *Nerlove, M.*, Recent Empirical Studies of the CES and Related Production Functions, Studies in Income and Wealth, Vol. 31, 1967, S. 104 ff.

[27]) Da im Modell ausschließlicher Kostenminimierung die Produktion Y_t eine exogene Größe darstellt, ist es diesem Modell nur sinnentsprechend, in (C. 106) $\ln Y_t$ als unabhängige Größe zu verwenden und den Ansatz in der Form

$$\ln X^*_t = -\frac{1}{r} \ln \gamma - \frac{\alpha}{r} t + \frac{1}{r} \ln Y_t + u^*_{2t}$$

für die Schätzung zu benutzen. Dies ist auch schätztheoretisch richtig, da asymptotisch u^*_{2t} als nichtkorreliert mit Y_t unterstellt werden kann, während die Annahme einer Nichtkorreliertheit zwischen X^*_t und u_{2t} weder bei endlichen Stichproben noch asymptotisch zu vertreten ist.

($m_{L,t} = m_{K,t} = 1$), d.h. daß der Lohnsatz l_t und der Kapitalkostensatz i_t vom Markt her gegeben sind[28]). Unter dieser Voraussetzung und unter Zugrundelegung der CES-Produktionsfunktion (C. 69) ergeben sich für eine Produktion Y_t die kostenminimierenden Faktoreinsatzmengen dadurch, daß man die Lagrange-Funktion

$$\text{(C. 107)} \quad C^*_t = l_t L_t + i_t K_t - \lambda[Y_t - f(\ldots)]$$

$$(f(\ldots) = \text{rechte Seite von (C. 69)})$$

nach λ, L_t und K_t differenziert und die gefundenen Ableitungen gleich 0 setzt. Aus diesen Ableitungen können im Wege der Substitution die Arbeitsnachfragefunktion

$$\text{(C. 108)} \quad L_t = \gamma^{-\frac{1}{r}} e^{-\frac{\alpha}{r}t} Y_t^{\frac{1}{r}} \left\{(1-\delta) + \delta\left[\left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)\left(\frac{i_t}{l_t}\right)\right]^{\frac{\rho}{1+\rho}}\right\}^{\frac{1}{\rho}} e^{u_{3t}}$$

und die Kapitalnachfragefunktion

$$\text{(C. 109)} \quad K_t = \gamma^{-\frac{1}{r}} e^{-\frac{\alpha}{r}t} Y_t^{\frac{1}{r}} \left\{\delta + (1-\delta)\left[\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)\left(\frac{l_t}{i_t}\right)\right]^{\frac{\rho}{1+\rho}}\right\}^{\frac{1}{\rho}} e^{u_{4t}}$$

hergeleitet werden. Aus (C. 108) ergibt sich unmittelbar für die Arbeitsproduktivität der Ausdruck

$$\text{(C. 110)} \quad \pi_t = \gamma^{\frac{1}{r}} e^{\frac{\alpha}{r}t} Y_t^{1-\frac{1}{r}} \left\{(1-\delta) + \delta\left[\left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)\left(\frac{i_t}{l_t}\right)\right]^{\frac{\rho}{1+\rho}}\right\}^{-\frac{1}{\rho}} e^{u_{5t}}.$$

Wie uns dieser Ansatz zeigt, steigt die Produktivität, wenn sich bei Konstanz der übrigen Größen der Lohnsatz erhöht et vice versa. Steigender Lohnsatz führt zu einer geringeren Arbeitsnachfrage (vgl. (C. 108)) und zu einer höheren Kapitalnachfrage (vgl. (C. 109)), also zu einer Substitution von Arbeit durch Kapital.

Dadurch wird der Nenner in $\pi_t = Y_t/L_t$ kleiner, wodurch sich bei konstantem Y_t ein Ansteigen der Arbeitsproduktivität ergibt. Die Produktivität fällt dagegen, wenn bei Konstanz der übrigen Größen in (C. 110) der Kapitalkostensatz steigt und umgekehrt. Erhöht sich der Kapitalkostensatz, so verringert sich die Kapitalnachfrage (vgl. (C. 109)) und es steigt der Arbeitseinsatz (vgl. (C. 108)), d.h. es findet eine Substitution von Kapital durch Arbeit statt. Dies hat zur Folge, daß der Nenner in $\pi_t = Y_t/L_t$ steigt, wodurch bei konstantem Y_t die Arbeitsproduktivität fällt.

Der entscheidende Unterschied der vorliegenden Produktivitätsfunktion zum entsprechenden Ansatz (C. 74) im Gewinnmaximierungsmodell besteht darin, daß dort der Produktpreis einen Einfluß auf die Produktivitätsentwicklung ausübt, während dieser hier nicht in Erscheinung tritt. Ein weiterer Unterschied liegt im schätztheoretischen Bereich. Im Gewinnmaximierungsmodell führt die Produktionsgröße Y in der Produktivitätsfunktion zu einem Haavelmo-Bias, wenn die Methode der kleinsten Quadrate auf den zugehörigen logarithmischen Schätzansatz (C. 75) angewendet wird.

Diese Schätzproblematik tritt bei der vorliegenden Produktivitätsfunktion (C. 110) insofern nicht auf, als hier Y eine von außen vorgegebene Größe darstellt, die nicht wie im Gewinnmaximierungsmodell zusammen mit der Kapital- und Arbeitsnachfrage simultan erklärt wird, so daß vom logischen Ansatz des Modells her keine Korrelation zwischen Y_t und der Störgröße u_{5t} in (C. 110) gegeben ist. Unterstellt man auch hier die Störgröße unabhängig von den exogenen Größen l und i, so ist die direkte Anwendung des Prinzips der Methode der kleinsten Quadrate auf den Produktivitätsansatz (C. 110) schätztheoretisch zulässig. Allerdings läßt sich dieser Ansatz nicht in einer logarithmisch linearen Form der Gewöhnlichen Methode der kleinsten Quadrate zugänglich machen, sondern muß mit der Iterativen Methode der kleinsten Quadrate geschätzt werden[29]). Das Kmenta-Verfahren führt hier nicht zu einer Schätzerleichterung.

Für die aufgrund der im Kostenminimierungsmodell ermittelten Parameterschätzungen $\hat{\alpha}$, $\hat{\delta}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{r}$ und $\hat{\rho}$ durchzuführende Erklärung und Prognose der potentiellen Arbeitsproduktivität und des potentiellen Arbeitseinsatzes lassen sich wiederum die Formeln in Abschnitt C. I. c) 3. heranziehen.

---

[28]) Vgl. auch Fußnote [25]) auf S. 333.

[29]) In Verbindung mit der Iterativen Methode der kleinsten Quadrate stellt sich wiederum die Frage nach einem geeigneten Anfangswertesatz für die einzelnen zu schätzenden Parameter. Zur Ermittlung eines solchen Wertesatzes wird das auf Seite 326 beschriebene Verfahren hier entsprechend angewandt. Für jede der dort vorgeschlagenen Wertekombinationen δ^* und ρ^* für δ und ρ läßt sich jeweils eine Zeitreihe für den Ausdruck

$$\text{(C. 111)} \quad \left\{(1-\delta^*) + \delta^*\left[\left(\frac{1-\delta^*}{\delta^*}\right)\left(\frac{i_t}{l_t}\right)\right]^{\frac{\rho^*}{1+\rho^*}}\right\}^{-1/\rho^*} = X_t$$

berechnen. Die zu einem Wertesatz δ^* und ρ^* gehörenden Werte für die übrigen Parameter α, γ und r in (C. 110) kann man nun durch Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Gleichung

$$\text{(C. 112)} \quad \ln \pi^*_t = \ln (\gamma^{\frac{1}{r}}) + \frac{\alpha}{r}t + (1 - \frac{1}{r}) \ln Y_t + u_{6t},$$

mit

$$\pi^*_t = \pi_t/X_t$$

ermitteln, die sich aus (C. 110) nach Einsetzen von X_t und anschließender Logarithmierung ergibt. Aufgrund der vorgeschlagenen Wertesätze δ^* und ρ^* läßt sich somit eine bestimmte Anzahl verschiedener Wertekombinationen für die Parameter α, δ, γ, r und ρ erstellen. Aus diesen Wertekombinationen wählt man schließlich diejenige als Anfangswertesatz aus, bei der die Kleinst-Quadrate-Reststreuung

$$\text{(C. 113)} \quad s^2_{\hat{u}_6} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \hat{u}^2_{6t} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} [\ln \pi^*_t - \ln (\hat{\gamma}^{\frac{1}{\hat{r}}}) - \frac{\hat{\alpha}}{\hat{r}}t - (1 - \frac{1}{\hat{r}}) \ln Y_t]^2$$

des Schätzansatzes (C. 112) am kleinsten ist.

e) Schätzung auf der Grundlage einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion bei ausschließlicher Kostenminimierung

Zur Vervollständigung der Analyse soll auch hier wie im Gewinnmaximierungsmodell noch der Fall der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion betrachtet werden. Führt man die in Abschnitt C. II. d) 2. beschriebene Kostenminimierung unter Verwendung einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion durch und unterstellt man weiter vollkommene Konkurrenz auf den Faktormärkten, so ergibt sich für die Arbeitsnachfrage der Ausdruck

$$\text{(C. 114)}\quad L_t = \gamma^{-\frac{1}{r}} e^{-\frac{\alpha}{r}t} \left(\frac{\beta}{1-\beta}\right)^{1-\beta} \left(\frac{i_t}{l_t}\right)^{1-\beta} Y_t^{\frac{1}{r}} e^{u_{1t}},$$

woraus unmittelbar der Produktivitätsansatz

$$\text{(C. 115)}\quad \pi_t = \gamma^{\frac{1}{r}} e^{\frac{\alpha}{r}t} \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^{1-\beta} \left(\frac{l_t}{i_t}\right)^{1-\beta} Y_t^{1-\frac{1}{r}} e^{u_{2t}}$$

folgt.

Dieser Ansatz läßt sich durch Logarithmierung in die lineare Form

$$\text{(C. 116)}\quad \ln \pi_t = \ln\left[\gamma^{\frac{1}{r}} \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^{1-\beta}\right] + \frac{\alpha}{r}t + (1-\beta)\ln\left(\frac{l_t}{i_t}\right) + \left(1-\frac{1}{r}\right)\ln Y_t + u_{2t}$$

überführen, auf die die Gewöhnliche Methode der kleinsten Quadrate angewendet werden kann, aus deren Parameterschätzungen sich Schätzwerte für die Parameter γ, α, β und r berechnen lassen.

Die Erklärung der potentiellen Arbeitsproduktivität und des potentiellen Arbeitseinsatzes im Schätzzeitraum sowie die Prognose beider Größen aufgrund dieser Parameterschätzungen erfolgt schließlich mit Hilfe der Cobb-Douglas-Erklärungs- und Prognoseansätze in Abschnitt C. I. b) 3.

D. Schlußbemerkungen und Ausblick

Im vorliegenden Aufsatz wurde auf produktionstheoretischer Basis eine Reihe von Verfahren zur Erklärung und Prognose der potentiellen Arbeitsproduktivität und des potentiellen Arbeitseinsatzes entwickelt. Als Grundlage dieser Verfahren dienen verschiedene Schätzansätze für die tatsächliche Arbeitsproduktivität, die auf zwei Wegen hergeleitet wurden: einmal, ohne bestimmte Annahmen über das ökonomische Unternehmerverhalten vorauszusetzen, zum anderen unter der Annahme der Gewinnmaximierung bzw. Kostenminimierung. Als Produktionsfunktionen wurden die CES-Funktion und die Cobb-Douglas-Funktion verwendet. Bei der Herleitung der Ansätze für die potentielle Produktivität wurden die Parameterschätzungen der Funktionen für die tatsächliche Produktivität herangezogen.

Eine wichtige Modifizierung und Verbesserung der bisherigen Ansätze beträfe die Konstanz ihrer Strukturparameter. Bislang wurde davon ausgegangen, daß die Parameter dieser Ansätze im Zeitverlauf unverändert bleiben, eine Annahme, die insbesondere bei langfristigen Untersuchungen — wie im vorliegenden Fall — zumindest für einige Wirtschaftszweige bzw. Industriezweige der Korrektur bedarf. Hier könnte man durch den Einbau zeitabhängiger Parameter-Funktionen anstelle der konstant angenommenen Parameter u. U. eine Verbesserung erzielen. In der weiteren Arbeit soll daher versucht werden, neben der bisher berücksichtigten relativ einfachen Form des autonomen, ungebundenen, neutralen technischen Fortschritts andere Arten des technologischen Wandels (wie induzierter oder arbeitssparender, kapitalsparender bzw. kapital-und arbeitsvervielfachender oder nicht-neutraler technischer Fortschritt) in die Analyse einzubeziehen, die die Untersuchung der Wirkung des technischen Fortschritts auf die Entwicklung der potentiellen Arbeitsproduktivität und den möglichen Arbeitseinsatz sicherlich bereichern würden.

Ein anderer Problemkreis bezieht sich auf die Homogenität der Produktionsfaktoren. In sämtlichen der in der vorliegenden Studie behandelten Ansätzen wird vorerst der Faktor Arbeit sowohl über die Industriezweige als auch über die Zeit hinweg als qualitativ gleichwertig und gleichbleibend betrachtet. Anders ausgedrückt, es wird nicht berücksichtigt, daß das Ausbildungsniveau in den Industriezweigen unterschiedlich ist und die Qualifikation des Faktors *Arbeit* durch ständig verbesserte Ausbildung im Zeitablauf wächst. Hier müßte nach geeigneten numerifizierbaren Repräsentativgrößen gesucht werden, mit denen man diese sehr wichtigen qualitativen Bestimmungsgründe in die Erklärung einbeziehen kann. Analog soll auch bei der Berücksichtigung des Faktors Kapital als Bestimmungsgröße in Arbeitsproduktivitätsmodellen die Möglichkeit einer Verbesserung untersucht werden. Hier könnte der Vintage-Ansatz, bei dem die Homogenitätsannahme aufgegeben wird, eine brauchbare Ausgangshypothese darstellen.

In diesem Zusammenhang sei noch auf einen anderen Aspekt verwiesen. In den bisher entwickelten Ansätzen für die potentielle Arbeitsproduktivität wird der verfügbare Kapitalbestand vorerst als extern vorgegeben betrachtet und somit nicht erklärt. Die Entwicklung des Kapitals und damit verbunden die Entwicklung des Produktionspotentials wird aber auch in sehr starkem Maße durch den Konjunkturverlauf geprägt. Bei einer Weiterentwicklung der vorliegenden Ansätze soll somit auch die konjunkturelle Entwicklung in die Analyse mit einbezogen werden.

Mit der Erklärung der Kapitalbildung aus den Nachfrageverhältnissen wäre der erste Schritt zu einem auch nachfrageorientierten längerfristigen Modell getan, mit dem letztlich alle arbeitsmarktrelevanten längerfristigen Größen wie potentielle Arbeitsproduktivität, potentieller Arbeitseinsatz, Produktionspotential in Form eines geschlossenen Systems erklärt werden und prognostizierbar sind.

Anhang

Darstellung der Iterativen Methode der kleinsten Quadrate 1*)

Gegeben sei die nichtlineare Funktion

$$(*)\qquad Y_t = f(X_t,\theta) + u_t, \quad t = 1,2,\ldots,T,$$

mit

Y_t = die zu erklärende Variable,

X_t = Spaltenvektor von k erklärenden Größen, also

$$X_t = \begin{pmatrix} x_{t1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{tk} \end{pmatrix}$$

θ = Spaltenvektor von l Parametern, also

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_l \end{pmatrix}$$

u_t = Störkomponente.

Die Iterative Methode der kleinsten Quadrate beruht auf einer Taylor-Entwicklung der Funktion (*) um einen Parameterpunkt $\theta^{(0)}$, wobei nach den ersten Ableitungen abgebrochen wird. Führen wir diese Operation durch, so ergibt sich als Näherung für die Funktion (*) der Ausdruck

$$Y_t \approx f(X_t,\theta^{(0)}) + \sum_{j=1}^{l} \left(\frac{\partial f(X_t,\theta)}{\partial \theta_j}\right)_{\theta=\theta^{(0)}} \cdot$$
$$\cdot\ (\theta_j - \theta_j^{(0)}) + u_t\,.$$

Durch diese Approximation ergibt sich ein Fehler in bezug auf die Erklärung von y_t, der von der Größe $\varepsilon_t^{(0)}$ sei. Unter Benutzung von $\varepsilon_t^{(0)}$ läßt sich schreiben

$$y_t = f(X_t,\theta^{(0)}) + \sum_{j=1}^{l} \left(\frac{\partial f(X_t,\theta)}{\partial \theta_j}\right)_{\theta=\theta^{(0)}} \cdot$$
$$\cdot\ (\theta_j - \theta_j^{(0)}) + v_t^{(0)}$$

mit $\quad v_t^{(0)} = u_t + \varepsilon_t^{(0)}$.

Wir setzen

$$f_t^{(0)} = f(X_t,\theta^{(0)}),\ Z_{tj}^{(0)} = \left(\frac{\partial f(X_t,\theta)}{\partial \theta_j}\right)_{\theta=\theta^{(0)}}$$

$$\beta_j^{(0)} = \theta_j - \theta_j^{(0)},\ y_t^{(0)} = y_t - f_t^{(0)}$$

und betrachten die Gleichung

$$y_t^{(0)} = \sum_{j=1}^{l} \beta_j^{(0)} Z_{tj}^{(0)} + v_t^{(0)}.$$

1*) Vgl. hierzu *Draper, N. R.* und *H. Smith*, Applied Regression Analysis, New York 1966, S. 264 ff. und *J. Frohn*, Untersuchungen zur CES-Produktionsfunktion, a. a. O., S. 81 ff.

Durch die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate erhält man für $\beta_j^{(0)}$ die Schätzung $\hat{\beta}_j^{(0)}$. Diese ist eine Schätzung für die Abweichung des Ausgangswertes $\theta_j^{(0)}$ von dem unbekannten Parameterwert θ_j. Die Abweichungsschätzung kann nun zur Berechnung einer verbesserten Schätzung für θ_j benutzt werden. Diese ergibt sich durch

$$\theta_j^{(1)} = \theta_j^{(0)} + \hat{\beta}_j^{(0)}, \quad j = 1,\ldots,l.$$

Die $\theta_j^{(1)}$ ($j = 1,\ldots,l$) werden nun als neue Ausgangswerte verwendet und das dargestellte Verfahren wird mit diesen Ausgangswerten erneut durchlaufen. Es ergibt sich dadurch eine weitere verbesserte Schätzung

$$\theta_j^{(2)} = \theta_j^{(1)} + \hat{\beta}_j^{(1)}, \quad j = 1,\ldots,l.$$

Das Verfahren wird so oft wiederholt, bis sich die Parameterschätzungen zweier aufeinanderfolgender Schritte um weniger als vorgegebene kleine Abweichungsbeträge unterscheiden. Der im letzten Schritt ermittelte Parametervektor $\theta^{(S)}$ wird schließlich als Näherung für die eigentliche Kleinst-Quadrate-Schätzung $\hat{\theta}$ benutzt.

Eine Schätzung für die Streuungs-Kovarianz-Matrix von $\theta^{(S)}$ läßt sich durch den Ausdruck

$$\hat{\Sigma}_{\theta^{(S)}} = \frac{y^{(S)\prime}\, y^{(S)}}{T-l}\ (Z^{(S)\prime} Z^{(S)})^{-1}$$

ermitteln, wobei $y^{(S)}$ durch den Spaltenvektor

$$y^{(S)} = \begin{pmatrix} y_1^{(S)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_T^{(S)} \end{pmatrix} \text{ mit}$$

$$y_t^{(S)} = y_t - f(X_t,\theta^{(S)}), \quad t = 1,2,\ldots,T$$

und $Z^{(S)}$ durch die Matrix

$$Z^{(S)} = (Z_{tj}^{(S)}), \quad \begin{matrix} t = 1,2,\ldots T, \\ j = 1,2,\ldots l, \end{matrix}$$

definiert ist.

Literatur

Arrow, K. J., H. B. Chenery, B. S. Minhas, R. M. Solow:
Capital-Labour Substitution and Economic Efficiency, Review of Economics and Statistics, Vol. 43, 1961.

Brödner, P., F. Hamke:
Automatisierung und Arbeitsplatzstrukturen. Bericht über Methoden und Ergebnisse von Untersuchungen in der Einzel- und Kleinserienfertigung, in: Mitt(IAB), H. 8 (1969).

Brödner, P., F. Hamke:
Automatisierung und Arbeitsplatzstrukturen. Bericht über eine Prognose der mutmaßlichen Entwicklung in der Einzel- und Kleinserienfertigung, in: MittAB 2/1970.

Diwan, R. K.:
An Empirical Estimate of the Elasticity of Substitution Production Function, Indian Economic Journal, 1964/65, Vol. 12.

Draper, N. R. and H. Smith:
Applied Regression Analysis, New York 1966.

Egle, F., W. Klauder, M. Thon:
Zur Produktivitätsprognose mit Hilfe von intrasektoralen Analogieschlüssen, in: MittAB 4/1972, S. 285 ff.

Frisch, R., F. V. Waugh:
Partial Time Regressions as compared with Individual Trends, Econometrica, Vol. l, 1933.

Frohn, J.:
Produktivität und Produktionsmodell, in: Neuere Methoden der Produktivitätsmessung, Sonderhefte zum Allgemeinen Statistischen Archiv, Organ der Statistischen Gesellschaft, Heft 4.

Frohn, J. :
Untersuchungen zur CES-Produktionsfunktion, Würzburg 1970.

Frohn, J., R. Krengel, P. Kubbier, K. Oppenländer, L. Uhlmann:
Der technische Fortschritt in der Industrie, Berlin 1973.

Klauder, W., D. Mertens, E. Ulrich:
Ansätze zur Prognose des spezifischen Arbeitskräftebedarfs, in: Mitt(IAB), H. 8 (1969), S. 599 ff.

Kmenta, J.:
On Estimation of the CES Production Function, International Economic Review, Vol. 8, 1967.

Nerlove, M.:
Recent Empirical Studies of the CES and Related Production Functions, Studies in Income and Wealth, Vol. 31, 1967.

Pusse, L.:
Zur Analyse und Prognose der Arbeitsproduktivität auf produktionstheoretischer Basis, in: MittAB 3/75.

Wagner, A.:
Die Wachstumszyklen in der Bundesrepublik Deutschland, Tübingen 1972.

16. Arbeitsbericht des IAB, Stand Juli 1976, S. 14; Projekt 1-185 D: Bestimmungsfaktoren der Produktivitätsentwicklung. Volkswirtschaftliche Analyse und Prognose, in: Materialien aus der Arbeitsmarkt- und Berufsforschung.